Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Васильев, Инварианты и когомологии первого порядка для пространств вложений самопересекающихся кривых в $\mathbb{R}^n$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 5, 3–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/im654>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:29:21

УДК 515.16

В. А. Васильев

Инварианты и когомологии первого порядка для пространств вложений самопересекающихся кривых в $\mathbb{R}^n$

Изучаются когомологии пространства типичных иммерсий $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с фиксированным набором трансверсальных самопересечений, в частности изотопические инварианты таких иммерсий при $n = 3$. При $n > 3$ вычислены младшие группы когомологий этого пространства, при $n = 3$ определены и вычислены группы инвариантов первого порядка в смысле, аналогичном принятому в теории узлов конечного порядка. Для этих инвариантов исследована их представимость рациональными комбинаторными формулами, обобщающими классическую формулу для индекса зацепления пары кривых в $\mathbb{R}^3$. Доказано существование такой комбинаторной формулы с полуцелыми коэффициентами и построено топологическое препятствие к целочисленности этих комбинаторных формул; как следствие, доказано, что один из базисных инвариантов четвертого порядка для узлов не представляется целочисленной формулой Поляка–Виро. Структура исследуемых групп когомологий зависит от существования планарной кривой с данным типом самопересечения. С другой стороны, по типу самопересечения автоматически строится цепной комплекс, вычисляющий эти когомологии, что дает простой гомологический критерий существования такой планарной кривой.

Библиография: 21 наименование.

§ 1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для любого натурального m m -хордовой диаграммой в $\mathbb{R}^1$ называется произвольный набор из $2m$ различных точек в $\mathbb{R}^1$ вместе с некоторым разбиением их на пары.

Эти пары изображаются гладкими дугами (хордами), соединяющими точки каждой пары (примеры хордовых диаграмм см. на рис. 1).

Рис. 1. Примеры хордовых диаграмм

Работа частично поддержана грантом Президента России НШ-1972.2003.01, программой “Современные проблемы теоретической математики” ОМН РАН и грантом АСИ-NIM-2004-243 (Noeuds et tresses).

Зафиксируем какую-нибудь m -хордовую диаграмму Θ , а также некоторое линейное вложение $l: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространство $\mathcal{K}(\Theta, n)$ – это пространство всех C^∞ -гладких отображений $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что:

а) $f(x) = f(y)$ для каждой из m пар $(x, y) \subset \mathbb{R}^1$, составляющих хордовую диаграмму Θ ;

б) f совпадает со стандартным вложением l вне некоторого компакта в $\mathbb{R}^1$.

Дискриминантом $\Sigma(\Theta, n)$ в этом пространстве называется множество всех отображений $f \in \mathcal{K}(\Theta, n)$, имеющих хотя бы одно дополнительное самопересечение (сверх m пересечений, вытекающих из принадлежности f к $\mathcal{K}(\Theta, n)$), или точку, в которой $f' = 0$, или самокасание в какой-нибудь из этих m точек самопересечения. Образ вложения l называется *осью* пространства $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, что $\mathcal{K}(\Theta, n)$ – аффинное пространство, дискриминант замкнут в нем и при $n > 2$ дополнение к дискриминанту плотно в $\mathcal{K}(\Theta, n)$.

Мы изучаем когомологии дополнительного пространства

$$\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n), \quad (1)$$

в том числе численные изотопические инварианты *типичных* отображений $f \in \mathcal{K}(\Theta, 3)$ (тавтологически, такие инварианты – это классы 0-мерных когомологий пространства (1) при $n = 3$).

В частности, мы вычисляем две младшие нетривиальные группы когомологий этого пространства при $n > 4$ и одну младшую группу при $n = 4$. Для их описания дадим еще два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [6]). *Граф пересечений*, связанный с хордовой диаграммой Θ , – это граф, вершины которого соответствуют хордам диаграммы Θ , причем две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда концы соответствующих хорд перемежаются в $\mathbb{R}^1$ (т.е. два конца каждой из них разделены каким-то концом другой). Число связных компонент графа пересечений обозначается через $\#(\Theta)$. Хордовая диаграмма Θ называется *неприводимой*, если $\#(\Theta) = 1$.

Например, графы пересечений трех диаграмм, представленных на рис. 1, – это соответственно пара изолированных точек, треугольник и отрезок. С любой связной компонентой графа пересечений в Θ связана хордовая поддиаграмма в Θ : это объединение тех хорд из Θ , которые соответствуют вершинам из этой компоненты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Хордовая диаграмма Θ *планарна*, если существует иммерсия $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ класса $\mathcal{K}(\Theta, 2) \setminus \Sigma(\Theta, 2)$. Например, на рис. 1 диаграммы a, b планарны, а диаграмма c непланарна. Число связных компонент графа пересечений таких, что соответствующие им хордовые поддиаграммы планарны (соответственно, непланарны), обозначается через $\boxplus(\Theta)$ (соответственно, $\boxminus(\Theta)$).

ТЕОРЕМА 1. Для любого $n > 3$ и любой m -хордовой диаграммы Θ группа $H^i(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$:

а) тривиальна при положительных i таких, что $i < n - 3$ или $n - 2 < i < 2n - 6$;

б) при $i = n - 3$ является свободной абелевой ранга $\binom{m}{2} + \#(\Theta)$, если n нечетно, и ранга $\binom{m}{2} + \#(\Theta)$, если n четно;

в) при $i = n - 2$ имеет ранг $\#(\Theta)$, если n нечетно, изоморфна $\mathbb{Z}^{\boxplus(\Theta)} \oplus \mathbb{Z}_2^{\boxplus(\Theta)}$, если n четно и больше 4, и содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}^{\boxplus(\Theta)} \oplus \mathbb{Z}_2^{\boxplus(\Theta)}$, при $n = 4$.

Эта теорема – прямое следствие формулируемых ниже теорем 2–4.

С другой стороны, мы явно строим цепной комплекс, вычисляющий эти гомологии, по хордовой диаграмме Θ . Это дает полиномиальный линейно-алгебраический алгоритм распознавания планарности хордовой диаграммы (о задаче такого распознавания см. также [9], [5], [10]).

Кольцо

$$H^*(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)) \quad (2)$$

обладает бесконечной возрастающей фильтрацией, аналогичной фильтрации ко-гомологий пространства узлов в $\mathbb{R}^n$, введенной в [15], и в частном случае $n = 3$ определяющей понятие порядка инварианта узла в $\mathbb{R}^3$. Мы вычисляем здесь первый нетривиальный член этой фильтрации, т. е. подгруппу

$$H_{(1)}^*(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)) \quad (3)$$

когомологий первого порядка в группе (2), строим комбинаторные формулы для таких ко-гомологий (в частности, для инвариантов, если $n = 3$) и указываем топологическое препятствие к целочисленности таких формул. Это препятствие является одновременно первым препятствием к целочисленности *комбинаторных формул Поляка–Виро* [11] для инвариантов узлов порядка $t + 1$; с его помощью мы показываем, что формулы Поляка–Виро для одного из инвариантов узлов 4-го порядка обязательно имеют коэффициенты с четными положительными знаменателями.

Определение ко-гомологий первого порядка мы приведем в п. 2.1, а сейчас разберем важнейший пример. Если $n = 3$, то 0-мерные ко-гомологии пространства (1) – это инварианты типичных (т. е. не дискриминантных) отображений класса $\mathcal{K}(\Theta, 3)$. Такие инварианты первого порядка можно выделить тем условием, что скачок их значений при простейшей локальной перестройке $\begin{smallmatrix} \perp \\ \perp \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{smallmatrix} \perp \\ \dashv \end{smallmatrix}$ (возникающей при мгновенном дополнительном самопересечении кривой $f(\mathbb{R}^1)$), т. е. разность значений инварианта на таких кривых после и до перестройки, зависит только от поведения нашей особой кривой вблизи этого дополнительного самопересечения (и расположения точек прообраза этого самопересечения в $\mathbb{R}^1$ между точками хордовой диаграммы Θ). Это условие можно выразить также в терминах *плоской диаграммы* кривой $f(\mathbb{R}^1)$, т. е. ее проекции на плоскость $\mathbb{R}^2$, снабженной информацией о том, какие ветви проходят выше над точками перекрестия этой проекции, не возникающими из самопересечений самой этой кривой $f(\mathbb{R}^1)$. А именно, каждый инвариант первого порядка должен удовлетворять уравнению

$$F\left(\begin{smallmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{smallmatrix}\right) - F\left(\begin{smallmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{smallmatrix}\right) = F\left(\begin{smallmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{smallmatrix}\right) - F\left(\begin{smallmatrix} \times & \times \\ \times & \times \end{smallmatrix}\right) \quad (4)$$

(ср. [4], [3]), где F – рассматриваемый инвариант, а выражения в скобках обозначают любые четыре отображения класса $\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)$, образы которых совпадают вне каких-то двух малых шаров, а в этих шарах ведут себя, как указано в соответствующих скобках. Уравнение должно выполняться для любой такой четверки отображений этого класса, независимо от их (общего) поведения вдали от этих шаров.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $n > 3$ и любой t -хордовой диаграммы Θ группа $H^i(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$ тривиальна при положительных $i < n - 3$ и канонически совпадает со своей подгруппой $H_{(1)}^i(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$ при $n - 3 \leq i < 2n - 6$.*

Как мы увидим из теорем 3, 4, сформулированных ниже, эта подгруппа $H_{(1)}^i(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$ нетривиальна только при i , равных $n - 3$ или $n - 2$.

Рис. 2. Носитель спектральной последовательности

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассматриваемая фильтрация на кольце (2) индуцируется некоторой спектральной последовательностью, вычисляющей элементы этого кольца и определяемой в п. 2.2 ниже. Нетривиальные члены $E_r^{p,q}$ этой спектральной последовательности при $r \geq 1$ лежат в угле $\{p < 0, q + (n - 2)p \geq 0\}$ (см. рис. 2, соответствующий случаю $n = 4$). При $n > 3$ спектральная последовательность сходится ко всей группе $H^*(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$ (а при $n = 3$ – лишь к некоторой ее важной подгруппе: группе когомологий конечного порядка). Теорема вытекает немедленно из существования и явного вида этой спектральной последовательности.

Группа $H_{(1)}^i(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$ описывается в следующих двух теоремах.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть n нечетно. Тогда для любой t -хордовой диаграммы Θ группа $H_{(1)}^i(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$:*

- а) *тривиальна при i , не равном $n - 3$ или $n - 2$;*
- б) *при $i = n - 2$ не содержит 2-кручения и ее ранг равен числу связанных компонент графа пересечений диаграммы Θ ;*

в) при $i = n - 3$ является свободной абелевой, ранг которой равен сумме биномиального коэффициента $\binom{m}{2}$ и того же числа компонент связности графа пересечений Θ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть n четно, $n > 2$. Тогда для любой m -хордовой диаграммы Θ группа $H_{(1)}^i(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$:

а) тривиальна при i , не равном $n - 3$ или $n - 2$;

б) при $i = n - 2$ является прямой суммой слагаемых $\mathbb{Z}$, соответствующих всем связным компонентам графа пересечений таким, что соответствующие им хордовые поддиаграммы планарны, и слагаемых $\mathbb{Z}_2$, соответствующих всем компонентам, связанным с непланарными хордовыми поддиаграммами;

в) при $i = n - 3$ является свободной абелевой, ранг которой равен сумме числа $\binom{m}{2}$ и числа планарных связных компонент графа пересечений.

Эти две теоремы будут доказаны в §2 с помощью некоторых вычислений, проведенных в §3, и одной теоремы В. О. Мантурова, устанавливающей геометрический критерий планарности хордовой диаграммы [10].

Рис. 3. Простейшая m -хордовая диаграмма

Рис. 4. Сглаживание уголков

Рис. 5. Нетривиальная хордовая диаграмма и иммерсия

ПРИМЕР 1. Пусть концы любой хорды хордовой диаграммы Θ не разделены в $\mathbb{R}^1$ концами других хорд (рис. 3). Тогда ранг группы $H_{(1)}^0(\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3))$ равен $\binom{m+1}{2}$. Порождающие ее инварианты отображений $f \in \mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$ имеют следующий смысл. Для любой типичной иммерсии $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ класса $\mathcal{K}(\Theta, 3)$ (рис. 4 слева) мы можем сгладить ее образ вблизи каждой точки самопересечения так, чтобы он рассыпался на m колечек, происходящих из интервалов с номерами $2, 4, \dots, 2m$, и один неособый длинный узел, составленный из (слегка деформированных) образов интервалов с номерами $1, 3, \dots, 2m - 1, 2m + 1$. Для каждых двух из этих $m + 1$ кривых (снабженных очевидными ориентациями) определен их (симметричный) индекс зацепления, который, конечно, инвариантен относительно деформаций иммерсии f в классе $\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь простейшую нетривиальную хордовую диаграмму Θ , представленную на рис. 5, и соответствующее пространство $\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$. В силу теоремы 3 группа инвариантов (т.е. 0-мерных классов когомологий) первого порядка отображений этого класса изоморфна $\mathbb{Z}^2$, ее образующие также легко сводятся к индексам зацепления. А именно, первая из этих образующих определяется следующим образом. Мы берем два цикла в графе $f(\mathbb{R}^1)$, первый из которых состоит из образов интервалов 1, 4, 5, а второй – из образов интервалов 2, 3; затем подходящим образом разводим эти циклы в $\mathbb{R}^3$ и берем индекс зацепления получающихся двух кривых. Однако если вблизи первой точки самопересечения этих циклов (в которой они соприкасаются “уголками”) такое разведение канонично (ср. рис. 4), то способ разведения двух гладких ветвей вблизи второй точки зависит от нашей воли. Это делает выбор соответствующего базисного инварианта неинвариантным относительно зеркальной симметрии в $\mathbb{R}^3$. Аналогично, вторая образующая – это индекс зацепления тем или иным способом разведенных циклов 1 + 2 + 5 и 3 + 4.

Теперь обсудим одномерные гомологии и когомологии пространств $\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$. При любой непустой хордовой диаграмме Θ одна образующая группы $H_1(\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3))$ очевидна: она задается вращением пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг своей оси $l(\mathbb{R}^1)$. Более того, каждой связной компоненте графа пересечений легко поставить в соответствие аналогичный одномерный цикл, состоящий из отображений, одинаковых вблизи точек самопересечения кривой $f(\mathbb{R}^1)$, не принадлежащих этой компоненте, и вращающих часть $f(\mathbb{R}^1)$, относящуюся к этой компоненте. (Точную конструкцию этих циклов см. в §5; там же мы увидим, что группа $H_{(1)}^1(\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3))$ когомологий первого порядка двойственна к группе, порожденной этими вращениями.) Аналогичным образом, при любом нечетном n свободные образующие группы $H_{(1)}^{n-2}(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$ реализуются вложенными $(n - 2)$ -мерными сферами. При этом существенно, что на такой сфере имеется ненулевое поле направлений. При четном n аналогичное построение, вообще говоря, невозможно: без такого поля можно обойтись лишь при построении сфер, соответствующих тем связным компонентам графа пересечений, которые определяют планарные хордовые поддиаграммы.

Далее мы исследуем представимость элементов группы (3) комбинаторными формулами, аналогичными классической формуле для индекса зацепления двух замкнутых кривых (учитывающей точки одной компоненты зацепления, лежащие над точками другой) или формулам Поляка–Виро [11] для инвариантов узлов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (ср. [11]). Пусть Θ – произвольная m -хордовая диаграмма. *Неориентированной* (соответственно, *ориентированной*) *гауссовой диаграммой первого порядка с основой* Θ называется объект, состоящий из диаграммы Θ и еще неупорядоченной (соответственно, упорядоченной) пары компонент множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$. Здесь мы будем рассматривать только гауссовы диаграммы первого порядка и для краткости называть их просто *гауссовыми диаграммами*.

Изображение такой диаграммы состоит из набора гладких дуг, задающих Θ , и ломаной линии, соединяющей какую-то точку одной из этих двух компонент с какой-либо точкой другой компоненты; если гауссова диаграмма ориентирована, т.е. эти компоненты упорядочены, то ломаная линия ориентируется от точки первой

компоненты к точке второй. Очевидно, для любой m -хордовой диаграммы Θ имеется всего $\binom{2m+1}{2}$ неориентированных и вдвое больше ориентированных гауссовых диаграмм с основой Θ .

Любой инвариант первого порядка, т. е. элемент группы $H_{(1)}^0(\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3))$, можно задать (с точностью до постоянной функции) линейной комбинацией неориентированных гауссовых диаграмм. Действительно, этот инвариант характеризуется скачками своих значений при переходе через неособые участки дискриминанта, т. е. при локальных перестройках типа

$$\perp \Rightarrow \vdash \Rightarrow \dashv.$$

Для любой пары близких кривых, разделенных такой перестройкой, имеется инвариантный способ выбрать одну из них положительной, а другую отрицательной. Скачком инварианта в неособой точке дискриминанта называется разность его значения в положительной кривой и значения в отрицательной. Из формулы (4) следует, что такой скачок зависит только от двух компонент множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$, в которых в момент перестройки происходит дополнительное пересечение, но не зависит от поведения отображения f вдали от этих точек. В искомую линейную комбинацию неориентированная гауссова диаграмма, определенная этой парой компонент, входит с коэффициентом, равным величине скачка при такой перестройке. Более общим образом, элементы групп $H_{(1)}^{n-3}(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$ с произвольными $n \geq 3$ также задаются линейными комбинациями неориентированных гауссовых диаграмм.

Другой способ задания инвариантов использует ориентированные гауссовы диаграммы; он моделирует классическую формулу для индекса зацепления пары кривых в $\mathbb{R}^3$. Этот способ состоит в следующем.

Рассмотрим произвольное отображение $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ класса $\mathcal{K}(\Theta, 3)$, типичное относительно проекции $\mathbb{R}^3$ на “плоскость стола” $\mathbb{R}^2$; термин “типичность” означает, что композиция f и этой проекции является иммерсией только с двойными точками трансверсального самопересечения. Рассмотрим также ориентированную гауссову диаграмму, состоящую из Θ и упорядоченной пары целых чисел $(i \neq j)$ из промежутка $[1, 2m + 1]$. Значение этой диаграммы на отображении f определяется как взвешенное число пар точек $(x, y) \in \mathbb{R}^1$ таких, что x принадлежит i -й слева компоненте множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$, y принадлежит j -й компоненте, проекции точек $f(x)$ и $f(y)$ в $\mathbb{R}^2$ совпадают и точка $f(x)$ лежит *ниже*¹, чем $f(y)$, т. е. проекция точки $f(x)$ на ориентированную прямую, ортогональную к $\mathbb{R}^2$, меньше, чем проекция $f(y)$; взвешенность означает, что такая пара (x, y) учитывается с коэффициентом 1 или -1 , в зависимости от ориентации упорядоченной пары векторов в $\mathbb{R}^2$, получающихся как проекции векторов $f'(x)$, $f'(y)$.

По линейности определяется значение на отображении f любой линейной комбинации ориентированных гауссовых диаграмм. Очевидно, что это значение не

¹В оригинальной работе М. Поляка и О. Виро [11] принято противоположное правило: конец стрелки соответствует той точке, которая ниже. Это правило очень усложняет вычисление дифференциалов в рассматриваемых комплексах, поэтому мы его изменяем: в нашем случае конец направлен вверх.

меняется, если f непрерывно изменяется в классе отображений, типичных относительно проекции в $\mathbb{R}^2$. Однако для того, чтобы быть инвариантом, т. е. постоянной функцией на каждой связной компоненте пространства $\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$, такая линейная комбинация должна удовлетворять некоторому гомологическому условию.

Мы исследуем вопрос о том, всякий ли инвариант первого порядка в этом пространстве можно реализовать линейной комбинацией ориентированных гауссовых диаграмм с целыми или рациональными коэффициентами; аналогичный вопрос имеет смысл и для прочих классов когомологий первого порядка при любом $n \geq 3$. Например, если $n = 3$ и хордовая диаграмма Θ простейшая (см. пример 1), то такая реализация всегда есть. Действительно, инвариант, получающийся из индекса зацепления двух колечек, можно задать единственной ориентированной гауссовой диаграммой, соединяющей какие-либо точки интервалов, из которых получают-ся эти колечки; аналогично, индекс зацепления любого колечка и длинной кривой задается суммой $m + 1$ таких диаграмм. Для общей хордовой диаграммы Θ и произвольного $n \geq 3$ ответ формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 5. 1) При любых $n \geq 3$ и Θ любой элемент группы $H_{(1)}^{n-3}(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$ реализуется линейной комбинацией ориентированных гауссовых диаграмм с целыми и полуцелыми коэффициентами.

2) Если n четно или хордовая диаграмма Θ планарна, то любой такой элемент реализуется линейной комбинацией ориентированных гауссовых диаграмм только с целыми коэффициентами.

ТЕОРЕМА 6. Если n нечетно и Θ непланарна, то найдется элемент группы $H_{(1)}^{n-3}(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$, не представимый целочисленными линейными комбинациями ориентированных гауссовых диаграмм.

Доказательства этих двух теорем (и точное определение участвующего в них понятия представимости классов когомологий) будут даны в § 4.

Опишем простой критерий, позволяющий распознавать представимость инварианта целочисленной линейной комбинацией в случае неприводимой диаграммы Θ . Как и ранее, любой целочисленный инвариант первого порядка задается (с точностью до постоянной функции, т. е. с точностью до выбора его значения в отмеченной точке пространства $\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$) целочисленной линейной комбинацией F неориентированных гауссовых диаграмм:

$$F = \sum_{a < b} \lambda_{a,b}(a \cdot b), \quad (5)$$

где $a \cdot b$ – обозначение для неориентированной хордовой диаграммы, состоящей из a -й и b -й (считая слева) связных компонент множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$, а $\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим какую-нибудь иммерсию $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ класса $\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$. Пусть $f_1: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – композиция иммерсии f и проекции $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Если иммерсия f – общего положения в классе $\mathcal{K}(\Theta, 3)$, а направление проектирования не совпадает с осью $l(\mathbb{R}^1)$ в $\mathbb{R}^3$, то f_1 – также иммерсия общего положения, в частности не имеет тройных точек и самокасаний. Однако f_1 может иметь больше двойных точек, чем f . Определим число $\alpha(\Theta, F, f)$ формулой

$$\alpha(\Theta, F, f) = \sum_{\substack{f_1(x)=f_1(y) \\ f(x) \neq f(y)}} \lambda_{\{x\}, \{y\}}, \quad (6)$$

где сумма берется по всем двойным точкам кривой $f_1(\mathbb{R}^1)$, не являющимся образами двойных точек кривой $f(\mathbb{R}^1)$, и для любой такой двойной точки $f_1(x) = f_1(y)$ число $\lambda_{\{x\},\{y\}}$ – это коэффициент из (5), где $\{x\}, \{y\}$ – номера компонент множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$, содержащих соответственно точки x, y .

ТЕОРЕМА 7. 1) *Вычет mod 2 числа $\alpha(\Theta, F, f)$ не зависит от выбора типичной иммерсии f (а зависит только от Θ и F).*

2) *Если это число нечетно для какой-нибудь типичной иммерсии f , то инвариант, определяющий линейную комбинацию F , не реализуется целочисленной линейной комбинацией ориентированных гауссовых диаграмм.*

3) *Если диаграмма Θ неприводима, то верно и обратное: если число $\alpha(\Theta, F, f)$ четно, то инвариант представим целочисленной линейной комбинацией ориентированных гауссовых диаграмм.*

Доказательство будет дано в § 4.

Например, в случае простейшей непланарной диаграммы Θ , описанной в примере 2, для обеих указанных там образующих группы $H_{(1)}^0(\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3))$ такой вычет, определенный иммерсией, изображенной на рис. 5, нечетен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вопрос о целочисленности комбинаторных формул мотивирован теорией инвариантов узлов. Всякий инвариант k -го порядка для узлов в $\mathbb{R}^3$ (см. [15]) определяет инвариант 1-го порядка для типичных $k - 1$ раз самопересекающихся иммерсированных кривых, инвариант 2-го порядка для $k - 2$ раз самопересекающихся кривых и т. д. Явное *интегрирование весовой системы*, т. е. построение инварианта с данной главной частью (а заодно и комбинаторной формулы этого инварианта) удобнее всего проводить обратной индукцией по числу пересечений, последовательно строя комбинаторные формулы для этих инвариантов самопересекающихся кривых в указанном порядке (см. [19]–[21]). В частности, формулы Поляка–Виро [11] для инвариантов узлов легче всего строить при помощи последовательности таких комбинаторных формул специального вида. Здесь мы по существу разбираем первый шаг этого индуктивного процесса. Согласно теореме М. Н. Гусарова [7] любой инвариант узла конечного порядка представим формулой Поляка–Виро с рациональными коэффициентами. Если инвариант $(m+1)$ -го порядка для узлов обладает *целочисленной* формулой Поляка–Виро, то соответствующий ему инвариант первого порядка для m раз самопересекающихся кривых представим целочисленной линейной комбинацией ориентированных гауссовых диаграмм. Таким образом, описанное в теореме 7 препятствие к существованию такого целочисленного представления для инвариантов самопересекающихся кривых является первым препятствием к целочисленности формулы Поляка–Виро для инварианта узлов.

Например, в случае единственного инварианта третьего порядка для узлов соответствующий инвариант первого порядка для дважды самопересекающихся кривых равен сумме двух образующих из примера 2, поэтому для него препятствие из теоремы 7 тривиально. Более того, исходный инвариант обладает целочисленной формулой Поляка–Виро (см. [14]), так что все следующие препятствия к этому также обращаются в нуль. С другой стороны, в § 4 мы докажем, что это препятствие нетривиально для одного из базисных целочисленных инвариантов узлов 4-го порядка, и, значит, у этого инварианта узлов заведомо не существует.

вует целочисленной формулы Поляка–Виро. Более того, даже если мы хотим построить $\mathbb{Z}_2$ -значную комбинаторную формулу для этого инварианта, приведенного по mod 2, нам потребуются члены, отличающиеся от ориентированных гауссовых диаграмм произвольного порядка (которые только и допускаются в формулах Поляка–Виро), например члены, предложенные в [21].

Образующие групп $H_{(1)}^{n-2}(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n))$ также реализуются комбинаторными формулами. Например, рассмотрим классический случай $n = 3$. Каждой хорде диаграммы Θ соответствует некоторый элемент группы $H_{(1)}^1(\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3))$: значение этого элемента на 1-мерном цикле, т. е. на гладком однопараметрическом семействе отображений $f_\tau \in \mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$, $\tau \in S^1$, вычисляется как взвешенное число значений параметра τ таких, что образ $f_\tau(x)$ какой-либо точки x , лежащей в $\mathbb{R}^1$ левее левого конца a хорды (a, b) , лежит в $\mathbb{R}^3$ выше точки $f_\tau(a) \equiv f_\tau(b)$. Мы покажем (см. предложение 7), что эти элементы, соответствующие хордам из одной компоненты графа пересечений, равны между собой, а набор таких элементов, соответствующих хордам, взятым по одной из каждой компоненты этого графа, является базисом группы $H_{(1)}^1(\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3))$.

Автор благодарен В. О. Мантурову, доказавшему теорему 10, и рецензенту за многочисленные пожелания по улучшению текста.

§ 2. Гомологическое вычисление

Аналогично [16], [17] вычисление когомологий пространства $\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)$ сводится к вычислению *гомологий Бореля–Мура конечной коразмерности* самого пространства $\Sigma(\Theta, n)$ при помощи своеобразной двойственности Александера²

$$\tilde{H}^i(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)) \simeq \overline{H}_{\omega-i-1}(\Sigma(\Theta, n)). \quad (7)$$

Здесь ω символизирует размерность пространства $\mathcal{K}(\Theta, n)$, через $\overline{H}_*$ обозначаются гомологии Бореля–Мура, т. е. гомологии одноточечной компактификации, приведенные по модулю точки, а всей группе в правой части (7) придается смысл при помощи конечномерных аппроксимаций пространства $\mathcal{K}(\Theta, n)$ (ср. [16], [17] и комментариев к формуле (9) ниже). В частности, при $n = 3$ инвариантам кривых (т. е. классам нульмерных когомологий) соответствуют элементы группы $\overline{H}_{\omega-1}(\Sigma(\Theta, n))$. Спектральная последовательность, изображенная на рис. 2, возникает при вычислении правой группы в (7) с помощью *симплициального разложения* дискриминанта; его конструкция обобщает аналогичную конструкцию из теории узлов, соответствующей случаю $m = 0$ (см. [15]–[17] и п. 2.2 ниже).

Вычисляемые в настоящей работе гомологии первого порядка совпадают с гомологиями *тавтологического разложения* дискриминанта, которое мы сейчас определим; оно соответствует первому столбцу этой спектральной последовательности.

2.1. Тавтологическое разрешение дискриминанта. Из определения легко следует, что дискриминант $\Sigma(\Theta, n) \subset \mathcal{K}(\Theta, n)$ является замыканием множества $\check{\Sigma}(\Theta, n)$, состоящего из таких отображений $f \in \mathcal{K}(\Theta, n)$, что существует

²В случае обычных конечномерных дискриминантов, т. е. множеств полиномов фиксированной степени с кратными корнями, подобную редукцию впервые применил В. И. Арнольд [1].

пара неособых (т. е. не принадлежащих Θ) различных точек $u, v \in \mathbb{R}^1$, для которых $f(u) = f(v)$. Тавтологическое разрешение $\sigma_1(\Theta, n)$ дискриминанта (которое мы сейчас определим) получается из этого определения устранением квантора существования: мы берем множество всех пар $((u, v); f)$, удовлетворяющих тем же условиям, и замыкаем его в некотором естественном пространстве, которое сейчас опишем.

Рассмотрим векторное пространство $\Phi(\Theta)$ всевозможных гладких функций $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, принимающих одинаковые значения в концах каждой хорды из Θ , и обозначим через $I(\Theta)$ грассманово многообразие, точки которого – это всевозможные векторные подпространства коразмерности 1 в $\Phi(\Theta)$. Пространство $B(\mathbb{R}^1 \setminus \Theta, 2)$ неупорядоченных пар различных точек из $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$ естественно вложено в $I(\Theta)$: каждой 2-конфигурации в $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$ соответствует подпространство, состоящее из функций, принимающих одинаковые значения в точках этой конфигурации. Пополненное конфигурационное пространство $B_2(\Theta)$ определяется как замыкание подмногообразия $B(\mathbb{R}^1 \setminus \Theta, 2)$ в $I(\Theta)$. Наконец, тавтологическое разрешение $\sigma_1(\Theta, n)$ дискриминанта $\Sigma(\Theta, n)$ определяется как некоторое подмножество в прямом произведении

$$B_2(\Theta) \times \mathcal{K}(\Theta, n), \quad (8)$$

а именно как замыкание в нем множества $\check{\sigma}_1(\Theta, n)$, состоящего из пар $((u, v); f)$ таких, что $\{u \neq v\} \subset \mathbb{R}^1 \setminus \Theta$ и $f(u) = f(v)$. Ограничение на $\sigma_1(\Theta, n)$ проекции $B_2(\Theta) \times \mathcal{K}(\Theta, n) \rightarrow B_2(\Theta)$ является аффинным расслоением, слой которого – подпространство коразмерности n в $\mathcal{K}(\Theta, n)$. Это пространство $\sigma_1(\Theta, n)$ естественным образом стратифицировано. Его максимальные страты – это связные компоненты описанного чуть выше незамкнутого подмножества $\check{\sigma}_1(\Theta, n) \subset B(\mathbb{R}^1 \setminus \Theta, 2) \times \mathcal{K}(\Theta, n)$; они находятся во взаимно однозначном соответствии с неупорядоченными парами (быть может, совпадающих) компонент множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$. Остальные страты перечисляются ниже (см. диаграмму (14) и комментарий к ней).

Проекция $\sigma_1(\Theta, n) \rightarrow \Sigma(\Theta, n)$, индуцированная очевидной проекцией $B_2(\Theta) \times \mathcal{K}(\Theta, n) \rightarrow \mathcal{K}(\Theta, n)$, совместно с изоморфизмом Александра (7), задает гомоморфизм “группы гомологий Бореля–Мура конечной коразмерности” пространства $\sigma_1(\Theta, n)$ в обычные приведенные когомологии дополнительного пространства:

$$\overline{H}_{\omega-*}(\sigma_1(\Theta, n)) \rightarrow \overline{H}_{\omega-*}(\Sigma(\Theta, n)) \rightarrow \tilde{H}^{*-1}(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)). \quad (9)$$

Точный смысл группы, стоящей в левой части формулы (9), и всего этого отображения состоит в следующем (ср. [16], [17]). Мы аппроксимируем бесконечномерное пространство $\mathcal{K}(\Theta, n)$ возрастающей последовательностью конечномерных аффинных подпространств $T^{N_1} \subset T^{N_2} \subset \dots$, $N_j \rightarrow \infty$, находящихся в общем положении по отношению к дискриминанту $\Sigma(\Theta, n) \subset \mathcal{K}(\Theta, n)$. Для любого $j = 1, 2, \dots$ определим $\sigma_1^{(j)}$ как $\sigma_1(\Theta, n) \cap (B_2(\Theta) \times T^{N_j})$. Легко видеть, что при достаточно больших $k < j$ имеется естественный гомеоморфизм

$$\sigma_1^{(j)} \simeq \sigma_1^{(k)} \times \mathbb{R}^{N_j - N_k}, \quad (10)$$

в частности изоморфизм групп гомологий Бореля–Мура

$$\overline{H}_{N_j-*}(\sigma_1^{(j)}) \simeq \overline{H}_{N_k-*}(\sigma_1^{(k)}). \quad (11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Элемент левой группы в (9) – это последовательность элементов всех групп $\overline{H}_{N_j-*}(\sigma_1^{(j)})$ с достаточно большими j , соответствующих друг другу в силу изоморфизмов (11).

Легко видеть, что это определение не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{T^{N_j}\}$, т.е. имеется естественный изоморфизм между группами таких элементов, определенных по любым двум таким последовательностям подпространств.

Поскольку все подпространства T^{N_j} общего положения, то проекции $\sigma_1^{(j)} \rightarrow \Sigma(\Theta, n) \cap T^{N_j}$ являются собственными отображениями и индуцируют гомоморфизмы групп гомологий Бореля–Мура этих пространств. Для любого j композиция

$$\overline{H}_{N_j-*}(\sigma_1^{(j)}) \rightarrow \overline{H}_{N_j-*}(\Sigma(\Theta, n) \cap T^{N_j}) \rightarrow \tilde{H}^{*-1}(\mathcal{K}(\Theta, n) \cap T^{N_j} \setminus \Sigma(\Theta, n)) \quad (12)$$

такого гомоморфизма и изоморфизма Александера в T^{N_j} переводит любой элемент левой группы $\overline{H}_{N_j-*}(\sigma_1^{(j)})$ в некоторый класс приведенных когомологий пространства $\mathcal{K}(\Theta, n) \cap T^{N_j} \setminus \Sigma(\Theta, n)$. При этом классы гомологий пространств $\sigma_1^{(k)}, \sigma_1^{(j)}$, соответствующие друг другу при изоморфизме (11), определяют классы когомологий одинаковой размерности, переходящие друг в друга при тождественном вложении $T^{N_k} \setminus \Sigma(\Theta, n) \subset T^{N_j} \setminus \Sigma(\Theta, n)$, а следовательно, стабилизирующиеся к корректно определенному классу когомологий всего пространства $\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Группа когомологий первого порядка пространства $\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)$ – это образ сквозного отображения (9), т.е. объединение классов когомологий, получающихся в пределе при $j \rightarrow \infty$ из правых частей (12).

В частном случае, когда $n = 3$ и рассматриваемые когомологии имеют размерность нуль, т.е. являются инвариантами, это определение согласуется с определением, данным во введении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Любой инвариант первого порядка для отображений $f \in \mathcal{K}(\Theta, 3)$ (т.е. инвариант, удовлетворяющий уравнению (4)) задается (с точностью до константы) индексом зацепления с образом некоторого цикла старшей размерности в $\sigma_1(\Theta, 3)$.*

Действительно, такой инвариант задается подходящей линейной комбинацией неориентированных гауссовых диаграмм; в качестве искомого цикла надо взять линейную комбинацию (с теми же коэффициентами) максимальных стратов в $\sigma_1(\Theta, 3)$, соответствующих этим диаграммам и снабженных подходящими ориентациями (см. §3).

В терминах пространства $\mathcal{K}(\Theta, 3)$ ориентированную гауссову диаграмму следует рассматривать как сингулярную цепь полной размерности в этом пространстве (точный смысл понятия сингулярной цепи в этом случае также использует конечномерные аппроксимации), причем определенное во введении значение диаграммы на типичном отображении $f \in \mathcal{K}(\Theta, 3)$ – это кратность, с которой окрестность

точки f покрывается этой цепью. Линейная комбинация гауссовых диаграмм задает инвариант тогда и только тогда, когда соответствующая линейная комбинация сингулярных цепей является относительным циклом в $\mathcal{K}(\Theta, 3) \bmod \Sigma(\Theta, 3)$, причем его граница является циклом, соответствующим этому инварианту в силу изоморфизма (7).

2.2. Симплициальное разрешение дискриминанта. Построим спектральную последовательность, вычисляющую когомологии пространства $\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)$ и использованную в доказательстве теоремы 2. Для этого мы построим *симплициальное разрешение* $\sigma(\Theta, n)$ дискриминанта $\Sigma(\Theta, n)$. Это топологическое пространство с естественной проекцией

$$\sigma(\Theta, n) \rightarrow \Sigma(\Theta, n) \quad (13)$$

и возрастающей бесконечной фильтрацией $\sigma_1(\Theta, n) \subset \sigma_2(\Theta, n) \subset \dots$, первый член которой описан в п. 2.1. Для всех остальных членов $\sigma_i(\Theta, n)$ этой фильтрации также корректно определены их гомологии Бореля–Мура конечной коразмерности. Аналогично п. 2.1 с помощью конечномерных аппроксимаций пространства $\mathcal{K}(\Theta, n)$ определяется отображение этих гомологий в обычные когомологии пространства $\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)$. Это позволяет определить в указанных когомологиях фильтрацию и искомую спектральную последовательность. Аналогично случаю $\sigma_1(\Theta, n)$ любой член $\sigma_i(\Theta, n) \setminus \sigma_{i-1}(\Theta, n)$ нашей фильтрации является пространством аффинного расслоения со слоем $\mathbb{R}^{\omega-in}$ и конечномерной базой, обладающей простым разбиением на открытые клетки, что позволяет свести гомологии конечной коразмерности таких пространств к обычным гомологиям Бореля–Мура конечномерных пространств.

Следующая ниже конструкция симплициального разрешения по существу повторяет аналогичное построение, приведенное в [18], [21] (см. также [15], [17]). (В настоящей работе эта конструкция нигде, кроме доказательства теоремы 2, не используется, поэтому читатель, готовый принять эту теорему на веру или интересующийся главным образом случаем $n = 3$, может ее пропустить.)

Вспомним, что пространство $B_2(\Theta)$ вложено в $I(\Theta)$, а следовательно, с каждой его точкой тавтологически связано некоторое подпространство коразмерности 1 в $\Phi(\Theta)$. Для любого натурального i рассмотрим множество всех векторных подпространств коразмерности i в $\Phi(\Theta)$, которые получаются как пересечения нескольких подпространств коразмерности 1, связанных с точками пространства $B_2(\Theta)$. Это множество является стратифицированным подмножеством размерности $2i$ в грасмановом многообразии $I_i(\Theta)$, т. е. в множестве всевозможных подпространств коразмерности i в $\Phi(\Theta)$. Обозначим через B_{2i} замыкание этого множества в $I_i(\Theta)$.

На несвязном объединении $B_2(\Theta) \sqcup B_4(\Theta) \sqcup \dots \sqcup B_{2i}(\Theta)$ имеется частичный порядок, определяемый инцидентностью соответствующих подпространств коразмерности $1, 2, \dots, i$ в $\Phi(\Theta)$. Определим пространство $\Delta_i(\Theta)$ как *непрерывный порядковый комплекс*, связанный с этим частично упорядоченным множеством. А именно, рассмотрим джойн $B_2(\Theta) * B_4(\Theta) * \dots * B_{2i}(\Theta)$ этих пространств, т. е. стандартным образом топологизированное объединение всевозможных симплексов, вершины которых принадлежат разным таким пространствам, и возьмем

его подмножество, состоящее только из тех симплексов, вершины которых связаны этим частичным порядком (т.е. соответствуют цепочкам вложенных подпространств). Если $k < i$, то пространство $\Delta_k(\Theta)$ канонически вложено в $\Delta_i(\Theta)$, и мы получаем естественную фильтрацию $\Delta_1(\Theta) \subset \Delta_2(\Theta) \subset \dots \subset \Delta_i(\Theta)$. Пространство $\Delta(\Theta)$ определяется как объединение всех $\Delta_i(\Theta)$ с топологией прямого предела.

Над каждым множеством вида $\Delta_i(\Theta) \setminus \Delta_{i-1}(\Theta)$ определено аффинное расслоение, слои которого – некоторые подпространства коразмерности i в $\mathcal{K}(\Theta, n)$. Действительно, всякой точке X этого множества соответствует некоторая точка $L(X)$ множества $B_{2i}(\Theta)$, а именно максимальная (в смысле рассматриваемого частичного порядка) вершина минимального симплекса в нашем порядковом комплексе, содержащего точку X . Эта точка $L(X)$ тавтологически определяет одноименное подпространство коразмерности i в $\Phi(\Theta)$. Искомое подпространство $\mathcal{L}(X, n) \subset \mathcal{K}(\Theta, n)$ состоит из всех отображений $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $\mathcal{K}(\Theta, n)$, все n координатных компонент которых принадлежат этому подпространству $\mathcal{L}(X)$.

Определим пространство $\sigma_i(\Theta, n)$ как подмножество в прямом произведении $\Delta_i(\Theta) \times \mathcal{K}(\Theta, n)$, состоящее из всевозможных пар (X, f) таких, что $f \in \mathcal{L}(X)$. Определим $\sigma(\Theta, n)$ как объединение всех пространств $\sigma_i(\Theta, n)$ с топологией прямого предела.

Проекция (13) переводит всякую пару $(X, f) \in \sigma(\Theta, n)$ в точку f . Если точка $f \in \Sigma(\Theta, n)$ лежит лишь в конечном числе гиперплоскостей вида $\mathcal{L}(X)$ (а это верно для всех f , кроме множества бесконечной коразмерности в $\mathcal{K}(\Theta, n)$ при любом $n \geq 2$), то ее прообраз при этом отображении является стягиваемым конечным симплициальным комплексом; все максимальные симплексы этого комплекса содержат общую точку, соответствующую наименьшей из таких плоскостей $\mathcal{L}(X)$, содержащих f .

Для любого аффинного подпространства $T^{N_j} \subset \mathcal{K}(\Theta, n)$ определено подпространство в $\sigma_i(\Theta, n)$, состоящее из таких пар (X, f) , что $f \in T^{N_j}$. Если последовательность подпространств T^{N_j} – общего положения по отношению к дискриминанту, то для любого натурального i найдется такое j_0 , что для любого $j > j_0$ подпространство $\sigma_i(\Theta, n) \cap (\Delta_i(\Theta) \times T^{N_j})$ гомеоморфно прямому произведению пространства $\sigma_i(\Theta, n) \cap (\Delta_i(\Theta) \times T^{N_{j_0}})$ на $\mathbb{R}^{N_j - N_{j_0}}$, причем этот гомеоморфизм сохраняет естественные фильтрации в этих пространствах.

Это позволяет проводить аргументацию, связанную с конечномерными аппроксимациями, в частности определять классы гомологий Бореля–Мура конечной коразмерности пространств $\sigma_i(\Theta, n)$ и $\sigma(\Theta, n)$, а также их отображения в обычные приведенные когомологии пространства $\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)$. Все это делается аналогично тому, как это было сделано в п. 2.1 для пространства $\sigma_1(\Theta, n)$.

Упомянутые свойства получающейся спектральной последовательности, порожденной нашей фильтрацией в $\sigma(\Theta, n)$, в частности то, что ее носитель выглядит, как показано на рис. 2, непосредственно следуют из теоремы трансверсальности Тома (ср. [16], [17]).

2.3. Стратификация и клеточная структура пространства $\sigma_1(\Theta, n)$. Пространство $\sigma_1(\Theta, n)$ (равно как и его база $B_2(\Theta)$) состоит из стратов трех соседних (ко)размерностей и семи разных типов $\Pi, \dots, \Upsilon$, перечисленных в следую-

шей диаграмме (14) и комментариях после нее. Все эти страты являются открытыми топологическими клетками и порождают цепной комплекс, вычисляющий гомологии Бореля–Мура пространства $\sigma_1(\Theta, n)$. Выражения $\Pi(\Theta)$, $\Xi(\Theta)$ и другие в диаграмме (14) – это обозначения соответствующих групп клеточных цепей, т. е. свободных абелевых групп, образующими которых являются фундаментальные циклы стратов данного типа:

$$\begin{array}{ccccc}
 \Pi(\Theta) \simeq \mathbb{Z}^{\binom{2m+1}{2}} & \longrightarrow & \Xi(\Theta) \simeq \mathbb{Z}^{m(2m+1)} & \longrightarrow & \Omega(\Theta) \simeq \mathbb{Z}^{\binom{m}{2}} \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & & \parallel(\Theta) \simeq \mathbb{Z}^{2m} & \longrightarrow & \Psi(\Theta) \simeq \mathbb{Z}^{2m} \\
 & \nearrow & & \nearrow & \\
 \Pi'(\Theta) \simeq \mathbb{Z}^{2m+1} & \longrightarrow & \Upsilon(\Theta) \simeq \mathbb{Z}^{2m+1} & &
 \end{array} \quad (14)$$

Страты максимальной размерности состоят из пар вида (пара различных точек на проколоте прямой $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$; отображение $f \in \mathcal{K}(\Theta, n)$, склеивающее эти точки). Каждый такой страт определяется выбором каких-то двух из $2m + 1$ интервалов, на которые $\mathbb{R}^1$ делится точками хордовой диаграммы Θ . Нам удобно выделить те страты, для которых эти два интервала совпадают. Соответствующая группа обозначается через $\Pi'(\Theta)$, а группа, связанная с несовпадающими интервалами, – через $\Pi(\Theta)$. В частности, канонические образующие группы $\Pi(\Theta)$ нумеруются в точности неориентированными гауссовыми диаграммами с основой Θ .

Страты вице-максимальной размерности бывают трех типов. Страты типа Ξ индексируются выбором одной из m хорд и одной из $2m + 1$ компонент множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$. Их точки – это пары вида (точка выбранного интервала; отображение $f \in \mathcal{K}(\Theta, n)$, склеивающее эту точку с обоими концами выбранной хорды). Страты типа $\parallel$ нумеруются выбором одной хорды и одного из символов $\rightrightarrows$ или $\leftrightharpoons$. Они состоят соответственно из таких отображений, производные которых в концах выбранной хорды сонаправлены или противоположны. Страты типа $\Upsilon(\Theta)$ нумеруются выбором одной из $2m + 1$ компонент множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$ и состоят из пар вида (точка выбранного интервала; отображение f , производная которого обращается в нуль в этой точке).

Страты коразмерности 2 – еще двух типов. Страты типа Ω нумеруются парами различных хорд и состоят из отображений, склеивающих все концы двух хорд вместе. Страты типа Ψ нумеруются концами хорд и состоят из отображений, имеющих особенность (нуль производной) в соответствующей точке; это условие изображается звездочкой в этой точке.

Легко видеть, что все перечисленные страты являются пространствами аффинных расслоений бесконечной размерности, но конечной (равной n) коразмерности

в $\mathcal{K}(\Theta, n)$ над открытыми клетками размерности 2, 1 или 0. Например, образующая $\alpha \rightrightarrows$ или $\alpha \leftrightsquigarrow$ группы $\|(\Theta)$ расслоена над одной или другой компонентой проколотой проективной прямой $\mathbb{RP}^1 \setminus \{0, \infty\}$: слой над точкой ρ состоит из отображений $f \in \mathcal{K}(\Theta, n)$ таких, что производная f в правом конце хорды α равна производной в левом конце, растянутой в ρ раз.

Мы рассматриваем трехчленный цепной комплекс

$$0 \rightarrow \mathfrak{C}_2(\Theta, n) \rightarrow \mathfrak{C}_1(\Theta, n) \rightarrow \mathfrak{C}_0(\Theta, n) \rightarrow 0 \quad (15)$$

с группами

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_2(\Theta, n) &= \Pi(\Theta) \oplus \Pi'(\Theta), & \mathfrak{C}_1(\Theta, n) &= \Xi(\Theta) \oplus \|(\Theta) \oplus \Upsilon(\Theta), \\ \mathfrak{C}_0(\Theta, n) &= \Omega(\Theta) \oplus \Psi(\Theta), \end{aligned}$$

образующие которого – это фундаментальные циклы соответствующих стратов, ориентированных тем или иным образом, а граничные операторы, изображаемые стрелками в (14), отражают коэффициенты инцидентности стратов соседних размерностей. Эти инцидентности соответствуют вырождениям условий, определяющих бóльший страт. В случае, когда страт максимальный, эти вырождения изображены на рис. 6. Хотя имеется очевидное взаимно однозначное соответствие между наборами стратов, соответствующих случаям произвольных n , коэффициенты инцидентности (и гомологии комплекса) сильно зависят от четности n (влияющей на учет ориентаций стратов). Ниже мы увидим, что все комплексы $\mathfrak{C}_*(\Theta, n)$, соответствующие числам n одной четности, канонически изоморфны друг другу.

Рис. 6. Примыкания стратов дискриминанта

Далее мы будем обозначать группу $H_*(\mathfrak{C}_*(\Theta, n))$ просто через $H_*(\Theta, n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При любых $n \geq 3$ и Θ группа когомологий первого порядка пространства $\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)$ связана с гомологиями комплекса (15) каноническим изоморфизмом*

$$H_k(\Theta, n) \simeq H_{(1)}^{n-k-1}(\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из построения следует, что для любого i имеется естественный изоморфизм $H_k(\Theta, n) \simeq \overline{H}_{\omega-n+k}(\sigma_1(\Theta, n))$. По определению группа в правой части (16) – образ последней группы при сквозном отображении (9). Поэтому остается доказать, что это отображение инъективно. При $n > 4$ это немедленно следует из вида спектральной последовательности (1), в которой рассматриваемые группы образуют столбец $E_1^{-1,*}$ по правилу $E_1^{-1,q} \simeq H_{n-q-1}(\Theta, n)$. При $n = 4$ необходимо дополнительно проверить, что оператор $E_1^{-2,5} \rightarrow E_1^{-1,5}$ первого члена этой последовательности тривиален; это следует из того, что, как мы увидим в теореме 9, комплекс (15) ацикличесен в члене $\mathfrak{C}_0$. При $n = 3$ надо проверить тривиальность всех операторов, действующих в клетку $E_1^{-1,3}$, и оператора $E_1^{-2,2} \rightarrow E_1^{-1,2}$; первое также следует из того, что $H_0(\Theta, 3) = 0$ (см. теорему 8), а второе – из явного вычисления группы $E_1^{-1,2}$, которое мы проведем в доказательстве теоремы 8, и из данной в теореме 11 реализации всех образующих этой группы одномерными классами когомологий пространства $\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$.

По существу, комплекс (15) является клеточным комплексом, вычисляющим гомологии Бореля–Мура пространства $B_2(\Theta)$ с коэффициентами в локальной системе, следящей за ориентацией аффинного расслоения $\sigma_1(\Theta, n) \rightarrow B_2(\Theta)$. Эта ориентация по-разному ведет себя для четных и нечетных n . В частности, номера двух интервалов, определяющих образующую группы $\Pi(\Theta)$, при нечетном n являются коммутирующими индексами, а при четном n – антикоммутирующими. Соответствующее обозначение для образующей, связанной, скажем, с первым и четвертым интервалами в первом случае будет $1 \cdot 4$, а во втором – $1 \wedge 4$, причем, как обычно, $1 \cdot 4 = 4 \cdot 1$ и $1 \wedge 4 = -4 \wedge 1$. Например, две образующие группы $H_{(1)}^1(\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3))$, обсуждаемые в примере 2, записываются в виде $(1 + 4 + 5) \cdot (2 + 3)$ и $(1 + 2 + 5) \cdot (3 + 4)$.

Очевидно, эйлерова характеристика комплекса (15) равна $\binom{m}{2}$ при любом n .

Мы будем использовать следующие две леммы, легко вытекающие из определений.

ЛЕММА 1. *Для любой пары связных компонент графа пересечений хордовой диаграммы Θ либо найдется неособая точка в $\mathbb{R}^1$ такая, что все концы хорд из одной компоненты лежат справа от нее, а из другой – слева, либо найдется пара неособых точек такая, что все концы хорд из одной компоненты лежат в интервале между этими точками, а из другой – вне этого интервала.*

На множестве этих связных компонент возникает частичный порядок: одна компонента *подчинена* другой, если все концы всех хорд из первой компоненты находятся в $\mathbb{R}^1$ между концами какой-нибудь хорды из второй.

ЛЕММА 2. Для любого $n \geq 3$ и любой хордовой диаграммы Θ существуют иммерсия $\varphi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)$ и набор шаров с непересекающимися границами в $\mathbb{R}^n$, находящиеся во взаимно однозначном соответствии со связными компонентами графа пересечений диаграммы Θ , такие, что:

1) центры всех шаров лежат на оси пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. на образе стандартного линейного вложения $l: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, участвующего в определении пространства $\mathcal{K}(\Theta, n)$;

2) кривая $\varphi(\mathbb{R}^1)$ пересекает граничную сферу любого из шаров ровно в двух антиподальных точках, лежащих на оси $l(\mathbb{R}^1)$, и совпадает с этой осью вблизи этих точек пересечения;

3) внутри шара лежат те и только те точки самопересечения $\varphi(\mathbb{R}^1)$, которые изображаются хордами из связной компоненты графа пересечений, соответствующей этому шару, и из подчиненных ей компонент;

4) если некоторая компонента связности графа пересечений диаграммы Θ соответствует планарной хордовой поддиаграмме этой диаграммы, то в пересечении с соответствующим шаром, из которого удалены все шары, соответствующие ее подчиненным компонентам, кривая $\varphi(\mathbb{R}^1)$ лежит в некоторой двумерной плоскости.

ТЕОРЕМА 8. Если n нечетно, то для любой m -хордовой диаграммы Θ группа $H_0(\Theta, n)$ тривиальна, ранг группы $H_2(\Theta, n)$ равен сумме биномиального коэффициента $\binom{m}{2}$ и числа компонент связности графа пересечений диаграммы Θ , а группа $H_1(\Theta, n)$ не содержит 2-кручения, и ее ранг равен этому же числу связных компонент.

ТЕОРЕМА 9. Пусть n четно. Тогда группа $H_0(\Theta, n)$ комплекса (14) тривиальна, а группа $H_1(\Theta, n)$ является прямой суммой слагаемых $\mathbb{Z}$, соответствующих всем связным компонентам графа пересечений диаграммы Θ , определяющим планарные хордовые поддиаграммы в Θ , и слагаемых $\mathbb{Z}_2$, соответствующих всем непланарным компонентам. В качестве образующей любого такого слагаемого, соответствующего той или иной компоненте этого графа, можно взять цикл $\alpha \rightrightarrows +\alpha \rightrightarrows \in \|\!(\Theta)\!$, где α – любая хорда из этой компоненты. Группа $H_2(\Theta, n)$ – свободная абелева, ранг ее равен сумме числа $\binom{m}{2}$ и ранга группы $H_1(\Theta, n)$ (т. е. числа $\Xi(\Theta)$ связных компонент графа пересечений, соответствующих планарным поддиаграммам в Θ).

Теоремы 3 и 4 немедленно следуют из теорем 8, 9 и предложения 2.

2.4. Дифференциалы в комплексе (14). Здесь мы начинаем доказательство теорем 8 и 9, а именно опишем операторы, задаваемые стрелками в диаграмме (14).

Оператор $\Pi'(\Theta) \rightarrow \Upsilon(\Theta)$ диаграммы (14) соответствует вырождениям типа $\check{\mathbf{R}}\mathbf{1}$, представленным на рис. 6, операторы $\Pi(\Theta) \rightarrow \|\!(\Theta)\!$ и $\Pi'(\Theta) \rightarrow \|\!(\Theta)\!$ – вырождениям типа $\check{\mathbf{R}}\mathbf{2}$, а операторы $\Pi(\Theta) \rightarrow \Xi(\Theta)$ и $\Pi'(\Theta) \rightarrow \Xi(\Theta)$ – вырождениям типа $\check{\mathbf{R}}\mathbf{3}$. При этом в верхних частях второго и третьего столбцов на рис. 6 две жирные точки, соответствующие самопересечениям кривой $f(\mathbb{R}^1)$, имеют разный статус: одно из этих пересечений (и участвующие в нем точки прямой $\mathbb{R}^1$) фиксировано для всех точек пространства $\mathcal{K}(\Theta, n)$ и задается одной из гладких дуг диаграммы Θ , второе – зависит от точки дискриминанта, а участвующие в нем точки (или одна

из них) тем или иным способом стремятся к концам предыдущей дуги; это самопересечение задается неориентированной ломаной линией.

Легко видеть, что при любом n нижняя горизонтальная стрелка в (14) является изоморфизмом, а следовательно, при вычислении гомологий комплекса (15) можно вместо комплекса (14) рассматривать следующий комплекс, полученный из него выбрасыванием нижней строки и всех исходящих из нее стрелок:

$$\begin{array}{ccccc}
 \Pi(\Theta) & \xrightarrow{\beta} & \Xi(\Theta) & \xrightarrow{\epsilon} & \Omega(\Theta) \\
 & \searrow \zeta & & \searrow \phi & \\
 & & \parallel(\Theta) & \xrightarrow{\psi} & \Psi(\Theta)
 \end{array} \quad (17)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При некотором естественном выборе ориентаций стратов, соответствующих образующим комплекса (17), составные части граничных операторов, определяющие пять стрелок в (17), задаются так, как представлено на рис. 7–10.

1) Операторы $\beta: \Pi(\Theta) \rightarrow \Xi(\Theta)$ и $\zeta: \Pi(\Theta) \rightarrow \parallel(\Theta)$ – на рис. 7 и 8 соответственно, на этих рисунках маленькими овалами окружены концы хорд, стягивающиеся вместе при соответствующем вырождении.

2) Оператор $\psi: \parallel(\Theta) \rightarrow \Psi(\Theta)$ – на рис. 9.

3) Оператор $\phi: \Xi(\Theta) \rightarrow \Psi(\Theta)$ – в левой части рис. 10.

4) Оператор $\epsilon: \Xi(\Theta) \rightarrow \Omega(\Theta)$ – на рис. 11. Строго говоря, имеется очень много (а именно 24) возможных взаимных расположений двух хорд и ломаной, выходящей из одной из них и сливающейся при этом вырождении с другой хордой. Однако имеется лишь четыре существенно различных варианта, представители которых изображены на рис. 11: они отличаются тем, у какой хорды – несущей конец ломаной или не несущей – левый конец левее конца другой хорды, и тем, с какой стороны конец ломаной стремится к концу хорды. Для всех представителей каждого из этих четырех классов коэффициент инцидентности будет таким же, как для его представителя, указанного на этом рисунке.

Выбор ориентаций стратов и доказательство предложения 3 будут даны в § 3.

$$\begin{aligned}
 \beta \text{ (сверху)} &= -\beta \text{ (снизу)} = -\beta \text{ (сверху)} = \beta \text{ (снизу)} = (-1)^n \text{ (сверху)} \\
 \beta \text{ (сверху)} &= -\beta \text{ (снизу)} = -\beta \text{ (сверху)} = \beta \text{ (снизу)} = \text{ (сверху)} \\
 (-1)^n \beta \text{ (сверху)} &= (-1)^{n-1} \beta \text{ (снизу)} = -\beta \text{ (сверху)} = \beta \text{ (снизу)} = \text{ (сверху)}
 \end{aligned}$$

Рис. 7. Граничный оператор при простейшем вырождении

$$\begin{aligned}
\zeta \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= (-1)^n \zeta \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \\
\zeta \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= (-1)^n \zeta \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}
\end{aligned}$$

Рис. 8. Рождение самокасания

$$\begin{aligned}
\psi \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} + (-1)^n \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\
\psi \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}
\end{aligned}$$

Рис. 9. Граница самокасания

$$\begin{aligned}
\phi \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= - \phi \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\
\phi \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= - \phi \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}
\end{aligned}$$

Рис. 10. Исчезающая петля

$$\begin{aligned}
\epsilon \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= - \epsilon \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\
\epsilon \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= - \epsilon \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = (-1)^n \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}
\end{aligned}$$

Рис. 11. Слияние хорд

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) Для любого Θ все комплексы $\mathfrak{C}_*(\Theta, n)$, соответствующие числам $n \geq 3$ одной четности, изоморфны между собой. В частности, имеют смысл обозначения $\mathfrak{C}_*(\Theta, \text{even})$, $\mathfrak{C}_*(\Theta, \text{odd})$, $H_*(\Theta, \text{even})$, $H_*(\Theta, \text{odd})$.

2) Для любого Θ все комплексы $\mathfrak{C}_*(\Theta, n) \otimes \mathbb{Z}_2$, соответствующие всем возможным $n \geq 3$, изоморфны между собой.

Приведем другое описание оператора $\beta: \Pi(\Theta) \rightarrow \Xi(\Theta)$ из верхней строки диаграммы (14) (ср. рис. 7).

Для всякого $a = 1, \dots, 2m + 1$, т.е. номера какого-либо интервала, ограниченного концами хорд, обозначим через $a^\uparrow$ (соответственно, $a^\downarrow$) хорду, конец которой ограничивает a -й интервал справа (соответственно, слева) в $\mathbb{R}^1$ (если такая хорда есть, т.е. если этот интервал не уходит на бесконечность). Конечно, $a^\uparrow \equiv (a + 1)^\downarrow$.

Тогда горизонтальная стрелка $\beta: \Pi(\Theta) \rightarrow \Xi(\Theta)$ переводит всякую образующую $a \cdot b$, $a < b$, комплекса $\mathfrak{C}_*(\Theta, \text{odd})$ в сумму

$$-a \cdot b^\uparrow + a \cdot b^\downarrow - b \cdot a^\uparrow + b \cdot a^\downarrow \quad (18)$$

и переводит образующую $a \wedge b$ комплекса $\mathfrak{C}_*(\Theta, \text{even})$ в сумму

$$-a \wedge b^\uparrow + a \wedge b^\downarrow + b \wedge a^\uparrow - b \wedge a^\downarrow. \quad (19)$$

Аналогично, косая стрелка $\Pi'(\Theta) \rightarrow \Xi(\Theta)$ в (14) переводит образующую, соответствующую интервалу a , в $-a \cdot a^\uparrow + a \cdot a^\downarrow$ или $-a \wedge a^\uparrow - a \wedge a^\downarrow$, в зависимости от четности n .

Оператор ψ , задаваемый горизонтальной стрелкой $\|(\Theta) \rightarrow \Psi(\Theta)$, очевидным образом распадается в сумму t одинаковых операторов $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, каждый из которых соответствует своей хорде. Каждый такой оператор определяется равенствами, представленными на рис. 9. Отсюда сразу следует

ЛЕММА 3. *В случае нечетного n старшая группа гомологий $H_2(\Theta, n)$ комплекса (15) совпадает с ядром оператора $\beta: \Pi(\Theta) \rightarrow \Xi(\Theta)$.*

Действительно, если бы ограничение стрелки $\Pi(\Theta) \rightarrow \|(\Theta)$ на ядро стрелки $\Pi(\Theta) \rightarrow \Xi(\Theta)$ было нетривиально, то образ этого ограничения содержал бы нетривиальные элементы ядра стрелки $\|(\Theta) \rightarrow \Psi(\Theta)$, каковых не существует, поскольку при нечетном n матрица коэффициентов в правой части рис. 9 невырождена.

ПРИМЕР 3. Легко проверить, что в случае непланарной 2-хордовой диаграммы Θ образующие группы $H_2(\Theta, \text{odd})$ действительно равны $(1 + 4 + 5) \cdot (2 + 3)$ и $(1 + 2 + 5) \cdot (3 + 4)$ (см. пример 2).

Обсудим, как в случае несвязного графа пересечений группа $H_2(\Theta, 3)$ связана с аналогичными группами для его связных компонент.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть граф пересечений диаграммы Θ состоит из r связных компонент, вершины которых определяют поддиаграммы $\Theta_1, \dots, \Theta_r$ диаграммы Θ , состоящие соответственно из $m_1, \dots, m_r$ хорд, $m_1 + \dots + m_r = m$. Тогда ранг группы $H_2(\Theta, 3)$ не меньше числа*

$$\sum_{k=1}^r \text{rank } H_2(\Theta_k, 3) + \sum_{i < j}^r m_i m_j. \quad (20)$$

(В п. 2.6 мы докажем, что обратное неравенство также выполнено в полном соответствии с теоремой 8.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Реализуем вначале второе слагаемое, т.е. каждой паре хорд из разных компонент связности поставим в соответствие независимую образующую группы $H_2(\Theta, 3)$.

Если оба конца одной из этих хорд лежат в $\mathbb{R}^1$ по одну сторону от обоих концов второй, то рассмотрим две петли кривой $\varphi(\mathbb{R}^1)$, образованные образами отрезков $\mathbb{R}^1$ между концами первой (соответственно, второй) хорды. Эти две петли

не пересекаются в $\mathbb{R}^3$, поэтому их индекс зацепления корректно определен; он задается циклом комплекса $\mathfrak{C}_*(\Theta, 3)$, равным сумме всевозможных произведений $a \cdot b$, где a – один из неособых интервалов между концами первой хорды, а b – между концами второй. Если оба конца одной из этих хорд лежат между концами другой, берем индекс зацепления петли, образованной образом отрезка между концами “внутренней” хорды, и уходящей на бесконечность замкнутой кривой, образованной дополнением к аналогичному отрезку для “внешней”.

Теперь реализуем первое слагаемое в (3). Для i -й связной компоненты Θ_i графа пересечений диаграммы Θ определим вложение $\mathfrak{C}_2(\Theta_i, 3) \rightarrow \mathfrak{C}_2(\Theta, 3)$. А именно, любому неособому интервалу, ограниченному концами хорд из Θ_i , поставим в соответствие сумму всех покрываемых им неособых интервалов, ограниченных концами хорд из Θ . Продолжим это сопоставление по мультипликативности на всевозможные произведения $a \cdot b$ таких интервалов, т. е. на образующие группы $\mathfrak{C}_2(\Theta_i, 3)$, и по линейности на всю эту группу. Легко видеть, что при этом циклу соответствует цикл.

Докажем, что все полученные таким образом циклы линейно независимы в $\mathfrak{C}_2(\Theta, 3)$. Любая пара разных хорд диаграммы Θ определяет линейную функцию на группе $H_2(\Theta, 3)$. А именно, пусть номера компонент множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$, соседствующих с концами одной (соответственно, другой) хорды, суть $a, a+1, b$ и $b+1$, $a < b$ (соответственно, $c, c+1, d$ и $d+1, d > c$). Тогда значение нашей линейной функции на элементе $F \in H_2(\Theta, 3)$, заданном в виде (5), равно $\lambda_{a+1, c+1} - \lambda_{a, c+1} - \lambda_{a+1, c} + \lambda_{a, c}$. Легко проверяется, что если наши две хорды принадлежат разным связным компонентам графа пересечений, то эта функция обращается в нуль на всех построенных выше циклах, реализующих первое слагаемое в (3), и на всех базисных циклах, реализующих второе слагаемое, за исключением единственного цикла, построенного по этой же самой паре хорд; на последнем цикле эта функция принимает значение 1 или -1 . Таким образом, эти функции задают сюръективный гомоморфизм группы $H_2(\Theta, 3)$ на свободную абелеву группу ранга $\sum_{i < j}^r m_i m_j$, ядро которого содержит все $\sum_{k=1}^r \text{rank } H_2(\Theta_k, 3)$ построенных выше циклов, реализующих первое слагаемое в (3). Остается доказать, что все эти циклы (или, эквивалентно, соответствующие им инварианты) линейно независимы между собой. Но они очевидным образом независимы уже в ограничении на множество кривых f класса $\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$, удовлетворяющих условиям 1)–3) леммы 2.

2.5. Доказательство теоремы 9.

Вначале докажем, что $H_0(\Theta, \text{even}) = 0$.

Любая образующая (α, β) группы $\Omega(\Theta)$, у которой левый конец хорды α левее левого конца β , является границей цепи $(1, \beta) + (2, \beta) + \dots + (a, \beta)$, где a – интервал, ограниченный справа левым концом хорды α (см. верхнюю строку на рис. 11). Аналогично, любая образующая $(f'(u) = 0)$ группы $\Psi(\Theta)$, где u – левый конец хорды α , является границей цепи $(1, \alpha) + (2, \alpha) + \dots + (a, \alpha)$ (см. верхние строки на рис. 10 и 11). Такая же образующая для правого конца сводится к левой посредством любой из строк на рис. 9.

ЛЕММА 4. *Любой 1-мерный цикл комплекса (15), или, эквивалентно, (17), с четным n гомологичен циклу, лежащему в подгруппе $\|(\Theta)$, т. е. линейной комбинации нескольких циклов вида $\alpha \rightrightarrows + \alpha \leftrightsquigarrow$, где α – некоторые хорды диаграммы Θ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Упорядочим все хорды, образующие диаграмму Θ , в соответствии с положением их левой концевой точки на прямой $\mathbb{R}^1$. Упорядочим лексикографически все образующие $a \wedge \alpha$ группы $\Xi(\Theta)$: сначала мы определяем, какая образующая имеет больший номер интервала a , а если эти номера совпадают, то выбираем ту, у которой больший порядок хорды. Рассмотрим 1-мерный цикл комплекса (17). Пусть $a \wedge \alpha$ – наибольшая в смысле этого порядка образующая группы $\Xi(\Theta)$, входящая в этот цикл с ненулевым коэффициентом (так что у всех других таких образующих либо номер интервала меньше, чем a , либо этот номер такой же, но левый конец хорды левее, чем у хорды α).

Тогда a -й интервал не может быть ограничен справа левым концом хорды α . Действительно, если бы это случилось, то в границу образующей $a \wedge \alpha$ вошел бы элемент группы $\Psi(\Theta)$, соответствующий условию $f' = 0$ в левом конце хорды. Это противоречит тому, что мы рассматриваем цикл комплекса (17). Действительно, это слагаемое его границы должно быть скомпенсировано, т.е. входить с противоположным знаком в границу каких-нибудь других слагаемых этого цикла. Такое слагаемое не может быть образующей группы $\Xi(\Theta)$ в силу предположения о максимальности $a \wedge \alpha$. Среди образующих $\|(\Theta)$ такими слагаемыми могли бы быть только $\alpha \rightrightarrows$ и $\alpha \leftrightsquigarrow$, причем эти два слагаемых должны входить в наш цикл с разными коэффициентами. Но тогда в их границу входит одновременно и с ненулевым коэффициентом элемент группы $\Psi(\Theta)$, заданный условием $f' = 0$ в правом конце этой же хорды α . Его уже нечем скомпенсировать, поскольку класс $a \wedge \alpha$ лексикографически максимален.

Рассмотрим теперь образующую $a \wedge b$ группы $\Pi(\Theta)$, где b – интервал, ограниченный справа левым концом хорды α . Граница этой образующей состоит из элемента $-a \wedge \alpha$, из образующих меньшего порядка в группе $\Xi(\Theta)$ и, быть может, одной или двух образующих группы $\|(\Theta)$. Поэтому лемма доказывается индукцией по порядку образующих $a \wedge \alpha$.

ЛЕММА 5. *Если некоторая связная компонента графа пересечений хордовой диаграммы Θ определяет непланарную хордовую поддиаграмму, то для одной из хорд α из этой связной компоненты цикл $\alpha \rightrightarrows + \alpha \leftrightsquigarrow \in \|(\Theta)$ задает элемент не более чем второго порядка в группе $H_1(\Theta, \text{even})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную типичную иммерсию $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, класса $\mathcal{K}(\Theta, n)$. Ее образ $f(\mathbb{R}^1)$ является 4-валентным графом с двумя свободными концами. Циклом этого графа назовем любую последовательность ориентированных ребер без повторений, у которой конец каждого очередного ребра совпадает с началом следующего, причем либо конец последнего совпадает с началом первого, либо первое и последнее ребра уходят на бесконечность. Для любых двух таких циклов без общих ребер их *точками перекрестия* назовем только такие их общие вершины, в которых они не имеют изломов. Например, для циклов $1 + 4 + 5$ и $2 + 3$ из примера 2 первая точка самопересечения кривой $f(\mathbb{R}^1)$ не является перекрестием, а вторая – является. Теперь воспользуемся следующей теоремой В. О. Мантурова.

ТЕОРЕМА 10 (см. [10]). *Если хордовая диаграмма Θ непланарна, то в $f(\mathbb{R}^1)$ найдутся два цикла без общих ребер и с ровно одной точкой перекрестия.*

Для такой пары циклов рассмотрим цепь $\sum a \wedge b \in \mathfrak{C}_2(\Theta, \text{even})$, где a – всевозможные ребра из первого цикла, а b – из второго. Из (19) легко следует, что граница этой цепи равна $\pm 2(\alpha_{\Rightarrow} + \alpha_{\Leftarrow})$, где α – хорда, соответствующая этой точке перекрестия. Поскольку предыдущую теорему можно применять к каждой связной компоненте графа пересечений, получаем, что в каждой такой компоненте, определяющей непланарную поддиаграмму диаграммы Θ , найдется хорда α такая, что цикл $\alpha_{\Rightarrow} + \alpha_{\Leftarrow}$ определяет класс гомологий не более чем второго порядка.

ЛЕММА 6. *Если хорды α и β принадлежат одной компоненте связности графа пересечений, то класс цикла $(\alpha_{\Rightarrow} + \alpha_{\Leftarrow})$ в группе $H_1(\Theta, \text{even})$ равен классу цикла $(\beta_{\Rightarrow} + \beta_{\Leftarrow})$ или $-(\beta_{\Rightarrow} + \beta_{\Leftarrow})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть хорды α, β зацеплены (т.е. соответствующие вершины графа пересечений соединены ребром). Пусть p, q – номера концов хорды α среди всех $2m$ концов хорд, а r, s – номера концов β , причем $p < r < q < s$. Обозначим через $R(\alpha, \beta)$ сумму образующих $a \wedge b$ группы $\Pi(\Theta)$, где a, b – номера (считая слева направо в $\mathbb{R}^1$) всех таких компонент множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$, что $a < b$, a -я компонента расположена между концами хорды α (т.е. $p+1 \leq a \leq q$), b -я компонента расположена между концами хорды β (т.е. $r+1 \leq b \leq s$), но эти компоненты не расположены одновременно между концами как α , так и β (т.е. не выполнено условие $r+1 \leq a < b \leq q$).

Легко проверить, что в комплексе $\mathfrak{C}_*(\Theta, \text{even})$

$$\partial R(\alpha, \beta) = (\alpha_{\Rightarrow} + \alpha_{\Leftarrow}) + (\beta_{\Rightarrow} + \beta_{\Leftarrow}) + 2 \sum (\gamma_{\Rightarrow}^i + \gamma_{\Leftarrow}^i), \quad (21)$$

где γ^i – всевозможные хорды, оба конца которых лежат между крайними концами p и s хорд α, β , но не лежат одновременно в одном и том же из трех интервалов, на которые точки r, q делят интервал (p, s) . Утверждение леммы сводится к этой формуле индукцией по $s - p$.

Из лемм 4–6 вытекает верхняя оценка группы $H_1(\Theta, \text{even})$: любая непланарная компонента графа пересечений дает не более чем слагаемое $\mathbb{Z}_2$ в эту группу, а планарная компонента – не более чем циклическое слагаемое. Осталось доказать, что эти оценки неулучшаемы, в частности, что последние циклические слагаемые свободны. Это будет сделано для слагаемых $\mathbb{Z}_2$ в п. 2.6 и для слагаемых $\mathbb{Z}$ в следующей лемме 7. Однако доказанного уже достаточно для следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Ни размерность группы $H_2(\mathfrak{C}_*(\Theta, n) \otimes \mathbb{Z}_2)$, ни ранг группы $H_2(\Theta, n)$ при любом $n \geq 3$ не больше суммы числа $\binom{m}{2}$ и числа связных компонент графа пересечений диаграммы Θ .*

Это следует из предыдущих трех лемм и значения эйлеровой характеристики наших комплексов.

ЛЕММА 7. *Пусть некоторая связная компонента графа пересечений хордовой диаграммы Θ соответствует планарной хордовой поддиаграмме и α – произвольная хорда этой поддиаграммы. Тогда цикл $\alpha_{\Rightarrow} + \alpha_{\Leftarrow}$ определяет свободный элемент группы $H_1(\Theta, \text{even})$. Такие свободные элементы, соответствующие хордам из разных компонент графа пересечений, линейно независимы в этой группе.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементу $\alpha_{\Rightarrow} + \alpha_{\Leftarrow}$ соответствует цикл в дискриминанте $\Sigma(\Theta, 2k)$, состоящий из отображений $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$, имеющих самокасание в точке самопересечения, изображаемой хордой α . Достаточно доказать, что индекс зацепления с этим циклом определяет свободный элемент группы $H^{2k-2}(\mathcal{K}(\Theta, 2k) \setminus \Sigma(\Theta, 2k))$, $k \geq 2$, причем такие элементы, соответствующие разным компонентам, линейно независимы. Выберем в $\mathbb{R}^{2k}$ направление “вверх”, не совпадающее с направлением оси $l(\mathbb{R}^1)$, и обозначим через $\mathbb{R}^{2k-1}$ факторпространство $\mathbb{R}^{2k}$ по этому направлению. Пусть $x < y$ – концы хорды α . В качестве относительного цикла Бореля–Мура в $\mathcal{K}(\Theta, n) \bmod \Sigma(\Theta, n)$, затягивающего рассматриваемый цикл, можно взять множество всех отображений $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ класса $\mathcal{K}(\Theta, 2k)$ таких, что проекции векторов $f'(x)$ и $f'(y)$ в $\mathbb{R}^{2k-1}$ линейно зависимы, причем в плоскости, натянутой на эти два вектора в $\mathbb{R}^{2k}$, совпадают ориентации $(f'(x), f'(y))$ и $(f'(x), \text{направление “вверх”})$.

Зафиксируем иммерсию $f_0: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ класса $\mathcal{K}(\Theta, 2k) \setminus \Sigma(\Theta, 2k)$, описанную в лемме 2. Это означает, в частности, что внутри шара, соответствующего нашей компоненте, из которого удалены все меньшие шары, кривая $f_0(\mathbb{R}^1)$ лежит в некоторой двумерной плоскости L_0 . Множество всех ориентированных двумерных плоскостей, содержащих ось пространства $\mathbb{R}^{2k}$, диффеоморфно S^{2k-2} . Евклидова структура в $\mathbb{R}^{2k}$ однозначно определяет линейные изометрии всех этих плоскостей на L_0 , неподвижные на оси. Эти изометрии переводят друг в друга пересечения этих плоскостей с r шарами, описанными в лемме 2. Каждая из этих изометрий определяет новую иммерсию $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$, совпадающую с f_0 вне шара, соответствующего рассматриваемой компоненте, или внутри содержащихся в нем меньших шаров, в оставшейся же части этого шара получающуюся из f_0 посредством этой изометрии. Множество таких иммерсий также диффеоморфно S^{2k-2} . Легко видеть, что матрица индексов пересечения полученных сфер $S^{2k-2} \subset \mathcal{K}(\Theta, 2k) \setminus \Sigma(\Theta, 2k)$, соответствующих всем планарным компонентам графа пересечений, с построенными выше относительными циклами диагональна и имеет ± 1 на диагонали. Лемма доказана.

Этим доказано утверждение теоремы 9 о ранге группы $H_1(\Theta, \text{even})$, а утверждение о $H_2(\Theta, \text{even})$ следует из него, из доказанной выше тривиальности группы $H_0(\Theta, \text{even})$ и из соображений эйлеровой характеристики.

Осталось лишь доказать, что элементы $(\alpha_{\Rightarrow} + \alpha_{\Leftarrow})$, соответствующие хордам α из разных связных компонент графа пересечений, определяющих непланарные поддиаграммы в Θ , дают независимые образующие второго порядка в группе $H_1(\Theta, \text{even})$. Это будет сделано в следующем пункте.

2.6. Доказательство теоремы 8 и окончание доказательства теоремы 9. Тривиальность группы $H_0(\Theta, n)$ с нечетным n доказывается точно так же, как с четным.

Чтобы изучить группы $H_2(\Theta, \text{odd})$ и $H_1(\Theta, \text{odd})$, вначале допустим, что граф пересечений диаграммы Θ связан. В силу леммы 3 группа $H_2(\Theta, \text{odd})$ совпадает с группой 2-мерных гомологий комплекса, заданного верхней строкой диаграммы (14). Изучим этот комплекс.

ЛЕММА 8. *Ранг 1-мерной группы гомологий цепного комплекса, заданного верхней строкой диаграммы (14), не меньше 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент $a_1 \cdot \alpha_1$ является 1-циклом этой строки. Однако никакое его кратное не гомологично нулю, поскольку в границу любого элемента $a_i \cdot a_j$ элементы вида $a_1 \cdot \alpha_p$ и $a_{2m+1} \cdot \alpha_q$ входят с нулевой суммарной кратностью (см. (18)). Лемма доказана.

Отсюда и из значения эйлеровой характеристики наших комплексов следует, что ранг группы $H_2(\Theta, \text{odd})$ не меньше, чем $\binom{m}{2} + 1$, но он и не больше этого числа в силу следствия 2. Из этих же соображений теперь вытекает, что в случае связного графа пересечений ранг группы $H_1(\Theta, \text{odd})$ равен 1 и эта группа не содержит 2-кручения.

В случае произвольного (быть может, несвязного) графа пересечений мы имеем совпадающие верхнюю и нижнюю оценки ранга группы $H_2(\Theta, \text{odd})$: верхняя вытекает из следствия 2, нижняя – из предложения 4 и леммы 8.

Теперь из рассмотрения эйлеровой характеристики следует, что ранг группы $H_1(\Theta, \text{odd})$ равен числу связных компонент графа пересечений. В п. 2.5 мы доказали, что размерность группы $H_1(\Theta, \text{even}) \otimes \mathbb{Z}_2$ не превосходит этого же числа $\#(\Theta)$. Поскольку оба наших комплекса после приведения по mod 2 совпадают, из формулы универсальных коэффициентов получаем, что $H_1(\Theta, \text{odd})$ не имеет 2-кручения, а $H_1(\Theta, \text{even}) \otimes \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2^{\#(\Theta)}$. Это завершает доказательство теорем 8 и 9, если предполагать доказанным предложение 3.

2.7. Характеризация нетривиальных элементов 2-кручения группы $H_1(\Theta, \text{even})$. Как мы увидим ниже, препятствия к построению целочисленных комбинаторных формул для инвариантов, получающихся из элементов группы $H_2(\Theta, 3)$, лежат в 2-кручении группы $H_1(\Theta, 2)$ и тривиальны, если диаграмма Θ планарна. Поэтому важно уметь определять по любому 1-мерному циклу комплекса $\mathbb{C}_*(\Theta, \text{even})$, равен он нулю в этой группе кручения или не равен. Эту задачу можно решать отдельно для каждой компоненты связности графа пересечений, поэтому без ограничения общности будем считать, что этот граф связан, а хордовая диаграмма Θ непланарна.

Всякой типичной иммерсии $\varphi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ класса $\mathcal{K}(\Theta, 2)$ мы поставим в соответствие некоторый гомоморфизм из группы $(\Xi(\Theta) \oplus \|(\Theta)) \otimes \mathbb{Z}_2$ в группу сингулярных 1-цепей проективной прямой с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$. Определим его действие на образующих. Для этого зафиксируем какие-нибудь непрерывные отождествления всех $2m+1$ компонент множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$ со стандартным интервалом $(0, 1)$. Каждой стандартной образующей $a \wedge \alpha$ группы $\Xi(\Theta)$, т.е. паре (компонента a , хорда α), соответствует гауссово отображение $a \rightarrow \mathbb{RP}^1$, сопоставляющее всякой точке $x \in a$ направление из $\varphi(x)$ в $\varphi(\alpha)$. Композиция этого отображения с предыдущим отождествлением определяет сингулярный 1-симплекс в $\mathbb{RP}^1$. Далее, каждой образующей $\alpha \rightleftharpoons$ (соответственно, $\alpha \leftrightsquigarrow$) группы $\|(\Theta)$ соответствует сингулярный 1-симплекс в $\mathbb{RP}^1$, заметающий направления всех лучей, лежащих в угле между направлениями производной отображения φ в двух концах хорды α (соответственно, в угле между производной в одном из этих концов и вектором, противоположным производной в другой).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть граф пересечений хордовой диаграммы Θ связан. Тогда:

- 1) описанный только что гомоморфизм переводит 1-мерные циклы комплекса (17) с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$ в циклы;
- 2) для любого 1-мерного цикла комплекса (17) по mod 2 класс в $H_1(\mathbb{RP}^1, \mathbb{Z}_2)$ его образа при этом гомоморфизме не зависит от выбора иммерсии φ общего положения;
- 3) для гомологичных циклов комплекса (17) эти классы в $H_1(\mathbb{RP}^1, \mathbb{Z}_2)$ одинаковы;
- 4) если диаграмма Θ непланарна, то класс нашего цикла в группе $H_1(\Theta, 2)$ нетривиален тогда и только тогда, когда полученный класс в $H_1(\mathbb{RP}^1, \mathbb{Z}_2)$ не равен нулю для какой-нибудь (и тогда любой) типичной иммерсии φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Имеются три типа точек в $\mathbb{RP}^1$, вблизи которых получающаяся сингулярная цепь могла бы не быть циклом:

- а) направления, соединяющие образы $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ концов разных хорд из Θ ;
- б) касательные направления к кривой $\varphi(\mathbb{R}^1)$ в точках ее самопересечения, изображаемых хордами из Θ ;
- в) выбранное направление $\varphi'(\mathbb{R}^1)$ (или, эквивалентно, $l(\mathbb{R}^1)$) на бесконечности.

Вблизи точек типа а) (соответственно, типа б)) гомологическое условие $\partial = 0$ на образ цикла вытекает из тривиальности образа этого цикла при действии оператора $\Xi(\Theta) \rightarrow \Omega(\Theta)$ (соответственно, $\Xi(\Theta) \rightarrow \Psi(\Theta)$) в комплексе (14), приведенном по mod 2. Гомологическое условие, связанное с точками типа в), следует из условий, связанных с точками типа а), и из того, что граница образа каждой образующей $a \wedge \alpha$ группы $\Xi(\Theta)$ включает ровно две точки разрыва типов а) и в), в соответствии с числом конечных концов интервала a .

2) Любые две типичные иммерсии можно соединить в $\mathcal{K}(\Theta, 2)$ путем общего положения. Локальные перестройки, влияющие на образ рассматриваемого цикла, которые могут возникать на этом пути, – это перепрыгивание образа перекрестия через образ неособого участка и мгновенное самокасание двух ветвей в точке самопересечения, в результате которого репер, образованный касательными к этим двум ветвям, меняет ориентацию. Такие две перестройки можно представлять себе как проекции в $\mathbb{R}^2$ перестроек, половины которых (заканчивающиеся моментом вырождения) изображены на рис. 15. При перестройке второго типа структура образа нашего цикла в $\mathbb{RP}^1$ меняется непрерывно, а следовательно, его класс гомологий не изменяется. При перестройке первого типа что-то происходит, только если наш цикл включает образующую $a \wedge \alpha$, где a – прообраз неособого участка, α – перекрестие, участвующие в перестройке. В этом случае сильно меняется образ аналогичного гауссова отображения в двулистную накрывающую проективной прямой, т.е. в пространство ориентированных направлений в $\mathbb{R}^2$. А именно, к этому образу добавляется фундаментальный цикл этого накрытия; поскольку накрытие двулистно, внизу (в $\mathbb{RP}^1$) класс гомологий по mod 2 не изменяется.

3) Требуется доказать, что граница любой образующей $a \wedge b$ группы $\Pi(\Theta)$ отображается в нуль. При этом необходимо разобрать три существенно различных случая:

- А) границы интервалов a и b в $\mathbb{R}^1$ не пересекаются и не соединены никакой хордой;
- Б) эти два интервала соседствуют в $\mathbb{R}^1$;

В) какая-то пара концов этих интервалов соединена хордой.

(Конечно, возможны еще композиции последних двух вариантов: две хорды, соединяющие разные пары концов этих интервалов, как для интервалов 2 и 4 на рис. 5, или соседствующие интервалы, оставшиеся концы которых соединяются хордой, как для интервалов 2 и 3 на том же рисунке. Однако разбор этих сложных случаев сводится к разбору элементарных.)

В случае А), если к тому же образы интервалов $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ не пересекаются в $\mathbb{R}^2$, гауссово отображение в $\mathbb{RP}^1$ определено и непрерывно на всем замкнутом прямоугольнике $\bar{a} \times \bar{b}$, а следовательно, его ограничение на границу прямоугольника стягиваемо. В общей ситуации это отображение определено и непрерывно на этом прямоугольнике, из которого выброшены маленькие кружочки с центрами в точках, соответствующих пересечениям этих интервалов. Образ ограничения гауссова отображения на границу каждого такого круга пробегает многообразие $\mathbb{RP}^1$ дважды.

В случае Б) верно то же самое. Действительно, на границе прямоугольника есть только одна точка, в которой гауссово отображение не определено: она соответствует общей точке отрезков $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Легко видеть, что это отображение продолжается в эту точку по непрерывности.

Наконец, в случае В) гауссово отображение не продолжается по непрерывности в угол прямоугольника, соответствующий паре точек, соединенных хордой: в ограничении на границу сколь угодно маленькой четверти круга с центром в этой точке оно стремительно пробегает путь в $\mathbb{RP}^1$ между направлениями производных отображения φ в этих точках. Однако именно в этом случае граница образующей $a \wedge b \in \Pi(\Theta)$ включает элемент группы $\Pi(\Theta)$, отображаемый нашим гомоморфизмом в тот же самый путь.

4) Это утверждение следует из предыдущих утверждений и из того, что в силу теоремы 9 группа $H_1(\Theta, \text{even})$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$ и порождается элементом вида $\alpha \rightrightarrows + \alpha \leftrightsquigarrow$, для которого степень нашего отображения в $\mathbb{RP}^1$, очевидно, равна 1.

2.8. Гомологии комплексов $\mathcal{C}_*(\Theta, n)$, препятствия к планарности и тождества для лишних точек самопересечения плоской кривой. Из теоремы 9 вытекает еще один (в дополнение к теореме Мантурова) алгоритм полиномиальной сложности для распознавания планарности уникурсальной кривой с заданным порядком самопересечений. А именно, по хордовой диаграмме Θ , кодирующей этот порядок пересечений, нужно построить комплекс $\mathcal{C}_*(\Theta, \text{even})$, дифференциалы которого описываются предложением 3, посчитать его группу 1-гомологии и посмотреть, содержит ли она 2-кручение.

Я надеюсь, что, обобщая эту теорему, можно получить сильный метод проверки вложимости различных объектов в евклидовы пространства и другие несложные многообразия. Действительно, группы гомологий высокой размерности пространства вложений такого объекта в пространство также высокой размерности могут сильно зависеть от того, можно ли этот объект вложить в пространство критической размерности.

Двумерные когомологии двух комплексов – четного и нечетного – также доставляют препятствия в задаче о планарности и очень близкой к ней задаче об амфихеральности кривой с заданным типом трансверсальных самопересечений.

Препятствие к планарности, задаваемое произвольным элементом группы $H_2(\Theta, \text{even})$, определяется следующим образом. Рассмотрим произвольную типичную иммерсию $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ класса $\mathcal{K}(\Theta, 2)$, затем для каждого ее “лишнего” самопересечения, т.е. точки $f(x) = f(y)$ такой, что $(x, y) \notin \Theta$, учтем с подходящим знаком коэффициент, с которым в наш цикл входит образующая $\{x\} \wedge \{y\}$ группы $\Pi(\Theta)$ (где $\{x\}$ – это компонента множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$, содержащая x), и просуммируем эти коэффициенты по всем таким “лишним” точкам. Полученное число будет одинаково для всех типичных иммерсий класса $\mathcal{K}(\Theta, 2)$, в частности обращается в нуль, если есть хотя бы одна иммерсия без лишних самопересечений. Конечно, обращение в нуль – лишь необходимое условие планарности, а следовательно, оно гораздо слабее условия существования 2-кручения в группе $H_1(\Theta, 2)$, являющегося и достаточным.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим какую-нибудь плоскую кривую с типом самопересечения, указанным на рис. 5 слева, например проекцию в $\mathbb{R}^2$ сингулярного узла, изображенного там же справа. Для этого типа Θ группа $H_2(\Theta, 2)$ с целыми коэффициентами одномерна и порождена классом $(1 - 3 + 5) \wedge (2 - 4)$. Таким образом, этот класс не учитывает единственное паразитное самопересечение, изображенное на том же рисунке справа (в котором пересекаются 3-й и 5-й интервалы), и не позволяет доказать непланарность этой кривой. Аналогичные препятствия по mod 2 в этом случае оказываются более сильными и доказывают непланарность.

С другой стороны, любой из двух базисных инвариантов, порождающих группу $H_2(\Theta, 3)$ и рассмотренных в примере 2, доказывает даже гораздо более сильное утверждение (“неамфихеральность”): не существует отображения $f \in \mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$, изотопного своему зеркальному образу. Действительно, разность значений такого инварианта на фиксированной иммерсии f_0 этого класса и на ее зеркальном образе нечетна, следовательно, то же будет верно для любой другой иммерсии класса $\mathcal{K}(\Theta, 3) \setminus \Sigma(\Theta, 3)$.

В любом случае элементам группы $H_2(\Theta, 2)$ соответствуют *тождества* для чисел лишних точек самопересечения плоской кривой. В примере 4 это тождество очевидно: оно означает, что если мы сгладим уголки циклов, заданных образами цепей $2 - 4$ и $1 - 3 + 5$, то индекс пересечения полученных двух ориентированных замкнутых кривых в $\mathbb{R}^2$ равен нулю. Однако аналогичные тождества, связанные с инвариантами второго и более высоких порядков, бывают менее тривиальными. Я надеюсь обсудить их в следующей работе.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Известный гомологический *инвариант* (соответственно, *препятствие*) *взрезанного квадрата* (или *Ван Кампена*) для вложений в $\mathbb{R}^3$ (соответственно, в $\mathbb{R}^2$) произвольного графа K (см. [12]) также является в определенном смысле инвариантом (соответственно, препятствием) первого порядка. Этот инвариант/препятствие определяется как образ фундаментального коцикла $\mathbb{RP}^2$ при отображении $H^2(\mathbb{RP}^2, O) \rightarrow H^2(B(K, 2), \pm\mathbb{Z})$, где O – ориентирующий пучок на $\mathbb{RP}^2$, $B(K, 2)$ – пространство неупорядоченных пар разных точек графа K , $\pm\mathbb{Z}$ – локальная система со слоем $\mathbb{Z}$, переворачивающаяся над петлями, определяющими перестановку этих точек, а отображение индуцируется любым вложением графа в $\mathbb{R}^3$ (о понятии порядка для инвариантов вложений графов см., например, [13]).

Рассмотренные комплексы напоминают комплексы, вычисляющие эти инварианты и препятствия, но имеют много дополнительных членов, отвечающих за “дифференцируемые” эффекты типа запрещенных самокасаний в точках самопересечения. Эти слагаемые возникают в окрестности диагонали конфигурационного пространства (которую в методе взрезанного квадрата удаляют); поэтому естественно назвать результат наших вычислений *инвариантами и препятствиями сложенного квадрата*.

§ 3. Коориентации стратов и коэффициенты инцидентности

В этом параграфе мы докажем предложение 3 о дифференциалах комплекса (14), в частности зафиксируем ориентации всех стратов разрешенного дискриминанта, порождающих этот комплекс. Также мы вычислим коэффициенты инцидентности некоторых цепей в $\mathcal{K}(\Theta, n)$, задающих комбинаторные формулы типа Поляка–Виро для инвариантов (при $n = 3$) и классов когомологий первого порядка.

Напомним, что $\sigma_1(\Theta, n)$ является пространством расслоения над $B_2(\Theta)$, слой которого – аффинное подпространство коразмерности n в $\mathcal{K}(\Theta, n)$. Все страты пространства $B_2(\Theta)$, перечисленные в диаграмме (14), являются клетками, следовательно, то же верно для прообразов этих клеток в $\sigma_1(\Theta, n)$. Для любой клетки в $B_2(\Theta)$ мы фиксируем ориентацию этой клетки и *коориентацию* (т.е. ориентацию нормального расслоения) в $\mathcal{K}(\Theta, n)$ типичного слоя над ней. Коэффициент инцидентности клеток соседних размерностей в $\sigma_1(\Theta, n)$ вычисляется как алгебраическое число вхождений меньшей клетки в границу большей, причем знак каждого вхождения равен произведению аналогичного знака для соответствующего вхождения меньшей ориентированной клетки в базу в границу большей и знака ± 1 , зависящего от того, задает это примыкание согласованность или несогласованность фиксированных коориентаций слоев над этими клетками.

Образы клеток при проекции $\sigma_1(\Theta, n) \rightarrow \mathcal{K}(\Theta, n)$ имеют в $\mathcal{K}(\Theta, n)$ коразмерность $n - 2$, $n - 1$ или n . Указанная выше структура на исходном страте (состоящая из ориентации в базе и коориентации слоя) задает коориентацию такого образа в его неособых точках. Эквивалентное вычисление коэффициентов инцидентности можно проводить в терминах этих образов. Именно, нужно взять трансверсальную площадку к меньшему страту в его неособой точке, рассмотреть все ветви кривых, по которым в этой площадке к точке меньшего страта подходят точки большего, и учесть все эти ветви с некоторыми знаками ± 1 . При этом знак, соответствующий такой ветви, зависит от того, совпадает ли ориентация площадки, определенная выбранной коориентацией меньшего страта, с ориентацией, определенной в произвольной точке этой ветви и состоящей из направления вдоль кривой к точке меньшего страта и коориентации ветви, заданной выбранной коориентацией большего страта. В настоящем параграфе мы вычислим коэффициенты инцидентности именно этим способом, хотя вычисление в прообразе часто бывает легче.

3.1. Ориентации стратов дискриминанта. Для любого стандартного страта в $\sigma_1(\Theta, n)$ мы зафиксируем его (ко)ориентацию, т.е. ориентацию его базы в $B_2(\Theta)$, и коориентацию слоя в $\mathcal{K}(\Theta, n)$. Также мы укажем соответствующие коориентации стратов в $\mathcal{K}(\Theta, n)$. Во всех случаях выбор положительной коори-

ентации к страту задается указанием некоторого положительного репера в трансверсали к нему.

Прежде всего мы фиксируем линейную систему координат $x_1, \dots, x_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ и задаем ориентацию этого пространства при помощи внешней формы $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, или, эквивалентно, при помощи стандартного репера $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$.

3.1.1. Ориентация максимальных стратов $a \cdot b$ или $a \wedge b$, порождающих группу $\Pi(\Theta)$. Пусть a, b – два неособых интервала в $\mathbb{R}^1$, a левее, чем b . Ориентация соответствующего страта в $B_2(\Theta)$ задается формой $dt \wedge ds$, где t, s – соответственно координаты в интервалах a, b , ориентация которых совпадает со стандартной ориентацией прямой $\mathbb{R}^1$. Коориентация слоя над точкой (t, s) задается формой

$$d(x_1(s) - x_1(t)) \wedge \dots \wedge d(x_n(s) - x_n(t)),$$

где $x_i(s), x_i(t)$ – координаты значений $f(s), f(t)$ отображения $f \in \mathcal{K}(\Theta, n)$.

Соответствующие страты в $\mathcal{K}(\Theta, n)$ имеют там коразмерность $n - 2$. Типичная точка такого страта $a \cdot b$ или $a \wedge b$ представлена отображением $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{K}(\Theta, n)$, имеющим одно лишнее самопересечение $f(t_0) = f(s_0)$, $t_0 \in a$, $s_0 \in b$, причем векторы $f'(t_0)$ и $f'(s_0)$ непараллельны (и не равны нулю). Рассмотрим $(n - 2)$ -мерную аффинную плоскость в $\mathbb{R}^n$, проходящую через точку $f(t_0) = f(s_0)$ и ортогональную к плоскости, натянутой на векторы $f'(t_0)$ и $f'(s_0)$. Выберем в ней репер $(e_3, \dots, e_n)$ так, чтобы репер $(f'(t_0), f'(s_0), e_3, \dots, e_n)$ задавал положительную ориентацию пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда положительную коориентацию рассмотренного страта в $\mathcal{K}(\Theta, n)$ задает репер в (касательном расслоении к) $\mathcal{K}(\Theta, n)$ в точке f , состоящий из $n - 2$ маленьких деформаций отображения f , не изменяющих это отображение вблизи точки t_0 , а вблизи точки s_0 сдвигающих его соответственно по направлениям векторов $e_3, \dots, e_n$.

3.1.2. Ориентация стратов $\alpha \rightrightarrows$ и $\alpha \leftrightharpoons$, порождающих группу $\|(\Theta)$. Пусть $u, v \in \mathbb{R}^1$ – соответственно левый и правый концы хорды α . Тогда ориентация соответствующей клетки в $B_2(\Theta)$ дается формой $d\rho$, где ρ – скалярное отношение вектора $f'(v)$ к (коллинеарному ему) вектору $f'(u)$, а коориентация слоя над точкой ρ в $\mathcal{K}(\Theta, n)$ – формой

$$(x'_1(v) - \rho x'_1(u)) \wedge \dots \wedge (x'_n(v) - \rho x'_n(u)).$$

Соответствующие страты в $\mathcal{K}(\Theta, n)$ имеют коразмерность $n - 1$. Типичная точка f такого страта в $\Sigma(\Theta, n)$ имеет простое самокасание в концах u, v хорды α , в частности, производные $f'(u), f'(v)$ не равны нулю. Рассмотрим аффинную гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, проходящую через точку $f(u) = f(v)$ и ортогональную к вектору $f'(u)$. Выберем в ней репер $(e_2, \dots, e_n)$ так, чтобы репер $(f'(u), e_2, \dots, e_n)$ задавал положительную ориентацию пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда положительную коориентацию нашего страта задает репер в $T_f \mathcal{K}(\Theta, n)$, состоящий из $n - 1$ маленьких деформаций отображения f , не изменяющих это отображение вблизи точки u , а вблизи точки v добавляющих к его производной соответственно $\varepsilon e_2, \dots, \varepsilon e_n$, $\varepsilon \approx +0$.

3.1.3. Ориентация стратов $a \cdot \alpha$ или $a \wedge \alpha$, где a – некоторый неособый интервал, α – хорда, а знак $\cdot$ или $\wedge$ между ними зависит от четности n . Эти страты порождают группу $\Xi(\Theta)$. Ориентация базы задается формой dt , $t \in a$, а коориентация слоя – формой

$$d(x_1(\alpha) - x_1(t)) \wedge \cdots \wedge d(x_n(\alpha) - x_n(t)),$$

где $x_i(\alpha)$ – i -я координата образа обоих концов хорды α при отображении f .

Соответствующие дискриминантные страты в $\mathcal{K}(\Theta, n)$ тоже имеют коразмерность $n - 1$. Типичная точка такого страта – это отображение $f \in \mathcal{K}(\Theta, n)$ такое, что $f(t_0) = f(\alpha)$ для единственной точки $t_0 \in a$, причем $f'(t_0) \neq 0$. Рассмотрим аффинную гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, проходящую через точку $f(t_0)$ и ортогональную к вектору $f'(t_0)$. Выберем в ней репер $(e_2, \dots, e_n)$ так, чтобы репер $(f'(t_0), e_2, \dots, e_n)$ задавал положительную ориентацию пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда положительную коориентацию страта задает репер в $T_f \mathcal{K}(\Theta, n)$, состоящий из $n - 1$ маленьких деформаций отображения f , не изменяющих это отображение вблизи точки t_0 , а вблизи концов хорды α сдвигающих это отображение по направлению векторов $e_2, \dots, e_n$ соответственно.

3.1.4. Ориентация стратов $\star^+(\alpha)$ и $\star^-(\alpha)$, где α – некоторая хорда из Θ . Эти страты порождают группу $\Psi(\Theta)$ и состоят из отображений $f \in \mathcal{K}(\Theta, n)$, имеющих нуль производной в том из концов хорды α , который правее (соответственно, левее) в $\mathbb{R}^1$. Положительный нормальный репер к такому страту в $\mathcal{K}(\Theta, n)$ состоит из n векторов, увеличивающих соответственно 1-ю, $\dots$, n -ю координату производной отображения f в этом конце хорды и оставляющих остальные координаты этой производной нулевыми.

3.1.5. Ориентация стратов $\alpha \cdot \beta$ или $\alpha \wedge \beta$, где α, β – пара хорд диаграммы Θ . Эти страты состоят из отображений, склеивающих вместе все концы хорд α и β . Мы называем *меньшей* (и обозначаем через α) ту из этих хорд, левый конец которой расположен левее в $\mathbb{R}^1$.

Положительный нормальный репер к этому страту состоит из n деформаций отображения f , увеличивающих соответственно 1-ю, $\dots$, n -ю координату образа большей хорды β , не изменяя ни остальные его координаты, ни образ хорды α .

3.2. Описание оператора $\Pi(\Theta) \rightarrow \|\Theta\|$ в (14). Этот оператор соответствует вырождению, указанному в среднем столбце на рис. 6. При этом вырождении оба конца ломаной стремятся к концам некоторой хорды. Здесь нужно рассмотреть четыре случая, соответствующие четырем возможным взаимным расположениям концов хорды и ломаной в $\mathbb{R}^1$ (см. рис. 8). Рассмотрим подробно только один из них, когда оба конца ломаной перед вырождением находятся между концами хорды.

Рис. 12. Оператор $\Pi(\Theta) \rightarrow \|\Theta\|$

Этот случай изображен на рис. 12, жирной точкой обозначен образ концов хорды, образ интервала a с координатой t лежит правее ее на горизонтальной линии, а образ интервала b с координатой s – правее ее на кривой. Нам достаточно вычислить коэффициент инцидентности вблизи одной неособой точки меньшего страта. Поэтому будем считать, что рассматриваемая кривая в большем страте, подходящая к этой точке меньшего страта, состоит из отображений f_λ (где параметр λ принимает положительные значения и стремится к нулю, когда кривая подходит к меньшему страту), которые на этих интервалах задаются условиями $t \mapsto (t, 0, \dots, 0)$ и $s \mapsto (-s, s^2 + \lambda s, 0, \dots, 0)$ соответственно. В частности, в этих интервалах координаты t и s прообразов второй точки пересечения равны соответственно λ и $-\lambda$.

Рассмотрим $n - 2$ маленькие деформации отображения f_λ , неподвижные на первом интервале, а на втором заменяющие отображение $s \mapsto (-s, s^2 + \lambda s, 0, \dots, 0)$ отображениями $s \mapsto (-s, s^2 + \lambda s, -\varepsilon s, 0, \dots, 0)$, $s \mapsto (-s, s^2 + \lambda s, 0, -\varepsilon s, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $s \mapsto (-s, s^2 + \lambda s, 0, 0, \dots, -\varepsilon s)$. Такой набор деформаций задает *отрицательную* коориентацию максимального страта (см. п. 3.1.1): действительно, матрица этих сдвигов в деформируемой точке пересечения, дополненная сверху векторами производных отображения f_λ в прообразах данной точки, равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\varepsilon & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\varepsilon \end{pmatrix}.$$

При $\lambda \rightarrow +0$ отображение f_λ вырождается в отображение из страта $\alpha_{\rightleftharpoons}$, а наша система $n - 2$ деформаций вырождается в деформации предельного отображения, производные которых в точке пересечения равны $(-1, 0, -\varepsilon, 0, \dots, 0), \dots, (-1, 0, 0, \dots, -\varepsilon)$. Добавим к ним вектор внешней нормали к большому страту в точке меньшего. Этот вектор вычисляется как производная по $-\lambda$ в точке $\lambda = 0$ от производной отображения $s \mapsto (-s, s^2 + \lambda s, 0, \dots, 0)$ в точке $s = 0$; таким образом, он равен $(0, -1, 0, \dots, 0)$. Согласно п. 3.1.2, чтобы вычислить знак ориентации получившегося нормального репера к меньшему страту, припишем к полученной матрице сверху производную отображения f в точке $t = 0$. Получим квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Знак этой матрицы равен $(-1)^{n-1}$. Сравнивая его со знаком предыдущей матрицы, получаем искомый коэффициент инцидентности, равный $(-1)^n$.

Остальные три случая разбираются не сложнее и дают коэффициенты, указанные на рис. 8.

3.3. Оператор $\Pi(\Theta) \rightarrow \Xi(\Theta)$ в (14). Хотя здесь мы вычисляем двенадцать коэффициентов инцидентности, указанных на рис. 7, достаточно разобрать четыре существенно различных случая: конец ломаной линии, стремящийся к концу гладкой хорды, может быть правым или левым концом этой ломаной, и он может стремиться к концу хорды справа или слева в $\mathbb{R}^1$. С другой стороны, ни то, является ли этот конец хорды правым или левым ее концом, ни взаимное расположение оставшихся концов хорды и ломаной (если оно не следует однозначно из остальных данных) не влияет на коэффициент.

Рис. 13. Оператор $\Pi(\Theta) \rightarrow \Xi(\Theta)$

Разберем подробно лишь один случай, изображенный на рис. 13 (см. также третий член в верхней строке рис. 7). Жирной точкой на рис. 13 изображен конец хорды, в котором образ нашей кривой каким-то (для нас не важно, каким) образом пересекается другой ее ветвью. Эта точка t_0 выбрана в качестве начала координаты t , координата вблизи другого конца ломаной обозначается через s . Выберем в качестве интересующей нас точки меньшего страта отображение, заданное вблизи этих точек условиями $t \mapsto (t, 0, \dots, 0)$ и $s \mapsto (0, s, 0, \dots, 0)$. Будем приближаться к ней из большого страта вдоль семейства отображений f_λ , $\lambda \rightarrow +0$, задаваемых вблизи этих точек условиями $t \mapsto (t, 0, \dots, 0)$, $s \mapsto (\lambda, s, 0, \dots, 0)$. В типичной точке этого семейства выберем нормальный репер к страту состоящим из деформаций вида

$$s \mapsto (0, \lambda, \varepsilon, 0, \dots, 0), \quad s \mapsto (0, \lambda, 0, \varepsilon, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad s \mapsto (0, \lambda, 0, \dots, \varepsilon).$$

Матрица этого репера, дополненная сверху векторами $f'(t_0)$ и $f'(s_0)$, — единичная, поэтому его ориентация положительна. При $\lambda \rightarrow +0$, например, последняя деформация из этого репера стремится к умноженному на -1 последнему вектору, участвовавшему в определении коориентации меньшего страта: действительно, в этом определении свободный (т. е. более правый в $\mathbb{R}^1$) конец ломаной считается первым, а совпавший с концом хорды — вторым, в отличие от упорядочения этих концов для большого страта. Аналогично, все $n - 2$ деформаций дадут в пределе последние $n - 2$ строки следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Вектор внешней нормали к большому страту – это производная по $-\lambda$ при $\lambda = 0$ от вектора, соединяющего образ свободного конца (т.е. точку $(\lambda, 0, \dots, 0)$) с образом хорды, т.е. с началом координат. Приписываем этот вектор

$$\partial(-\lambda, 0, \dots, 0)/\partial(-\lambda) \equiv (1, 0, \dots, 0)$$

к началу набора предельных деформаций и получаем нормальный репер к меньшему страту. Чтобы вычислить его знак, приписываем в самом начале производную отображения f в свободном конце ломаной хорды, т. е. $(0, 1, 0, \dots, 0)$. Полученная матрица имеет знак $(-1)^{n-1}$, это и есть искомый коэффициент инцидентности как в нашем случае, так и в ничем существенным от него не отличающихся случаях, соответствующих второму члену в первой строке и второму члену в последней строке на рис. 7. Остальные случаи рассматриваются аналогично и дают все коэффициенты, указанные на этом же рисунке.

3.4. Оператор $\|(\Theta) \rightarrow \Psi(\Theta)$. Объясним коэффициент $(-1)^n$ при втором слагаемом в первой строке на рис. 9. Рассмотрим точку меньшего страта, заданную отображением f , которое вблизи правого (невыврождающегося) конца хорды задается формулой $s \mapsto (s, 0, \dots, 0)$, а вблизи особого конца – формулой $t \mapsto (t^n, t^{n-1}, \dots, t^2)$. Устремимся к этой точке из большего страта вдоль кривой, состоящей из отображений f_λ , $\lambda \rightarrow +0$, вблизи этой точки равных

$$t \mapsto (t^n + \lambda t, t^{n-1}, \dots, t^2). \quad (22)$$

Для любого малого λ продеформируем f_λ в $n-1$ отображений, заданных вблизи этой точки формулами

$$\begin{aligned} t &\mapsto f_\lambda(t) + \lambda(0, t, 0, 0, \dots, 0), \\ t &\mapsto f_\lambda(t) + \lambda(0, 0, t, 0, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ t &\mapsto f_\lambda(t) + \lambda(0, 0, 0, \dots, 0, t). \end{aligned} \tag{23}$$

Знак полученного нормального репера к большому страту равен $(-1)^{n-1}$. Действительно, в силу определения знак нормального репера можно вычислять как знак определителя матрицы, первая строка которой – это вектор $f'(u)$, где u – левый конец хорды, а остальные строки – это соответственно векторы $(f + \varepsilon e_2)'(v) - (f + \varepsilon e_2)'(u)$, $(f + \varepsilon e_3)'(v) - (f + \varepsilon e_3)'(u)$, $\dots$, $(f + \varepsilon e_n)'(v) - (f + \varepsilon e_n)'(u)$, где v – правый конец хорды.

При $\lambda \rightarrow +0$ этот репер стремится к реперу, состоящему из последних $n - 1$ строк следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Вектор внешней нормали к большому страту – это производная по $-\lambda$ производной отображения f_λ в точке t_0 , т.е. верхняя строка матрицы (24). Определитель

этой матрицы равен -1 . Сравнивая его со знаком $(-1)^{n-1}$ ориентирующего репера, соответствующего $\lambda > 0$, получаем коэффициент $(-1)^n$.

Объясним теперь второе слагаемое во второй строке на рис. 9. Для этого устремимся к той же точке меньшего страта вдоль такой же кривой (22) и с такими же деформациями (23), но с $\lambda \rightarrow -0$. В общей точке этой кривой репер деформаций задает отрицательную коориентацию большего страта. Предельная матрица при $\lambda \rightarrow -0$ – единичная, поскольку в отличие от предыдущего случая, определяющего матрицу (24), вектор внешней нормали дается дифференцированием по λ , а не по $-\lambda$.

Вычисление первых слагаемых в обеих строках на рис. 9 проще.

3.5. Оператор $\Xi(\Theta) \rightarrow \Omega(\Theta)$. Этот оператор представлен на рис. 11. Разберем для примера последнее равенство на рис. 11. Будем считать, что точка f большего страта изображена средней нижней или левой нижней картинкой этого рисунка, причем вблизи свободного конца ломаной отображение f равно $t \mapsto (t, 0, \dots, 0)$. В качестве базиса $(e_2, \dots, e_n)$, использованного в п. 3.1.3, можно взять базис $(\partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n)$. Тогда при вырождении этой точки f в отображение, представленное правой нижней картинкой рисунка, нормальный базис большего страта стремится к последним $n - 1$ векторам канонического нормального базиса меньшего страта, взятым с коэффициентом -1 . Дополненные вектором внешней нормали, они дадут матрицу

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где на месте коэффициента ± 1 стоит -1 для левой и 1 для средней картинкой нижней строки на рис. 11.

3.6. Оператор $\Xi(\Theta) \rightarrow \Psi(\Theta)$. Граничные операторы такого типа указаны на рис. 10 слева. Для всех четырех случаев точка большего страта, близкая к вырождению, изображена на рис. 10 справа. Это изображение имеет два варианта, соответствующие случаю левых (соответственно, центральных) картинок левой части рис. 10 и определяемые тем, какой – соответствующий концу хорды или свободному концу ломаной – прообраз точки пересечения находится правее в $\mathbb{R}^1$. При этом расположение в $\mathbb{R}^1$ конца хорды, далекого от сливающихся точек, не влияет на вырождение, так что граничные операторы для обеих левых (соответственно, обеих средних) картинок в двух строках левой части этого рисунка описываются одинаково. Указанные на рис. 10 коэффициенты инцидентности доказываются аналогично тому, как это было сделано в пп. 3.2–3.5, и следуют из уже доказанных формул и тождества $\partial^2 = 0$, примененного к образующим группы $\Pi(\Theta)$.

Предложение 3 полностью доказано.

3.7. Ориентации и границы цепей, заданных ориентированными гауссовыми диаграммами. Всякая ориентированная гауссова диаграмма первого порядка с основой Θ определяет сингулярную цепь коразмерности $n - 3$

в пространстве $\mathcal{K}(\Theta, n)$. Из таких цепей должны строиться относительные циклы в $\mathcal{K}(\Theta, n) \bmod \Sigma(\Theta, n)$, определяющие комбинаторные формулы для инвариантов особых иммерсий (при $n = 3$) и, более общим образом, для $(n - 3)$ -мерных классов когомологий первого порядка в пространстве $\mathcal{K}(\Theta, n) \setminus \Sigma(\Theta, n)$. Для построения таких формул необходимо уметь проверять гомологические условия: во-первых, линейная комбинация таких цепей должна действительно быть относительным циклом (т. е. границы ее слагаемых, не лежащие в $\Sigma(\Theta, n)$, должны сокращаться), а во-вторых, ее граница в $\Sigma(\Theta, n)$ должна задавать интересующий нас класс гомологий. Для этого в настоящем пункте мы покажем, как вычислять гомологические границы этих сингулярных цепей, а также аналогичных цепей коразмерности $n - 2$, из которых строятся комбинаторные формулы для $(n - 2)$ -мерных когомологий первого порядка. Как обычно, мы начинаем с определения и фиксации (ко)ориентации этих цепей.

Выделим в $\mathbb{R}^n$ направление $\partial/\partial x_1$ (“вверх”) и потребуем, чтобы оно не совпадало с направлением оси $l(\mathbb{R}^1)$ в $\mathbb{R}^n$. Факторпространство $\mathbb{R}^{n-1}$ пространства $\mathbb{R}^n$ по направлению “вверх” назовем *плоскостью стола* и ориентируем его формой $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Рассмотрим произвольную ориентированную гауссову диаграмму первого порядка Γ с основой Θ , в изображение которой входит ломаная стрелка, соединяющая две точки $(u_0 < v_0)$ множества $\mathbb{R}^1 \setminus \Theta$. Этой диаграмме соответствует подмногообразие $V(\Gamma)$ в $B_2(\Theta) \times \mathcal{K}(\Theta, n)$, состоящее из всех пар $((u, v); f)$ таких, что:

- 1) u, v расположены относительно Θ так же, как и u_0, v_0 , т. е. существует сохраняющий ориентацию и диаграмму Θ гомеоморфизм $\mathbb{R}^1$ в себя, переводящий u в u_0 , а v в v_0 ;
- 2) проекции точек $f(u), f(v)$ на плоскость стола $\mathbb{R}^{n-1}$ совпадают;
- 3) точка $f(u)$ лежит “выше” (соответственно, “ниже”) точки $f(v)$ по направлению “вверх”, если ломаная стрелка диаграммы ориентирована от точки v_0 к u_0 (соответственно, от u_0 к v_0).

Через Γ' (соответственно, Γ_0) обозначим ориентированную (соответственно, неориентированную) гауссову диаграмму, получающуюся из Γ изменением (соответственно, забыванием) ориентации, так что, в частности, Γ_0 совпадает с обозначением некоторой образующей группы $\Pi(\Theta)$.

Проекция $\mathcal{K}(\Theta, n) \rightarrow \mathcal{K}(\Theta, n - 1)$, индуцированная проекцией на плоскость стола, переводит $V(\Gamma)$ в страт множества $\sigma_1(\Theta, n - 1) \subset B_2(\Theta) \times \mathcal{K}(\Theta, n - 1)$, заданный диаграммой Γ_0 . При этом полный прообраз этого страта равен замыканию множества $V(\Gamma) \cup V(\Gamma')$, в частности каждый из этих двух стратов вблизи любой своей неособой точки совпадает с этим полным прообразом.

Каноническая (ко)ориентация страта $V(\Gamma)$ состоит из ориентации $du \wedge dv$ множества пар $\{u < v\} \in B_2(\Theta)$ и коориентации в $\mathcal{K}(\Theta, n)$ типичного слоя над такой точкой, индуцированной из канонической (определенной в п. 3.1) коориентации слоя в $\mathcal{K}(\Theta, n - 1)$. В границу каждого страта $V(\Gamma)$ входит максимальный страт разрешенного дискриминанта $\sigma_1(\Theta, n)$, обозначение которого совпадает с Γ_0 . Эта часть граничного оператора обозначается через ∂_1 ; она описывается формулой в верхнем левом углу на рис. 14.

Однако имеются и другие слагаемые гомологической границы: они возникают оттого, что концы ломаной стрелки могут стремиться к точкам хордовой диаграм-

Рис. 14. Убивание стратов дискриминанта

Рис. 15. Райдемайстеровские вырождения самопересекающихся кривых

мы Θ . Возникающие при этом вырождения кривой $f(\mathbb{R}^1)$ изображены на рис. 15. Часть граничного оператора, состоящая из таких слагаемых, разлагается в сумму оператора $\tilde{\beta}$, соответствующего вырождению, указанному в правой части рис. 15 и описанного на рис. 16, и оператора $\tilde{\zeta}$, соответствующего вырождению, указанному в левой части рис. 15 и описанного на рис. 17. Эти слагаемые границы лежат в $B_2(\Theta) \times \mathcal{K}(\Theta, n)$, и каждый из них является открытой областью в полном прообразе некоторого немаксимального страта разрешенного дискриминанта $\sigma_1(\Theta, n - 1)$ при проекции $B_2(\Theta) \times \mathcal{K}(\Theta, n) \rightarrow B_2(\Theta) \times \mathcal{K}(\Theta, n - 1)$. В частности, канонические (ко)ориентации этих областей индуцируются из (ко)ориентаций стратов $\sigma_1(\Theta, n - 1)$, определенных в п. 3.1. Коэффициенты инцидентности между этими стратами и многообразиями $V(\Gamma)$ повторяют коэффициенты инцидентности для соответствующих им стратов в $\sigma_1(\Theta, n - 1)$; в частности, мы получаем формулы, представленные на рис. 16, 17. При этом в каждой из трех строк на рис. 16 можно одновременно изменить ориентацию всех пяти стрелок. Картинки в правых