Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Порывай, Принцип инвариантности для условных эмпирических процессов, образованных зависимыми случайными величинами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 4, 129–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/im650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:42:12

УДК 519.214.5 + 519.234.22

Д. В. Порывай

Принцип инвариантности для условных эмпирических процессов, образованных зависимыми случайными величинами

Для условных эмпирических процессов Надарая–Ватсона доказана сходимость конечномерных распределений и установлена плотность. Предполагается, что наблюдения могут быть описаны строго стационарной последовательностью случайных величин, коэффициенты перемешивания которой убывают со скоростью. При установлении плотности условных эмпирических процессов в пространстве непрерывных функционалов возникают также энтропийные условия на класс индексующих функций.

Библиография: 14 наименований.

§ 1. Введение

Целью настоящей статьи является установление принципа инвариантности для условного эмпирического процесса, образованного зависимыми случайными величинами (с. в.).

Пусть $(X, Y) = \{(X_i, Y_i), i \in \mathbb{Z}\}$ – строго стационарная последовательность случайных элементов, где X_i – векторы в $\mathbb{R}^d$, а Y_i принимают значения в польском пространстве $\mathcal{X}$. Зависимость Y от значения x с. в. X описывается регрессионной функцией $F(f | x) = E(f(Y) | X = x)$; здесь f входит в некоторый класс $\mathcal{F}$ измеримых функций, отображающих $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}$. Для статистической оценки величины $F(f | x)$ используют (см., например, [10]) эмпирическое распределение в форме Надарая–Ватсона

$$F_n(f | x) = \sum_{i=1}^n f(Y_i) K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) / \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right),$$

где ядро $K(\cdot) \geq 0$ задано на $\mathbb{R}^d$, $h > 0$ – параметр сглаживания, $f \in \mathcal{F}$ и $x \in \mathbb{R}^d$. Асимптотическое поведение процесса $\nu_n(f) = \sqrt{nh^d} (F_n(f | x) - F(f | x))$ исследуется в пространстве $\ell^\infty(\mathcal{F})$, состоящем из функционалов ν , заданных на $\mathcal{F}$ и таких, что

$$\|\nu\|_{\mathcal{F}} = \sup_{f \in \mathcal{F}} |\nu(f)| < \infty.$$

Далее для упрощения записи рассматривается случай действительных X_i .

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 03-01-00724).

Эмпирический процесс Надарая–Ватсона является объектом изучения многих работ (см., например, [2], [10], [14]). Одна из причин этого состоит в том, что многие методы финансовой математики, такие как оценивание опционов или управление портфелем, построены на дискретных непараметрических моделях со стохастической волатильностью. Пусть S_t обозначает цену акции в момент времени t , $t = 1, \dots, n$. Подход Блэка–Шоулса к оценке опционов с дискретным временем основан (см. [8]) на моделировании величины $\log S_t$ винеровским процессом со сносом μ и волатильностью σ_t :

$$R_t = \mu + \sigma_t W_t, \quad \log(\sigma_t) = m(\log(\sigma_{t-1})) + \eta_t, \quad (1.1)$$

где $R_t = \log(S_t/S_{t-1})$ – функция возвратов, $\{W_t, t \in \mathbb{N}\}$ – стационарная последовательность независимых с.в., имеющих стандартное нормальное распределение, m – произвольная функция, для которой требуется только определенная гладкость, и η_t – независимые одинаково распределенные (н.о.р.) центрированные с.в.

Заметим, что модель (1.1) является непараметрическим обобщением CARV-модели, введенной в [12]. Для предсказания развития функции возвратов R_t необходимо построить оценку функции m на основе наблюдаемых прошлых данных – цен актива S_t или возвратов R_t , которые связаны с σ_t соотношением (1.1). Использование непараметрических оценок функции m обсуждается в [7]. Следуя работе [11], введем обозначения

$$\xi_t = \frac{1}{2} \log(R_t - \mu)^2 - \mathbb{E}(\log |W_t|), \quad \varepsilon_t = \log |W_t| - \mathbb{E}(\log |W_t|).$$

Тогда получим

$$\xi_t = m(\xi_{t-1} - \varepsilon_{t-1}) + \eta_t + \varepsilon_t. \quad (1.2)$$

Взяв условное математическое ожидание в равенстве (1.2) относительно события $\{\log(\sigma_{t-2}) = x\}$, $x \in \mathbb{R}$, получаем $m(x) = \mathbb{E}(\xi_t | \xi_{t-1} - \varepsilon_{t-1} = x)$. Положим $(X_i, Y_i) = (\xi_i - \varepsilon_i, \xi_{i+1})$. Для того чтобы процесс (X, Y) имел хорошие вероятностные свойства, такие как β -перемешивание (абсолютная регулярность) или α -перемешивание (сильное перемешивание) с экспоненциальной скоростью убывания коэффициентов перемешивания, достаточно (в силу нормальной распределенности η_t) выполнения неравенства

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \left| \frac{m(x)}{x} \right| < 1$$

(см. [5, предложение 6]).

Кроме оценки функции m , с практической точки зрения представляют интерес оценки величин

$$\sup_{C \in \mathcal{C}} \mathbb{E}(Y \mathbb{I}_{Y \in C} | X = x), \quad \sup_{C \in \mathcal{C}} \mathbb{E}(Y^2 \mathbb{I}_{Y \in C} - \mathbb{E}^2(Y \mathbb{I}_{Y \in C}) | X = x),$$

где $\mathbb{I}_A$ – индикатор множества A . Эти величины описывают соответственно среднее значение и среднеквадратичное отклонение с.в. Y при попадании в наиболее вероятное множество из класса измеримых множеств $\mathcal{C}$ при условии $X = x$.

§ 2. Определения и вспомогательные результаты

Мы будем использовать классические коэффициенты α -, β -, ϕ - и ψ -перемешивания для измерения меры зависимости двух σ -алгебр $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ (см., например, [5, гл. 1.3]). Пусть $Z = \{Z_i, i \in \mathbb{Z}\}$ – строго стационарная последовательность с.в. Для оценки зависимости между любым k -набором $\{Z_{i_1}, \dots, Z_{i_k}\}$ и σ -алгеброй $M_0 = \sigma\{Z_i, i \leq 0\}$ введем коэффициенты

$$\phi_{k,\infty}^Z(n) = \sup \{ \phi(\sigma\{Z_{i_1}, \dots, Z_{i_k}\}, M_0), 0 < n \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \}. \quad (2.1)$$

Подобным образом вводится коэффициент $\psi_{1,\infty}^Z(n)$. Коэффициенты $\alpha^Z(n)$ и $\beta^Z(n)$ определяются аналогично (2.1) с тем отличием, что вместо ϕ используются α и, соответственно, β и полагается $k = \infty$. Также нам потребуются $\psi_{1,1}^Z(n)$ и $\phi_{1,1}^Z(n)$, которые определяются как коэффициенты ψ - и ϕ -зависимости между двумя σ -алгебрами $\sigma\{Z_1\}$ и $\sigma\{Z_n\}$ соответственно. В дальнейшем верхний индекс $Z = (X, Y)$, фигурирующий в формуле (2.1), записываться не будет.

Следуя [13], назовем ℓ' -перемешивающейся схему серий $\{V_{ni}, 1 \leq i \leq k_n\}$, если для всех действительных t выполнено

$$\ell'_n(c, t) = \sup_{a, b: a+b+c \leq k_n} \left| \text{cov} \left\{ \exp \left(it \sum_{j=1}^a V_{nj} \right), \exp \left(-it \sum_{j=a+c}^{a+c+b} V_{nj} \right) \right\} \right| \rightarrow 0$$

при $c \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ таких, что $c < k_n$. Очевидно, $\ell'_n(c, t) \leq 16\alpha(c)$ для любых $c, n \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}$.

Для схемы серий $\{V_{ni}, 1 \leq i \leq k_n\}$ введем

$$C_n(m) = \sum_{a=m}^{k_n-1} \sup_{\substack{|i-j|=a \\ 1 \leq i, j \leq k_n}} |\text{cov}(V_{ni}, V_{nj})|. \quad (2.2)$$

Положим $\bar{X} = X/\|X\|_2$ для центрированной с.в. X , если $0 < EX^2 < \infty$, и $\bar{X} = 0$, если $EX^2 = 0$. Обозначим

$$S_{n,a,b} = \sum_{i=a+1}^b (V_{ni} - EV_{ni}), \quad S_n = S_{n,0,k_n}.$$

Для установления сходимости конечномерных распределений (к-м.р.) процесса $\nu_n(f)$ необходима, в частности, следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1 [13]. Пусть для ℓ' -перемешивающейся схемы серий $\{V_{ni}, 1 \leq i \leq k_n\}$ выполнено

$$ES_n^2 \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

$$k_n C_n(0) < \infty \quad \text{для любых } n, \quad (2.4)$$

$$k_n C_n(m) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

$$\limsup_{n,a,b: a < b \leq k_n} E\bar{S}_{n,a,b}^2 \mathbb{I}(|\bar{S}_{n,a,b}| > x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Тогда $S_n \xrightarrow{\text{law}} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty$.

Доказательство плотности семейства $\{\nu_n(f), f \in F\}$ в пространстве $\ell^\infty(\mathcal{F})$ так называемым методом цепной реконструкции (см. [6]) основывается на использовании моментного неравенства, приведенного в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.2 [3]. Пусть $X = (X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ — строго стационарная последовательность центрированных и ограниченных с. в. Обозначим $S_n(X) = \sum_{i=1}^n X_i$. Пусть $m \geq \|X_0\|_\infty$ и $v \geq \|X_0\|_2^2$. Если $\sum_{k>0} k \phi_{2,\infty}^X(k) < \infty$ или $\phi_{2,\infty}^X(k) = O(k^{-b})$ для некоторого $1 < b < 2$, то для любого $p \geq 3$ имеет место следующее неравенство:

$$\|S_n(X)\|_p \leq C(\phi^X) ((pnv)^{\frac{1}{2}} + p(m^3 v^{-1} \vee m^{\frac{b+1}{b-1}} v^{\frac{1}{1-b}})), \quad (2.7)$$

где $b = 2$, если $\sum_{k>0} k \phi_{2,\infty}^X(k) < \infty$, и $C(\phi^X)$ — некоторый множитель, зависящий только от $\phi_{2,\infty}^X = (\phi_{2,\infty}^X(k))_{k=1}^\infty$.

Пусть существует ρ — плотность по мере Лебега распределения с. в. X_1 . Далее предполагается, что $x \in \mathbb{R}$ фиксировано и $\rho(x) > 0$. Положим

$$V_{ni} = \sqrt{\frac{h}{n}} \tilde{f}(Y_i) K_h(X_i - x), \quad \tilde{f} = f - F(f|x),$$

$$K_h(z) = \frac{1}{h} K\left(\frac{z}{h}\right), \quad i = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

§3. Сходимость конечномерных распределений

Рассмотрим следующие условия.

A1. Функции $\rho(z)$ и $F(f|z)$ для всех $f \in \mathcal{F}$ дважды непрерывно дифференцируемы по z в некоторой окрестности точки x .

A2. Пусть функция ядра K удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\int_{\mathbb{R}} K(z) dz = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} K^2(z) dz < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} z^2 K(z) dz < \infty,$$

$$K(-z) = K(z) \quad \text{для } z \in \mathbb{R}, \quad z^3 K(z) \searrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

A3. Пусть $h = h(n)$ таковы, что $\sqrt{nh^5} \searrow c_0 < \infty$ и $nh \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

A4. Схема $\{V_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ образована ℓ' -перемешивающимися с. в. Кроме того, последовательность Z удовлетворяет требованию $h \sum_{k=1}^n \psi_{1,\infty}(k) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Совместное распределение $(X_1, X_k), k > 1$, имеет плотность $\rho_k(z_1, z_k)$ по мере Лебега такую, что для всех $(z_1, z_k) \in \mathbb{R}^2$ справедливо

$$|\rho_k(z_1, z_k) - \rho(z_1)\rho(z_k)| \leq \theta(k)\rho(z_1)\rho(z_k), \quad \theta(k) < 1,$$

$$h \sum_{k=2}^n \theta(k) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

A5. Функция $F(f_1 f_2 | z)$ непрерывна по z в точке x и

$$\sup_{k>1} \sup_{(z_1, z_k) \in \mathbb{R}^2} |E(\tilde{f}_1(Y_1) \tilde{f}_2(Y_k) | X_1 = z_1, X_k = z_k)| < \infty, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{F}.$$

А5'. Функция $g_k(z_1, z_k) = \mathbf{E}(|\tilde{f}_1(Y_1)\tilde{f}_2(Y_k)| \mid X_1 = z_1, X_k = z_k)$ для любого $k > 1$ дважды непрерывно дифференцируема по паре (z_1, z_k) ,

$$\sup_{k>1} \frac{\partial^j g_k(z_1, z_k)}{\partial^l z_1 \partial^m z_k} < \infty, \quad l, m \geq 0, \quad l + m = j, \quad j = 2, 3,$$

в некоторой окрестности точки (x, x) для всех $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Кроме того, $F(f_1 f_2 \mid z)$ для всех $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ непрерывна по z в точке x и $z^4 K(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathcal{F}$ – класс функций f таких, что $\mathbf{E}f^2(Y_1) < \infty$, и справедливы условия А1–А4, А5 (или А5'). Тогда для всех $m \geq 1$ и любых $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}$ имеет место

$$(\nu_n(f_1), \dots, \nu_n(f_m)) \xrightarrow{\text{law}} \mathcal{N}(c_0 \mu(x), \Sigma^2), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\mathcal{N}$ – вектор, имеющий нормальное распределение с параметрами $c_0 \mu(x) = c_0(\mu(f_1 \mid x), \dots, \mu(f_m \mid x))$ и $\Sigma^2 = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$,

$$\begin{aligned} \mu(f \mid x) &= \frac{1}{2} \left(\rho(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(f \mid x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} F(f \mid x) \frac{\partial}{\partial x} \rho(x) \right) \int_{\mathbb{R}} z^2 K(z) \frac{dz}{\rho(x)}, \\ \sigma_{ij} &= (F(f_i f_j \mid x) - F(f_i \mid x) F(f_j \mid x)) \int_{\mathbb{R}} K^2(z) \frac{dz}{\rho(x)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя метод Крамера–Уолда, нетрудно проверить, что для процесса $\nu_n(f)$ сходимость к-м.р. может быть получена из сходимости одномерных распределений.

Обозначим $\rho_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(X_i - x)$. Имеет место следующее равенство:

$$\nu_n(f) = \frac{S_n}{\rho_n(x)} + \sqrt{nh^5} \mu_n,$$

где $S_n = \sum_{i=1}^n (V_{ni} - \mathbf{E}V_{ni})$ и $\sqrt{nh^5} \mu_n = \frac{1}{\rho_n(x)} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}V_{ni}$. По лемме Крамера–Слуцкого достаточно показать, что $S_n \xrightarrow{\text{law}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(f))$, где $\sigma^2(f) = (F(f^2 \mid x) - F^2(f \mid x)) \rho(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(z) dz$, $\rho_n(x) \xrightarrow{\text{P}} \rho(x)$ и $\sqrt{nh^5} \mu_n \rightarrow c_0 \mu(f \mid x)$.

Сходимость $\rho_n(x) \xrightarrow{\text{P}} \rho(x)$ следует из двух фактов: $\text{Var}(\rho_n(x)) \rightarrow 0$ и $\mathbf{E}\rho_n(x) \rightarrow \rho(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Последнее соотношение справедливо при сделанных предположениях, что нетрудно установить с помощью следствия 1А и теоремы 2А из [9].

Покажем, что $\sqrt{nh^5} \mu_n \rightarrow c_0 \mu(f \mid x)$, когда $n \rightarrow \infty$. Очевидно,

$$\frac{1}{\sqrt{nh^5}} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}V_{ni} = \frac{1}{h^2} \int_{\mathbb{R}} (F(f \mid z) - F(f \mid x)) \rho(z) K_h(x - z) dz.$$

Применим предложение 3.4 из [14], чтобы получить

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_{\mathbb{R}} (F(f \mid z) - F(f \mid x)) \rho(z) K_h(x - z) dz = \mu(f \mid x) \rho(x).$$

Отсюда $\mu_n(x) \rightarrow \mu(f | x)$ и, следовательно, $\sqrt{nh^5} \mu_n(x) \rightarrow c_0 \mu(f | x)$.

Теперь проверим условия теоремы 2.1. Заметим, что $\rho(z)$, $F(f | z)$ и $\mathbb{E}((f(Y_1) - F(f | x))^2 | X_1 = z) = \text{Var}(f | z) + (F(f | z) - F(f | x))^2$, где $\text{Var}(f | z) = F((f - F(f | z))^2 | z)$, непрерывны по z в точке x , ядро K^2 интегрируемо и $\lim_{z \rightarrow \infty} z K^2(z) = 0$. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} n \text{Var}(V_{n1}) &= \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \mathbb{E}(f(Y_1) - F(f | x))^2 K^2\left(\frac{X_1 - x}{h}\right) - \mathbb{E}^2(f(Y_1) - F(f | x)) K\left(\frac{X_1 - x}{h}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}((f(Y_1) - F(f | x))^2 | X = z) K^2\left(\frac{x - z}{h}\right) \rho(z) dz \\ &\quad - h \left\{ \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} (F(f | z) - F(f | x)) K\left(\frac{x - z}{h}\right) \rho(z) dz \right\}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Var}(f | x) \rho(x) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} K^2(z) dz, \end{aligned}$$

где при совершении предельного перехода используется теорема 1А из [9].

Обозначая $S_{n,l} = S_{n,0,l}$ и учитывая стационарность последовательности $\{V_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$, получаем

$$\mathbb{E} S_{n,l}^2 = l \text{Var} V_{n1} + 2 \sum_{j=2}^l (l - j + 1) \text{cov}(V_{n1}, V_{nj}), \quad 2 \leq l \leq n. \quad (3.2)$$

Для оценки последней суммы запишем

$$n \text{cov}(V_{n1}, V_{nj}) = h \int_{\mathbb{R}^2} m(z_1, z_j) K_h(z_1 - x) K_h(z_j - x) dz_1 dz_j, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} m(z_1, z_j) &= \mathbb{E}_{z_1, z_j}(\tilde{f}(Y_1) \tilde{f}(Y_j)) \rho_j(z_1, z_j) - F(\tilde{f} | z_1) F(\tilde{f} | z_j) \rho(z_1) \rho(z_j), \\ \mathbb{E}_{z_1, z_j}(\tilde{f}(Y_1) \tilde{f}(Y_j)) &= \mathbb{E}(\tilde{f}(Y_1) \tilde{f}(Y_j) | X_1 = z_1, X_j = z_j). \end{aligned}$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |m(z_1, z_j)| &\leq |\rho_j(z_1, z_j) - \rho(z_1) \rho(z_j)| |\mathbb{E}_{z_1, z_j}(\tilde{f}(Y_1) \tilde{f}(Y_j))| \\ &\quad + \rho(z_1) \rho(z_j) |\mathbb{E}_{z_1, z_j}(\tilde{f}(Y_1) \tilde{f}(Y_j)) - F(\tilde{f} | z_1) F(\tilde{f} | z_j)|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из определения условного математического ожидания получаем

$$\mathbb{E}(Y | X = x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}(Y \mathbb{I}_{X \in O^\varepsilon(x)})}{\mathbb{P}(X \in O^\varepsilon(x))},$$

где $O^\varepsilon(x)$ — ε -окрестность x . Тогда для почти всех $(z_1, z_j) \in \mathbb{R}^2$ можно записать

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{z_1, z_j}(\tilde{f}(Y_1)\tilde{f}(Y_j)) - F(\tilde{f} \mid z_1)F(\tilde{f} \mid z_j) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{cov} \left(\frac{\tilde{f}(Y_1)\mathbb{I}_{X_1 \in O^\varepsilon(z_1)}}{\mathbb{P}(X_1 \in O^\varepsilon(z_1))}, \frac{\tilde{f}(Y_j)\mathbb{I}_{X_j \in O^\varepsilon(z_j)}}{\mathbb{P}(X_j \in O^\varepsilon(z_j))} \right) \\ &+ \mathbb{E}_{z_1, z_j} \tilde{f}(Y_1)\tilde{f}(Y_j) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(1 - \frac{\mathbb{P}(X_1 \in O^\varepsilon(z_1), X_j \in O^\varepsilon(z_j))}{\mathbb{P}(X_1 \in O^\varepsilon(z_1))\mathbb{P}(X_j \in O^\varepsilon(z_j))} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку функции $\rho(\cdot)$ и $\rho_k(\cdot, \cdot)$ интегрируемы, то для почти всех $(z_1, z_j) \in \mathbb{R}^2$ верно равенство

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X_1 \in O^\varepsilon(z_1), X_j \in O^\varepsilon(z_j))}{\mathbb{P}(X_1 \in O^\varepsilon(z_1))\mathbb{P}(X_j \in O^\varepsilon(z_j))} = \frac{\rho_j(z_1, z_j)}{\rho(z_1)\rho(z_j)}.$$

Используя ковариационное неравенство, получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left| \text{cov} \left(\frac{\tilde{f}(Y_1)\mathbb{I}_{X_1 \in O^\varepsilon(z_1)}}{\mathbb{P}(X_1 \in O^\varepsilon(z_1))}, \frac{\tilde{f}(Y_j)\mathbb{I}_{X_j \in O^\varepsilon(z_j)}}{\mathbb{P}(X_j \in O^\varepsilon(z_j))} \right) \right| \\ & \leq \psi_{1,1}(j)F(|\tilde{f}| \mid z_1)F(|\tilde{f}| \mid z_j). \end{aligned} \quad (3.6)$$

ЛЕММА 3.1. При сделанных предположениях A1, A2, A5 или A1, A2, (3.1), A5' справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \sup_{j > 1} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbb{E}_{z_1, z_j}(\tilde{f}(Y_1)\tilde{f}(Y_j))| \rho(z_1)\rho(z_j) \\ & \times K_h(z_1 - x)K_h(z_j - x) dz_1 dz_j < \infty, \quad h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим (3.7) при условиях A1, A2, (3.1) и A5'. Положим

$$L_j(z_1, z_j) = \mathbb{E}_{z_1, z_j} |\tilde{f}(Y_1)\tilde{f}(Y_j)| \rho(z_1)\rho(z_j) - \mathbb{E}_{x, x} |\tilde{f}(Y_1)\tilde{f}(Y_j)| \rho^2(x).$$

Достаточно установить соотношение

$$\sup_{j > 1} \int_{\mathbb{R}^2} L_j(z_1, z_j) K_h(z_1 - x) K_h(z_j - x) dz_1 dz_j = O(h^2). \quad (3.8)$$

Для сокращения записи обозначим $\bar{z} = (z_1, z_j)$, $\bar{x} = (x, x)$, $\|\bar{z}\|_2 = (z_1^2 + z_j^2)^{1/2}$, $L_j(\bar{z}) = L_j(z_1, z_j)$ и $K(\bar{z}) = K(z_1)K(z_j)$. Разобьем область интегрирования левой части (3.8) на два множества $\{\|\bar{z} - \bar{x}\|_2 > \delta\}$ и $\{\|\bar{z} - \bar{x}\|_2 \leq \delta\}$, где величина δ будет выбрана ниже. Оценим интеграл по каждой из этих областей интегрирования. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \int_{\|\bar{z} - \bar{x}\|_2 > \delta} L_j(\bar{z}) K_h(\bar{z} - \bar{x}) d\bar{z} = \int_{\|\bar{z} - \bar{x}\|_2 > \delta} \frac{L_j(\bar{z})}{\|\bar{z} - \bar{x}\|_2^4} \frac{\|\bar{z} - \bar{x}\|_2^4}{h^4} K\left(\frac{\bar{z} - \bar{x}}{h}\right) d\bar{z} \\ & \leq \sup_{\|\bar{y}\|_2 > \delta/h} \|\bar{y}\|_2^4 K(\bar{y}) \int_{\|\bar{z} - \bar{x}\|_2 > \delta} \frac{L_j(\bar{z})}{\|\bar{z} - \bar{x}\|_2^4} d\bar{z} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где при совершении предельного перехода использованы сходимость $\lim_{z \rightarrow \infty} z^4 K(z) = 0$ и соотношения $\rho(z_1)\rho(z_k) \leq (1 - \theta(k))^{-1} \rho_k(z_1, z_k)$ и

$$\begin{aligned} & \sup_{j>1} \int_{\|\bar{z}-\bar{x}\|_2 > \delta} \frac{1}{\|\bar{z}-\bar{x}\|_2^4} \mathbb{E}_{z_1, z_j} |f(Y_1)f(Y_j)| \rho(z_1)\rho(z_j) d\bar{z} \\ & \leq \sup_{j>1} (1 - \theta(j))^{-1} \frac{1}{\delta^4} \mathbb{E} f^2(Y_1) < \infty. \end{aligned}$$

Выберем $\delta > 0$ так, что $\{\|\bar{z} - \bar{x}\|_2 < 2\delta\} \subset O(\bar{x})$, где $O(\bar{x})$ – окрестность точки $\bar{x}$, в которой выполнены условия A1 и A5'. На множестве $\{h\|\bar{z}\|_2 < \delta\}$ справедлива формула Тейлора:

$$\begin{aligned} L_j(\bar{x} - h\bar{z}) &= -hz_1 \frac{\partial L_j(\bar{x})}{\partial z_1} - hz_j \frac{\partial L_j(\bar{x})}{\partial z_j} \\ &+ \frac{1}{2} h^2 \left(z_1 z_j \frac{\partial^2 L_j(v_n(\bar{z}))}{\partial z_1 \partial z_j} + z_1^2 \frac{\partial^2 L_j(v_n(\bar{z}))}{\partial z_1^2} + z_j^2 \frac{\partial^2 L_j(v_n(\bar{z}))}{\partial z_j^2} \right), \end{aligned}$$

где $v_n(\bar{z}) = \bar{x} - hv\bar{z}$, $0 < v < 1$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^3} \int_{\|\bar{z}-\bar{x}\|_2 \leq \delta} L_j(\bar{z}) K\left(\frac{\bar{z}-\bar{x}}{h}\right) d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2} \int_{h\|\bar{z}\|_2 \leq \delta} \left(z_1 z_j \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_j} + z_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + z_j^2 \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \right) L_j(v_n(\bar{z})) K(\bar{z}) d\bar{z}. \end{aligned}$$

Используя теорему Лагранжа, для любых $l, m \geq 0$, $l + m = 2$, и всех $\bar{z} \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$\mathbb{I}_{h\|\bar{z}\|_2 \leq \delta} \sup_{j>1} \frac{\partial^2 L_j(v_n(\bar{z}))}{\partial z_1^l \partial z_j^m} \rightarrow \sup_{j>1} \frac{\partial^2 L_j(\bar{x})}{\partial z_1^l \partial z_j^m} < \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{j>1} \frac{1}{h^3} \int_{\|\bar{z}-\bar{x}\|_2 \leq \delta} L_j(\bar{z}) K\left(\frac{\bar{z}-\bar{x}}{h}\right) d\bar{z} \rightarrow \frac{1}{2} \sup_{j>1} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \right) \\ & \times L_j(\bar{x}) \int_{\mathbb{R}} z^2 K(z) dz < \infty, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что при условиях A1, A2 и A5 соотношение (3.7) также имеет место. Действительно,

$$\begin{aligned} & \sup_{j>1} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbb{E}_{z_1, z_j} (\tilde{f}(Y_1)\tilde{f}(Y_j))| \rho(z_1)\rho(z_j) K_h(z_1 - x) K_h(z_j - x) dz_1 dz_j \\ & \leq \rho^2(x) \sup_{j>1} \sup_{(z_1, z_j) \in \mathbb{R}^2} |\mathbb{E}_{z_1, z_j} (\tilde{f}(Y_1)\tilde{f}(Y_j))| < \infty, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Учитывая неравенство $F(|f - F(f | x)| | z) \leq \text{Var}^{1/2}(f | z)$, лемму 3.1 и соотношения (3.2)–(3.6) имеем

$$\sum_{j=2}^l (l - j + 1) \text{cov}(V_{n1}, V_{nj}) \rightarrow 0$$

для всех $2 \leq l \leq n$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}S_n^2 &\rightarrow \text{Var}(f | x)\rho(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(z) dz, \quad n \rightarrow \infty, \\ \mathbf{E}S_{n,l}^2 &= l \text{Var} V_{n1} + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Чтобы убедиться в справедливости (2.6), воспользуемся следующим неравенством из [4, предложение 1(b)]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|S_{n,l}| - \lambda)_+^2 &\leq 8 \sum_{k=1}^l (\mathbf{E}\tilde{V}_{nk}^2 \mathbb{I}(|S_{n,k}| > \lambda) \\ &\quad + 2\|\tilde{V}_{nk} \mathbf{E}_k(S_{n,l} - S_{n,k}) \mathbb{I}(|S_{n,k}| > \lambda)\|_1), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\tilde{V} = V - \mathbf{E}V$, $\mathbf{E}_k \xi$ – условное математическое ожидание с.в. ξ относительно $\sigma\{V_{ni}, i \leq k\}$.

Покажем равномерную интегрируемость последовательности $\{n\tilde{V}_{n0}^2, n > 0\}$ и массива $\{\xi_{n,l} = n\tilde{V}_{n0}\mathbf{E}_0 S_{n,l}, 1 \leq l \leq n, n > 0\}$, который может быть представлен последовательностью с помощью отображения $(n, l) \mapsto n + l - 1$. Заметим, что равномерная интегрируемость последовательности следует из ее сходимости в $\mathbb{L}^1$. Таким образом, достаточно установить $\mathbb{L}^1$ -фундаментальность этих последовательностей, т.е.

$$\begin{aligned} \|n\tilde{V}_{n0}^2 - n'\tilde{V}_{n'0}^2\|_1 &\rightarrow 0, \quad n \geq n' \rightarrow \infty, \\ \|\xi_{n,l} - \xi_{n,l'}\|_1 &\rightarrow 0, \quad l \geq l' \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \\ \|\xi_{n,l'} - \xi_{n',l'}\|_1 &\rightarrow 0, \quad n \geq n' \rightarrow \infty, \quad l' \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Имеем неравенство

$$\|n\tilde{V}_{n0}^2 - n'\tilde{V}_{n'0}^2\|_1 \leq \|nV_{n0}^2 - n'V_{n'0}^2\|_1 + n\mathbf{E}^2|V_{n0}| + n'\mathbf{E}^2|V_{n'0}|.$$

Очевидно, $n\mathbf{E}^2|V_{n0}| = h\mathbf{E}^2(|f(Y_0) - F(f | x)|K_h(X_0 - x)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Принимая во внимание $h \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $zK^2(z) \searrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \|nV_{n0}^2 - n'V_{n'0}^2\|_1 &= \left\| (f(Y_0) - F(f | x))^2 \left(\frac{1}{h} K^2\left(\frac{X_0 - x}{h}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{h'} K^2\left(\frac{X_0 - x}{h'}\right) \right) \right\|_1 \rightarrow 0, \quad h < h' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Используя ковариационное неравенство и $n\|\tilde{V}_{n0}\|_1^2 \leq 2n\|V_{n0}\|_1^2 = O(h)$, имеем

$$\begin{aligned} \|\xi_{n,l} - \xi_{n,l'}\|_1 &\leq \sum_{i=l'+1}^l n\|\tilde{V}_{n0}\mathbf{E}_0\tilde{V}_{ni}\|_1 \leq n\|\tilde{V}_{n0}\|_1^2 \sum_{i=l'+1}^l \psi_{1,\infty}(i) \xrightarrow{l',n \rightarrow \infty} 0, \\ \|\xi_{n,l'} - \xi_{n',l'}\|_1 &\leq \sum_{i=1}^{l'} \|n\tilde{V}_{n0}\mathbf{E}_0\tilde{V}_{ni}\|_1 + \|n'\tilde{V}_{n'0}\mathbf{E}_0\tilde{V}_{n'i}\|_1 \\ &\leq 2h' \sum_{i=1}^{n'} \psi_{1,\infty}(i) \xrightarrow{n' \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Из соотношения (3.9) видим, что $P(|S_{n,k}| > x\|S_{n,l}\|_2) \leq x^{-2}$ для всех $1 \leq k \leq l$. Воспользуемся установленной равномерной интегрируемостью и неравенством (3.10) при $\lambda = x\|S_{n,l}\|_2$, чтобы получить неравенство

$$\|S_{n,l}\|_2^{-2} \mathbf{E}(S_{n,l} - x\|S_{n,l}\|_2)_+^2 \leq \delta(x)$$

для некоторой невозрастающей функции δ , удовлетворяющей $\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0$. Таким образом, условие (2.6) выполнено.

Справедливость (2.4) и (2.5) очевидным образом следует из А4 при использовании следующего ковариационного неравенства:

$$\sum_{j=m}^{n-1} \text{cov}(V_{nj}, V_{n0}) \leq \sum_{j=m}^{n-1} \psi_{1,1}(j) \mathbf{E}^2|V_{n0}| = \frac{o(1)}{n} \sum_{j=m}^{n-1} \psi_{1,1}(j) \rightarrow 0,$$

где $m < n$ и $n \rightarrow \infty$.

При сделанных предположениях все условия теоремы 2.1 выполнены, следовательно, требуемая сходимость к-м. р. доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Мы не предполагаем существование совместной лебеговой плотности пары с. в. (X, Y) . В приложениях это позволяет рассматривать так называемую логистическую регрессию, в которой Y принимает только дискретные значения. Для применения теоремы 3.1 к модели (1.1) условие А5' предпочтительнее условия А5 тем, что накладывает лишь локальные ограничения на регрессионную функцию. Результат теоремы 3.1 расширяет область применений теоремы 3.4 из [2], теоремы 2.2 из [10], а также теоремы 3.6 из [14].

§ 4. Плотность

В этом параграфе будет изучаться вопрос о плотности семейства $\{\nu_n(f), f \in \mathcal{F}\}$.

Пусть пространство $(L, d_p(\cdot))$, $p \geq 1$, состоит из всех действительныхзначных функций, заданных на $\mathcal{X}$ и таких, что $d_p^p(f) = \sup_{z \in \mathbb{R}} F(|f|^p | z)$ конечно. Для пары функций (f, g) из $L \times L$ таких, что $f \leq g$, определим сегмент $[f, g]$ как множество всех функций v , удовлетворяющих $f \leq v \leq g$. Назовем ε -сегментом такой сегмент $[f, g]$, что $d_p(f - g) \leq \varepsilon$. Энтропия с включением $\mathbb{H}(\mathcal{F}, \varepsilon, d_p(\cdot))$ определяется

как логарифм минимального числа ε -сегментов, покрывающих подмножество $\mathcal{F}$ пространства $(L, d_p(\cdot))$. Обозначим $I_{p,t} = \int_0^1 \sqrt{\mathbb{H}(\mathcal{F}, \varepsilon, d_p(\cdot))} d(\varepsilon^t)$.

Рассмотрим следующие условия.

А6. Условие (3.1) выполнено, $\sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \frac{\partial^j}{\partial z^j} (F(f | z) \rho(z)) \right| < \infty$ для $j = 2, 3$ в некоторой окрестности точки x и ядро $K(\cdot)$ ограничено.

В1. $\sum_{k>0} k \phi_{2,\infty}(k) < \infty$, $nh^{3(p-2)/(p-4)} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $I_{p,t} < \infty$ для $t = 3/(p-1)$ при некотором $p > 7$.

В2. $\phi_{2,\infty}(k) = O(k^{-(b+1)/(b-1)})$, $nh^{b(p-2)/(p-b-1)} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $I_{p,t} < \infty$ для $t = b/(p-1)$ при некоторых $3 < b < 5$ и $p > (3b+5)/(5-b)$.

В3. $\beta(k) = O(k^{-b})$, $\sum_{k>0} \phi_{1,1}^{1/2}(k) < \infty$, $nh^{5/b^2} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, при некотором $b > 1$, $I_{2,t} < \infty$ для $t = 1$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия А1–А3 при $c_0 = 0$, А6 и одно из условий В1–В3. Тогда семейство процессов $\{\nu_n(f), f \in \mathcal{F}\}$ плотно в пространстве $(\ell^\infty(\mathcal{F}), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всюду далее C – множитель, различный в разных формулах и не зависящий от n .

Напомним, что семейство $\{\nu_n(f), f \in \mathcal{F}\}$ плотно в пространстве $(\ell^\infty(\mathcal{F}), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$, если для любого $M > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta} |\nu_n(f)| > M \right) = 0, \quad (4.1)$$

где $\mathcal{F}_\delta = \{f - g: d_p(f - g) \leq \delta, f, g \in \mathcal{F}\}$.

Имеет место следующее представление:

$$\nu_n(f) = \sqrt{nh} \left(\frac{1}{\rho_n(x)} (\varphi_n(f | x) - \varphi(f | x)) + \frac{F(f | x)}{\rho_n(x)} (\rho(x) - \rho_n(x)) \right), \quad (4.2)$$

где $\varphi_n(f | x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Y_i) K_h(X_i - x)$ и $\varphi(f | x) = F(f | x) \rho(x)$.

Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 3.1, имеем

$$nh \text{Var } \rho_n(x) \rightarrow \rho(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(z) dz, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

$$\sqrt{nh} (\mathbf{E} \rho_n(x) - \rho(x)) \rightarrow \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 \rho(x)}{\partial x^2} \int_{\mathbb{R}} z^2 K(z) dz, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Комбинируя соотношения (4.3), (4.4) и $\rho_n(x) \xrightarrow{P} \rho(x)$, для любого $M > 0$ получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sqrt{nh} |\rho_n(x) - \rho(x)|}{\rho_n(x)} \sup_{f \in \mathcal{F}_\delta} |F(f | x)| > M \right) = 0. \quad (4.5)$$

Из равенств (4.2) и (4.5) следует, что для установления (4.1) достаточно при любом $M > 0$ показать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sqrt{nh} \sup_{f \in \mathcal{F}_\delta} |\varphi_n(f | x) - \varphi(f | x)| > M \right) = 0. \quad (4.6)$$

ЛЕММА 4.1. При выполненных условиях А1–А3 и А6 справедливо соотношение

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sqrt{nh} (\mathbb{E} \varphi_n(f | x) - \varphi(f | x)) \rightarrow \frac{c_0}{2} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{\partial^2 F(f | x) \rho(x)}{\partial x^2} \times \int_{\mathbb{R}} z^2 K(z) dz, \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на применении разложения функции в ряд Тейлора и во многом аналогично доказательству предложения 3.4 из [14]. Имеет место равенство

$$\frac{1}{h^2} (\mathbb{E} \varphi_n(f | x) - \varphi(f | x)) = \frac{1}{h^2} \int_{\mathbb{R}} g(f, z) K_h(z - x) dz, \quad (4.7)$$

где $g(f, z) = F(f | z) \rho(z) - F(f | x) \rho(x)$. Разобьем область интегрирования в правой части (4.7) на два множества $\{|z - x| > \delta\}$ и $\{|z - x| \leq \delta\}$, где величина δ будет выбрана ниже. Оценим интеграл по каждой из этих областей интегрирования. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \frac{1}{h^2} \int_{|z-x|>\delta} g(f, z) K_h(z - x) dz \right| \\ & \leq \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|z-x|>\delta} \frac{|g(f, z)|}{|z-x|^3} \left| \frac{z-x}{h} \right|^3 K\left(\frac{z-x}{h}\right) dz \\ & \leq \sup_{|y|>\delta/h} |y^3 K(y)| \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|z-x|>\delta} \frac{|g(f, z)|}{|z-x|^3} dz \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где при совершении предельного перехода использованы $\lim_{z \rightarrow \infty} z^3 K(z) \rightarrow 0$ и цепочка неравенств

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|z-x|>\delta} \frac{g(f, z)}{|z-x|^3} dz \\ & \leq \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|z-x|>\delta} \frac{|F(f | z)| \rho(z)}{|z-x|^3} dz + \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|z-x|>\delta} \frac{|F(f | x)| \rho(x)}{|z-x|^3} dz \\ & \leq \frac{1}{\delta^3} \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E} |f(Y_1)| + \frac{4}{\delta^2} \sup_{f \in \mathcal{F}} |F(f | x)| \rho(x) < \infty. \end{aligned}$$

Выберем $\delta > 0$ так, что $I_\delta = [x - 2\delta, x + 2\delta] \subset O(x)$, где $O(x)$ – окрестность точки x , в которой выполнены условия А1 и А6. Тогда $[x - h|z|, x + h|z|] \subset I_\delta \subset O(x)$, если $h|z| \leq \delta$. На множестве $\{h|z| \leq \delta\}$ запишем формулу Тейлора:

$$g(f, x - hz) = -hz \frac{\partial g(f, x)}{\partial z} + \frac{1}{2} h^2 z^2 \frac{\partial^2 g(f, v_n(z, f))}{\partial z^2},$$

где $v_n(z, f)$ – точка между x и $x - hz$. Следовательно, $v_n(z, f) \rightarrow x$ при $h \rightarrow 0$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^3} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|z-x| \leq \delta} g(f, z) K\left(\frac{z-x}{h}\right) dz = \frac{1}{h^2} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{h|z| \leq \delta} K(z) g(f, x - hz) dz \\ & = \frac{1}{2} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{h|z| \leq \delta} z^2 K(z) \frac{\partial^2 g(f, v_n(z, f))}{\partial z^2} dz. \end{aligned}$$

По теореме Лагранжа имеем

$$\left| \frac{\partial^2 g(f, v_n(z, f))}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 g(f, x)}{\partial z^2} \right| = \left| \frac{\partial^3 g(f, r_n(z, f))}{\partial z^3} \right| |r_n(z, f) - x|,$$

где $r_n(z, f)$ – точка между $v_n(z, f)$ и x . Поскольку $r_n(z, f) \in O(x)$, то из условия А6 видим, что $\sup_{f \in \mathcal{F}} |\partial^3 g(f, r_n(z, f)) / \partial z^3| < \infty$. Тогда для любого $z \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbb{I}_h |z| \leq \delta \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{\partial^2 g(f, v_n(z, f))}{\partial z^2} \rightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{\partial^2 g(f, x)}{\partial z^2} < \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{h^3} \int_{|z-x| \leq \delta} g(f, z) K\left(\frac{z-x}{h}\right) dz &\rightarrow \frac{1}{2} \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{\partial^2 g(f, x)}{\partial z^2} \\ &\times \int_{\mathbb{R}} z^2 K(z) dz, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы теперь остается только учесть $\sqrt{nh^5} \rightarrow c_0 < \infty$.

Введем обозначение $Z_n(f) = \sqrt{nh} (\varphi_n(f | x) - \mathbb{E} \varphi_n(f | x))$. Тогда $Z_n(f) = \sum_{i=1}^n Z_{ni}$, где $Z_{ni} = \sqrt{h/n} (f(Y_i) K_h(X_i - x) - \mathbb{E} f(Y_i) K_h(X_i - x))$. Заметим, что $\{Z_{ni}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ – строго стационарный (при каждом фиксированном n) процесс ограниченных и центрированных с.в. Теперь для доказательства теоремы достаточно установить для всех $M > 0$ соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta} |Z_n(f)| > M \right) = 0. \quad (4.8)$$

Как и в [6], введем подходящую верхнюю оценку H энтропии $\mathbb{H}$.

ЛЕММА 4.2 [6]. *Любой класс функций $\mathcal{F}$ допускает невозрастающую верхнюю оценку H величины $\mathbb{H}(\mathcal{F}, \cdot, d_p(\cdot))$ такую, что $x \rightarrow x^4 H(x)$ не убывает, и для любого $\delta \in [0, 1]$*

$$\psi(\delta) = \int_0^\delta \sqrt{1 \vee H(u)} d(u^t) \leq 4 \int_0^\delta \sqrt{1 \vee \mathbb{H}(\mathcal{F}, u, d_p(\cdot))} d(u^t).$$

Несложно убедиться в том, что любое энтропийное условие, представленное в В1, В2 или В3, влечет существование функции U из $(L, d_p(\cdot))$ такой, что $|f| \leq U$ для любой $f \in \mathcal{F}$. Рассмотрим семейство ограниченных функций $\mathcal{F}_\delta(m) = \{(f - g) \mathbb{I}_{4U \leq m}, f, g \in \mathcal{F} \text{ и } d_p(f - g) \leq \delta\}$. Заметим, что если f принадлежит $\mathcal{F}_\delta(m)$, то $d_p(f) \leq \delta$ и $2\|f\|_\infty \leq m$. Также нетрудно видеть, что

$$\mathbb{H}(\mathcal{F}_\delta(m), \varepsilon, d_p(\cdot)) \leq \mathbb{H}(\mathcal{F}_\delta, \varepsilon, d_p(\cdot)) \leq 2\mathbb{H}(\mathcal{F}, \varepsilon/2, d_p(\cdot)).$$

Для любого положительного m имеем неравенство

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta} |Z_n(f)| \right) &\leq \mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(f)| \right) \\ &\quad + 4\sqrt{nh} \mathbb{E}(U \mathbb{I}_{4U > m}(Y_1) K_h(X_1 - x)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Без ограничения общности можем считать, что $\|K\|_\infty \leq 1$. Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{G}(m)$ – любое конечное множество функций из $\mathbb{L}^\infty(\mathbf{P})$ такое, что $2\|g\|_\infty \leq m$ и $d_2(g) \leq \delta$ для всех $g \in \mathcal{G}$. Положим $H(k) = \max(1, \log(k))$, где $k = |\mathcal{G}|$ – число элементов в $\mathcal{G}$. Имеют место следующие максимальные неравенства:

$$\mathbb{E} \left(\max_{g \in \mathcal{G}} |Z_n(g)| \right) \leq C(\phi) \left(\delta \sqrt{H(k)} + \frac{m^3 H(k)}{\delta^2 \sqrt{h^3 n}} \right), \quad (4.10)$$

$$\mathbb{E} \left(\max_{g \in \mathcal{G}} |Z_n(g)| \right) \leq C(\phi) \left(\delta \sqrt{H(k)} + \frac{H(k) m^3 \delta^{-2} \vee H(k) m^b \delta^{(1-b)}}{\sqrt{h^b n}} \right), \quad (4.11)$$

$$\mathbb{E} \left(\max_{g \in \mathcal{G}} |Z_n(g)| \right) \leq C \left(\delta \sqrt{H(k)} + \frac{mqH(k)}{\sqrt{nh}} + \sqrt{\frac{n}{h}} m\beta(q) \right), \quad 1 \leq q \leq n, \quad (4.12)$$

которые справедливы соответственно при выполнении условий В1–В3. Рассуждения, необходимые для установления этих неравенств, аналогичны тем, которые были использованы в [3]. А именно, для получения (4.10) и (4.11) применяется неравенство (2.7). Для доказательства (4.12) используется техника реконструкции (см. [5]).

Во всех неравенствах (4.10)–(4.12) применяются равномерные по $f \in \mathcal{F}_\delta$ верхние оценки $\|Z_{ni}\|_\infty \leq m/\sqrt{nh}$ и

$$\|Z_{ni}\|_2^2 \leq \frac{1}{n} \sup_{z \in \mathbb{R}} F(f^2 | z) \left(\rho(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(z) dz + O(h^2) \right) \leq \frac{C\delta^2}{n},$$

где C – некоторый множитель, не зависящий от δ и n .

В каждом неравенстве (4.10)–(4.12) выберем соответствующее $m = m(\delta, n, k)$ такое, что

$$\mathbb{E} \left(\sup_{g \in \mathcal{G}} |Z_n(g)| \right) \leq C\delta \sqrt{H(k)}. \quad (4.13)$$

Затем для выбранного таким образом m покажем, что последний член в правой части (4.9) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

1. Определим $G_\delta(m) = m^3 \delta^{-2}$ и возьмем $m(n, \delta, k) = G_\delta^{-1}(\delta \sqrt{nh^3/H(k)})$; тогда

$$\begin{aligned} &\sqrt{nh} \mathbb{E}(U \mathbb{I}_{4U > m(n, \delta, k)}(Y_1) K_h(X_1 - x)) \\ &= \sqrt{nh} \mathbb{E}(U \mathbb{I}_{G_\delta(4U) > \delta \sqrt{nh^3/H(k)}}(Y_1) K_h(X_1 - x)) \\ &\leq \sqrt{nh} \left(\delta \sqrt{\frac{nh^3}{H(k)}} \right)^{(1-p)/3} \mathbb{E}(U(G_\delta(4U))^{(p-1)/3} (Y_1) K_h(X_1 - x)) \\ &\leq (n^{(4-p)/6} h^{1-p/2}) \delta^{(1-p)} H^{(p-1)/6}(k) \\ &\quad \times \sup_{z \in \mathbb{R}} F(U^p | z) (\rho(x) + O(h^2)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. Определим величину $G_\delta(m) = m^3\delta^{-2} \vee m^b\delta^{(1-b)}$ и возьмем $m(n, \delta, k) = G_\delta^{-1}(\delta\sqrt{nh^b/H(k)})$; тогда

$$\begin{aligned} & \sqrt{nh} \mathbf{E}(U \mathbb{I}_{4U > m(n, \delta, k)}(Y_1) K_h(X_1 - x)) \\ & \leq \sqrt{nh} \left(\delta \sqrt{\frac{nh^b}{H(k)}} \right)^{(1-p)/b} \mathbf{E}(U (G_\delta(4U))^{(p-1)/b} (Y_1) K_h(X_1 - x)) \\ & \leq C(n^{-(p-1-b)/(2b)} h^{-(p-2)/2}) \\ & \quad \times H(k)^{(p-1)/(2b)} \left(\sup_{z \in \mathbb{R}} F(U^{3(p-1)/b} U \mid z) \delta^{-3(p-1)/b} + \sup_{z \in \mathbb{R}} F(U^p \mid z) \delta^{1-p} \right). \end{aligned}$$

Несложно проверить, что при выполнении условия В2 последнее выражение стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$.

3. Положим $q = (nh^{-5/b}/H(k))^{1/(b+1)}$ и возьмем $m(n, \delta, k) = \delta\sqrt{n/H(k)} h^s/q$, где $s = 1/2 - 5/b$; тогда $n/q \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$ и

$$\begin{aligned} & \sqrt{nh} \mathbf{E}(U \mathbb{I}_{4U > m(n, \delta, k)}(Y_1) K_h(X_1 - x)) \\ & \leq \mathbf{E}(U^2(Y_1) K_h(X_1 - x)) (m(n, \delta, k))^{-1} \sqrt{nh} \\ & \leq \sup_{z \in \mathbb{R}} F(U^2 \mid z) (\rho(x) + O(h^2)) \\ & \quad \times \delta^{-1} H^{1/2-1/(b+1)}(k) (nh^5)^{1/(b+1)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогично, во всех случаях получаем

$$\sqrt{nh} \sup_{g: d_p(g) \leq \delta} \mathbf{E}(g \mathbb{I}_{4g > m(n, \delta, k)}(Y_1) K_h(X_1 - x)) \leq C\delta H^{1/(2t)}(k), \quad (4.14)$$

где t определено в условиях В1–В3. Далее будет использована техника цепной реконструкции, заимствованная из [6].

Определим $\mathbb{N}(\varepsilon) = [\exp(\mathbb{H}(\mathcal{F}_\delta(m), \varepsilon, d_p(\cdot)))]$. Пусть $\delta_0 = \delta$ и $\delta_k = 2^{-k}\delta_0$. Для каждого k выберем покрытие $\mathcal{F}_\delta(m)$ сегментами $B_{j,k} = [g_{j,k}, h_{j,k}]$ такими, что $1 \leq j \leq J_k$, $d_p(h_{j,k} - g_{j,k}) \leq \delta_k$ и $J_k \leq \mathbb{N}(\delta_k)$. Поскольку $2\|f\|_\infty \leq m(n, \delta, \mathbb{N}(\delta))$ для всех $f \in \mathcal{F}_\delta(m)$, то мы можем считать, что $\|h_{j,k} - g_{j,k}\|_\infty \leq m(n, \delta, \mathbb{N}(\delta))$. В каждом сегменте $B_{j,k}$ фиксируем любую точку $f_{j,k}$, принадлежащую $\mathcal{F}_\delta(m)$. Пусть $\pi_k f = f_{\tau_k f, k}$, где τ_k – отображение $\mathcal{F}_\delta(m)$ в $[1, J_k]$, определяемое как $\tau_k f = \min\{j \in [1, J_k]: f \in B_{j,k}\}$. Обозначим $\Delta_k f = h_{\tau_k f, k} - g_{\tau_k f, k}$. Из определений следует, что

$$|f - \pi_k f| \leq \Delta_k f, \quad d_p(\Delta_k f) \leq \delta_k. \quad (4.15)$$

Введем $\mathbf{H}(\delta) = \sum_{\delta_k \geq \delta} H(\delta_k)$, $\mathbf{N}(\delta) = [\exp(\mathbf{H}(\delta))]$ и $N(\delta_k) = [\exp(H(\delta_k))]$. Заметим, что образ отображения $(\tau_0, \dots, \tau_k)$ есть конечное множество с числом элементов, меньшим или равным $\mathbf{N}(\delta_k)$. Введем невозрастающую последовательность $\{m_k, k \in \mathbb{N}_0\}$, положив $m_k = \frac{1}{4}m(n, \delta_k, \mathbf{N}(\delta_{k+1}))$. Для любой $f \in \mathcal{F}_\delta(m)$ определим $v(f) = N \vee \min\{j \geq 0, \Delta_j f > m_j\}$, где

$$N = \min\{k \geq 0: \delta_k \leq \psi(\delta)/\sqrt{nh}\} \vee 1. \quad (4.16)$$

Рассуждая, как и в [6], получаем оценку

$$\mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(f)| \right) \leq \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6, \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(\pi_0 f)| \right), \\ \mathbb{E}_2 &= \mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(f - \pi_0 f) \mathbb{I}_{v(f)=0}| \right), \\ \mathbb{E}_3 &= \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(f - \pi_{k-1} f) \mathbb{I}_{v(f)=k} \mathbb{I}_{\Delta_k f > m_{k-1}}| \right), \\ \mathbb{E}_4 &= \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(f - \pi_k f) \mathbb{I}_{v(f)=k} \mathbb{I}_{\Delta_k f \leq m_{k-1}}| \right), \\ \mathbb{E}_5 &= \mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(f - \pi_{N-1} f) \mathbb{I}_{v(f)=N}| \right), \\ \mathbb{E}_6 &= \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(\pi_k f - \pi_{k-1} f) \mathbb{I}_{\Delta_k \leq m_{k-1}} \mathbb{I}_{v(f) \geq k}| \right). \end{aligned}$$

Заметим, что если $|g| \leq f$, то

$$|Z_n(g)| \leq |Z_n(f)| + 2\sqrt{nh} \mathbb{E}(f(Y_1)K_h(X_1 - x)). \quad (4.18)$$

Также для любого $k \in \mathbb{N}$ из леммы 4.2 следует, что $\mathbf{H}(\delta_{k+1}) \leq 17\mathbf{H}(\delta_k)$.

Оценка $\mathbb{E}_1$. Когда f принимает значения из всего множества $\mathcal{F}_\delta(m)$, то $\pi_0 f$ принимает значения из всего конечного класса функций с числом элементов, меньшим или равным $\mathbb{N}(\delta_0)$. Кроме того, имеем оценки $d_p(\pi_0 f) \leq \delta_0$ и $2\|\pi_0 f\|_\infty \leq m(n, \delta, \mathbb{N}(\delta))$. Согласно (4.13) справедливо неравенство $\mathbb{E}_1 \leq C\delta_0\sqrt{H(\delta_0)}$.

Оценка $\mathbb{E}_2$. Соотношения (4.15), (4.18) и $\{v(f) = 0\} = \{\Delta_0 > m_0\}$ приводят к неравенству $\mathbb{E}_2 \leq \mathbb{E}_{2,1} + \mathbb{E}_{2,2}$, где

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{2,1} &= \mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(\Delta_0(f) \mathbb{I}_{\Delta_0(f) > m_0})| \right), \\ \mathbb{E}_{2,2} &= 2\sqrt{nh} \sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} \mathbb{E}(\Delta_0(f) \mathbb{I}_{\Delta_0(f) > m_0} (Y_1) K_h(X_1 - x)). \end{aligned}$$

При использовании неравенства (4.14) величина $\mathbb{E}_{2,2}$ ограничивается сверху:

$$\mathbb{E}_{2,2} \leq C\delta_0 \mathbf{H}^{1/(2t)}(\delta_1) \rho(x).$$

Учитывая (4.13), имеем $\mathbb{E}_{2,1} \leq C\delta_0\sqrt{\mathbf{H}(\delta_1)}$. В результате получаем

$$\mathbb{E}_2 \leq C\delta_0 \mathbf{H}^{1/(2t)}(\delta_0).$$

Оценка E_3 . Из соотношений (4.15) и (4.18) вытекает неравенство $E_3 \leq E_{3,1} + E_{3,2}$, где

$$E_{3,1} = \sum_{k=1}^{N-1} E \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(\Delta_{k-1}(f) \mathbb{I}_{v(f)=k} \mathbb{I}_{\Delta_k f > m_{k-1}})| \right),$$

$$E_{3,2} = \sum_{k=1}^{N-1} 2\sqrt{nh} \sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} E(\Delta_{k-1}(f) \mathbb{I}_{v(f)=k} \mathbb{I}_{\Delta_k f > m_{k-1}}(Y_1) K_h(X_1 - x)).$$

Для того чтобы оценить $E_{3,1}$, заметим, что

$$\{v(f) = k\} = \{m_k < \Delta_k f, \Delta_i f \leq m_i, i = 0, \dots, k-1\} \subset \{\Delta_{k-1} f \leq m_{k-1}\}.$$

Верхняя грань в $E_{3,1}$ равна максимуму по конечному множеству функций с числом элементов, меньшим или равным $N(\delta_k)$. Более того, если g — любая функция, принадлежащая этому множеству, то для нее выполнено $d_p(g) \leq \delta_{k-1}$ и $\|g\|_\infty \leq m_{k-1}$. Следовательно, неравенство (4.13) приводит к неравенству

$$E_{3,1} \leq C \sum_{k=1}^{N-1} \delta_{k-1} \sqrt{H(\delta_k)}. \quad (4.19)$$

С другой стороны, используя

$$\mathbb{I}_{v(f)=k} \mathbb{I}_{\Delta_k f > m_{k-1}} \leq \mathbb{I}_{\Delta_k f > m_{k-1}} \mathbb{I}_{\Delta_{k-1} f \leq m_{k-1}} \leq \mathbb{I}_{\Delta_k f > \Delta_{k-1} f} \mathbb{I}_{\Delta_k f > m_k}$$

и неравенство (4.14), получаем верхнюю оценку

$$E_{3,2} \leq \sum_{k=1}^{N-1} 2\sqrt{nh} \sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} d_1(\Delta_k(f) \mathbb{I}_{\Delta_k(f) > m_k})(\rho(x) + O(h^2))$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{N-1} \delta_k H^{1/(2t)}(\delta_{k+1}). \quad (4.20)$$

Таким образом, оценки $E_{3,1}$ и $E_{3,2}$ приводят к следующему:

$$E_3 \leq C \sum_{k=1}^N \delta_k H^{1/(2t)}(\delta_k). \quad (4.21)$$

Оценка E_4 . Учитывая (4.15) и (4.18), имеем

$$E_4 \leq \sum_{k=1}^{N-1} E \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(\Delta_k(f) \mathbb{I}_{v(f)=k} \mathbb{I}_{\Delta_k f \leq m_{k-1}})| \right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} 2\sqrt{nh} \sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} E(\Delta_k(f) \mathbb{I}_{v(f)=k} \mathbb{I}_{\Delta_k f \leq m_{k-1}}(Y_1) K_h(X_1 - x)).$$

Заметим, что

$$\{v(f) = k, \Delta_k f \leq m_{k-1}\} \subset \{m_k < \Delta_k f \leq m_{k-1}\}, \quad m_{k-1} = Cm_k.$$

Тогда, учитывая (4.13) и (4.14) так же, как это было проведено при оценке E_3 , находим, что

$$E_4 \leq C \sum_{k=1}^N \delta_k \mathbf{H}^{1/(2t)}(\delta_k). \quad (4.22)$$

Оценка E_5 . Из (4.15) и (4.18) следует $E_5 \leq E_{5,1} + E_{5,2}$, где

$$E_{5,1} = \mathbb{E} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(\Delta_{N-1}(f) \mathbb{I}_{v(f)=N})| \right),$$

$$E_{5,2} = 2\sqrt{nh} \sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} \mathbb{E}(\Delta_{N-1}(f)(Y_1)K_h(X_1 - x)).$$

Поскольку $\{v(f) = N\} \subset \{\Delta_{N-1}(f) \leq m_{N-1}\}$, то из неравенства (4.13) имеем

$$E_{5,1} \leq C\delta_{N-1}\sqrt{\mathbf{H}(\delta_N)}. \quad (4.23)$$

Для величины $E_{5,2}$ справедлива верхняя оценка

$$E_{5,2} \leq C\sqrt{nh} \sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} d_1(\Delta_{N-1}(f)). \quad (4.24)$$

Из определения (4.16) величины N имеем

$$\sqrt{nh} \sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} d_1(\Delta_{N-1}(f)) \leq \delta_{N-1}\sqrt{nh} = 2\psi(\delta).$$

Последняя оценка вместе с (4.23) и (4.24) приводит к неравенству

$$E_5 \leq C\delta_N\sqrt{\mathbf{H}(\delta_N)} + C\psi(\delta). \quad (4.25)$$

Оценка E_6 . Заметим, что

$$\{v(f) \geq k, \Delta_k(f) \leq m_{k-1}\} \subset \{\Delta_k(f) \leq m_{k-1}, \Delta_{k-1}(f) \leq m_{k-1}\}.$$

Верхняя грань в E_6 равна максимуму по конечному множеству функций с числом элементов, меньшим или равным $\mathbf{N}(\delta_k)$. Если g — любая функция, принадлежащая этому множеству, то для нее имеет место $d_p(g) \leq 2\delta_{k-1}$ и $\|g\|_\infty \leq 2m_{k-1}$. Тогда неравенство (4.13) приводит к оценке

$$E_6 \leq C \sum_{k=1}^{N-1} \delta_{k-1} \sqrt{\mathbf{H}(\delta_k)}. \quad (4.26)$$

Завершим доказательство теоремы 4.1. Собирая вместе оценки E_i , $i = 1, \dots, 6$, из неравенства (4.17) получаем

$$E\left(\sup_{f \in \mathcal{F}_\delta(m)} |Z_n(f)|\right) \leq C\left(\psi(\delta) + \sum_{k=1}^N \delta_k \mathbf{H}^{1/(2t)}(\delta_k)\right). \quad (4.27)$$

Принимая во внимание определение $\mathbf{H}$ и то, что $t \leq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \delta_k \mathbf{H}^{1/(2t)}(\delta_k) &\leq 2\left(\sum_{j \geq 0} \sqrt{H(\delta_j)} \sum_{k \geq j} \delta_k^t\right)^{1/t} \\ &\leq 2\left(\frac{2^t}{2^t - 1}\right)^{1/t} \left(\sum_{j \geq 0} \delta_j^t \sqrt{H(\delta_j)}\right)^{1/t} \\ &\leq 2\left(\frac{2^t}{2^t - 1}\right)^{1/t} \left(4 \int_0^\delta \sqrt{H(\varepsilon)} d(\varepsilon^t)\right)^{1/t} = 2\left(\frac{2^t}{2^t - 1}\right)^{1/t} (4\psi(\delta))^{1/t}, \end{aligned}$$

что вместе с (4.27) и (4.9) завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Методом доказательства теоремы 2.3 из [1] в работе [10] была получена плотность семейства мер $\{\nu_n(f), f \in \mathcal{F}\}$ в пространстве $\ell^\infty(\mathcal{F})$ при условии перемешивания $\alpha(n) \leq b^n$ и условии метрической энтропии с включением $\mathbb{H}(\mathcal{F}, \varepsilon, d_1(\cdot)) < \varepsilon^{-b}$ для некоторого $b \in (0, 1)$, где $\mathcal{F} = \{\mathbb{I}_C, C \in \mathcal{C}\}$ и $\mathcal{C}$ – класс измеримых множеств в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Эти условия включают зависимость двух σ -алгебр, порожденных бесконечными наборами с.в., в то время как условия В1, В2 позволяют рассматривать одну из этих σ -алгебр, образованную парой с.в. Кроме того, мы предполагаем только степенную скорость убывания коэффициентов перемешивания.

Автор благодарен профессору А. В. Булинскому за помощь в работе. Также автор признателен профессору В. Полонику за обсуждение работы [10] и профессору Д. Туану за указание на статью [13].

Список литературы

1. *Alexander K. S.* Probability inequalities for empirical processes and law of the iterated logarithm // *Annals of Probability*. 1984. V. 12. № 4. P. 1041–1067.
2. *Bosq D.* Nonparametric Statistics for Stochastic Processes // *Lecture Notes in Statistics*. № 110. N. Y.: Springer-Verlag, 1998.
3. *Dedecker J.* Exponential inequalities and functional central limit theorems for random fields // *ESAIM: Probab. Statist.* 2001. № 5. P. 77–104.
4. *Dedecker J., Rio E.* On the functional central limit theorem for stationary processes // *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*. 2000. № 36. P. 1–34.
5. *Doukhan P.* Mixing. Properties and Examples // *Lecture Notes in Statistics*. № 85. N. Y.: Springer-Verlag, 1994.
6. *Doukhan P., Massart P., Rio E.* Invariance principles for absolutely regular empirical processes // *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*. 1995. № 31. P. 393–427.
7. *Fan J., Truong Y. K.* Nonparametric regression with errors in variables // *Ann. Statist.* 1993. № 21. P. 1900–1925.

8. *Franke J., Härdle W., Kreiss J.-P., Mercurio D.* Nonparametric Estimation in a Stochastic Volatility Model Recent Advances and Trends in Nonparametric Statistics / Eds. M. G. Akritas, D. N. Politis. Elsevier, 2003. P. 303–312.
9. *Parzen E.* On estimation of a probability density function and mode // Ann. Math. Statist. 1962. № 33. P. 1065–1076.
10. *Polonik W., Yao Q.* Set-indexed conditional empirical and quantile processes based on dependent data // J. Multivar. Anal. 2002. № 80. P. 234–255.
11. *Scott L. O.* Option pricing when the variance changes randomly: Theory, Estimation and Application // J. Financial Quant. Anal. 1987. № 22. P. 419–438.
12. *Taylor S. J.* Modelling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study // Math. Finance. 1994. № 4. P. 183–204.
13. *Tuyen D. Q.* Central Limit Theorems for Mixing Arrays // To appear in Vietnam Journal of Mathematics. <http://www.math.ac.vn/library/download/e-print/02/pdf/dqtuyen2.pdf>.
14. *Ziegler K.* On the asymptotic normality of kernel regression estimators of the mode in the nonparametric random design model // J. Statist. Plann. Inf. 2003. № 115. P. 123–144.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
21.07.2004