Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Царьков, Сглаживание гильбертовозначных равномерно непрерывных отображений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 4, 149–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/im651>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:52:45

УДК 517.17

И. Г. Царьков

Сглаживание гильбертовозначных равномерно непрерывных отображений

Приближается в равномерной норме гильбертовозначное равномерно непрерывное отображение, заданное на пространстве l_p , $p \geq 2$, отображениями, у которых ограничена 1-я производная и которые обладают максимальной локальной гладкостью, совпадающей с гладкостью пространства. Этот результат является окончательным в смысле гладкости сглаживающих отображений, так как существует 1-липшицево отображение пространства l_p , $p \geq 2$, в l_2 , не приближаемое в равномерной метрике отображением, имеющим равномерно непрерывную первую производную.

Библиография: 19 наименований.

Введение

В работе изучается задача сглаживания равномерно непрерывных векторнозначных отображений, заданных на гильбертовом пространстве. Одной из первых аппроксимативных теорем в бесконечномерных пространствах в случае равномерной аппроксимации была известна теорема Бонича и Фремптона (см. [1]), которая устанавливает тесную связь между гладкостью банахова пространства X и аппроксимативными свойствами гладких функций на X . Под гладкостью пространства X они понимали такое наибольшее число r (может быть, ∞), для которого существует ненулевая финитная функция класса $C^r(X, \mathbb{R})$. В таком сепарабельном пространстве X , как они доказали, для любых $\varepsilon > 0$, банахова пространства Y , открытого множества $U \subset X$, отображения $f \in C(U, Y)$ существует сглаживающее отображение $g \in C^r(U, Y)$: $\|f - g\| < \varepsilon$. Имеются варианты этой теоремы и для аналитических функций (см. [2]).

Отметим, что сглаживающие отображения здесь не являлись равномерно гладкими. Ф. Валеинтаном [3] была получена теорема о возможности продолжения гильбертовозначного липшицевого отображения с сохранением константы Липшица с произвольного подмножества гильбертового пространства на все это пространство. Отсюда легко выводится, что всякое равномерно непрерывное гильбертовозначное отображение, заданное на произвольном подмножестве гильбертового пространства, можно равномерно приблизить равномерно липшицевым отображением. Сглаживанием равномерно непрерывных действительных функций, заданных на шарах в гильбертовых пространствах и пространствах L_p , многочленами и некоторыми классами равномерно гладких функций занимались также А. С. Немировский и С. М. Семенов (см. [4]–[7]). Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах автора [8]–[17]. Упомянем также монографию [18],

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00248).

в которой, в частности, делается обзор по тематике приближения и продолжения равномерно непрерывных отображений. Здесь же будет доказана теорема о равномерном приближении гильбертовозначного равномерно непрерывного отображения, заданного на гильбертовом пространстве, бесконечно дифференцируемыми отображениями, имеющими ограниченную первую производную. Ранее автором было показано, что существует 1-липшицево отображение гильбертова пространства в себя, не приближаемое в равномерной метрике отображением, имеющим равномерно непрерывную первую производную.

§ 1. Липшицевый ε -сдвиг во всюду плотное линейное многообразие

Пусть X – действительное банахово пространство, а $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – набор его подпространств, соответствующий шаудеровскому разложению пространства X (см. [19]) и обладающий свойствами:

1) $L_m \subset L_{m+1}$ для всех $m \in \mathbb{N}$, и линейное многообразие $\mathcal{L} = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_m$ всюду плотно в X ;

2) для каждого $m \in \mathbb{N}$ существуют проекторы $P_m: X \xrightarrow{\text{на}} L_m$ такие, что $\|\text{Id} + P_m - P_{m+1}\| = 1$, $P_m = P_m \circ P_{m+1}$ для всех $m \in \mathbb{N}$, причем базисная константа $\sup_m \|P_m\| \stackrel{\text{def}}{=} b = 1$.

Такой набор подпространств в дальнейшем будем называть *регулярным*.

Отметим, что в силу обычных свойств проекторов выполнено $P_m = P_{m+1} \circ P_m = P_m^2$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Через $\varrho(x, M)$ обозначим расстояние от точки $x \in X$ до множества M , т.е. величину $\inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}$. Как известно, $\varrho(x, M)$ является 1-липшицевой функцией, при этом последовательность $\{\varrho(x, L_k)\}$ монотонно убывает по k . Через $B(x, r)$ обозначим шар с центром x и радиусом r в пространстве X , т.е. множество $\{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}$. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{3})$ построим бесконечно дифференцируемую монотонно возрастающую функцию $\varphi = \varphi_\delta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, являющуюся C -липшицевой, где $C = C_\delta = \frac{1}{\varepsilon - 3\delta}$, и такую, что $\varphi \equiv 0$ на $[0, \delta]$, $\varphi \equiv 1$ на $[\varepsilon, +\infty)$. Для всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ положим $\theta_n(x) = \varphi \circ \varrho(x, L_n)$ и $e_n(x) = P_n(x) - P_{n+1}(x)$. Отметим, что $\{\theta_n(x)\} \downarrow_n$.

Построим отображение

$$F(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \theta_k(x)) e_k(x), \quad x \in X.$$

Для каждой точки $x \in X$ определим числа

$$m = m(x) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \varrho(x, L_k) < \delta\},$$

$$l = l(x) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} \mid \varrho(x, L_k) > \varepsilon\}, & \text{если } \varrho(x, L_1) > \varepsilon \\ 0, & \text{если } \varrho(x, L_1) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $l < m$. В силу плотности $\mathcal{L}$ верны соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x) = x, \quad \sum_{k=m+1}^{\infty} e_k(x) = P_{m+1}(x) - x.$$

Из определения чисел l , m следует, что

$$F(x) = x + \sum_{k=m+1}^{\infty} e_k(x) + \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(x)) e_k(x) = P_{m+1}(x) + \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(x)) e_k(x).$$

Докажем, что для всех $x \in X$ образ $F(x)$ принадлежит $B(x, 2\varepsilon)$. Для этого сначала заметим, что для всех $k \geq l+1$ верно неравенство $\|x - P_k(x)\| \leq 2\varrho(x, L_k) \leq 2\varepsilon$, поэтому $P_{l+1}(x), \dots, P_{m+1}(x) \in B(x, 2\varepsilon)$. Преобразуем выражение для $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= P_{m+1}(x) + \sum_{k=l+1}^m e_k(x) - \sum_{k=l+1}^m \theta_k(x) e_k(x) = P_{l+1}(x) \\ &\quad - \sum_{k=l+1}^m \theta_k(x) (P_k(x) - P_{k+1}(x)) = P_{l+1}(x) + \sum_{k=l+1}^m \theta_k(x) P_{k+1}(x) \\ &\quad - \sum_{k=l+1}^m \theta_k(x) P_k(x) = P_{l+1}(x) + \sum_{k=l+2}^{m+1} \theta_{k-1}(x) P_k(x) - \sum_{k=l+1}^m \theta_k(x) P_k(x) \\ &= P_{l+1}(x) (1 - \theta_{l+1}(x)) + P_{m+1}(x) \theta_m(x) + \sum_{k=l+2}^m (\theta_{k-1}(x) - \theta_k(x)) P_k(x). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$(1 - \theta_{l+1}(x)) + \theta_m(x) + \sum_{k=l+2}^m (\theta_{k-1}(x) - \theta_k(x)) = 1$$

и $1 - \theta_{l+1}(x) \geq 0$, $\theta_m(x) \geq 0$, $\theta_{k-1}(x) - \theta_k(x) \geq 0$, $k = \overline{l+2, m}$, получим, что точка $F(x)$ принадлежит выпуклой оболочке точек $P_k(x)$, $k = \overline{l+1, m+1}$, а следовательно, $F(x) \in B(x, 2\varepsilon)$. Отметим здесь, что если для всех $k \in \mathbb{N}$ норма оператора $\text{Id} - P_k$ равна 1, то $\|x - P_k x\| = \varrho(x, L_k)$, и, следовательно, проводя такие же рассуждения, как и выше, получим, что $F(x) \in B(x, \varepsilon)$.

Докажем, что отображение F является 17-липшицевым. Для этого достаточно доказать, что на некоторой окрестности произвольной точки $x \in X$ это отображение 17-липшицево. Возьмем такую малую окрестность точки x , чтобы $l(x) \leq l(y)$ и $m(x) \geq m(y)$ для любой точки y из этой окрестности. Тогда

$$F(y) = P_{m+1}(y) + \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(y)) e_k(y),$$

где $m = m(x)$, $l = l(x)$, и

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\| &\leq \|P_{m+1}(x - y)\| + \left\| \sum_{k=l+1}^m (\theta_k(y) - \theta_k(x)) e_k(x) \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(y)) (e_k(x) - e_k(y)) \right\|. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части предыдущего неравенства, используя следующую лемму.

ЛЕММА 1. Для произвольных чисел $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{l+1, m}$, и точки $z \in X$ верно неравенство

$$\left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha_k e_k(z) \right\| \leq 4\|z\| \max_{k=l+1, m} |\alpha_k|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha_k \geq 0$, $k = \overline{l+1, m}$. Для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдутся положительные числа $\{\alpha'_k\}$ такие, что

$$\left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha_k e_k(z) \right\| \leq \left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha'_k e_k(z) \right\| + \varepsilon_1$$

и $|\alpha_k - \alpha'_k| \leq \varepsilon_1$. Положим $\alpha = \max_{k=\overline{l+1, m}} \alpha'_k > 0$. Докажем, что $(P_{n+1} - P_n) \times (P_k - P_{k+1}) = 0 \ \forall k \neq n$. Действительно, если $k > n$, то

$$\begin{aligned} (P_{n+1} - P_n)(P_k - P_{k+1}) &= P_{n+1}P_k - P_{n+1}P_{k+1} - P_nP_k + P_nP_{k+1} \\ &= P_{n+1} - P_{n+1} - P_n + P_n = 0; \end{aligned}$$

а если $k < n$, то

$$\begin{aligned} (P_{n+1} - P_n)(P_k - P_{k+1}) &= P_{n+1}P_k - P_{n+1}P_{k+1} - P_nP_k + P_nP_{k+1} \\ &= P_k - P_{k+1} - P_k + P_{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$(P_{n+1} - P_n)(P_n - P_{n+1}) = P_{n+1}P_n - P_{n+1}^2 - P_n^2 + P_nP_{n+1} = P_n - P_{n+1}.$$

Для оператора $P = \text{Id} - P_{n+1} + P_n$ верны соотношения

$$\begin{aligned} P(P_n - P_{n+1}) &= 0, \\ \left\| \sum_{k=l+1, k \neq n}^m \alpha'_k e_k(z) \right\| &= \left\| P \left(\sum_{k=l+1, k \neq n}^m \alpha'_k e_k(z) + \alpha e_n(z) \right) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{k=l+1, k \neq n}^m \alpha'_k e_k(z) + \alpha e_n(z) \right\|. \end{aligned}$$

Обозначим $\beta = \frac{\alpha'_n}{\alpha} \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha'_k e_k(z) \right\| &\leq (1 - \beta) \left\| \sum_{k=l+1, k \neq n}^m \alpha'_k e_k(z) \right\| \\ &+ \beta \left\| \sum_{k=l+1, k \neq n}^m \alpha'_k e_k(z) + \frac{1}{\beta} \alpha'_n e_n(z) \right\| \leq (1 - \beta) \left\| \sum_{k=l+1, k \neq n}^m \alpha'_k e_k(z) + \alpha e_n(z) \right\| \\ &+ \beta \left\| \sum_{k=l+1, k \neq n}^m \alpha'_k e_k(z) + \alpha e_n(z) \right\| = \left\| \sum_{k=l+1, k \neq n}^m \alpha'_k e_k(z) + \alpha e_n(z) \right\|, \end{aligned}$$

поэтому

$$\left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha_k e_k(z) \right\| \leq \left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha'_k e_k(z) \right\| + \varepsilon_1 \leq \left\| \sum_{k=l+1, k \neq n}^m \alpha'_k e_k(z) + \alpha e_n(z) \right\| + \varepsilon_1.$$

В силу произвольности выбора ε_1 верно неравенство

$$\left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha_k e_k(z) \right\| \leq \left\| \sum_{k=l+1, k \neq n}^m \alpha'_k e_k(z) + \alpha e_n(z) \right\|.$$

Из произвольности выбора n получим

$$\left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha_k e_k(z) \right\| \leq \left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha e_k(z) \right\| = \alpha \|(P_{l+1} - P_{m+1})(z)\| \leq 2\alpha \|z\|.$$

Из произвольности выбора $\varepsilon_1 > 0$ получим, что

$$\left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha_k e_k(z) \right\| \leq 2\alpha_0 \|z\|,$$

где $\alpha_0 = \max_{k=\overline{l+1, m}} |\alpha_k|$. В случае, когда $\alpha_k \leq 0$, $k = \overline{l+1, m}$, можно аналогично доказать такое же неравенство.

Рассмотрим общий случай. Положим $\alpha_k^+ = \max\{\alpha_k, 0\}$, $\alpha_k^- = \min\{\alpha_k, 0\}$, $k = \overline{l+1, m}$. Тогда

$$\left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha_k e_k(z) \right\| \leq \left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha_k^+ e_k(z) \right\| + \left\| \sum_{k=l+1}^m \alpha_k^- e_k(z) \right\| \leq 4\alpha_0 \|z\|.$$

Лемма доказана.

В силу леммы 1 верны неравенства

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=l+1}^m (\theta_k(y) - \theta_k(x)) e_k(x) \right\| &= \left\| \sum_{k=l+1}^m (\theta_k(y) - \theta_k(x)) e_k(x - P_{l+1}(x)) \right\| \\ &\leq 4C_\delta \|x - y\| \|x - P_{l+1}(x)\| \leq 8C_\delta \varepsilon \|x - y\|, \\ \left\| \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(y)) (e_k(x) - e_k(y)) \right\| &= \left\| \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(y)) (e_k(x - y)) \right\| \\ &\leq 4\|x - y\|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|F(x) - F(y)\| \leq (5 + 8C_\delta \varepsilon) \|x - y\| \leq C^b \|x - y\|, \quad (1)$$

где $C^b = C_\delta^b = (5 + \frac{8\varepsilon}{\varepsilon - 3\delta})$. Выбирая $\delta = \frac{1}{9}\varepsilon$, получим, что $\|F(x) - F(y)\| \leq 17\|x - y\|$, т. е. F является липшицевым отображением с константой Липшица, равной 17.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что отображение $f: M \rightarrow Y$, где X, Y – банаховы пространства, $M \subset X$, принадлежит классу $H^\alpha(M) = H^\alpha(M, Y)$, $\alpha > 0$, если $f \in D^\beta(M)$ и $f^{(\beta)}$ принадлежит классу Гёльдера порядка $\alpha - \beta$ в некоторой окрестности каждой точки множества M , а β – наибольшее целое число, меньшее α . При этом под классом $H^\infty(M) = H^\infty(M, Y)$ будем подразумевать класс всех бесконечно дифференцируемых отображений $f: M \rightarrow Y$. Отображения $f \in H^\alpha(M, Y)$ имеют гладкость α (на множестве M).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что банахово пространство имеет гладкость $\alpha \in (0, \infty]$, если норма этого пространства является функцией класса $H^\alpha(X \setminus \{0\}, \mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – банахово пространство гладкости $\alpha \in (0, \infty]$, обладающее регулярным набором подпространств $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, и, дополнительно, $\|\text{Id} - P_m\| = 1$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и линейного многообразия $\mathcal{L} = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_m$ существует 17-липшицево отображение $F: X \rightarrow \mathcal{L}$ гладкости α , удовлетворяющее свойствам:

- 1) для всех $x \in X$ верно неравенство $\|x - F(x)\| \leq \varepsilon$;
- 2) для каждой точки $x \in X$ существует номер $n = n(x)$ такой, что $F(B(x, \frac{\varepsilon}{18})) \subset L_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из того, что для всех $k \in \mathbb{N}$ функция $\varrho(x, L_k) = \|x - P_k(x)\|$ принадлежит классу $H^\alpha(X \setminus L_k)$. Поэтому $\theta_k \in H^\alpha(X \setminus L_k)$, а, учитывая, что $\theta_k(x) \equiv 0$ во всех точках, находящихся на расстоянии от L_k , не превосходящем δ , получим, что $(1 - \theta_k(x))e_k(x) \in H^\alpha(X)$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что отображение

$$F(x) = P_{m+1}(x) + \sum_{k=l+1}^m (1 - \theta_k(x))e_k(x), \quad l = l(x), \quad m = m(x),$$

сохраняющее это представление на некоторой окрестности точки x , принадлежит классу $H^\alpha(X)$. Выберем $K = K(x) \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\varrho(x, L_K) < \frac{\varepsilon}{18}$. Поскольку для всех $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{18})$ верны неравенства

$$\varrho(y, L_K) \leq \varrho(x, L_K) + \|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{9} = \delta,$$

то

$$F(y) = P_{K+1}(x) + \sum_{k=1}^K (1 - \theta_k(x))e_k(x) \in L_{K+1}.$$

Следовательно, $F(B(x, \frac{\varepsilon}{18})) \subset L_{K+1}$. Остальные свойства доказаны ранее.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – банахово пространство гладкости $\alpha \in (0, \infty]$, обладающее регулярным набором конечномерных подпространств $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, и, дополнительно, $\|\text{Id} - P_m\| = 1$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и произвольного линейного многообразия $\mathcal{M} \subset X$, всюду плотного в X , существует 17-липшицево отображение $\Psi: X \rightarrow \mathcal{M}$ гладкости α , удовлетворяющее свойствам:

- 1) для всех $x \in X$ верно неравенство $\|x - \Psi(x)\| \leq 2\varepsilon$;
- 2) для каждой точки $x \in X$ существует натуральное число $n = n(x)$ такое, что множество $\Psi(B(x, \frac{\varepsilon}{30}))$ лежит в конечномерном пространстве размерности n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем две леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – набор вложенных конечномерных подпространств в банаховом пространстве X , для которых линейное многообразие $\mathcal{L} = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_m$ всюду плотно в X . Тогда для любых числа $\varepsilon > 0$ и линейного многообразия $\mathcal{M}$, всюду плотного в X , найдется линейное отображение $A: X \rightarrow X$ такое, что $\|A - \text{Id}\| \leq \varepsilon$, и $A(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности будем считать, что $\{n_m = \dim L_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Положим $n_0 = 0$. Пусть $Q_m: X \rightarrow L_m$ — какой-нибудь непрерывный проектор на подпространство L_m . Для каждого $m \in \mathbb{N}$ построим базис $\{v_i\}_{i=n_{m-1}+1}^{n_m}$ в пространстве $L_m \cap Q_1^{-1}(0) \cap \dots \cap Q_{m-1}^{-1}(0)$, состоящий из векторов единичной длины. Пусть

$$A_m = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n_m} |\alpha_i(y)| \mid y = \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i(y) v_i, \|y\| \leq 1 \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для произвольного числа $j \in \mathbb{N}$ такого, что $n_{m-1} < j \leq n_m$, найдется вектор $v'_j \in \mathcal{M}$ такой, что $\|v'_j\| = 1$ и $\|v_j - v'_j\| \leq \frac{2^{-m}\varepsilon}{A_m \|Q_m\|}$. Возьмем произвольную точку $x \in \mathcal{L}$, $\|x\| \leq 1$; тогда найдется число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $x = \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i(x) v_i$. Для всех $k = \overline{1, m}$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i(x) v_i \right\| &= \left\| Q_k \left(\sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i(x) v_i \right) \right\| \leq \|Q_k\| \left\| \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i(x) v_i \right\| \leq \|Q_k\|, \\ \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} |\alpha_i(x)| &\leq \sum_{i=1}^{n_k} |\alpha_i(x)| \leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n_k} |\beta_i| \mid \left\| \sum_{i=1}^{n_k} \beta_i v_i \right\| \leq \|Q_k\| \right\} \leq A_k \|Q_k\|. \end{aligned}$$

Вычислим уклонение точки $x' = \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i(x) v'_i$ от точки x :

$$\begin{aligned} \|x - x'\| &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\alpha_i(x)| \|v_j - v'_j\| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\alpha_i(x)| \frac{2^{-j}\varepsilon}{A_j \|Q_j\|} \leq \sum_{j=1}^m 2^{-j}\varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

Определим линейный оператор $\mathcal{A}$ на $\mathcal{L}$, положив $\mathcal{A}(x) = x' \in \mathcal{M}$ для каждого $x \in \mathcal{L}$. Тогда для всех $x \in \mathcal{L}$, $\|x\| = 1$, верны соотношения $\|\mathcal{A}(x) - x\| < \varepsilon$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ на $\mathcal{L}$ является ограниченным, а следовательно, продолжается по непрерывности на все пространство X , и $\|\mathcal{A} - \text{Id}\| \leq \varepsilon$, т. е. оператор $\mathcal{A}$ искомым. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть X — банахово пространство имеет гладкость $\alpha \in (0, \infty]$, $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset X$ — набор вложенных конечномерных подпространств, для которых линейное многообразие $\mathcal{L} = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_m$ всюду плотно в X . Тогда для любых чисел $\varepsilon, \delta > 0$ и линейного многообразия $\mathcal{M}$, всюду плотного в X , найдется $(1 + \delta)$ -липшицево отображение $\Phi \in H^\alpha(X, X)$ такое, что $\Phi(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M}$ и $\|\Phi(x) - x\| \leq \varepsilon$ для всех $x \in X$; и для всех $n, k \in \mathbb{N}$ множество $\Phi(B(0, n) \cap L_k)$ лежит в подпространстве размерности $N = (n + 1) \dim L_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности будем считать, что $\delta \in (0, \varepsilon)$. В силу предыдущей леммы для каждого числа $n \in \mathbb{Z}_+$ найдется линейный оператор $\mathcal{A}_n: X \rightarrow X$ такой, что $\|\mathcal{A}_n - \text{Id}\| < \delta 4^{-4(n+2)}$ и $\mathcal{A}_n(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M}$. Тогда для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_{n-1}\| &\leq \|\mathcal{A}_n - \text{Id}\| + \|\text{Id} - \mathcal{A}_{n-1}\| \leq \delta 4^{-4(n+2)} + \delta 4^{-4(n+1)} \\ &\leq 2\delta 4^{-4(n+1)} \leq \frac{1}{2} \delta 4^{-4n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим 2-липшицеву функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такую, что $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 0$ на $(-\infty, 0]$ и $\psi \equiv 1$ на $[1, \infty)$. Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ и произвольного $x \in X$ положим $\psi_m(x) = \psi(\|x\| - m)$. Построим функцию

$$\Phi(x) = \mathcal{A}_0(x)(1 - \psi_0(x)) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_m(x)(1 - \psi_m(x))\psi_{m-1}(x).$$

Отметим, что если $\|x\| \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, то $\psi_m(x) \equiv 0$ для всех $m \geq n$ и $\psi_m(x) \equiv 1$ для всех $m \leq n-2$. Поэтому для таких x верно равенство

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \mathcal{A}_{n-1}(x)(1 - \psi_{n-1}(x))\psi_{n-2}(x) + \mathcal{A}_n(x)(1 - \psi_n(x))\psi_{n-1}(x) \\ &= \mathcal{A}_{n-1}(x)(1 - \psi_{n-1}(x)) + \mathcal{A}_n(x)\psi_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\Phi(B(0, n) \cap L_k)$ является подмножеством линейной оболочки подпространств $\mathcal{A}_j(L_k)$, $j = \overline{0, n}$, т.е. содержится в подпространстве размерности $N = (n+1) \dim L_k$. Кроме того, если $\|x\|, \|y\| \in (n-1, n]$, то

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - \Phi(y)\| &\leq \|\mathcal{A}_{n-1}(x-y)(1 - \psi_{n-1}(x)) + \mathcal{A}_n(x-y)\psi_{n-1}(x)\| \\ &\quad + \|(\mathcal{A}_n(y) - \mathcal{A}_{n-1}(y))(\psi_{n-1}(x) - \psi_{n-1}(y))\| \leq \|x - y\| \\ &\quad \times \left\{ (1 + \delta 4^{-4(n+1)})(1 - \psi_{n-1}(x)) + (1 + \delta 4^{-4(n+2)})\psi_{n-1}(x) + \frac{1}{2} \delta 4^{-4n} 2n \right\} \\ &\leq (1 + \delta 4^{-4(n+1)} + \delta n 4^{-4n})\|x - y\| \leq (1 + \delta)\|x - y\|, \end{aligned}$$

т.е. Φ является $(1 + \delta)$ -липшицевой. По построению $\Phi \in H^\alpha(B(0, n) \setminus B(0, n-1))$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а следовательно, $\Phi \in H^\alpha(X)$ (гладкость в нуле легко проверяется отдельно). Кроме того, для всех $x \in X$, $\|x\| \in (n-1, n]$, верны соотношения

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - x\| &= \|\mathcal{A}_{n-1}(x)(1 - \psi_{n-1}(x)) + \mathcal{A}_n(x)\psi_{n-1}(x) - x(1 - \psi_{n-1}(x)) - x\psi_{n-1}(x)\| \\ &\leq \|\mathcal{A}_{n-1}(x) - x\|(1 - \psi_{n-1}(x)) + \|\mathcal{A}_n(x) - x\|\psi_{n-1}(x) \\ &\leq \delta 4^{-4(n+1)}\|x\|(1 - \psi_{n-1}(x)) + \delta 4^{-4(n+2)}\|x\|\psi_{n-1}(x) \leq \delta 4^{-4(n+1)}\|x\| \\ &\leq \delta 4^{-4(n+1)}n < \delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|\Phi(x) - x\| < \varepsilon$ для всех $x \in X$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Из формулы (1), выбирая $\delta = \frac{1}{15} \varepsilon$, получим, что $C^b \leq 15$, и, следовательно, $\|F(x) - F(y)\| \leq 15\|x - y\|$, т.е. F является липшицевым отображением с константой Липшица, равной 15. При этом так же, как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что $F(B(x, \frac{\varepsilon}{30})) \subset L_{m+1}$ для некоторого $m = m(x)$. В силу леммы 3 найдется $\frac{17}{15}$ -липшицево отображение $\Phi \in H^\alpha(X, X)$ такое, что $\Phi(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M}$ и $\|\Phi(x) - x\| \leq \varepsilon$ для всех $x \in X$; и для всех $n, k \in \mathbb{N}$ множество $\Phi(B(0, n) \cap L_k)$ лежит в подпространстве размерности $N = (n+1) \dim L_k$. Положим

$$\Psi = \Phi \circ F: X \rightarrow \mathcal{M}.$$

Нетрудно видеть, что оно 17-липшицево и для всех $x \in X$ верно неравенство

$$\|\Psi(x) - x\| \leq \|\Phi \circ F(x) - F(x)\| + \|F(x) - x\| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Кроме того, $B(x, \frac{\varepsilon}{30}) \subset B(0, \|x\| + \frac{\varepsilon}{30})$, и, следовательно, $F(B(x, \frac{\varepsilon}{30})) \subset L_{m+1} \cap B(0, N)$, где N – натуральное число, большее, чем $15(\|x\| + \frac{\varepsilon}{30})$. Следовательно, множество $\Psi(B(x, \frac{\varepsilon}{30}))$ лежит в пространстве размерности $n = (N+1) \dim L_{m+1}$. Теорема доказана.

§ 2. Сглаживание функций

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – банахово пространство гладкости $\alpha \in (0, \infty]$, обладающее регулярным набором конечномерных подпространств $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, и, дополнительно, $\|\text{Id} - P_m\| = 1$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Тогда для любых чисел $\varepsilon, C > 0$ и произвольных банахова пространства Y , C -липшицевого отображения $f: X \rightarrow Y$ существует α -гладкое $17C$ -липшицево отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ такое, что $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2C+1}$. По теореме 1 существует α -гладкое 17 -липшицево отображение $F: X \rightarrow \mathcal{L} = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_m$ такое, что $\|x - F(x)\| \leq \varepsilon_1$ для всех $x \in X$ и найдется число $m = m(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $F(B(x, \frac{\varepsilon_1}{18})) \subset L_m$. Пусть $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ – такой набор единичных векторов из $\mathcal{L}$, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется $n_m \in \mathbb{N}$ такое, что линейная оболочка векторов $\{v_j\}_{j=1}^{n_m}$ содержит подпространство L_m . Рассмотрим неотрицательную финитную бесконечно дифференцируемую функцию $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, носитель которой содержится в отрезке $[-1, 1]$ и $\int_{\mathbb{R}} \tau(t) dt = 1$. Для произвольных $a > 0$ и $j \in \mathbb{N}$ определим оператор $R_{j,a}: C(X, Y) \rightarrow C(X, Y)$, положив

$$g_{j,a} = R_{j,a}(g(x)) = \int_{\mathbb{R}} g(x + v_j t) \tau_a(t) dt = g \star \tau_a,$$

где $\tau_a(t) = \frac{1}{a} \tau(\frac{t}{a})$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k g_{j,a}}{\partial v_j^k}(x) &= \frac{\partial^k}{\partial u^k} R_{j,a}(g(x + uv_j)) \Big|_{u=0} = \frac{\partial^k}{\partial u^k} \int_{\mathbb{R}} g(x + v_j(u+t)) \tau_a(t) dt \Big|_{u=0} \\ &= \frac{\partial^k}{\partial u^k} \int_{\mathbb{R}} g(x + v_j v) \tau_a(v-u) dv \Big|_{u=0} \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x + v_j v) \frac{\partial^k}{\partial u^k} \tau_a(v-u) \Big|_{u=0} dv \in C(X, Y). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^k}{\partial v_1^{k_1} \dots \partial v_n^{k_n}} R_{j_1, a_1} \circ \dots \circ R_{j_n, a_n}(g) = (-1)^k g \star \frac{\partial^{k_1}}{\partial v_1^{k_1}} \tau_{a_1} \star \dots \star \frac{\partial^{k_n}}{\partial v_n^{k_n}} \tau_{a_n} \in C(X, Y),$$

и, более того, верно следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если отображение g ограничено на шаре $B(x, \sum_{i=1}^n a_i)$, то модуль этой производной ограничен константой, зависящей только от чисел $a_1, \dots, a_n$, и $\sup_{y \in B(x, \sum_{i=1}^n a_i)} \|g(y)\|$. Кроме того, для всех пар (j, a) верно неравенство $\|g_{j,a}\| \leq \sup_{y \in B(x, a)} \|g\|$.

Кроме того, для любой точки $x \in X$ верны соотношения

$$\begin{aligned} \|g(x) - g_{j,a}(x)\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}} g(x) \tau_a(t) dt - \int_{\mathbb{R}} g(x + v_j t) \tau_a(t) dt \right\| \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}} (g(x) - g(x + v_j t)) \tau_a(t) dt \right\| = \left\| \int_{-a}^a (g(x) - g(x + v_j t)) \tau_a(t) dt \right\| \\ &\leq \omega(g, a) \int_{-a}^a \tau_a(t) dt \leq \omega(g, a), \end{aligned}$$

т. е. норма разности $g(x)$ и $g_{j,a}(x)$ оценивается через модуль непрерывности отображения g с шагом a . Для произвольных $x_1, x_2 \in X$ верна оценка

$$\|g_{j,a}(x_1) - g_{j,a}(x_2)\| = \left\| \int_{\mathbb{R}} (g(x_1 + v_j t) - g(x_2 + v_j t)) \tau_a(t) dt \right\| \leq \omega(g, \|x_1 - x_2\|).$$

Следовательно, $\omega(g_{j,a}, t) \leq \omega(g, t)$ для всех $t \geq 0$.

Положим $a_n = \frac{\varepsilon}{2(C+1)} 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_0 = f$, $f_n = R_{n,a_n} \circ \dots \circ R_{1,a_1}(f)$. Тогда $\omega(f_n, t) \leq \omega(f, t)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ и верны неравенства

$$\begin{aligned} \|f_n - f_{n+1}\| &\leq \omega(f_n, a_{n+1}) \leq \omega(f_{n-1}, a_{n+1}) \leq \dots \\ &\dots \leq \omega(f, a_{n+1}) \leq C a_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2^{(n+2)}}. \end{aligned}$$

Следовательно, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{\text{def}}{=} f_\infty$, и отображение f_∞ — C -липшицево.

В силу замечания для всех $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, величина $\left\| \frac{\partial^k}{\partial v_1^{k_1} \dots \partial v_n^{k_m}} f_n(x) \right\|$ ограничена константой, зависящей только от m и

$$A_m \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})} \left\| \frac{\partial^k}{\partial v_1^{k_1} \dots \partial v_n^{k_m}} f_m(y) \right\|.$$

Учитывая, что A_m в силу замечания зависит только от m и $\sup_{y \in B(x, \varepsilon)} \|f(y)\|$, мы получим, что отображение f_∞ бесконечно дифференцируемо по направлениям линейного многообразия $\mathcal{L}$. Кроме того, для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\|f - f_n\| \leq \sum_{i=1}^n \|f_i - f_{i-1}\| < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

поэтому $\|f - f_\infty\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\varphi = f_\infty \circ F$. Нетрудно проверить, что отображение φ — $17C$ -липшицево, и для всех точек $x \in X$ верна оценка

$$\begin{aligned} \|f(x) - \varphi(x)\| &\leq \|f(x) - f(F(x))\| + \|f(F(x)) - f_\infty(F(x))\| \\ &\leq C\|x - F(x)\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq C\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку для всех точек $x \in X$ найдется число $m = m(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $F(B(x, \frac{\varepsilon_1}{18})) \subset L_m$, а $f_\infty|_{L_m} \in C^\infty(L_m)$, то $\varphi \in H^\alpha(B(x, \frac{\varepsilon_1}{18}))$. Следовательно, $\varphi \in H^\alpha(X)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть H — действительное сепарабельное гильбертово пространство. Тогда существует число $C > 0$ такое, что для любого равномерно непрерывного отображения $f: H \rightarrow H$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $C \frac{\omega(f, \varepsilon)}{\varepsilon}$ -липшицево отображение $\varphi \in C^\infty(H, H)$, что $\|f - \varphi\| \leq C\omega(f, \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [9] было показано, что существует такая абсолютная константа $K > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $K \frac{\omega(f, \varepsilon)}{\varepsilon}$ -липшицева функция $g: H \rightarrow H$, для которой верна оценка

$$\|f - \varphi\| \leq K\omega(f, \varepsilon).$$

Без потери общности можно считать, что $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \omega(f, \varepsilon) > 0$. В силу теоремы 3 (в гильбертовом пространстве можно считать, что базисная константа $b = 1$) найдется $17K \frac{\omega(f, \varepsilon)}{\varepsilon}$ -липшицево отображение $\varphi \in C^\infty(H, H)$ такое, что $\|g - \varphi\| \leq \delta = \omega(f, \varepsilon)$. Тогда

$$\|f - \varphi\| \leq \|f - g\| + \|g - \varphi\| \leq (K + 1)\omega(f, \varepsilon).$$

Теорема доказана.

Через l_p , $1 \leq p < \infty$, обозначим банахово пространство действительных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой

$$\|x\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p \in (2, \infty)$. Тогда существует число $C = C(p) > 0$ такое, что для любого равномерно непрерывного отображения $f: l_p \rightarrow l_2$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $C \frac{\omega(f, \varepsilon)}{\varepsilon}$ -липшицево отображение $\varphi \in H^\alpha(l_p, l_2)$, что $\|f - \varphi\| \leq C\omega(f, \varepsilon)$, где $\alpha = \infty$, если p — четное натуральное число, и $\alpha = p$, если p не является четным числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [17] было показано, что существует такая константа $K = K(p) > 0$, что для любого непустого подмножества $M \subset l_p$ и произвольных числа $D > 0$, D -липшицевого отображения $g: M \rightarrow l_2$ существует его продолжение, KD -липшицево отображение $\hat{g}: l_p \rightarrow l_2$. Возьмем в качестве множества $M \subset l_p$ максимальное по вложению множество ε -различимых точек, т.е. такое множество, что для произвольных различных точек $x, y \in M$ и любой точки $t \in l_p$ верны неравенства

$$\|x - y\|_p \geq \varepsilon, \quad \varrho(t, M) < \varepsilon.$$

Тогда отображение $g = f|_M$ является $\frac{2\omega(f, \varepsilon)}{\varepsilon}$ -липшицевым. Действительно, для произвольных различных точек $x, y \in M$ верны неравенства

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \omega(f, \|x - y\|_p) \leq \left(\frac{\|x - y\|_p}{\varepsilon} + 1 \right) \omega(f, \varepsilon) \leq \frac{2\|x - y\|_p}{\varepsilon} \omega(f, \varepsilon).$$

Продолжим это отображение до $2K \frac{\omega(f, \varepsilon)}{\varepsilon}$ -липшицевого $\hat{g}: l_p \rightarrow l_2$. Для произвольной точки $t \in l_p$ найдется такая точка $x \in M$, что $\|x - t\| < \varepsilon$. Отсюда

$$\begin{aligned} \|f(t) - \hat{g}(t)\|_2 &\leq \|f(x) - f(t)\|_2 + \|\hat{g}(x) - f(x)\|_2 + \|\hat{g}(t) - \hat{g}(x)\|_2 \\ &= \|f(x) - f(t)\|_2 + \|\hat{g}(t) - \hat{g}(x)\|_2 \leq \omega(f, \varepsilon) + 2K \frac{\omega(f, \varepsilon)}{\varepsilon} \|x - t\|_p \\ &\leq (2K + 1)\omega(f, \varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|f - \widehat{g}\| \leq (2K + 1)\omega(f, \varepsilon).$$

Отметим, что пространство l_p удовлетворяет условиям теоремы 3. В качестве регулярного набора подпространств $\{L_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ можно взять координатные плоскости, натянутые на первые m канонических базисных векторов, и при этом $b = 1$. Без потери общности можно считать, что $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \omega(f, \varepsilon) > 0$. В силу теоремы 3 найдется $34K \frac{\omega(f, \varepsilon)}{\varepsilon}$ -липшицево отображение $\varphi \in H^\alpha(l_p, l_2)$ такое, что $\|\widehat{g} - \varphi\| \leq \delta = \omega(f, \varepsilon)$. Тогда

$$\|f - \varphi\| \leq \|f - \widehat{g}\| + \|\widehat{g} - \varphi\| \leq 2(K + 1)\omega(f, \varepsilon).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Иллс Дж. Основания глобального анализа // УМН. 1969. Т. 24. № 3(147). С. 157–210.
2. Kurzweil J. On approximation in real Banach spaces // Studia Math. 1954. V. 14. № 2. P. 214–231.
3. Valentine F. A. A Lipschitz conditions preserving extension for a vector function // Amer. J. Math. 1945. V. 67. № 1. P. 83–93.
4. Немировский А. С. Гладкая и полиномиальная аппроксимация непрерывных функций на гильбертовом пространстве: Дис. . . канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1973.
5. Семенов С. М. О симметрических функциях класса $D_u^2(H)$ // Функцион. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 3. С. 85–86.
6. Семенов С. М. Симметрические функции на пространствах L_p : Дис. . . канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1973.
7. Немировский А. С., Семенов С. М. О полиномиальной аппроксимации на гильбертовом пространстве // Матем. сб. 1973. Т. 92. № 2. С. 257–281.
8. Царьков И. Г. Сглаживание равномерно непрерывных отображений в пространствах L_p // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 3. С. 123–140.
9. Царьков И. Г. Сглаживание абстрактных функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 11. С. 119–144.
10. Царьков И. Г. Линейные методы в некоторых задачах сглаживания // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 6. С. 64–87.
11. Царьков И. Г. Приближение векторнозначных функций многочленами // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 3. С. 93–95.
12. Царьков И. Г. О продолжении и сглаживании векторнозначных функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 4. С. 187–220.
13. Царьков И. Г. Некоторые вопросы продолжения // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 6. С. 906–916.
14. Царьков И. Г. О гладких выборках из множеств почти чебышевских центров // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. № 2. С. 92–94.
15. Царьков И. Г. Сглаживание функций на гильбертовом шаре // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 410–419.
16. Царьков И. Г. Сглаживание функций в конечномерных пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 1. С. 199–214.
17. Царьков И. Г. Продолжение гильбертовозначных липшицевых отображений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1999. № 6. С. 9–16.
18. Benyamini Y., Lindenstrauss J. Geometric Nonlinear Functional Analysis: Colloquium Publications 48 // Amer. Math. Soc. 2000. V. 1.
19. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces I and II. Berlin: Springer-Verlag, 1996.