Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Воловиков, Точки совпадения отображений $\mathbb{Z}_p^n$ -пространств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 5, 53–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/im655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:47:04

УДК 515.142.226

А. Ю. Воловиков

Точки совпадения отображений $\mathbb{Z}_p^n$ -пространств

Изучается множество точек совпадений однозначных и многозначных отображений $\mathbb{Z}_p^n$ -пространств в полиэдры и компакты. Приводятся оценки размерности. Для отображений в евклидово пространство доказана гипотеза Коэна–Ласка для любого числа совпадений, кроме трех.

Библиография: 70 наименований.

§ 1. Введение

В работе [48] Х. Хопф доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любого t существует отображение стандартной $(2t - 1)$ -мерной сферы в t -мерный стягиваемый полиэдр, не склеивающее антиподов, т. е. отображение, принимающее различные значения на любой паре антиподальных (центрально симметричных) точек; в качестве такого полиэдра можно взять t -ю декартову степень триода (триод – конус над тремя точками).*

В этой же работе Х. Хопф поставил вопрос о справедливости следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1.2. *При $n \geq 2t$ любое отображение $f: S^n \rightarrow P^m$ в t -мерный полиэдр P^m склеивает некоторую пару антиподов.*

Заметим, что при $n > 2t$ это утверждение сразу следует из теоремы Борсука–Улама и того простого факта, что компактный t -мерный полиэдр вкладывается в $\mathbb{R}^{2m+1}$.

В работе [24] Е. В. Щепин, не зная о статье [48], переоткрыл теорему 1.1 Хопфа, построив то же самое, что и в [48], отображение. Кроме того, Е. В. Щепин в упомянутой работе доказал теорему 1.2 и тем самым дал положительный ответ на вопрос Хопфа.

Теорема 1.1, а также теорема 1.2 для нульгомотопного отображения были независимо и одновременно с Е. В. Щепиным доказаны М. И. Стесиным [19]. В работах Е. В. Щепина и М. И. Стесина приведенные результаты применялись для оценивания поперечников сфер и шаров. Отметим, что М. И. Стесин построил другой пример не склеивающего антиподов отображения $(2t - 1)$ -мерной сферы в t -мерный стягиваемый полиэдр.

Позже теорема 1.1 была еще раз доказана в [61], а затем еще раз в [51]; примеры отображений из [61] и [51], а также из работы [25] по существу основаны на одной и той же идее (отображения отличаются от построенных в [48], [24], [19]). Полученные в [61] и [51] результаты были инициированы вопросом П. Коннера и Э. Флойда

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-00705).

(см. [38, с. 85]), которые также не знали результата Хопфа и, в частности, задавали вопрос: существует ли не склеивающее антиподов отображение трехмерной сферы в двумерный полиэдр. Отметим также, что Ю. Вайсала в [61] еще раз повторил вопрос Хопфа, не зная, что ранее ответ на него дал Е. В. Щепин в [24].

Позже теорема 1.2 была доказана в [51] в специальном случае ациклического полиэдра P^m , а затем Я. Яворовский нашел новое, отличное от представленного в [24], доказательство этой теоремы (в общем случае).

В [44] Д. Гонсалвес и П. Пергер обобщили результат из [51] на случай действия на сфере циклической группы, а затем Я. Яворовский [52] усилил их результат (отметим также, что близкие результаты были много раньше получены А. С. Шварцем в [23]). Одна из теорем Яворовского [52] состоит в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1.3. *Для любого непрерывного отображения $f: S^n \rightarrow P^m$ сферы S^n , на которой действует свободно циклическая группа $G = \mathbb{Z}_p$ простого порядка p , при $n \geq tr$ найдется точка сферы, на орбите которой f постоянно, т. е. существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(x) = f(gx) \quad \forall g \in G$.*

В настоящей работе приводятся обобщения результатов Х. Хопфа, Е. В. Щепина, Д. Гонсалвеса, П. Пергера и Я. Яворовского (включая недавние работы [45]–[47]), в том числе на случай действия элементарной абелевой группы. Кроме того, показано, как можно применять развитые методы для доказательств теорем Хопфа [49], Янга [69], Коэна–Ласка [40] и их обобщений.

Представим немного подробнее структуру и основные результаты работы.

Пусть X – G -пространство, где G – конечная группа. Для заданного непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ обозначим через $A(f)$ множество тех $x \in X$, на орбитах которых f постоянно.

В основном, в работе рассматриваются пространства с действием p -тора (элементарной абелевой p -группы), т. е. группы $\mathbb{Z}_p^n = \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, где $\mathbb{Z}_p$ – циклическая группа простого порядка p .

В § 2 находятся условия, обеспечивающие непустоту множества $A(f)$ для отображений $\mathbb{Z}_p^n$ -пространств в компакты. В частности, упомянутый выше результат Яворовского оказывается частным случаем теоремы 2.1, утверждающей, что если X – компактное G -пространство, $G = \mathbb{Z}_p^n$, и $\tilde{H}^i(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ при $i \leq |G| \dim Y - 1$, то множество $A(f)$ непусто.

Доказательство опирается на свойства кохомологического индекса $i(\cdot)$, введенного в [12]. Индекс – это “функция”, относящая G -пространству целое неотрицательное число или ∞ и неубывающая при эквивариантных отображениях, т. е. из существования G -отображения $X \rightarrow Y$ следует, что индекс пространства X не больше, чем индекс пространства Y (в частности, $i(X) \leq i(Y)$). В настоящей работе используются различные кохомологические индексы. Кроме $i(\cdot)$, используются еще два кохомологических индекса $\text{in}(\cdot)$ и $\text{ind}(\cdot)$ (последний определен для пространств со свободным действием циклической группы простого порядка), а также род G -пространств. Эти индексы по-разному нормированы: индексы $\text{in}(\cdot)$ и $\text{ind}(\cdot)$ могут принимать значения $0, 1, \dots, \infty$, в то время как $i(\cdot)$ и род – значения $1, 2, \dots, \infty$.

Теорема 2.1 является прямым следствием свойств индекса $i(\cdot)$ и теоремы 2.2, в которой для компактного связного пространства X с $i(X) \geq m|G| + 1 = mq + 1$,

где $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$, показано, что множество $A(f)$ непусто (при $i(X) = mq + 1$ предполагается дополнительно, что $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$).

Основным утверждением, используемым при доказательстве теорем 2.1 и 2.2, является лемма 2.1, согласно которой, если $f: X \rightarrow Z$ – эквивариантное отображение связных паракомпактных G -пространств и $i(X) = i(Z) =: d + 1$, то гомоморфизм $f^*: H^d(Z; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^d(X; \mathbb{Z}_p)$ нетривиален.

В §3 рассматриваются пространства со свободным действием циклической группы G простого порядка p . Изучаются свойства индекса $\text{ind}(\cdot)$, введенного П. Коннером и Э. Флойдом в [36]. Для $G = \mathbb{Z}_2$ этот индекс совпадает с гомологическим индексом, введенным Янгом в [67]. Мы показываем, что и при $p > 2$ он обладает такими же свойствами, что и индекс Янга. В частности, показано, что этот индекс стабилен (следствие 3.1), т. е. $\text{ind } X * G = \text{ind } X + 1$, и что справедливо неравенство (предложение 3.5) $\text{ind } X \leq \text{ind } A + \text{ind } B$, где $X = A \cup B$ – объединение замкнутых (или открытых) инвариантных подпространств. Доказываются аналогии теоремы 2.2. (теорема 3.2) и леммы 2.1 (лемма 3.1), приводится несимметричный аналог теоремы 2.2 (теорема 3.1).

В конце §3 обсуждается использование индекса $\text{ind}(\cdot)$ в теории Люстерника–Шнирельмана для инвариантной гладкой функции на многообразии со свободным гладким $\mathbb{Z}_p$ -действием (см. теорему 3.3). В частности, устанавливается неравенство $\text{ind } X + 1 \leq \text{cat } X/G$ (следствие 3.6).

В §4 рассматриваются частичные совпадения отображений пространств с действием p -тора в евклидово пространство, находятся верхние оценки индекса конфигурационных пространств и изучается род пространств с действием без неподвижных точек.

Для отображения $X \rightarrow Y$ свободного G -пространства, где G – конечная группа, обозначим через $A(f, k)$, $2 \leq k \leq |G|$, множество $x \in X$ таких, что f принимает одно и то же значение на некоторых k точках орбиты точки x .

Исследованиям частичных совпадений посвящены работы [39], [55], [40], [1], [3]. В [40] Коэн и Ласк доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $X \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывное отображение связного свободного $\mathbb{Z}_p$ -пространства X такого, что $H^i(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ при $i < (m-1)(p-1) + k - 1$, где $(p+1)/2 \leq k \leq p$ или $k = 2$. Тогда $A(f, k) \neq \emptyset$. Если, кроме того, X – l -мерное топологическое многообразие, то $\dim A(f, k) \geq l - (m-1)(p-1) - k + 1$.

В работе [40] высказана гипотеза, что этот результат справедлив без ограничения на число склеек k . Там же было введено число $N(\mathbb{R}^m, p, k)$ и показано, что для доказательства гипотезы достаточно установить неравенство $N(\mathbb{R}^m, p, k) \leq (m-1)(p-1) + k - 2$ при любом k . Число $N(\mathbb{R}^m, p, k)$ оказывается равным индексу следующего конфигурационного пространства. Обозначим через $\Delta_k(\mathbb{R}^m)$ объединение плоскостей в $(\mathbb{R}^m)^p$ вида $v_{i_1} = \dots = v_{i_k}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p$, $v_{i_j} \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}_p$ на $(\mathbb{R}^m)^p$, при котором образующая переставляет циклически сомножители. Указанное объединение плоскостей является $\mathbb{Z}_p$ -инвариантным подпространством. Из контекста в [40] нетрудно видеть, что $N(\mathbb{R}^m, p, k)$ равно индексу $\text{in}((\mathbb{R}^m)^p \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m))$ конфигурационного пространства $(\mathbb{R}^m)^p \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m)$. В предложении 4.2 устанавливается нужное неравенство для $k \neq 3$ и тем самым доказывается гипотеза Коэна–Ласка для $k \neq 3$ (см. теорему 4.1 и предложение 4.3). Также доказывается аналог теоремы Коэна–Ласка для случая пространств с действием p -тора (см. теорему 4.6).

Далее напоминаются результаты А. С. Шварца, касающиеся введенного им понятия рода свободных G -пространств. Показано, что эти результаты имеют аналоги и для пространств с действием без неподвижных точек. Род на такой категории можно ввести по-разному (обычно его называют G -категорией; см. [35]). Например, можно определить род $g(X)$ пространства X с G -действием без неподвижных точек как наименьшее d такое, что существует эквивариантное отображение $X \rightarrow J^d(D)$, где D – дизъюнктное объединение всех однородных пространств G/H с $H \neq G$ и $J^d(D)$ – джойн d экземпляров пространства D , рассматриваемый с диагональным действием группы.

Показывается, что справедливы аналоги теорем Шварца (теоремы 4.7, 4.8). Например, в теореме 4.8 доказано, что если $G = \mathbb{Z}_p^n$ действует без неподвижных точек на X и $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно, то $g(A(f)) \geq g(X) - m(p^n - 1)$ (в частности, если $g(X) > m(p^n - 1)$, то $A(f) \neq \emptyset$).

Завершается § 4 кратким обсуждением применения рода для доказательства теорем типа ван Кампена–Флореса и Тверберга.

В § 5 находятся условия, при которых непусто введенное Гонсалвесом, Пергером и Яворовским множество точек (H, G) -совпадений отображения $f: X \rightarrow Y$, где Y – компакт и H – подгруппа в G , являющаяся p -тором (см. теорему 5.1, следствия 5.1, 5.2 и теорему 5.2).

В § 6 приводится обобщение отображения Хопфа на случай действия произвольной конечной группы.

Основным результатом § 7 является теорема 7.2.

В § 8 приводятся результаты типа Буржена–Янга–Шварца для отображений в многообразия пространств со свободным действием циклической группы простого порядка.

В § 9 получены обобщения одной леммы Янга [68]. Одним из таких обобщений является предложение 9.1, в котором показано, что если X – компактное пространство со свободным действием группы $G = \mathbb{Z}_p$ такое, что $\text{ind } X \geq d(m + 1)$, и $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение в m -мерное метрическое пространство Y с G -инвариантными слоями, то найдется точка $y \in Y$ такая, что $\text{ind } f^{-1}y \geq d$.

В § 10 приводятся обобщения теорем 2.2 и 7.2 на случай многозначных отображений.

В § 11 показано, как с помощью леммы 3.1 получить доказательства классических теорем Хопфа [49] и Янга [69].

Некоторые из представленных результатов анонсированы в заметке автора [14].

Автор благодарен Е. Г. Скляренко, Е. В. Щепину, Д. Гонсалвесу, П. Пергеру и Я. Яворовскому за полезные обсуждения и рецензенту, многочисленные замечания которого способствовали существенному улучшению окончательного варианта настоящего текста.

§ 2. Когомологический индекс, $\mathbb{Z}_p^n$ -совпадения отображений в компакты

2.1. Пусть X – пространство с действием p -тора – элементарной абелевой группы $G = \mathbb{Z}_p^n = \mathbb{Z}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p$ (n слагаемых), где p – простое число. Положим $q = p^n = |G|$.

В работе [12] был введен числовой индекс $i(X)$ – функция на G -пространствах, принимающая целые положительные значения или ∞ .

Индекс $i(X)$ определяется с помощью спектральной последовательности расслоения $X_G := E_G \times_G X \rightarrow B_G$ со слоем X (конструкция Бореля). Здесь B_G – классифицирующее пространство, $E_G \rightarrow B_G$ – универсальное главное G -расслоение. Спектральная последовательность сходится к эквивариантным когомологиям $H_G^*(X) := H^*(X_G)$ (см. [50]). Далее используются когомологии Чеха с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_p$, которые исключаются из обозначений. Алгебру $H_G^*(\text{pt}) = H^*(B_G)$ эквивариантных когомологий точки обозначим через Λ^* . В интересующем нас случае (т.е. для $G = \mathbb{Z}_p^n$) при $p > 2$ алгебра Λ^* есть тензорное произведение алгебры многочленов от n двумерных образующих на внешнюю алгебру от n одномерных образующих, а при $p = 2$ – алгебра многочленов от n одномерных образующих.

Пусть X связно. Тогда $E_2^{*,0} = \Lambda^*$. Предположим, что $E_2^{*,0} = \dots = E_s^{*,0} \neq E_{s+1}^{*,0}$. В этом случае по определению $i(X) = s$. Через $i'(X)$ обозначим наименьшее r такое, что ядро естественного гомоморфизма $\Lambda^* \rightarrow E_{r+1}^{*,0}$ содержит элемент, не являющийся делителем нуля в Λ^* . Из определений следует, что $i(X) \leq i'(X)$. Для конечного дизъюнктного объединения однородных пространств, т.е. G -пространств вида G/H , где $H \neq G$, считаем, что $i(X) = 1$.

Приведем некоторые свойства индекса (см. [12]).

- i) Если существует G -отображение из X в Z , то $i(X) \leq i(Z)$.
- ii) Если пространство X компактно и G действует без неподвижных точек, то $i(X) < \infty$.
- iii) Если $G = \mathbb{Z}_2$ и X – свободное G -пространство, то индекс $i(X)$ на 1 больше когомологического индекса Янга [67].
- iv) Если $\tilde{H}^j(X) = 0$ при всех $j \leq n - 1$, то $i(X) \geq n + 1$.
- v) Если $i(Z) < \infty$ и $H^j(Z) = 0$ при всех $j \geq n + 1$, то $i(Z) \leq n + 1$.
- vi) Если X – компактная когомологическая сфера, $H^*(X) = H^*(S^n)$, на которой G действует без неподвижных точек, то $i(X) = i'(X) = n + 1$.
- vii) Если $X = A \cup B$, где A и B – замкнутые G -инвариантные подпространства, то $i(X) \leq i'(A) + i(B)$.

viii) Индексы обладают свойством непрерывности, т.е. для инвариантного замкнутого подмножества существует инвариантная окрестность того же индекса.

Для $\mathbb{Z}_p^n$ -пространства X определен также индекс $\text{in } X$ [8], совпадающий с индексом Янга, если $G = \mathbb{Z}_2$. Мы пишем $\text{in } X \geq N$, если гомоморфизм $\Lambda^i \rightarrow H_G^i(X)$ (когомологий с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_p$) мономорфен при всех $i \leq N$.

В основном мы будем использовать индекс in для пространств со свободным действием циклической группы простого порядка (если G действует свободно на X , то $H_G^*(X) = H^*(X/G)$). Для $G = \mathbb{Z}_p$ мы будем использовать также еще один когомологический индекс, который будет обозначаться через $\text{ind } X$ (см. §3). Если использовать обозначения Коннера–Флойда [36], то этот индекс следует обозначать через $\text{co-ind}_{\mathbb{Z}_p} X$ (коиндекс для кольца коэффициентов $L = \mathbb{Z}_p$). Как будет показано ниже, при $p > 2$ индекс $\text{ind}(\cdot)$ обладает более удобными в применении свойствами, чем $\text{in}(\cdot)$. Мы приведем ниже некоторые результаты автора из [62], [6] (взаимосвязь индексов in и ind , пример 3.1 и теоремы 8.1, 8.2), касающиеся индекса ind (последний обозначался в [62], [6] через co-ind). Отметим также, что для пространств с произвольным действием циклической группы простого порядка (как свободного, так и имеющего неподвижные точки) индекс ind рассматривался в работе [59].

В общем случае (для пространства с действием произвольной компактной группы Ли G) определен идеалозначный индекс [42], обозначаемый через $\text{Ind}_G X$ и по определению совпадающий с ядром естественного гомоморфизма $\Lambda^* \rightarrow H_G^*(X)$ (коэффициенты когомологий берутся в подходящем кольце или поле коэффициентов, для $G = \mathbb{Z}_p^n$ – в поле $\mathbb{Z}_p$).

2.2. Для заданного непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ в компактное пространство Y обозначим через $A(f)$ множество тех точек пространства X , на орбитах которых f постоянно, т.е. $A(f) = \{x \in X \mid f(x) = f(gx) \ \forall g \in G\}$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что X компактно, связно и G действует на X без неподвижных точек. Пусть $H^j(X) = 0$ при $1 \leq j \leq n-1$. Тогда если $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$ и $n \geq m|G| = mq$, то множество $A(f)$ непусто.*

Через $\dim_{\mathbb{Z}_p} Y$ обозначается когомологическая размерность пространства Y над полем $\mathbb{Z}_p$ (поскольку X компактно, без ограничения общности можно считать, что Y – тоже компакт).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Основным интерес представляет случай, когда Y – полиэдр или CW-комплекс (тогда, конечно, $\dim_{\mathbb{Z}_p} Y$ совпадает с размерностью $\dim Y$, определенной с помощью покрытий).

Теорема 2.1 вытекает из свойства (iv) индекса $i(\cdot)$ и следующего результата.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть X компактно, связно и $i(X) \geq m|G| + 1 = mq + 1$, где $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$. При $i(X) = mq + 1$ предположим дополнительно, что $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда множество $A(f)$ непусто.*

Условие, касающееся гомоморфизма относительно f^* , вообще говоря, является существенным. Приведем соответствующий пример сначала для случая $G = \mathbb{Z}_2$. Пусть $K = \Delta_m^{2m+2}$ – m -мерный остов $(2m+2)$ -мерного симплекса Δ^{2m+2} и $X \subset K \times K$ – симплицальный взрезанный квадрат, т.е. объединение произведений непересекающихся симплексов. Поскольку X содержится во взрезанном квадрате $K \times K \setminus \Delta K$, где ΔK – диагональ в произведении, инволюция, переставляющая сомножители в $K \times K$, действует свободно на X . Индекс Янга $\text{in } X$ полиэдра X равен $2m$. Действительно, индекс не превосходит размерности, поэтому $\text{in } X \leq 2m$, а в [11] установлено обратное неравенство. Таким образом, X компактно, связно и $i(X) = \text{in } X + 1 = 2m + 1$. Положим $Y = K$ и в качестве $f: X \rightarrow Y$ возьмем ограничение на X проекции $K \times K \rightarrow K$ на первый сомножитель. Тогда $A(f) = \emptyset$ и выполнены все условия теоремы 2.2, кроме тривиальности гомоморфизма f^* в размерности m . Отметим, что вместо $K = \Delta_m^{2m+2}$ в приведенном выше построении можно использовать $K = \Delta_{m_1}^{2m_1+2} * \dots * \Delta_{m_k}^{2m_k+2}$, поскольку индекс Янга симплицального взрезанного квадрата для $K = \Delta_{m_1}^{2m_1+2} * \dots * \Delta_{m_k}^{2m_k+2}$ равен $2(m_1 + \dots + m_k + k - 1) = 2 \dim K$, что доказывается тем же способом, что и выше. Для рассматриваемого K индекс Янга его взрезанного квадрата также равен $2 \dim K$, поскольку индекс не больше размерности и не меньше, чем индекс содержащегося в $K \times K \setminus \Delta K$ симплицального взрезанного квадрата. Другое доказательство этого факта имеется в [60].

В общем случае положим $K = \Delta_{s-1}^{qs+q-2}$, $q = p^n$. Обозначим через $P_2^q(K) \subset K^q$ объединение подпространств в K^q вида $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_q$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ – попарно непересекающиеся симплексы комплекса K . Имеем $P_2^q(K) \subset K^q \setminus DK \subset K^q \setminus \Delta K$,

где $DK = \{(x_1, \dots, x_q) \in K^q \mid x_i = x_j \text{ для некоторых } i \neq j\}$ – “толстая” диагональ и $\Delta K = \{(x, \dots, x) \mid x \in K\}$ – диагональ. В [11] и [12] показано соответственно, что

$$\text{in } P_2^q(K) \geq q(s-1) = q \dim K, \quad i(P_2^q(K)) \geq q(s-1) + 1.$$

Кроме того, $i(K^q \setminus \Delta K) \leq 1 + \dim K^q \setminus \Delta K = q(s-1) + 1$. Поэтому из свойства неубывания индекса при эквивариантных отображениях получаем

$$i(P_2^q(K)) = i(K^q \setminus DK) = i(K^q \setminus \Delta K) = q(s-1) + 1.$$

Аналогичным образом, используя то, что действие группы $G = \mathbb{Z}_p^n$ на пространствах $P_2^q(K)$ и $K^q \setminus DK$ свободно, получаем

$$\text{in } K^q \setminus \Delta K = \text{in } K^q \setminus DK = q(s-1).$$

В случае, когда G – циклическая группа (простого порядка p), G действует свободно и на пространстве $\text{in } K^p \setminus \Delta K$, поэтому $\text{in } K^p \setminus \Delta K = q(s-1)$.

Теперь в качестве X и Y можно взять соответственно $X = P_2^q(K)$ и $Y = K = \Delta_{s-1}^{qs+q-2}$, а в качестве $f: X \rightarrow Y$ – ограничение на $X \subset K^q$ проекции $K^q \rightarrow K$ на первый сомножитель. Тогда $A(f) = \emptyset$ и выполнены все условия теоремы 2.2, кроме тривиальности гомоморфизма f^* в размерности $s-1 = \dim Y$. В качестве X можно также взять $K^q \setminus U$, где U – подходящая открытая G -инвариантная окрестность диагонали ΔK (или “толстой” диагонали DK) такая, что $i(K^q \setminus U) = q(s-1) + 1$. Так же, как и для $G = \mathbb{Z}_2$, в общем случае можно в качестве K использовать $K = \Delta_{s_1-1}^{qs_1+q-2} * \dots * \Delta_{s_k-1}^{qs_k+q-2}$, поскольку

$$i(P_2^q(K)) = i(K^q \setminus DK) = i(K^q \setminus \Delta K) = q(s_1 + \dots + s_k - 1) + 1 = q \dim K + 1$$

и

$$\text{in } P_2^q(K) = \text{in } K^q \setminus DK = q(s_1 + \dots + s_k - 1) + 1 = q \dim K.$$

Ниже будет показано, что неравенство в теореме 2.2 также не может быть ослаблено.

В доказательстве теоремы 2.2 используется следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. Пусть X и Z – связные паракомпактные G -пространства и $f: X \rightarrow Z$ – эквивариантное отображение. Предположим, что $i(X) = i(Z) = n + 1$. Тогда гомоморфизм $f^*: H^n(Z) \rightarrow H^n(X)$ нетривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Члены спектральной последовательности расслоения $X_G \rightarrow B_G$ будем обозначать через $E_r^{*,*}(X)$, дифференциалы – через $d_r(X)$ (и аналогично для пространства Z).

Предположим противное, т.е. f^* тривиален в размерности n . Тогда f индуцирует тривиальное отображение f_{n+1}^* строки $E_{n+1}^{*,n}(Z)$ в $E_{n+1}^{*,n}(X)$ и из определения индекса вытекает также, что f индуцирует тождественный изоморфизм $E_{n+1}^{*,0}(Z) = \Lambda^* \text{ на } E_{n+1}^{*,0}(Z) = \Lambda^*$. Поскольку $i(Z) = n + 1$, найдется $\gamma \in E_{n+1}^{*,n}(Z)$ такой, что $0 \neq \alpha = d_{n+1}(Z)\gamma \in \Lambda^*$, с другой стороны, $\alpha = f_{n+1}^* d_{n+1}(Z)\gamma = d_{n+1}(X) f_{n+1}^* \gamma = 0$, что приводит к противоречию.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $H \subset G$ – любая подгруппа, отличная от G . Тогда $i(X * (G/H)) = i(X) + 1$, в частности $i(X * G) = i(X) + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $X \subset X * G$, имеем $i(X) \leq i(X * G)$. Так как вложение $X \subset X * G$ гомотопно нулю, из леммы 2.1 следует, что $i(X) \neq i(X * G)$. Таким образом, $i(X) < i(X * G)$. Отсюда следует, что $i(X * G) < i(X * G * G)$. Поскольку $G * G$ – одномерный связный полиэдр, легко видеть, что $i(G * G) = i'(G * G) = 2$. Имеются эквивариантные деформационные ретракции G -пространств $(X * G * G) \setminus X$ и $(X * G * G) \setminus (G * G)$ на $G * G$ и X соответственно. Следовательно,

$$i'((X * G * G) \setminus X) = i'(G * G), \quad i((X * G * G) \setminus (G * G)) = i(X).$$

Из свойств индекса (см. [12, предложение 2.2]) получаем

$$i(X * G * G) \leq i'(G * G) + i(X) = i(X) + 2.$$

Таким образом, имеем

$$i(X) < i(X * G) < i(X * G * G) \leq i(X) + 2,$$

откуда и следует требуемое равенство. Аналогичным образом рассматривается и общий случай подгруппы $H \neq G$. Более того, $i(X * K) = i(X) + 1$ для любого 0-мерного полиэдра, на котором G действует без неподвижных точек (т.е. K есть дизъюнктное объединение однородных множеств G/H , $H \neq G$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Ниже по отображению f будет построено эквивариантное отображение $\hat{f}: X \rightarrow Y^q$ такое, что $A(f) = \hat{f}^{-1}\Delta$, где Δ – диагональ, $\Delta = \{(y_1, \dots, y_q) \in Y^q \mid y_1 = \dots = y_q\}$. Если $G = \mathbb{Z}_p$ с образующей T , то $\hat{f}$ можно определить формулой

$$\hat{f}(x) = (f(x), f(Tx), \dots, f(T^{q-1}x)).$$

Это отображение является эквивариантным относительно действия G на Y^q , при котором T действует циклической перестановкой элементов в наборе:

$$T(y_1, \dots, y_q) = (y_2, y_3, \dots, y_q, y_1).$$

Кроме того, $\hat{f} = f^q \circ s$ – композиция двух эквивариантных отображений $s: X \rightarrow X^q$ и $f^q: X^q \rightarrow Y^q$, которые задаются формулами

$$s(x) = (x, Tx, \dots, T^{q-1}x), \quad f^q(x_1, \dots, x_q) = (f(x_1), \dots, f(x_q)).$$

Легко видеть, что $A(f) = \hat{f}^{-1}\Delta$. Отображения $\hat{f}$, s и f^q и действие G на X^q , Y^q можно определить для любой конечной группы G (не обязательно абелевой), и эти определения мы отнесем в конец доказательства.

Если $A(f) = \emptyset$, то $\hat{f}$ эквивариантно отображает X в $Y^q \setminus \Delta$. Покажем, что в силу условий теоремы такого эквивариантного отображения не может существовать (в ситуации, когда G – циклическая группа простого порядка, такое отображение впервые появилось в работе А. С. Шварца [23], который перенес некоторые результаты Янга [67] на случай действия таких групп). Положим $Z = \hat{f}(X)$.

Из компактности X следует, что Z компактно и замкнуто в $Y^q \setminus \Delta$. Поскольку отображение $\hat{f}: X \rightarrow Z$ эквивариантно, из свойств индекса следует, что $i(X) \leq i(Z)$. Имеем $\dim_{\mathbb{Z}_p} Y^q = mq$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{Z}_p} Z \leq mq$, и из точной последовательности пары (Y^q, Z) вытекает, что вложение $Z \subset Y^q$ индуцирует эпиморфизм $H^{mq}(Y^q) \rightarrow H^{mq}(Z)$.

Из формулы Кюннета следует, что $0 = (f^q)^*: H^{mq}(Y^q) \rightarrow H^{mq}(X^q)$. Пользуясь тем, что $\hat{f} = f^q \circ s$, получаем $0 = \hat{f}^*: H^{mq}(Y^q) \rightarrow H^{mq}(X)$. Отсюда следует, что $0 = \hat{f}^*: H^{mq}(Z) \rightarrow H^{mq}(X)$. Из свойств индекса и неравенства $\dim_{\mathbb{Z}_p} Z \leq mq$ вытекает, что $i(Z) \leq mq + 1$. Если $i(X) > i(Z)$, то не может существовать G -отображения из X в Z . Противоречие. Из леммы 2.1 следует, что случай $i(X) = i(Z) = mq + 1$ также приводит к противоречию. Таким образом, получаем $A(f) \neq \emptyset$.

Осталось определить для произвольной конечной группы G конструкции, использованные в доказательстве теоремы. Обозначим через $X(G)$ пространство отображений $\text{Map}(G, X)$ из G в X , где G рассматривается с дискретной топологией. Группа G действует естественным образом на $X(G)$: если $\eta \in \text{Map}(G, X)$, то $(h\eta)(g) = \eta(h^{-1}g)$, $h, g \in G$. Фиксируя нумерацию элементов группы G , получим гомеоморфизмы $X^q \approx X(G)$ и $Y^q \approx Y(G)$, с помощью которых X^q и Y^q наделяются структурой G -пространств. Отображение f индуцирует эквивариантное отображение $f_{\natural}: X(G) \rightarrow Y(G)$, которое действует по формуле $f_{\natural}\eta = f \circ \eta$. При отождествлении $X(G)$ и $Y(G)$ соответственно с X^q и Y^q отображение $f_{\natural}$ превращается в $f^q: X^q \rightarrow Y^q$. Определим $\hat{f}: X \rightarrow Y(G)$ и $s: X \rightarrow X(G)$ формулами $\hat{f}(x)(g) = f(g^{-1}x)$ и $s(x)(g) = g^{-1}x$. Таким образом, $\hat{f} = f_{\natural} \circ s$. Легко проверить, что $\hat{f}$ и s эквивариантны. Наконец определим $\Delta \subset Y(G)$ как подмножество постоянных отображений. Нетрудно видеть, что $A(f) = \hat{f}^{-1}\Delta$.

Пусть M – связное замкнутое (т. е. компактное без края) m -мерное топологическое многообразие. Известно, что

$$\text{in}(M \times M \setminus \Delta) = m + \max_{\bar{w}_k \neq 0} k =: d,$$

где $\bar{w}_k$ – двойственные классы Штифеля–Уитни и инволюция действует перестановкой сомножителей (см. [65], [23]). Поскольку Δ является ретрактом пространства $M^2 = M \times M$, из точной последовательности пары (M^2, Δ) вытекает, что $H_i(\Delta) \rightarrow H_i(M^2)$ – мономорфизм и, следовательно, $H_i(M^2) \rightarrow H_i(M^2, \Delta)$ – эпиморфизм при любом i . Поэтому в силу двойственности Александра получаем, что $H^j(M^2) \rightarrow H^j(M^2 \setminus \Delta)$ – эпиморфизм при любом j , в частности при $j = d$.

Пусть теперь задано отображение $f: X \rightarrow M$ компактного пространства X со свободной инволюцией T . Заметим, что $0 = (f^2)^*: H^d(M^2) \rightarrow H^d(X^2)$, если для любой пары (i_1, i_2) положительных целых чисел таких, что $i_1 + i_2 = d$, хотя бы один из гомоморфизмов $f^*: H^{i_s}(M) \rightarrow H^{i_s}(X)$ тривиален, $s = 1, 2$.

Рассуждая таким же образом, как при доказательстве теоремы 2.2, получаем, что если $\text{in } X \geq d$ и f^* удовлетворяет описанному условию, то $A(f) \neq \emptyset$, т. е. найдется точка $x \in X$ такая, что $f(x) = f(Tx)$. Заметим, что проекция $M^2 \setminus \Delta \rightarrow M$ на первый сомножитель не склеивает орбит, поэтому, чтобы обеспечить непустоту множества $A(f)$, необходимо сделать некоторые предположения относительно гомоморфизма f^* . Отметим также, что если сделать несколько более сильное предположение относительно f^* , например, что $f^* = 0$ во всех положительных

размерностях, то $A(f)$ не пусто при более слабом предположении относительно индекса пространства X , а именно достаточно предположить, что $\text{in } X \geq m$ (см. [5] или § 8).

Аналогичное рассуждение применимо и в случае действия элементарной абелевой группы (поскольку Δ – ретракт пространства M^q), однако точное значение индекса пространства $M^q \setminus \Delta$, по-видимому, известно лишь в случае, когда G – циклическая группа простого порядка (см. [23]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть X компактно, связно и $i(X) > m|G| + 1 = mq + 1$, где $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$ и G – p -тор. Тогда $i'(A(f)) \geq i(X) - mq - 1$. Если, кроме того, $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$, то $i'(A(f)) \geq i(X) - mq$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.2 следует, что $A(f) \neq \emptyset$. Пользуясь непрерывностью индекса, найдем замкнутую инвариантную окрестность V_1 множества $A(f)$ в X такую, что $i'(V_1) = i'(A(f))$. Пусть V – открытая инвариантная окрестность множества $A(f)$, замыкание которой содержится во внутренней части множества V_1 . Поскольку $X \setminus V$ – компакт, найдется открытая инвариантная окрестность U множества Δ в Y^q такая, что $f(X \setminus V) \subset Y^q \setminus U$. Поскольку $X = (X \setminus V) \cup V_1$, имеем

$$i(X) \leq i'(V_1) + i(X \setminus V) = i'(A(f)) + i(X \setminus V) \leq i'(A(f)) + i(Y^q \setminus U).$$

При доказательстве теоремы 2.2 было установлено неравенство $i(Y^q \setminus U) \leq mq + 1$. Таким образом, получаем $i(X) \leq i'(A(f)) + mq + 1$, откуда следует неравенство $i'(A(f)) \geq i(X) - mq - 1$.

В случае, когда $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$, из леммы 2.1 следует, что $i(X \setminus V) < i(Y^q \setminus U) \leq mq + 1$, поэтому

$$i(X) \leq i'(A(f)) + i(X \setminus V) \leq i'(A(f)) + mq,$$

т. е. $i'(A(f)) \geq i(X) - mq$.

§ 3. Случай действия циклической группы простого порядка

3.1. Для $G = \mathbb{Z}_2$ алгебра $\Lambda^* = H^*(B_G)$ является алгеброй многочленов $\mathbb{Z}_2[w_1]$ от одномерной образующей w_1 . Положим $w_d = w_1^d$.

Алгебра $\Lambda^* = H^*(B_G)$ для $G = \mathbb{Z}_p$ при $p > 2$ является тензорным произведением внешней алгебры от одномерной образующей на полиномиальную алгебру от двумерной образующей. В Λ^* можно выбрать образующие $w_d \in \Lambda^d = \mathbb{Z}_p$ такие, что $w_1^2 = 0$, $w_{2d} = w_2^d$, $w_{2d+1} = w_1 w_2^d$ и $w_2 = \beta w_1$, где β – гомоморфизм Бокштейна, отвечающий точной тройке коэффициентов $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$. Для свободного G -пространства X обозначим образ элемента w_d в $H^d(X/G)$ через $w_d(X)$. Таким образом, $\text{in } X = n$, если $w_n(X) \neq 0$ и $w_{n+1}(X) = 0$.

Еще один числовой когомологический индекс $\text{ind}(\cdot)$ для пространств с $\mathbb{Z}_p$ -действием определяется с помощью последовательностей Смита, которые мы здесь кратко напомним.

Пусть X – свободное G -пространство, $G = \mathbb{Z}_p$, p – простое число, $\nu: X \rightarrow X/G$ – возникающее накрытие. Прямой образ при отображении ν постоянного пучка на X со слоем $\mathbb{Z}_p$ обозначим через $\mathcal{A}$. Это пучок на X/G со слоем, изоморфным $\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p$ (p слагаемых). Группа G действует на $\mathcal{A}$ по формуле $(gs)(x) =$

$s(g^{-1}x) \in \mathbb{Z}_p$, где $g \in G$, $x \in \nu^{-1}(U)$, $U \subset X/G$ – открытое множество, s – сечение над множеством $\nu^{-1}(U)$ постоянного пучка со слоем $\mathbb{Z}_p$ и базой X (такому сечению однозначно соответствует сечение пучка $\mathcal{A}$ над U , и верно обратное при условии, если U достаточно мало). Таким образом, любой элемент группового кольца $\mathbb{Z}[G]$ определяет эндоморфизм пучка $\mathcal{A}$. Положим $\rho = T - 1$, $\mathcal{N} = 1 + T + \dots + T^{p-1}$, где T – образующая группы G , и обозначим через $\rho\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}\mathcal{A}$ образы эндоморфизмов, отвечающих ρ и $\mathcal{N}$ соответственно. Последовательности пучков

$$0 \rightarrow \rho\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{A} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \rho\mathcal{A} \rightarrow 0$$

точны (см. [29], [33]). Кроме того, легко видеть, что $\mathcal{N}\mathcal{A}$ – постоянный пучок со слоем $\mathbb{Z}_p$ и базой X/G , а поскольку слои отображения нульмерны (состоят из p точек), из [33, теорема 11.1] следует, что $H^*(X)$ и $H^*(X/G; \mathcal{A})$ изоморфны (подробно об этом см. в [29], [33]).

Таким образом, указанные точные тройки пучков приводят к длинным точным последовательностям когомологий (последовательностям Смита). При $p > 2$ имеются две точные последовательности когомологий (см. [29], [33], [32]):

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_\rho^i(X) \rightarrow H^i(X) \rightarrow H^i(X/G) \xrightarrow{\delta_1} H_\rho^{i+1}(X) \rightarrow \dots, \\ \dots \rightarrow H^i(X/G) \rightarrow H^i(X) \rightarrow H_\rho^i(X) \xrightarrow{\delta_2} H^{i+1}(X/G) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Здесь через $H_\rho^i(X)$ обозначена группа $H^i(X/G; \rho\mathcal{A})$. Группы $H_\rho^i(X)$ называются *специальными группами Смита*. При $p = 2$ имеем $H_\rho^i(X) = H^i(X/G)$ (поскольку $\rho = \mathcal{N}$) и обе последовательности одинаковы. Кроме того, в этих последовательностях гомоморфизм $H^i(X/G) \rightarrow H^i(X)$ есть просто ν^* , а $H^i(X) \rightarrow H^i(X/G)$ – трансфер $\nu_!$.

Определим $s_{2d}: H^0(X/G) \rightarrow H^{2d}(X/G)$ и $s_{2d+1}: H^0(X/G) \rightarrow H_\rho^{2d+1}(X)$ рекуррентными формулами $s_{2d+1} = \delta_1 s_{2d}$ и $s_{2d+2} = \delta_2 s_{2d+1}$, считая, что s_0 – тождественный гомоморфизм и δ_1, δ_2 – кограничные операторы в точных последовательностях Смита. Определим $\text{ind } X$ как наибольшее n , для которого класс когомологий $s_n(1)$ отличен от нуля, где $1 \in H^0(X/G)$. Класс $s_n(1)$ будем обозначать через $u_n(X)$.

Из свойства естественности последовательностей Смита по отношению к эквивариантным отображениям пространств следует, что если существует G -отображение свободных G -пространств $X \rightarrow Z$, то $\text{ind } X \leq \text{ind } Z$.

При $p = 2$ имеем $u_d(X) = w_d(X)$. При $p > 2$ имеется функториальный гомоморфизм $\xi: H_\rho^*(X) \rightarrow H^*(X/G)$ и справедливы равенства $u_{2d}(X) = w_{2d}(X)$ и $w_{2d+1}(X) = \xi(u_{2d+1}(X))$ (см., например, [26]). Гомоморфизм ξ определяется следующим образом. Имеет место равенство $\rho^{p-1} = \mathcal{N}$, из которого следует, что эндоморфизм пучка $\mathcal{A}$, соответствующий элементу ρ^{p-2} , определяет гомоморфизм пучков $\rho\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{A}$. Последний индуцирует гомоморфизм когомологий ξ , поскольку $\mathcal{N}\mathcal{A}$ – постоянный пучок над X/G со слоем $\mathbb{Z}_p$. Кроме того, поскольку накрытие $X \rightarrow X/G$ индуцировано некоторым отображением $X/G \rightarrow B_G$, классы $w_i(X)$ и $u_i(X)$ являются образами универсальных классов $w_i \in \Lambda^i$ и $u_i \in H_\rho^i(E_G) = \mathbb{Z}_p$.

Из приведенных соотношений вытекают неравенства $\text{in } X \leq \text{ind } X \leq \text{in } X + 1$ и следует, что $\text{in } X = \text{ind } X$ в случаях:

- a) $\text{in } X$ нечетен;
- b) $\text{ind } X$ четен;
- c) $\text{in } X = \infty$ ($\text{ind } X = \infty$);
- d) $p = 2$.

В общем случае $\text{in } X$ может отличаться от $\text{ind } X$, что показывает следующий пример.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим сферу $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ со свободным действием группы $G = \mathbb{Z}_p$ простого порядка $p > 2$, при котором образующая $T \in G$ действует умножением комплексных координат на $e^{2\pi i/p}$. Имеется совместимое с этим действием клеточное разбиение (см. [20]) такое, что в каждой размерности $0 \leq i \leq 2n+1$ имеется p клеток $e_i, Te_i, \dots, T^{p-1}e_i$ и граничный оператор в цепном комплексе целочисленных клеточных цепей действует как $\partial e_{2s} = \mathcal{N}e_{2s-1}$, $\partial e_{2s+1} = \rho e_{2s}$, $\partial T = T\partial$, где $\mathcal{N} = 1 + T + \dots + T^{p-1}$ и $\rho = T - 1$. Пусть Y – $2n$ -мерный остов этого разбиения. Поскольку Y является $(2n-1)$ -связным и $\rho^2 e_{2n}$ – цикл, из теоремы Гуревича следует, что класс гомологий $[\rho^2 e_{2n}]$ можно реализовать сфероидом $\alpha: S^{2n} \rightarrow Y$. Приклеим p штук $(2n+1)$ -мерных клеток к Y по отображениям $\alpha, T \circ \alpha, \dots, T^{p-1} \circ \alpha$. Обозначим через X полученное пространство и через f – $(2n+1)$ -мерную клетку с характеристическим отображением α . Действие G на Y продолжается до свободного G -действия на X так, что $f, Tf, \dots, T^{p-1}f$ – все $(2n+1)$ -мерные клетки CW -комплекса X . Поэтому X/G имеет клетки $\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{2n}, \bar{f}$ – по одной в каждой размерности $0, \dots, 2n, 2n+1$.

Вложение $Y \subset S^{2n+1}$ продолжается до эквивариантного отображения $X \rightarrow S^{2n+1}$, при котором цепь f переходит в ρe_{2n+1} . Поэтому

$$\mu_*: H_{2n+1}(X/G) \rightarrow H_{2n+1}(S^{2n+1}/G)$$

– тривиальный гомоморфизм, где μ – отображение факторпространств. Следовательно, $\text{in } X < 2n+1$. Из $(2n-1)$ -связности пространства X следует, что $\text{in } X \geq 2n$. Таким образом, $\text{in } X = 2n$.

Рассмотрим отрезок последовательности Смита

$$H^{2n}(X) \xrightarrow{\nu_!} H^{2n}(X/G) \xrightarrow{\delta_1} H_{\rho}^{2n+1}(X).$$

Здесь $\nu_!$ – трансфер (см. [32]), отвечающий накрытию $\nu: X \rightarrow X/G$. Соотношение $\text{ind } X = 2n+1$ будет установлено, если показать, что δ_1 – мономорфизм, т. е. показать, что образ гомоморфизма $\nu_!$ тривиален. Гомоморфизм $\nu_!$ двойствен гомологическому трансферу $\nu^!: H_{2n}(X/G) \rightarrow H_{2n}(X)$. Поскольку $\partial f = \rho^2 e_{2n}$ и $\rho^{p-1} = \mathcal{N}$, имеем

$$\nu^![\bar{e}_{2n}] = [\mathcal{N}e_{2n}] = [\partial \rho^{p-3} f] = 0,$$

где через $[a]$ обозначен класс гомологий цикла a . Поскольку $[\bar{e}_{2n}] \in H_{2n}(X/G)$ является образующим, в размерности $2n$ гомоморфизм $\nu^!$ тривиален.

Таким образом, мы показали, что $\text{ind } X = 2n+1$, в то время как $\text{in } X = 2n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Как уже отмечалось выше, индекс ind – частный случай введенного Коннером и Флойдом для пространств со свободным действием конечной группы G и кольца с единицей L индекса $\text{co-ind}_L X$ (коиндекса в их терминологии). В определении участвует произвольная проективная резольвента $L(G)$ -модуля L , где $L(G)$ – групповое кольцо. Число $\text{co-ind}_L X$ равно наибольшему d такому, что

не равен нулю образ единицы $1 \in H^0(X/G; L)$ в d -мерной группе эквивариантных когомологий пространства X с коэффициентами в модуле $(d-1)$ -мерных циклов резольвенты при итерированном связывающем гомоморфизме (это определение не зависит от выбора проективной резольвенты). В работе [36] Коннер и Флойд подробно рассматривают лишь случаи $G = \mathbb{Z}_2$ и $L = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}$ и показывают, что если в качестве резольвенты использовать стандартную резольвенту для группы $G = \mathbb{Z}_2$ (совпадающую с комплексом клеточных цепей ∞ -мерной сферы, где каждая конечномерная сфера разбита на две клетки), то при $L = \mathbb{Z}_2$ определение $\text{co-ind}_L X$ можно дать через связывающие гомоморфизмы последовательности Смита (по существу получается определение индекса, данное Янгом [67], только вместо гомологической последовательности Смита, которую использовал Янг, участвует когомологическая последовательность Смита). В случае $L = \mathbb{Z}$ индекс $\text{co-ind}_{\mathbb{Z}} X$, как показано в [36], определяется с помощью граничных гомоморфизмов последовательностей Смита–Ричардсона.

Если в ситуации $G = \mathbb{Z}_p$, $L = \mathbb{Z}_p$, $p > 2$, использовать резольвенту, обычно применяющуюся для вычисления когомологий этой группы, то легко видеть, что так же, как и для $G = \mathbb{Z}_2$, определение можно дать через связывающие гомоморфизмы двух последовательностей Смита, что мы и сделали выше. Наконец отметим, что, используя [36, утверждение 4.3], можно показать, что co-ind_L и в общем случае обладает теми же свойствами, что и ind .

3.2. Следующее утверждение доказано в [39] в более общей ситуации. Для полноты изложения приведем два более простых доказательства, первое из которых нам понадобится далее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть X является свободным G -пространством. Если $H^i(X/G) = 0$ при $i > K$ и $H^i(X) = 0$ при $i > N$, то $H^i(X/G) = 0$ при $i > N$. В частности, $\text{in } X \leq N$.

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $p = 2$. Из рассмотрения последовательности Смита

$$\dots \rightarrow H^j(X) \rightarrow H^j(X/G) \rightarrow H^{j+1}(X/G) \rightarrow H^{j+1}(X) \rightarrow \dots$$

вытекает, что $H^j(X/G) \cong H^{j+1}(X/G)$ при $j > N$. Поэтому

$$H^{N+1}(X/G) \cong H^{N+2}(X/G) \cong \dots \cong H^{N+K}(X/G) \cong 0,$$

что и требовалось доказать.

Для нечетного простого p имеем две последовательности Смита:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_\rho^j(X) \rightarrow H^j(X) \rightarrow H^j(X/G) \rightarrow H_\rho^{j+1}(X) \rightarrow H^{j+1}(X) \rightarrow \dots, \\ \dots \rightarrow H^j(X/G) \rightarrow H^j(X) \rightarrow H_\rho^j(X) \rightarrow H^{j+1}(X/G) \rightarrow H^{j+1}(X) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Из первой последовательности следует, что $H^j(X/G) \cong H_\rho^{j+1}(X)$ при $j > N$, а из второй при $j > N$ получаем $H_\rho^j(X) \cong H^{j+1}(X/G)$. Поэтому $H^j(X/G) \cong H^{j+2}(X/G)$ при $j > N$. Таким образом, $H^j(X/G) \cong H^{j+2l}(X/G)$ при любом $l \in \mathbb{N}$ и $j > N$. Последняя группа тривиальна при достаточно большом l , и мы получаем требуемое.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X является CW -комплексом. Построим свободное G -пространство Y , содержащее X в качестве замкнутого G -подпространства, такое, что гомотопические группы пространства Y тривиальны во всех размерностях, не превосходящих $N - 1$, и Y получается из X приклеиванием клеток размерностей не больше N .

Для построения Y нужно приклеивать последовательно клетки размерностей $2, 3, \dots, N$, которые убивают образующие гомотопических групп, при этом с каждой приклеиваемой клеткой с характеристическим отображением φ приклеиваются также еще $|G| - 1$ клеток с характеристическими отображениями $g\varphi$, где $g \in G$, $g \neq 1$. Таким образом, приклеиваются сразу $|G|$ клеток, и G действует циклическими перестановками этих клеток.

Поскольку $X \subset Y$, имеем $\text{in } X \leq \text{in } Y$. Так как Y получается из X приклеиванием клеток размерностей не более чем N , имеем $H^i(Y/G) = 0$ при всех достаточно больших i . Кроме того, поскольку новые N -мерные клетки приклеиваются к $(N - 1)$ -мерному остову пространства X , нетрудно убедиться в том, что $H^i(Y) = 0$ при $i > N$.

Член E_2 спектральной последовательности накрытия $Y \rightarrow Y/G$ (совпадающей со спектральной последовательностью расслоения $Y_G = E_G \times Y \rightarrow B_G$ со слоем Y) состоит из двух строк, поскольку $E_2^{s,t} = H^s(G; H^t(Y)) = 0$ при $t \neq 0, N$ (здесь $H^t(Y)$ рассматривается как G -модуль).

Алгебра $\Lambda = H^*(B_G)$ изоморфна тензорному произведению внешней алгебры от одномерной образующей w_1 на алгебру многочленов $\mathbb{Z}_p[w_2]$ от двумерной образующей w_2 . Гомоморфизм умножения на $w_2^l = w_{2l}$ доставляет изоморфизмы

$$E_2^{m,N} = H^m(G; H^N(Y)) \rightarrow E_2^{m+2l,N} = H^{m+2l}(G; H^N(Y))$$

при любом $l \in \mathbb{N}$ и $m > 0$.

Имеем $E_2^{s,t} = \dots = E_{N+1}^{s,t}$ и $E_{N+2}^{s,t} = \dots = E_\infty^{s,t}$. Если при некотором $m > 0$ ядро дифференциала $d_{N+1}: E_{N+1}^{m,N} \rightarrow E_{N+1}^{m+N+1,0}$ нетривиально, то $E_\infty^{m,N} \neq 0$. Рассматривая умножение на класс u^l , получаем, что $E_\infty^{m+2l,N} \neq 0$ при любом l . Следовательно, в $E_\infty^{*,N}$ останется бесконечное число нетривиальных групп, и, значит, когомологии пространства Y/G нетривиальны в сколь угодно больших размерностях, что противоречит сделанным предположениям. Отсюда следует также, что $E_{N+1}^{m,N} \neq 0$ при любом $m > 0$ (в противном случае в $E_\infty^{*,0}$ останется бесконечное число групп $\mathbb{Z}_p$). Таким образом, при $m > 0$ имеем $E_2^{m,N} = E_{N+1}^{m,N} \cong \mathbb{Z}_p$ и $d_{N+1}: E_{N+1}^{m,N} \rightarrow E_{N+1}^{m+N+1,0}$ — изоморфизм. Поэтому $E_\infty^{s,t} = 0$ при $s + t > N$, откуда и следует требуемое.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть X — свободное G -пространство, где $G = \mathbb{Z}_p$ — циклическая группа нечетного простого порядка p . Если $H^i(X/G) = 0$ при $i > K$ и $H^i(X) = 0$ при $i > N$, то $H_\rho^i(X) = 0$ при $i > N$. В частности, $\text{ind } X \leq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве предложения 3.1 было установлено, что $H^i(X/G) = 0$ и $H_\rho^i(X/G) = H^{i+1}(X/G)$ при всех $i > N$.

Приведем теперь нижнюю оценку индекса, аналогичную оценке А. С. Шварца гомологического рода из [21].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть X – свободное G -пространство, где $G = \mathbb{Z}_p$ – циклическая группа нечетного простого порядка p . Если X связно и $H^i(X) = 0$ при $0 < i < N$, то $\text{ind } X \geq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рассмотрений последовательностей Смита следует, что граничные гомоморфизмы $\delta_1: H^i(X/G) \rightarrow H_\rho^{i+1}(X)$ и $\delta_2: H_\rho^i(X) \rightarrow H^{i+1}(X/G)$ являются мономорфизмами при $0 < i < N$. Ядро гомоморфизма $\delta_1: H^0(X/G) \rightarrow H_\rho^1(X)$ совпадает с образом трансфера $H^0(X) \rightarrow H^0(X/G)$, который тривиален. Действительно, достаточно доказать это в случае, когда X – клеточный комплекс (общий случай получается переходом к пределу по нервам инвариантных покрытий). Гомологический трансфер переводит гомологический класс точки из X/G в нульмерный гомологический класс пространства X , соответствующий сумме точек из прообраза. Поскольку X связно, все точки из прообраза гомологичны. Так как прообраз состоит из p точек и гомологии берутся с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_p$, мы получаем, что гомологический трансфер тривиален (в размерности 0), поэтому тривиален и когомологический трансфер. Следовательно, δ_1 – мономорфизм в размерности 0. Теперь требуемое утверждение вытекает непосредственно из определения индекса.

Отметим часто используемое *свойство непрерывности* когомологических индексов, непосредственно вытекающее из непрерывности когомологий. Например, для индексов in и ind их непрерывность означает, что для замкнутого инвариантного подпространства A паракомпактного свободного $\mathbb{Z}_p$ -пространства X найдется его инвариантная окрестность U такая, что $\text{in } A = \text{in } U$ и $\text{ind } A = \text{ind } U$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть X – свободное G -пространство, где $G = \mathbb{Z}_p$ – циклическая группа нечетного простого порядка p . Пусть $i(X) = n + 1$, где n четно. Тогда $\text{in } X = i(X) - 1 = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо показать, что $0 \neq d_{n+1}: E_{n+1}^{0,n} \rightarrow E_{n+1}^{n+1,0}$. Доказательство проведем от противного. Итак, предположим, что $0 = d_{n+1}: E_{n+1}^{0,n} \rightarrow E_{n+1}^{n+1,0}$. Известно (см. [34]), что модуль $E_r^{*,*}$ порождается над $\Lambda = E(v) \otimes \mathbb{Z}_p[u]$, $\deg v = 1$, $\deg u = 2$, объединением подгрупп $E_r^{0,*}$ и $E_r^{1,*}$. Поскольку $i(X) = n + 1$, имеем $0 \neq d_{n+1}: E_{n+1}^{1,n} \rightarrow E_{n+1}^{n+2,0}$. Поскольку $n + 2$ четно, $E_{n+1}^{n+2,0} = \mathbb{Z}_p$ порождается классом $u^{\frac{n}{2}+1}$, следовательно, имеется элемент $\alpha \in E_{n+1}^{1,n}$ такой, что $d_{n+1}\alpha = u^{\frac{n}{2}+1}$. Тогда $d_{n+1}v\alpha = -vu^{\frac{n}{2}+1} \neq 0$. Однако умножение на u дает эпиморфизм $E_{n+1}^{0,n} \rightarrow E_{n+1}^{2,n}$ (см. [34]). Поскольку $v\alpha \in E_{n+1}^{2,n}$, найдется элемент $\beta \in E_{n+1}^{0,n}$, переходящий в $v\alpha$ при указанном выше эпиморфизме. Но мы предположили, что d_{n+1} тривиален на $E_{n+1}^{0,n}$, поэтому $d_{n+1}\beta = 0$ и, следовательно, $d_{n+1}v\alpha = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Приведем теперь аналог леммы 2.1 (для $G = \mathbb{Z}_2$ это частный случай теоремы 4.6 из [36]).

ЛЕММА 3.1. Пусть X и Z – связные паракомпактные свободные G -пространства, где $G = \mathbb{Z}_p$, и $f: X \rightarrow Z$ – эквивариантное отображение. Предположим, что $\text{ind } X = \text{ind } Z = n$. Тогда гомоморфизм $f^*: H^n(Z) \rightarrow H^n(X)$ нетривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сформулированное утверждение в случае $p > 2$.

Пусть сначала n нечетно. Отображение f индуцирует отображение последовательностей Смита. Рассмотрим возникающую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^n(Z) & \longrightarrow & H_\rho^n(Z) & \xrightarrow{\delta_2} & H^{n+1}(Z/G) \\ f^* \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^n(X) & \longrightarrow & H_\rho^n(X) & \xrightarrow{\delta_2} & H^{n+1}(X/G) \end{array}$$

Поскольку $0 = u_{n+1}(Z) = \delta_2 u_n(Z)$, из точности последовательности вытекает, что класс $u_n(Z) \in H_\rho^n(Z)$ является образом некоторого класса $\gamma \in H^n(Z)$. Следовательно, $u_n(X) \in H_\rho^n(X)$ – образ класса $f^* \gamma \in H^n(X)$, и поскольку $u_n(X) \neq 0$, имеем $f^* \gamma \neq 0$.

Случай четного n рассматривается аналогично с использованием диаграммы, возникающей из рассмотрения второй последовательности Смита. Таким же образом рассматривается и случай $p = 2$ (кроме того, он содержится и в лемме 2.1, поскольку при $p = 2$ индексы ind и in совпадают и на 1 меньше индекса i). Впервые это утверждение (для $p = 2$) было доказано Коннером и Флойдом (см. [36, теорема 4.6]).

Лемма 3.1 влечет несколько полезных следствий.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Имеют место равенства $\text{ind } X * G = \text{ind } X + 1$ и $\text{ind } X * S^{2k+1} = \text{ind } X + 2k + 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $X \subset X * G$, имеем $\text{ind } X \leq \text{ind } X * G$. Так как вложение $X \subset X * G$ нульгомотопно, из леммы 3.1 следует, что $\text{ind } X \neq \text{ind } X * G$. Следовательно, $\text{ind } X < \text{ind } X * G$. Отсюда вытекает, что $\text{ind } X * G < \text{ind } X * G * G$. Легко видеть, что имеются G -отображения $G * G \rightarrow S^1$ и $S^1 \rightarrow G * G$, где G действует свободно на S^1 поворотами на углы, кратные $2\pi/p$. Поэтому имеются G -отображения $X * G * G \rightarrow X * S^1$ и $X * S^1 \rightarrow X * G * G$, откуда получаем равенство $\text{ind } X * G * G = \text{ind } X * S^1$.

Покажем теперь, что $\text{ind } X * S^1 \leq \text{ind } X + 2$ (из этого неравенства и того, что уже доказано, вытекает первое утверждение, а также равенство $\text{ind } X * S^1 = \text{ind } X + 2$). Пусть $\text{ind } X = k$. Тогда $u_{k+1}(X) = 0$. Кроме того, $u_2(S^1) = w_2(S^1) = 0$. Поскольку $(X * S^1) \setminus S^1$ эквивариантно ретрагируется на X , а $(X * S^1) \setminus X$ – на S^1 , имеем $u_{k+1}((X * S^1) \setminus S^1) = 0$ и $u_2((X * S^1) \setminus X) = 0$. Из свойств $\smile$ -умножения следует, что (универсальный) класс $u_{k+1}u_2 = u_{k+3}$ переходит в тривиальный класс $u_{k+3}(X * S^1)$. Следовательно,

$$\text{ind } X * S^1 < k + 3 = \text{ind } X + 3.$$

Итерируя равенство $\text{ind } X * S^1 = \text{ind } X + 2$, получаем

$$\text{ind } X * S^{2k+1} = \text{ind } X + 2k + 2.$$

Для $G = \mathbb{Z}_2$ равенство $\text{in } X * G = \text{in } X + 1$ получено Коннером и Флойдом в [36] и названо ими *свойством стабильности индекса*.

Для пространства X , построенного в примере 3.1, $\text{ind } X * G = \text{ind } X + 1 = 2n + 2$ – четное число, поэтому $\text{ind } X * G = \text{in } X * G$. Таким образом, $\text{in } X * G = \text{in } X + 2$. Кроме того, $\text{in } X * G * G = \text{in } X * S^1 \leq \text{in } X + 2 = \text{in } X * G$, поэтому для $X' = X * G$ получаем $\text{in } X' * G = \text{in } X'$. Из приведенных соотношений следует, что в отличие от $\text{ind}(\cdot)$ индекс $\text{in}(\cdot)$ не является стабильным при $p > 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть X – свободное G -пространство, где G – циклическая группа простого порядка p . Пусть $X = A \cup B$, где A, B – замкнутые (или оба открытые) инвариантные подпространства. Тогда $\text{ind } X \leq \text{ind } A + \text{ind } B + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Посредством ужатия A и B случай открытых подмножеств сводится к случаю замкнутых. Пусть $\text{ind } A = k$, $\text{ind } B = m$. Предположим сначала, что хотя бы одно из чисел k, m нечетно. Пусть, например, k – нечетное число. Тогда $u_{k+1} = w_{k+1}$ и $u_{k+1}u_{m+1} = w_{k+1}u_{m+1} = u_{k+m+2}$. Из определения индекса следует, что $u_{k+1}(A) = 0$ и $u_{m+1}(B) = 0$. Поэтому имеем $u_{k+1}(X)u_{m+1}(X) = 0$, т.е. $u_{k+m+2}(X) = 0$, откуда получаем, что $\text{ind } X \leq k + m + 1$.

Если оба числа k, m четны, то вместо X рассмотрим пространство $X * G$. Будем представлять точки джойна $X * G$ в виде $tx + (1 - t)g$, где $t \in [0, 1]$, $x \in X$, $g \in G$. При этом считаем, что при $t = 1$ получаются точки из $X \subset X * G$, при $t = 0$ – из $G \subset X * G$. Представим $B * G$ в виде объединения $B_1 \cup B_2$, где $B_1 = \{tb + (1 - t)g \mid t \in [1/2, 1]\}$ и $B_2 = \{tb + (1 - t)g \mid t \in [0, 1/2]\}$. Тогда B_1 эквивариантно стягивается на $B \subset B * G$ и B_2 – на $G \subset B * G$. Положим $A_1 = (A * G) \cup B_2$. Тогда $X * G = A_1 \cup B_1$. Нетрудно видеть, что вложение $A * G \subset A_1$ является эквивариантной гомотопической эквивалентностью, поэтому $(A * G)/G \subset A_1/G$ – гомотопическая эквивалентность. Из рассмотрения гомоморфизма последовательностей Смита (этих пространств) и леммы о пяти изоморфизмах получаем, что первое вложение индуцирует изоморфизм групп когомологий Смита, поэтому $\text{ind } A_1 = \text{ind } A * G$.

Имеем $\text{ind } A_1 = \text{ind } A * G = \text{ind } A + 1 = k + 1$ – нечетное число и $\text{ind } B_1 = \text{ind } B$. Поэтому из уже доказанного следует, что

$$\text{ind } X * G \leq \text{ind } A_1 + \text{ind } B_1 + 1 = \text{ind } A + \text{ind } B + 2,$$

и поскольку $\text{ind } X * G = \text{ind } X + 1$, получаем требуемое неравенство.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть A – замкнутое G -инвариантное подмножество в X . Тогда $\text{ind } X \leq \text{ind } A + \text{ind}(X \setminus A) + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойства непрерывности когомологий следует, что найдется открытая G -инвариантная окрестность U множества A такая, что $\text{ind } U = \text{ind } A$. Поскольку $X = U \cup (X \setminus A)$, имеем

$$\text{ind } X \leq \text{ind } U + \text{ind}(X \setminus A) + 1 = \text{ind } A + \text{ind}(X \setminus A) + 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть X и Z – свободные G -пространства. Тогда $\text{ind } X * Z \leq \text{ind } X + \text{ind } Z + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $X * Z = ((X * Z) \setminus Z) \cup ((X * Z) \setminus X)$, причем первое открытое множество эквивариантно гомотопически эквивалентно X , а второе – Z .

Имеется аналог предыдущего утверждения и для индекса $\text{in}(\cdot)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть X – свободное G -пространство, где G – циклическая группа простого порядка p . Пусть $X = A \cup B$, где A, B – замкнутые (или оба открытые) инвариантные подпространства. Если $p > 2$, то $\text{in } X \leq \text{in } A + \text{in } B + 2$, и если хотя бы один из индексов $\text{in } A, \text{in } B$ нечетен, то $\text{in } X \leq \text{in } A + \text{in } B + 1$. При $p = 2$ справедливо неравенство $\text{in } X \leq \text{in } A + \text{in } B + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{in } A = k$, $\text{in } B = m$. Пусть k – нечетное число. Тогда $w_{k+1}w_{m+1} = w_{k+m+2}$ в кольце Λ^* , поэтому из того, что $w_{k+1}(A) = 0$ и $w_{m+1}(B) = 0$, и свойств $\smile$ -умножения получаем, что $w_{k+1}(X)w_{m+1}(X) = 0$, следовательно, $w_{k+m+2}(X) = 0$, откуда получаем требуемое неравенство $\text{in } X \leq k + m + 1$.

В случае, когда оба числа k и m четны, нужно воспользоваться равенствами $w_{k+2}w_{m+1} = w_{k+m+3}$, $w_{k+2}(A) = 0$ и $w_{m+1}(B) = 0$.

При $p = 2$ независимо от четности чисел k и m в кольце Λ^* выполняется равенство $w_{k+1}w_{m+1} = w_{k+m+2}$, поэтому справедливо неравенство $\text{in } X \leq \text{in } A + \text{in } B + 1$. Отметим также, что для $G = \mathbb{Z}_2$ индексы in и ind совпадают, поэтому последнее неравенство также следует из предложения 3.5.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $f: X \rightarrow E$ – эquivариантное отображение, и пусть $P \subset E$ – замкнутое инвариантное подпространство такое, что действие G на $E \setminus P$ свободно. Тогда

$$\begin{aligned} \text{ind } f^{-1}P &\geq \text{ind } X - \text{ind}(E \setminus P) - 1, \\ \text{in } f^{-1}P &\geq \text{in } X - \text{in}(E \setminus P) - 2. \end{aligned}$$

Если один из индексов $\text{in } X$ или $\text{in}(P \setminus E)$ нечетен или же $G = \mathbb{Z}_2$, то

$$\text{in } f^{-1}P \geq \text{in } X - \text{in}(E \setminus P) - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из свойств непрерывности индексов (имеется G -инвариантная открытая окрестность $U \supset f^{-1}P$ такая, что $\text{ind } U = \text{ind } f^{-1}P$ и $\text{in } U = \text{in } f^{-1}P$), равенства $X = U \cup (X \setminus f^{-1}P)$, приведенных выше неравенств для индексов объединения и неравенств

$$\text{ind}(X \setminus f^{-1}P) \leq \text{ind}(E \setminus P), \quad \text{in}(X \setminus f^{-1}P) \leq \text{in}(E \setminus P).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть $f: X \rightarrow E$ – эquivариантное отображение, $E \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_s$ – фильтрация, где P_k замкнуты и инвариантны, и $E^G \subset P_s$. Предположим, что $\text{ind}(E \setminus P_1) \leq j_1$, $\text{ind}(P_k \setminus P_{k+1}) \leq j_{k+1}$, $k = 1, \dots, s-1$. Тогда

$$\text{ind } f^{-1}P_k \geq \text{ind } X - j_1 - \dots - j_k - k, \quad k = 1, \dots, s-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить следствие 3.4 к отображениям $f: X \rightarrow E \supset P_1$, $f: f^{-1}P_k \rightarrow P_k \supset P_{k+1}$.

Отметим также, что поскольку $E \setminus P_r = (E \setminus P_{r-1}) \cup (P_{r-1} \setminus P_r)$, справедливы неравенства

$$\text{ind}(E \setminus P_k) \leq 1 + \text{ind}(E \setminus P_{k-1}) + \text{ind}(P_{k-1} \setminus P_k) \leq 1 + \text{ind}(E \setminus P_{k-1}) + j_k,$$

суммируя которые, получаем

$$\text{ind}(E \setminus P_k) \leq k - 1 + j_1 + \dots + j_k.$$

Теперь, применяя следствие 3.4 к отображению $f: X \rightarrow E \supset P_k$, получаем второе доказательство.

3.3. Имеет место аналог теоремы 2.2.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть X – компактное, связное пространство со свободным действием циклической группы G простого порядка p и $\text{ind } X \geq m|G| = mp$, где $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$. При $\text{ind } X = mp$ предположим дополнительно, что $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда множество $A(f)$ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство теоремы 2.2, но вместо леммы 2.1 используется лемма 3.1.

Те же самые примеры показывают, что условие на f^* является существенным: из свойств индексов in и ind легко следует, что $\text{ind } P_2^p(K) = \text{ind}(K^p \setminus DK) = \text{ind}(K^p \setminus \Delta K) = p \dim K$, где $K = \Delta_{s_1-1}^{ps_1+p-2} * \dots * \Delta_{s_k-1}^{ps_k+p-2}$, и в качестве X, Y можно взять $P_2^p(K)$ и K соответственно, а в качестве f рассмотреть ограничение на $P_2^p(K)$ проекции $K^p \rightarrow K$ на первый сомножитель.

В случае, когда $G = \mathbb{Z}_p$ – циклическая группа простого порядка p , имеется несимметричный аналог приведенных утверждений.

Пусть N – замкнутое n -мерное топологическое многообразие со свободным действием группы G . При $p > 2$ предположим, что N ориентируемо. Пусть заданы компактные пространства L и Y (с тривиальным действием G) и два отображения $g: L \rightarrow Y$ и $h: L \rightarrow N$. Определим подмножество $A(g, h)$ декартовой степени L^p как множество таких точек $z = (x_1, \dots, x_p) \in L^p$, что $g(x_{i+1}) = g(x_1), h(x_{i+1}) = T^i h(x_1)$ при $i = 1, 2, \dots, p-1$, где T – образующая группы G .

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть L и Y – компактные пространства и $\dim_{\mathbb{Z}_p} Y = m$. Предположим, что $i(N) = n+1$ и $0 = g^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(L)$. Пусть $n \geq mp$ и $0 \neq h^*: H^n(N) \rightarrow H^n(L)$. Тогда $A(g, h) \neq \emptyset$.

Из доказательства теоремы 3.2 будет видно, что условие $i(N) = n+1$ можно заменить на условие $\text{in } N = n$. Нетрудно доказать также, что при $p > 2$ число n должно быть нечетным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Из предположения $i(N) = n+1$ следует, что $\text{in } N = n$. На самом деле, справедливо более общее утверждение: если Z – свободное G -пространство такое, что $\dim Z = n$ и $i(Z) = n+1$, то $\text{in } Z = n$. Действительно, из соображений размерности следует, что все дифференциалы d_j в спектральной последовательности накрытия $Z \rightarrow Z/G$ (коэффициенты в поле $\mathbb{Z}_p$) тривиальны при $j > n+1$. Если $0 = d_{n+1}: E_{n+1}^{0,n} \rightarrow E_{n+1}^{n+1,0}$, то $\mathbb{Z}_p = E_2^{n+1,0} = \dots = E_{n+1}^{n+1,0} = E_{n+2}^{n+1,0} = \dots = E_{\infty}^{n+1,0}$ и получается, что $H^{n+1}(Z/G) \neq 0$. Однако последнее невозможно в силу того, что $\dim Z/G = n$.

Положим

$$D(h) = \{(x_1, \dots, x_p) \in L \mid h(x_{i+1}) = T^i h(x_1), i = 1, \dots, p-1\}.$$

В силу [5, предложение 4.5] следует, что $\text{in } D(h) = n$. Определим $f: D(h) \rightarrow Y$ формулой $f(x_1, \dots, x_p) = g(x_1)$. Таким образом, $A(g, h) = A(f)$. Дальнейшие рассуждения фактически повторяют доказательство теоремы 2.2. Обозначим $D(h)$ через X и рассмотрим эквивариантное отображение $\hat{f}: X \rightarrow Y^p$. Если $A(f) = \emptyset$, то, как и выше, найдется открытая инвариантная окрестность U диагонали Δ такая, что $\hat{f}(X) \subset Y^p \setminus U$. Поэтому имеем эквивариантное отображение $\hat{f}: X \rightarrow Y^p \setminus U$ и из свойств индекса следует, что $\text{in } X \leq \text{in}(Y^p \setminus U)$. Далее, $\dim_{\mathbb{Z}_p} Y^p = mp$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{Z}_p} Y^p \setminus U = mp$, и, значит, $\text{in}(Y^p \setminus U) \leq mp$. Кроме того, $H^i((Y^p \setminus U)/G) = 0$ при $i \geq mp + 1$. Если $\text{in } X > \text{in}(Y^p \setminus U)$, то не может существовать G -отображение из X в $Y^p \setminus U$, и мы получаем противоречие.

Рассмотрим теперь случай $\text{in } X = \text{in}(Y^p \setminus U)$, т.е. $n = mp$. Заметим, что m нечетно, если $p > 2$ (поскольку в этом случае n нечетно). Таким образом, $\text{ind } X = \text{ind}(Y^p \setminus U)$. Остается воспользоваться леммой 3.1.

3.4. Из предложения 3.5 следует нижняя оценка категории Люстерника–Шнирельмана пространства X/G через индекс пространства X .

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Пусть X – пространство со свободным действием циклической группы G простого порядка. Тогда $\text{cat } X/G \geq \text{ind } X + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Категория $\text{cat } X/G$ равна наименьшему k такому, что $X/G = A_1 \cup \dots \cup A_k$, где A_i замкнуты и стягиваются по X/G в точку. Имеем

$$X = C_1 \cup \dots \cup C_k,$$

где C_i – прообраз множества A_i . Поскольку A_i стягивается по X/G в точку, C_i эквивариантно деформируется по X в орбиту точки, поэтому $\text{ind } C_i = 0$. Применяя предложение 3.5, получаем

$$\text{ind } X \leq \text{ind } C_1 + \dots + \text{ind } C_k + k - 1 = k - 1 = \text{cat } X/G - 1.$$

Свойства индекса ind могут быть использованы при построении теории Люстерника–Шнирельмана для инвариантной гладкой функции на многообразии со свободным гладким действием G .

Для краткости рассмотрим случай свободного гладкого действия группы G на гладком компактном конечномерном многообразии M .

Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая G -инвариантная функция на M . Орбита критической точки целиком состоит из критических точек. Поэтому множество критических точек является G -пространством. Классический минимаксный метод Люстерника–Шнирельмана оценки числа критических точек через категорию многообразия (см., например, [17]) легко использовать в эквивариантной ситуации, заменяя категорию на подходящий индекс. Сформулируем соответствующий результат для индекса $\text{Ind } X := 1 + \text{ind } X$ (аналогичные результаты справедливы для рода и гомологического рода), который обладает всеми необходимыми свойствами: Ind не убывает при эквивариантных отображениях, непрерывен и $\text{Ind } X \leq \text{Ind } A + \text{Ind } B$, если $X = A \cup B$, где A, B замкнуты и G -инвариантны, кроме того, выше

доказано, что $\text{Ind } X \leq \text{cat } X/G$, поэтому $\text{Ind } X$ служит нижней оценкой для числа критических орбит функции f .

Обозначим через M_j семейство всех компактных G -инвариантных подмножеств $X \subset M$ таких, что $\text{Ind } X \geq j$. Положим

$$\lambda_j = \inf_{X \in M_j} \sup_{x \in X} f(x).$$

ТЕОРЕМА 3.3. *На любой поверхности уровня $f^{-1}(\lambda_j)$ имеется хотя бы одна критическая орбита. Если $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+k}$, то $\text{Ind}(S \cap f^{-1}(\lambda_j)) \geq k+1$, где S – множество критических точек функции f .*

§ 4. Частичные совпадения. Род G -пространств

4.1. Пусть X – свободное G -пространство, $G = \mathbb{Z}_p$. Обозначим через T образующую группы G . Для $f: X \rightarrow Y$ (далее в качестве Y берется евклидово пространство) и $2 \leq k \leq p$ положим

$$A(f, k) = \{x \in X \mid \exists 0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p-1: f(T^{i_1}x) = \dots = f(T^{i_k}x)\}.$$

Заметим, что $A(f, p) \subset A(f, p-1) \subset \dots \subset A(f, 2)$ и $A(f, p)$ совпадает с $A(f)$. Положим

$$\Delta_k(Y) = \{(y_1, \dots, y_p) \in Y^p \mid \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p: y_{i_1} = \dots = y_{i_k}\}.$$

Тогда $A(f, k)$ совпадает с прообразом подпространства $\Delta_k(Y) \subset Y^p$ при эквивариантном отображении $\hat{f}: X \rightarrow Y^p$ (образующая T группы G действует на Y^p циклической перестановкой сомножителей). Отметим также, что $\Delta_k(Y) = A(\pi_1, k)$, где $\pi_1: Y^p \rightarrow Y$ – проекция на первый сомножитель.

Если $Y = Y' \times Y''$, то $f: X \rightarrow Y$ представляется в виде $f = (f', f'')$, где $f': X \rightarrow Y'$ и $f'': X \rightarrow Y''$. Легко видеть, что $A(f', k') \cap A(f'', k'') \subset A(f, k)$, где $k = k' + k'' - p$. В частности,

$$A(f', p) \cap A(f'', k) = A(f') \cap A(f'', k) \subset A(f, k).$$

Для $Y = \mathbb{R}$ будем обозначать $\Delta_k(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^p$ также через Δ_k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Пусть $2 \leq k \leq p$ и $k \neq 3$. Тогда $\text{ind}(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_k) = k-2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала равенство $\text{ind}(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_2) = 0$. На самом деле справедливо более общее утверждение: пусть на $\mathbb{R}^N$ действует $G = \mathbb{Z}_p$ и P – объединение конечного числа аффинных гиперплоскостей, инвариантное относительно G -действия (которое не обязательно предполагать линейным) и, кроме того, P содержит неподвижные точки действия. Тогда $\text{ind}(\mathbb{R}^N \setminus P) = \text{in}(\mathbb{R}^N \setminus P) = 0$. Действительно, поскольку дополнение к каждой гиперплоскости состоит из объединения двух непересекающихся открытых полупространств, $\mathbb{R}^N \setminus P$ есть дизъюнктное объединение конечного числа открытых выпуклых, а следовательно, стягиваемых по себе множеств. Группа G переставляет эти множества, не оставляя ни одно из них на месте, поскольку действие G на конечномерном ациклическом пространстве обязательно имеет неподвижные точки. Поэтому $\mathbb{R}^N \setminus P$ можно эквивариантно отобразить в G , где G рассматривается как

топологическое пространство с естественным G -действием умножениями слева (по-другому можно сказать, что род пространства $\mathbb{R}^N \setminus P$ равен 1), откуда и следует требуемое.

Теперь индукцией по убывающему k докажем требуемое равенство. Для $k = p$ утверждение верно, поскольку $\mathbb{R}^p \setminus \Delta_p = \mathbb{R}^p \setminus \Delta$ гомотопически эквивалентно сфере S^{p-2} . Предположим, что для числа $k + 1$ нужное равенство уже доказано, т. е. $\text{ind}(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_{k+1}) = k - 1$. Поскольку $\mathbb{R}^p \setminus \Delta_k$ является $(k - 3)$ -связным (см. [27]; мы приводим более простое рассуждение в конце доказательства предложения), имеем $\text{ind}(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_k) \geq k - 2$. Кроме того, поскольку $\mathbb{R}^p \setminus \Delta_k \subset \mathbb{R}^p \setminus \Delta_{k+1}$, мы получаем, что $\text{ind}(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_k) \leq \text{ind}(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_{k+1})$, следовательно, $\text{ind}(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_k)$ равен или $k - 2$, или $k - 1$. Из [27] следует, что $H^d(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_k) \neq 0$ в том и только в том случае, когда $d = (k - 2)t$ для $0 \leq t \leq [p/k]$. Аналогично, $H^d(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_{k+1}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $d = (k - 1)t$, $0 \leq t \leq [p/(k + 1)]$. Поэтому (при $k > 3$) гомоморфизм $(k - 1)$ -мерных когомологий, индуцированный вложением $\mathbb{R}^p \setminus \Delta_k \subset \mathbb{R}^p \setminus \Delta_{k+1}$, тривиален. Из леммы 3.1 теперь следует, что $\text{ind}(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_k) \neq k - 1$.

Таким образом, доказательство основано на следующем утверждении: если Z — свободное G -пространство, $G = \mathbb{Z}_p$, и $H^d(Z) = 0$, то $\text{ind } Z \neq d$ (в рассматривавшейся выше ситуации $Z = \mathbb{R}^p \setminus \Delta_k$ и $d = k - 1$). Это утверждение можно получить как из леммы 3.1 (если $\text{ind } Z = d$, то тождественное отображение $\text{id}: Z \rightarrow Z$ должно индуцировать нетривиальный гомоморфизм d -мерных когомологий, что противоречит предположению $H^d(Z) = 0$), так и непосредственно из рассмотрения последовательностей Смита. А именно, если $H^d(Z) = 0$, то граничные гомоморфизмы $\delta_1: H^d(Z/G) \rightarrow H_\rho^{d+1}(Z)$ и $\delta_2: H_\rho^d(Z) \rightarrow H^{d+1}(Z/G)$ являются мономорфизмами, поэтому из $u_d(Z) \neq 0$ следует, что $u_{d+1}(Z) \neq 0$, и мы получаем, что либо $\text{ind } Z < d$, либо $\text{ind } Z > d$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ объединение P конечного набора аффинных плоскостей и обозначим через c наименьшую из их коразмерностей. Покажем, что $W := \mathbb{R}^d \setminus P$ является $(c - 2)$ -связным. Для этого рассмотрим сфероид $\psi: S^i \rightarrow W$, где $i \leq c - 2$. Продолжим ψ до отображения диска $f: D^{i+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно f приблизить ε -близким гладким отображением $h: D^{i+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, трансверсальным к каждой из плоскостей. Из сделанных размерностных предположений следует, что трансверсальность влечет соотношение $h(D^{i+1}) \cap P = \emptyset$, т. е. $h|_{S^i}: S^i \rightarrow W$ гомотопна постоянному отображению. Кроме того, если ε достаточно мало, $h|_{S^i}$ и ψ гомотопны друг другу (как отображения в W). Поэтому $\pi_i(W) = 0$ при $i \leq c - 2$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ справедливы неравенства $\text{in } A(f) \geq \text{in } X - m(p - 1)$ и $\text{ind } A(f) \geq \text{ind } X - m(p - 1)$. Пусть $2 \leq k \leq p$ и $k \neq 3$. Тогда*

$$\text{ind } A(f, k) \geq \text{ind } X - (m - 1)(p - 1) - k + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два неравенства следуют из следствия 3.4, примененного к G -отображению $\hat{f}: X \rightarrow (\mathbb{R}^m)^p \supset \Delta = \Delta(\mathbb{R}^m)$, поскольку пространство $(\mathbb{R}^m)^p \setminus \Delta$ эквивариантно гомотопически эквивалентно $(m(p - 1) - 1)$ -мерной сфере со свободным G -действием (заметим, что число $m(p - 1) - 1$ нечетно при $p > 2$).

Запишем отображение f в координатах: $f = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$, и положим $h = (f_2, \dots, f_m): X \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$. Заметим, что $A(h) \cap A(f_1, k) \subset A(f, k)$, и из уже доказанного следует, что $\text{ind } A(h) \geq \text{ind } X - (m - 1)(p - 1)$.

Воспользовавшись предыдущим предложением, применим следствие 3.4 к функции $\hat{f}_1 : A(h) \rightarrow \mathbb{R}^p$ в ситуации $E = \mathbb{R}^p \supset P = \Delta_k$, где $\Delta_k = \Delta_k(\mathbb{R})$, в результате получим требуемое.

Теорему 4.1 можно также получить из следствия 3.4 и приведенного ниже предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $2 \leq k \leq p$ и $k \neq 3$. Тогда

$$\text{ind}((\mathbb{R}^m)^p \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m)) \leq (m-1)(p-1) + k - 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V_1, V_2 — G -пространства и $P_1 \subset V_1, P_2 \subset V_2$ — их замкнутые инвариантные подпространства. Имеем

$$V_1 \times V_2 \setminus P_1 \times P_2 = [(V_1 \setminus P_1) \times V_2] \cup [V_1 \times (V_2 \setminus P_2)].$$

Первое из подпространств эквивариантно отображается на $V_1 \setminus P_1$ (при проекции на первый сомножитель), второе — на $V_2 \setminus P_2$. Поэтому если имеется инвариантное относительно G -действия разбиение единицы, подчиненное указанному открытому покрытию, то можно построить эквивариантное отображение $V_1 \times V_2 \setminus P_1 \times P_2 \rightarrow (V_1 \setminus P_1) * (V_2 \setminus P_2)$. Рассмотрим $V_1 = (\mathbb{R}^{m-1})^p$, $P_1 = \Delta(\mathbb{R}^{m-1})$ и $V_2 = \mathbb{R}^p$, $P_2 = \Delta_k = \Delta_k(\mathbb{R})$. Положим $E = V_1 \times V_2$. Тогда E очевидным образом отождествляется с $(\mathbb{R}^m)^p$. Имеем

$$E \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m) \subset E \setminus [\Delta(\mathbb{R}^{m-1}) \times \Delta_k(\mathbb{R})].$$

Поэтому имеются эквивариантные отображения

$$E \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m) \rightarrow E \setminus P_1 \times P_2 \rightarrow (V_1 \setminus P_1) * (V_2 \setminus P_2) \rightarrow S^{(m-1)(p-1)-1} * (\mathbb{R}^p \setminus \Delta_k(\mathbb{R})).$$

Здесь мы воспользовались тем, что пространство $V_1 \setminus P_1 = (\mathbb{R}^{m-1})^p \setminus \Delta(\mathbb{R}^{m-1})$ эквивариантно гомотопически эквивалентно сфере $S^{(m-1)(p-1)-1}$. Следовательно,

$$\text{ind}(E \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m)) \leq (m-1)(p-1) - 1 + \text{ind}(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_k) + 1 = (m-1)(p-1) + k - 2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно, где X — d -мерное многообразие. Предположим, что $\text{ind } X \geq (m-1)(p-1) + k - 1$ при некотором k , где $2 \leq k \leq p$ и $k \neq 3$. Тогда

$$\dim A(f, k) \geq d - (m-1)(p-1) - k + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим G -отображения $\hat{f}: X \rightarrow (\mathbb{R}^m)^p$, $\hat{h}: X \rightarrow (\mathbb{R}^{m-1})^p$, $\hat{f}_1: X \rightarrow (\mathbb{R})^p$, где, как и выше, $f = (f_1, \dots, f_m)$ и $h = (f_2, \dots, f_m): X \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$. При естественном отождествлении $(\mathbb{R}^m)^p = (\mathbb{R}^{m-1})^p \times \mathbb{R}^p$ можно считать, что $\hat{f} = (\hat{h}, \hat{f}_1): X \rightarrow (\mathbb{R}^{m-1})^p \times \mathbb{R}^p$ и $A(h) \cap A(f_1, k)$ есть прообраз подпространства $\Delta(\mathbb{R}^{m-1}) \times \Delta_k(\mathbb{R})$ при G -отображении $\hat{f}$.

Положим $E = (\mathbb{R}^m)^p = (\mathbb{R}^{m-1})^p \times \mathbb{R}^p$. Как было доказано в предложении 4.2, имеет место неравенство

$$\text{ind}(E \setminus [\Delta(\mathbb{R}^{m-1}) \times \Delta_k(\mathbb{R})]) \leq k - 2 + (m - 1)(p - 1).$$

Поэтому

$$\text{ind}(X \setminus [A(h) \cap A(f_1, k)]) \leq k - 2 + (m - 1)(p - 1).$$

Следовательно, $u_{k-1+(m-1)(p-1)}(A(h) \cap A(f_1, k)) = 0$. С другой стороны, из сделанных предположений следует, что $u_{k-1+(m-1)(p-1)}(X) \neq 0$. Из этих двух фактов вытекает неравенство

$$\dim A(h) \cap A(f_1, k) \geq d - (m - 1)(p - 1) - k + 1$$

(см. доказательство предложения 7.2). Поскольку $A(h) \cap A(f_1, k)$ содержится в $A(f, k)$, получаем требуемую оценку размерности пространства $A(f, k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из предложений 4.2 и 4.3 следует, что теорема Коэна–Ласка [40] верна для всех $2 \leq k \leq p$, $k \neq 3$. Результат Коэна–Ласка охватывает случаи $k = 2$ и $k \geq (p + 1)/2$. В работе [40] выдвинута гипотеза, что ограничения на самом деле не нужны. Недавно Болотов [3] показал, что результат верен и при $k = (p - 1)/2$.

Оценки индексов и размерностей пространства $A(f)$, т. е. случай $k = p$ (теоремы типа Буржена–Янга–Шварца [67], [30], [23]), следуют из более общих результатов автора об отображениях в многообразия (см. §8).

Случай $k = 2$ и $k = p$ рассматривались также С. Стефановым в [59].

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Теорему 4.1 можно обобщить на несимметричный случай, а также на случай многозначных отображений.

4.2. Свойства индекса ind близки свойствам рода и гомологического рода в смысле А. С. Шварца [22], [23] (отметим, что индекс in на 1 меньше слабого гомологического рода, а $1 + \text{ind}$ не превосходит гомологического рода). Например, стабильность индекса ind – это аналог теоремы А. С. Шварца о гомологическом роде конуса над главным расслоением. Поэтому имеются аналоги приведенных результатов и для гомологического рода. Для циклических групп род был введен М. А. Красносельским. Для группы $G = \mathbb{Z}_2$ числовой инвариант, на 1 меньший рода, рассматривал Янг и называл его *B-индексом*. Мы ограничимся напоминанием определения и свойств рода для случая свободного действия конечной группы (по поводу обобщения этого понятия – рода расслоения – см. работы [22], [23]).

Род $g(X)$ пространства X со свободным действием группы G есть наименьшее n такое, что имеется эквивариантное отображение $X \rightarrow J^n(G)$ в джойн n экземпляров G . В этом определении G – любая компактная группа Ли и, в частности, любая конечная группа. Для конечной G джойн $J^n(G)$ является $(n - 2)$ -связным полиэдром размерности $n - 1$ со свободным симплицальным действием группы G ,

а следовательно, как хорошо известно, накрытие $J^n(G) \rightarrow J^n(G)/G$ является $(n-1)$ -универсальным (любое накрытие над полиэдром размерности не более $n-1$ индуцировано из него некоторым отображением). Таким образом, в определении рода вместо $J^n(G)$ можно брать любой $(n-2)$ -связный $(n-1)$ -мерный полиэдр со свободным симплицальным действием группы G , а также определить род пространства X как наименьшее n такое, что имеется эквивариантное отображение пространства X в $(n-1)$ -мерный компактный полиэдр со свободным симплицальным действием группы G .

Например, если группа G может свободно действовать на нечетномерных сферах (к таким группам относятся все циклические), то имеются G -отображения $J^{2n}(G) \rightarrow S^{2n-1}$ и $S^{2n-1} \rightarrow J^{2n}(G)$; здесь S^{2n-1} рассматривается с произвольным линейным свободным действием G . Поэтому вместо $J^d(G)$ можно брать S^{2n-1} и $S^{2n-1} * G$ (конус над главным расслоением в терминологии А. С. Шварца) при $d = 2n$ и $d = 2n + 1$ соответственно. Пусть теперь $G = \mathbb{Z}_p$. Из сказанного следует, что

$$\begin{aligned} \text{ind } J^{2n}(G) &= \text{ind } J^{2n}(G) = \text{ind } S^{2n-1} \\ &= \text{ind } S^{2n-1} = 2n - 1 = g(S^{2n-1}) - 1 = g(J^{2n}(G)) - 1. \end{aligned}$$

Положим $\text{Ind } X = 1 + \text{ind } X$. Тогда $\text{Ind } X \leq g(X)$ и неравенство из предложения 3.5 имеет вид

$$\text{Ind } X \leq \text{Ind } A + \text{Ind } B, \quad X = A \cup B.$$

Для рода справедливо такое же, как и для индекса Ind , неравенство $g(X) \leq g(A) + g(B)$ (здесь G произвольна), где A, B – инвариантные подмножества, $X = A \cup B$, и либо оба подпространства открыты, либо оба замкнуты, либо дополнители друг к другу и одно из них замкнуто (открыто). Род обладает также свойством непрерывности, и, кроме того, из определения легко получается неравенство $g(X * Y) \leq g(X) + g(Y)$. В частности, $g(X * G) \leq g(X) + 1$, причем существуют пространства (даже в случае $G = \mathbb{Z}_2$), для которых неравенство строгое, иными словами, род не является стабильным (см. [36], [22]). Из определения следует, что род, так же как и индекс, не убывает при эквивариантных отображениях. Наконец, отметим, что $g(X) \leq \dim X + 1$.

Из свойств рода А. С. Шварц [22] получил следующую теорему, обобщающую результаты Буржена и Янга (которые рассматривали $\mathbb{Z}_2$ -действия).

ТЕОРЕМА 4.2. *Предположим, что конечная группа G действует свободно на X и действует на E так, что действие свободно на $E \setminus P$, где $P \subset E$ – инвариантное замкнутое подпространство. Пусть $f: X \rightarrow E$ – эквивариантное отображение. Тогда*

$$g(f^{-1}P) \geq g(X) - g(E \setminus P).$$

Рассмотрим теперь случай действия группы $G = \mathbb{Z}_p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Пусть $G = \mathbb{Z}_p$ действует свободно на X ; тогда $\text{ind } X + 1 \leq g(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $J^d(G)$ является $(d-1)$ -мерным $(d-2)$ -связным комплексом, из свойств индекса следует, что $\text{ind } J^d(G) = d-1$. Пусть $d = g(X)$. Тогда существует эквивариантное отображение $X \rightarrow J^d(G)$, откуда получаем

$$\text{ind } X \leq \text{ind } J^d(G) = d-1 = g(X) - 1.$$

Следующая теорема, обобщающая теорему Буржена–Янга для B -индекса пространств со свободной инволюцией, принадлежит А. С. Шварцу [23].

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $G = \mathbb{Z}_p$ действует свободно на X и отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно. Тогда $g(A(f)) \geq g(X) - m(p-1)$. В частности, если $g(X) > m(p-1)$, то $A(f) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается применением теоремы 4.2 к отображению $\hat{f}: X \rightarrow E = (\mathbb{R}^m)^p \supset P = \Delta(\mathbb{R}^m)$; в данном случае пространство $E \setminus P$ эквивариантно гомотопически эквивалентно $(m(p-1)-1)$ -мерной сфере, род которой равен $m(p-1)$.

Рассмотрим подпространство $\Delta_{2,i}(\mathbb{R}^m) \subset (\mathbb{R}^m)^p$, состоящее из наборов $(x_1, \dots, x_p)$, где $x_j \in \mathbb{R}^m$, таких, что $x_j = x_{j+i}$ при некотором $j = 1, \dots, p$ (при $j+i > p$ имеется в виду равенство $x_j = x_{j+i-p}$). При $i = 1$ получается конфигурационное пространство, использовавшееся Ласком [55]. Подпространство $\Delta_{2,i}$ инвариантно относительно действия группы $G = \mathbb{Z}_p$ на $(\mathbb{R}^m)^p$, поэтому определены его род и индекс.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Имеем

$$\begin{aligned} g(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_{2,i}(\mathbb{R})) &= 1, \\ g((\mathbb{R}^m)^p \setminus \Delta_{2,i}(\mathbb{R}^m)) &\leq g([\mathbb{R}^{m-1}]^p \times \mathbb{R}^p \setminus [\Delta(\mathbb{R}^{m-1}) \times \Delta_{2,i}(\mathbb{R})]) \\ &\leq (m-1)(p-1) + 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $\mathbb{R}^p \setminus \Delta_{2,i}(\mathbb{R})$ представляет собой дизъюнктное объединение открытых конусов, которые переставляются при действии (ни один из этих конусов не является инвариантным подмножеством, в противном случае он содержал бы неподвижные точки). Отсюда легко следует первое равенство. Доказательство неравенств проводится так же, как в доказательстве предложения 4.2.

Из этого предложения следует также, что

$$\begin{aligned} \text{ind}(\mathbb{R}^p \setminus \Delta_{2,i}(\mathbb{R})) &= 0, \\ \text{ind}((\mathbb{R}^m)^p \setminus \Delta_{2,i}(\mathbb{R}^m)) &\leq \text{ind}([\mathbb{R}^{m-1}]^p \times \mathbb{R}^p \setminus [\Delta(\mathbb{R}^{m-1}) \times \Delta_{2,i}(\mathbb{R})]) \\ &\leq (m-1)(p-1). \end{aligned}$$

Положим

$$A(f, 2, i) := \{x \in X \mid f(T^s x) = f(T^{s+i} x) \text{ для некоторого } s\}.$$

Ясно, что $A(f, 2, i) \subset A(f, 2)$ для всех $1 \leq i \leq p-1$. Кроме того, $A(f, 2, i) = \hat{f}^{-1}(\Delta_{2,i}(\mathbb{R}^m))$.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $X \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывное отображение свободного $\mathbb{Z}_p$ -пространства X и $\text{ind } X \geq (m-1)(p-1) + 1$. Тогда $\text{ind } A(f, 2, i) \geq \text{ind } X - (m-1)(p-1) - 1$, в частности $A(f, 2, i) \neq \emptyset$ и $\dim A(f, 2, i) \geq \text{ind } X - (m-1)(p-1) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя следствие 3.4 к G -отображению $\hat{f}: X \rightarrow E = (\mathbb{R}^m)^p \supset P = \Delta_{2,i}(\mathbb{R}^m)$ и пользуясь найденной оценкой индекса пространства $(\mathbb{R}^m)^p \setminus \Delta_{2,i}(\mathbb{R}^m)$, получаем требуемое неравенство.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $G = \mathbb{Z}_p$ действует свободно на X . Пусть отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно и $\tilde{H}^j(X) = 0$ при $j \leq (m-1)(p-1)$. Тогда $A(f, 2, i) \neq \emptyset$.

Аналогичным образом, используя теорему 4.2 для $G = \mathbb{Z}_p$ и предложение 4.5, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $G = \mathbb{Z}_p$ действует свободно на X и непрерывно отображение $X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тогда

$$g(A(f, 2, i)) \geq g(X) - (m-1)(p-1) - 1.$$

4.3. Множества $A(f, k)$ определены и в случае действия произвольной группы, а именно $A(f, k)$ состоит из таких $x \in X$, что найдутся попарно различные элементы $g_{i_1}, \dots, g_{i_k} \in G$ такие, что $f(g_{i_1}x) = \dots = f(g_{i_k}x)$.

В работе [12] теорема Коэна–Ласка [40] была перенесена на случай действия элементарной абелевой группы $G = \mathbb{Z}_p^n$ (см. теорему 5.1 и следствие 5.3 в [12]). Практически так же, как и в рассмотренном выше случае действия циклической группы простого порядка, можно показать, что ограничение на число склеек не является существенным (хотя действия на конфигурационных пространствах уже не свободны, но они не имеют неподвижных точек и этого достаточно для проведения всех рассуждений, если вместо индекса ind использовать индекс $i(\cdot)$). Например, из определения индекса видно, что если $H^d(Z) = 0$, то $i(Z) \neq d+1$, и это позволяет найти индекс конфигурационного пространства $\mathbb{R}^q \setminus \Delta_k(\mathbb{R})$. Таким образом, справедливы следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть $2 \leq k \leq q$, где $q = p^n$, и $k \neq 3$. Тогда $i(\mathbb{R}^q \setminus \Delta_k(\mathbb{R})) = k-1$ и $i((\mathbb{R}^m)^q \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m)) \leq (m-1)(q-1) + k-1$.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть X – G -пространство такое, что $i(X) \geq (m-1) \times (p^n-1) + k$, где $G = \mathbb{Z}_p^n$, $2 \leq k \leq p^n$, $k \neq 3$. Тогда для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ множество $A(f, k)$ непусто.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $2 \leq k \leq p^n$, $k \neq 3$. Пусть X – G -пространство ($G = \mathbb{Z}_p^n$), связное и ацикличное (над полем $\mathbb{Z}_p$) во всех (положительных) размерностях, меньших $(m-1)(p^n-1) + k-1$. Тогда для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ множество $A(f, k)$ непусто.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Этот результат нельзя улучшить в следующих двух случаях:

- 1) $m = 1$ (k произвольно);
- 2) $k = q$ (m произвольно).

Пусть X – свободное G -пространство, где G – конечная группа порядка $q = |G|$. Предположим, кроме того, что X – CW-комплекс с клеточным действием. Чтобы построить $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ с $A(f, k) = \emptyset$ достаточно построить эквивариантное отображение $X \rightarrow (\mathbb{R}^m)^q \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m)$. Действительно, пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ – композиция этого эквивариантного отображения с проекцией $(\mathbb{R}^m)^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ на первый сомножитель. Тогда $A(f, k) = \emptyset$. Подобное эквивариантное отображение существует тогда и только тогда, когда существует сечение расслоения $(X \times (\mathbb{R}^m)^q \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m))/G \rightarrow X/G$ со слоем $(\mathbb{R}^m)^q \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m)$. Из теории препятствий следует, что если размерность базы (равная размерности пространства X) не превосходит связности $(\mathbb{R}^m)^q \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m)$ плюс 1, то такое сечение существует.

В качестве X возьмем джойн $J^s(G) = G * \cdots * G$ (s копий группы G с диагональным действием). Имеем $\dim J^s(G) = s - 1$ и $\pi_i(J^s(G)) = 0$ для $i < s - 1$. Отметим, что если G – p -тор, то $i(J^s(G)) = s$.

Имеем $\pi_i(\mathbb{R}^q \setminus \Delta_k(\mathbb{R})) = 0$ для $i < k - 2$. Поэтому существует эквивариантное отображение $J^{k-1}(G) \rightarrow \mathbb{R}^q \setminus \Delta_k(\mathbb{R})$. Имеется также эквивариантное отображение $J^{m(q-1)}(G) \rightarrow (\mathbb{R}^m)^q \setminus \Delta_q(\mathbb{R}^m)$, поскольку $(\mathbb{R}^m)^q \setminus \Delta_q(\mathbb{R}^m) \simeq S^{m(q-1)-1}$. Следовательно, существуют отображения $f: J^{k-1}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ и $h: J^{m(q-1)}(G) \rightarrow \mathbb{R}^m$ с $A(f, k) = \emptyset$ и $A(h, q) = \emptyset$. Если G является p -тором, то имеем $i(J^{k-1}(G)) = k - 1$ и $i(J^{m(q-1)}(G)) = m(q - 1)$. Как отмечено выше, для $G = \mathbb{Z}_p$ (фактически для любой циклической группы) в приведенных рассуждениях можно заменить джойн на нечетномерную сферу и на джойн нечетномерной сферы с G (в четной размерности).

Так же, как и для циклической группы простого порядка, справедливо утверждение: если на $\mathbb{R}^N$ действует $G = \mathbb{Z}_p^n$ и P – объединение конечного числа аффинных гиперплоскостей такое, что P инвариантно относительно G -действия и содержит неподвижные точки G -действия на $\mathbb{R}^N$, то $i(\mathbb{R}^N \setminus P) = 1$. В доказательстве используется по-прежнему справедливое для группы $G = \mathbb{Z}_p^n$ (и даже для не обязательно линейного действия любой конечной p -группы) утверждение, что действие G на конечномерном ациклическом пространстве обязано иметь неподвижные точки. Таким образом, $i((\mathbb{R}^{p^n}) \setminus \Delta_2(\mathbb{R})) = 1$. На самом деле в этом равенстве можно индекс заменить на род (см. определение рода для пространств с действием без неподвижных точек ниже). Аналогичным образом можно показать, что $i(\Delta_k(\mathbb{R}) \setminus \Delta_{k+1}(\mathbb{R})) = 1$ при $k \geq (p^n + 1)/2$ и совпадает с родом указанного пространства. Если бы это равенство было справедливым без ограничений на k , то, используя свойства рода, мы легко бы нашли, что род пространств $\mathbb{R}^{p^n} \setminus \Delta_k(\mathbb{R})$ совпадает с индексом $i(\mathbb{R}^{p^n} \setminus \Delta_k(\mathbb{R})) = k - 1$.

4.4. Для пространств с G -действием без неподвижных точек можно определить инварианты типа рода многими разными способами [35] (вместо рода говорят о G -категории и т. п.). Мы ограничимся конечными группами.

Обозначим через D дизъюнктивное объединение однородных пространств G/H , взятое по всем подгруппам $H \neq G$. Тогда D – пространство, состоящее из конечного числа точек, на котором G действует без неподвижных точек. Для пространства X с G -действием без неподвижных точек определим род $g(X)$ как наименьшее d такое, что можно отобразить X эквивариантно в $J^d(D)$. Таким образом, род пространства есть целое положительное число. Если X – свободное G -пространство, то определен и род в старом смысле (в категории пространств со свободным действием группы G), рассматривавшийся выше. Будем обозначать

его, во избежание путаницы, через $g_{\text{free}}(X)$. Поскольку $J^d(G) \subset J^d(D)$, имеем $g_{\text{free}}(X) \geq g(X)$, причем в общем случае неравенство строгое. Например, в общем случае род $g(J^d(G))$ свободного G -пространства $J^d(G)$ может быть строго меньше, чем $d = g_{\text{free}}(J^d(G))$. С помощью результатов работ [57], [13] об отображениях $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ с пустым множеством $A(f)$, где на S^{2n-1} свободно действует $G = \mathbb{Z}_{p^\alpha}$, можно получить верхние оценки на $g(S^{2n-1})$, а следовательно, и на $g(J^d(G))$. Не приводя точных оценок, поясним эту связь. Отображение с $A(f) = \emptyset$ определяет G -отображение из S^{2n-1} в $(m(p^\alpha - 1) - 1)$ -мерную сферу S — единичную сферу в ортогональном дополнении к диагонали $\Delta(\mathbb{R}^m) \subset (\mathbb{R}^m)^{p^\alpha}$, на которой G уже действует без неподвижных точек. Поэтому из свойств рода $g(\cdot)$, перечисленных чуть ниже, получаем

$$g(S^{2n-1}) \leq g(S) \leq \dim S + 1 = m(p^\alpha - 1).$$

При $\alpha > 1$ можно, в частности, найти m и n такие, что $2n - 1 > \dim S$, т.е. $g(S^{2n-1}) < 2n = g_{\text{free}}(S^{2n-1})$, откуда можно получить при всех достаточно больших d неравенство $g(J^d(G)) < d$ (можно показать, что это неравенство справедливо для любой $G \neq \mathbb{Z}_p^n$).

Род обладает следующими свойствами, аналогичными свойствам обычного рода $g_{\text{free}}(\cdot)$.

Род, очевидно, не убывает при эквивариантных отображениях.

Для паракомпактного X имеет место неравенство $g(X) \leq g(A) + g(B)$, где A, B — инвариантные подпространства, которые либо оба открыты, либо оба замкнуты, либо взаимно дополнительные и одно из них замкнуто (открыто). Для доказательства в случае, когда A, B открыты, достаточно, используя инвариантное разбиение единицы, отвечающее покрытию $X = A \cup B$, определить очевидным образом G -отображение $X \rightarrow A * B$. Остальные случаи рассматриваются с помощью свойства непрерывности рода, состоящего в том, что для замкнутого инвариантного $A \subset X$ имеется инвариантная окрестность U такая, что $g(U) = g(A)$.

Непосредственно из определения следует неравенство $g(X * Y) \leq g(X) + g(Y)$. Наконец, $g(X) \leq \dim X + 1$. Действительно, достаточно доказать это для конечномерного полиэдра с симплицальным действием, поскольку для n -мерного пространства существует эквивариантное отображение в нерв такого инвариантного покрытия, что нерв n -мерен и G действует на нем без неподвижных точек. Если X — такой полиэдр, то можно доказательство провести индукцией по размерности. Род нульмерного полиэдра, очевидно, равен 1. Пусть утверждение доказано для размерностей не более $n - 1$. Любой симплекс не является инвариантным подпространством (иначе симплекс содержал бы неподвижную точку). Орбита n -мерного симплекса содержится в джойне орбиты его границы с орбитой какой-нибудь выбранной внутренней точки. Поэтому X содержится в джойне своего $(n - 1)$ -мерного остова и дизъюнктного объединения орбит некоторых точек (каждая из этих орбит — однородное множество G/H , $H \neq G$). Остается отобразить это объединение орбит в D и воспользоваться индуктивным предположением.

Таким образом, род пространства с действием без неподвижных точек, так же как и в случае свободного действия, можно определить как наименьшее n такое, что существует эквивариантное отображение этого пространства в $(n - 1)$ -мерный компактный полиэдр с симплицальным действием без неподвижных точек. Отметим также, что можно в первоначальном определении рода заменить D более

“экономным” множеством $D' \subset D$, которое получится, если включить в D' только по одному однородному пространству из тех однородных пространств, которые соответствуют подгруппам, лежащим в одном классе сопряженности. Хотя полученное таким образом пространство D' зависит от выбора подгрупп в классах сопряженности, однако все такие пространства эквивариантно гомеоморфны. Более того, можно включить лишь те однородные множества G/H , в которых H – максимальная подгруппа. Например, для p -тора ранга n можно оставить только подторы ранга $n - 1$.

ТЕОРЕМА 4.7. *Предположим, что G действует без неподвижных точек на X и действует на E так, что неподвижные точки действия содержатся в инвариантном и замкнутом подпространстве $P \subset E$. Пусть $f: X \rightarrow E$ – эквивариантное отображение. Тогда*

$$g(f^{-1}P) \geq g(X) - g(E \setminus P).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $X = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(E \setminus P)$, получаем $g(X) \leq g(f^{-1}(P)) + g(f^{-1}(E \setminus P))$, и в силу неубывания рода при эквивариантных отображениях имеем $g(f^{-1}(E \setminus P)) \leq g(E \setminus P)$, откуда и следует требуемое.

Эта теорема дословно повторяет предложение 58 из работы [23], но в [23] под “действием без неподвижных точек” подразумевается, что каждый элемент группы действует без неподвижных точек, т.е. имеется в виду свободное действие.

Пространство $J^d(D)$ (как и $J^d(G)$) является $(d - 2)$ -связным $(d - 1)$ -мерным полиэдром. Как уже отмечалось выше, в общем случае род $g(J^d(G))$ может быть строго меньше, чем d . В связи с этим род наиболее удобно использовать именно для группы $G = \mathbb{Z}_p^n$, поскольку в этом случае род $(d - 2)$ -связного $(d - 1)$ -мерного пространства равен d (в отличие от свободного действия такие пространства уже не обязательно отображаются эквивариантно друг в друга, но $J^d(G)$ всегда можно отобразить эквивариантно в такое пространство). Действительно, это легко следует из связи рода с размерностью и следующего предложения, вытекающего из свойств индекса и определения рода.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Пусть $G = \mathbb{Z}_p^n$ действует без неподвижных точек на X . Тогда $i(X) \leq g(X)$. В частности, если $\tilde{H}^i(X) = 0$ при всех $i \leq N - 1$, то $g(X) \geq N + 1$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Второе утверждение также следует из теоремы Клэпп и Пуппе [35], согласно которой не существует G -отображения из X в Y , если $\tilde{H}^i(X) = 0$ при $i \leq N - 1$ и $H^j(Y) = 0$ при $j \geq N$, в предположении, что G действует на X и Y без неподвижных точек и Y либо компактно, либо паракомпактно и конечномерно. Конечно, приведенный результат вытекает и из свойств индекса $i(\cdot)$, однако в определении индекса $i(\cdot)$ по существу “спрятана” идея доказательства этой теоремы. Теорема Клэпп–Пуппе и индекс $i(\cdot)$ связаны с идеалозначным индексом, введенным Фаделлом и Хуссейни в [42]. Свойство идеалозначного индекса, заменяющее основное свойство числового индекса – неубывания при эквивариантном отображении, – формулируется следующим образом: если существует G -отображение из X в Y , то $\text{Ind}_G X \supset \text{Ind}_G Y$. В [12] показано, что

спектральная последовательность Лере отображения $E_G \times_G X \rightarrow B_G$ естественным образом определяет фильтрацию идеалозначного индекса $\text{Ind}_G X$ и включение $\text{Ind}_G X \supset \text{Ind}_G Y$ согласовано с фильтрациями. Из сделанных предположений следует, что для указанных пространств $\text{Ind}_G Y$ не может содержаться в $\text{Ind}_G X$ как фильтрованный идеал, поэтому и не существует G -отображения из X в Y (см. [12]). Здесь основную роль играет имеющая важнейшее значение в теории групп преобразований теорема Бореля о локализации (см., например, [50]), обеспечивающая при сделанных относительно Y предположениях нетривиальность идеала $\text{Ind}_G Y$. Для других групп второе утверждение предложения 4.7 перестает быть верным, например оно несправедливо для циклической группы $G = \mathbb{Z}_{p^n}$, имеющей тот же порядок, что и у $G = \mathbb{Z}_p^n$. Как известно, теорема Бореля верна также для торов (отметим, что элементарную абелеву группу $G = \mathbb{Z}_p^n$ часто называют p -тором), и в работе [35] имеется соответствующий результат для пространств с действием тора.

Заметим, что из доказанного выше, в частности, следует, что если $G = \mathbb{Z}_p^n$ действует без неподвижных точек на кохомологической (над полем $\mathbb{Z}_p$) N -сфере X (т.е. $H^*(X) = H^*(S^N)$) и $\dim X = N$, то $g(X) = N + 1$ (число N нечетно, если $p > 2$). Отсюда и из теоремы 4.7 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть $G = \mathbb{Z}_p^n$ действует без неподвижных точек на X и отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно. Тогда $g(A(f)) \geq g(X) - m(p^n - 1)$. В частности, если $g(X) > m(p^n - 1)$, то $A(f) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим G -отображение $\hat{f}: X \rightarrow E = (\mathbb{R}^m)^{p^n}$ и положим $P = \Delta(\mathbb{R}^m)$. Тогда $A(f) = \hat{f}^{-1}(P)$, и поскольку пространство $E \setminus P$ эквивариантно гомотопически эквивалентно $(m(p^n - 1) - 1)$ -мерной сфере S с G -действием без неподвижных точек, то $g(E \setminus P) = g(S) = m(p^n - 1)$. Остается воспользоваться предыдущей теоремой.

Неравенство $g(S) \leq m(p^n - 1)$ можно доказать и следующим образом. Единичная сфера S лежит в подпространстве, ортогональном к диагонали. Будем считать, что p нечетно. Тогда указанное подпространство разлагается в прямую сумму $m(p^n - 1)/2$ двумерных инвариантных подпространств, поэтому сфера S есть джойн окружностей, на которых G действует без неподвижных точек. Каждая такая окружность содержится в джойне орбит двух близких точек, т.е. содержится в $(G/H) * (G/H)$, где H – стационарная подгруппа каждой из этих точек, откуда следует, что S можно считать инвариантным подпространством в $J^{m(p^n - 1)}(D)$, т.е. $g(S) \leq m(p^n - 1)$, что и утверждалось.

Для $G = \mathbb{Z}_p$, где p – простое число, условие, что группа действует без неподвижных точек, равносильно тому, что она действует свободно (поэтому $D = G$), и теорема 4.8 является теоремой 4.3, доказанной А. С. Шварцем (см. [23, теорема 30]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Почти все результаты (в том числе теоремы 4.7, 4.8) справедливы и для рода $\tilde{g}(\cdot)$ (также рассматривавшегося в [35]), который определяется на категории пространств с действием конечной группы G без неподвижных точек следующим образом: $\tilde{g}(X)$ есть наименьшее d такое, что существует эквивариантное отображение $X \rightarrow G/H_1 * \dots * G/H_d$, где все (не обязательно различные) подгруппы H_i отличны от G .

4.5. Следующее утверждение – аналог теоремы 4.8 для индекса $\text{in}(\cdot)$.

ТЕОРЕМА 4.9. Пусть X – паракомпактное пространство, на котором свободно действует p -тор $G = \mathbb{Z}_p^n$, где p – простое число, и пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывное отображение. Тогда если $\text{in } X \geq m(p^n - 1)$, то $\text{in } A(f) \geq \text{in } X - m(p^n - 1)$. Если, кроме того, X есть l -мерное многообразие, то $\dim A(f) \geq l - m(p^n - 1)$.

Этот результат является частным случаем теоремы 2 из [8]. Мы приведем короткое доказательство этой теоремы.

Теорема 4.9 вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Пусть X – паракомпактное пространство, на котором действует без неподвижных точек p -тор $G = \mathbb{Z}_p^n$, где p – простое число. Пусть E – G -пространство и P – его замкнутое инвариантное подпространство, содержащее все неподвижные точки, такое, что $E \setminus P$ – конечномерная паракомпактная когомологическая d -сфера над полем $\mathbb{Z}_p$. Тогда если $f: X \rightarrow E$ – непрерывное эквивариантное отображение и $\text{in } X \geq d + 1$, то $\text{in } f^{-1}P \geq \text{in } X - d - 1$. Если, кроме того, X есть l -мерное многообразие, то $\dim f^{-1}P \geq l - d - 1$.

Отметим, что d нечетно, если p нечетно.

Для того чтобы получить теорему 4.9 из предложения 4.8, необходимо применить его к эквивариантному отображению $\hat{f}: X \rightarrow E := \text{Map}(G, \mathbb{R}^m) \approx (\mathbb{R}^m)^{p^n}$, взяв в качестве P диагональ Δ (напомним, что $A(f) = \hat{f}^{-1}\Delta$), и заметить, что $E \setminus P$ – гомотопическая $(m(p^n - 1) - 1)$ -мерная сфера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. Пусть X – паракомпактное пространство, на котором действует свободно конечная группа G . Пусть E – G -пространство, P – его замкнутое инвариантное подпространство и $f: X \rightarrow E$ – непрерывное эквивариантное отображение. Пусть имеются классы когомологий $\alpha \in H_G^s(X)$ и $\gamma \in H_G^t(E)$ (когомологии с коэффициентами в поле $\mathbb{k}$) такие, что класс $\alpha f_G^* \gamma \in H_G^{s+t}(X)$ нетривиален, а образ γ в группе $H_G^t(E \setminus P)$ равен нулю. Тогда образ α в группе $H_G^s(f^{-1}P)$ нетривиален. Если, кроме того, X есть l -мерное обобщенное многообразие над полем $\mathbb{k}$, то $\dim f^{-1}P \geq l - t$.

Поясним, как предложение 4.8 вытекает из предложения 4.9. Возьмем в качестве класса $\gamma \in H_G^{d+1}(E)$ образ эквивариантного эйлера класса $e \in \Lambda^{d+1} = H_G^{d+1}(\text{pt})$ когомологической сферы $E \setminus P$ в группе $H_G^{d+1}(E)$. Из теоремы Бореля о локализации (см. [50], [41]) следует, что e не является делителем нуля в Λ . Пусть $\beta \in \Lambda^s$ – произвольный ненулевой класс когомологий размерности $s \leq \text{in } X - d - 1$. Тогда $\beta e \neq 0$ и $\deg \beta e \leq \text{in } X$. Поэтому из определения индекса $\text{in } X$ вытекает, что образ класса βe в группе $H_G^{s+d+1}(X)$ отличен от нуля, но этот класс равен $\alpha f_G^* \gamma$, где α – образ класса β в $H_G^s(X)$. Из предложения 4.9 следует, что образ класса α в группе $H_G^s(X)$ отличен от нуля, т. е. отличен от нуля образ класса β в $H_G^s(f^{-1}P)$. Последнее и означает, что $\text{in } f^{-1}(P) \geq \text{in } X - d - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.9. Предположим противное, т. е. что образ α в группе $H_G^s(f^{-1}P)$ тривиален. Тогда в силу непрерывности когомологий Александрова–Чеха найдется инвариантная окрестность U множества $f^{-1}P$ такая, что образ α в группе $H_G^s(U)$ равен нулю. Из точности последовательности пары (X, U) (для эквивариантных когомологий) следует, что α является

образом класса $\alpha' \in H_G^s(X, U)$. Аналогично, из того, что образ класса $f_G^* \gamma$ в группе $H_G^t(X \setminus f^{-1}P)$ тривиален, следует, что $f_G^* \gamma$ является образом некоторого класса $\gamma' \in H_G^t(X, X \setminus f^{-1}P)$. Поэтому $\alpha f_G^* \gamma$ является образом класса $\alpha' \gamma' \in H_G^{s+t}(X, U \cup (X \setminus f^{-1}P))$, который равен нулю в силу того, что $H_G^*(X, U \cup (X \setminus f^{-1}P)) = H_G^*(X, X) = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство первого утверждения.

Итак, осталось рассмотреть случай, когда X – многообразие и $f_G^* \gamma \neq 0$. Тогда построенный выше класс γ' тоже нетривиален и, следовательно, получаем, что $H_G^t(X, X \setminus f^{-1}P) \neq 0$. Поскольку действие на X свободно, имеем

$$0 \neq H_G^t(X, X \setminus f^{-1}P) \cong H^t(X/G, (X \setminus f^{-1}P)/G).$$

Группа $H^t(X/G, (X \setminus f^{-1}P)/G)$ двойственна группе гомологий с компактными носителями $H_t^c(X/G, (X \setminus f^{-1}P)/G)$, которая, в свою очередь, изоморфна группе $H^{l-t}((f^{-1}P)/G; \mathcal{O})$ в силу двойственности Пуанкаре–Лефшеца, где $\mathcal{O}$ – ориентирующий пучок многообразия X/G (см. [33], [18]). Таким образом, мы получили, что $H^{l-t}((f^{-1}P)/G; \mathcal{O}) \neq 0$, и, следовательно, $\dim f^{-1}P \geq l - t$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Доказательство теоремы 4.9 прямо переносится на случай отображения в m -мерное ациклическое над полем $\mathbb{Z}_p$ когомологическое многообразие M (вместо $\mathbb{R}^m$). Действительно, тогда $M(G) = \text{Map}(G, M) \approx M^q$ – ациклическое над полем $\mathbb{Z}_p$ когомологическое многообразие, где $q = p^n$, и легко показать, используя двойственность Пуанкаре–Лефшеца и точную последовательность пары $(M^q, M^q \setminus \Delta)$, что $M^q \setminus \Delta$ – гомологическая $(m(q-1)-1)$ -мерная сфера над полем $\mathbb{Z}_p$. Ее эквивариантный эйлеров класс по теореме Бореля о локализации не является делителем нуля в Λ (он может быть явно выражен через многочлены Диксона [8]), и все рассуждения могут быть перенесены дословно на этот случай. Аналогичный результат справедлив и для отображений в многообразия, которые уже не являются ациклическими (см. [8]), однако при этом класс отображений нужно сузить (достаточно потребовать, чтобы отображение индуцировало нулевой гомоморфизм когомологий во всех положительных размерностях), так как для произвольного отображения утверждение перестает быть верным. Действительно, $A(\pi_1) = \emptyset$ для проекции $\pi_1: M^q \setminus \Delta \rightarrow M$ на первый сомножитель, а индекс пространства $M^q \setminus \Delta$, где M – m -мерное многообразие, в общем случае может быть строго больше $m(q-1)-1$.

4.6. В работах [11] и [12] найдены нижние оценки индексов взрезанных джойнов и взрезанных произведений некоторых пространств, которые использовались для обобщений теорем ван Кампена–Флореса и Тверберга. Если в рассуждениях использовать род вместо индекса, то получатся аналогичные оценки рода этих пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. Пусть для некоторых натуральных k_i при $i = 1, \dots, l$ выполнены неравенства

$$(k_i + 1)(q - 1) + qs_i \geq (N_i + 1)(j - 1),$$

где $q = p^n$, p – простое число. Положим $K = \Delta_{s_1-1}^{N_1} * \dots * \Delta_{s_l-1}^{N_l}$. Тогда

$$g(J_j^q(K)) \geq (N_1 + \dots + N_l + l)(j - 1) - (k_1 + \dots + k_l + l)(q - 1),$$

$$g(P_j^q(K)) \geq (N_1 + \dots + N_l + l)(j - 1) - (k_1 + \dots + k_l + l + 1)(q - 1).$$

Здесь $J_j^q(K)$, $P_j^q(K)$ – взрезанные джойн и произведение комплекса соответственно (см. [11]).

С помощью предложения 4.10 и теоремы 4.8 можно получить обобщение теоремы ван Кампена–Флореса для отображений в евклидово пространство и группы $G = \mathbb{Z}_p^n$. Более сложный случай отображений в многообразие, рассмотренный в [11], а также изучение вопроса о частичных совпадениях требуют оценок не рода, а кохомологических индексов (аналогичная оценка $g(P_j^q(\Delta^N)) \geq (N+1) \times (j-1) - q + 1$ приводит к топологической теореме Тверберга для группы $G = \mathbb{Z}_p^n$ и отображений в евклидово пространство¹).

Аналогично находятся и нижние оценки для $g(J_j^q(K))$, $g(P_j^q(K))$, где $K = \Delta^N * \Delta_{s_1-1}^{N_1} * \dots * \Delta_{s_l-1}^{N_l}$. Как заметил С. А. Богатый [2], рассмотрение таких пространств приводит к теореме, включающей одновременно и топологическую теорему Тверберга, и теорему типа ван Кампена–Флореса.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. В работе [56] при доказательстве комбинаторных результатов таких, как гипотеза Кнезера и топологической теоремы Тверберга (для простого числа разбиения), использовался введенный Живалевичем [70] индекс. Использование этого индекса считается удачным с методической точки зрения, поскольку позволяет изложить доказательства важных комбинаторных результатов, полученных с помощью методов алгебраической топологии, практически без привлечения теории гомологий.

Из определения этого индекса сразу видно, что он ровно на 1 меньше рода Шварца $g_{\text{free}}(\cdot)$. Поэтому все общие свойства и утверждения, касающиеся этого индекса, прямо следуют из результатов о роде $g_{\text{free}}(\cdot)$. Например, теорема о p -совпадениях [56, теорема 6.3.3] для отображений свободного $\mathbb{Z}_p$ -пространства X в $\mathbb{R}^m$ является частным случаем теоремы Шварца (теоремы 4.3). Таким образом, вместо индекса Живалевича с тем же успехом можно использовать род $g_{\text{free}}(\cdot)$. В частности, неравенство Саркариа и доказательство топологической теоремы Тверберга (для простого p), данное в [56], можно переписать в терминах рода Шварца. Если теперь вместо свободных $\mathbb{Z}_p$ -действий рассматривать $\mathbb{Z}_p^n$ -действия без неподвижных точек и род $g_{\text{free}}(\cdot)$ заменить на $g(\cdot)$ (или на $\tilde{g}(\cdot)$), то получится доказательство топологической теоремы Тверберга для степени простого числа. Можно поступить и следующим образом: ввести индекс пространства X как $g(X) - 1$ (или как $\tilde{g}(X) - 1$), тогда доказательство в случае степени простого числа будет дословным повторением рассуждения из [56].

§ 5. Точки (H, G) -совпадений

Пусть G – конечная группа, $H \subset G$ – ее подгруппа и X – G -пространство. Пусть $\hat{f}: X \rightarrow E$ – эквивариантное отображение в некоторое G -пространство E . Положим $P_H = GE^H$, где E^H – множество неподвижных точек действия подгруппы H . Ясно, что P_H – замкнутое G -инвариантное подмножество и H действует на $E \setminus P_H$ без неподвижных точек. Нетрудно видеть также, что $P_H = \bigcup_{g \in G} E^{gHg^{-1}}$. Действительно, если $z \in gE^H$, то $ghg^{-1} \cdot gz = ghz = gz$ для любого $h \in H$, т. е. z –

¹Из недавних работ автор узнал, что доказательство топологической теоремы Тверберга для отображений в $\mathbb{R}^m$ и группы $G = \mathbb{Z}_p^n$ было получено в 1987 г. в неопубликованной работе М. Озадина (М. Özadyn).

неподвижная точка действия сопряженной с H подгруппы gHg^{-1} . Таким образом, для сопряженных подгрупп H и $H' = gHg^{-1}$ имеем $P_H = P_{H'}$.

Пусть $C = Gx \subset X$ – орбита некоторой точки $x \in X$. Условие $\hat{f}(C) \subset P_H$ эквивалентно тому, что существует точка $x_0 \in C$ такая, что $\hat{f}(x_0) \in E^H$. Тогда $\hat{f}(gx_0) \in gE^H = E^{gHg^{-1}}$. Имеем

$$\hat{f}(gHx_0) = gH\hat{f}(x_0) = g\hat{f}(x_0) = \hat{f}(gx_0),$$

т. е. $\hat{f}(ghx_0)$ не зависит от $h \in H$. Таким образом, если представить G в виде разбиения на левые смежные классы: $G = \bigcup_{i=1}^s g_iH$, то отображение $\hat{f}$ постоянно на каждом множестве g_iHx_0 . В случае, когда действие G на X свободно, множества g_iHx_0 и g_jHx_0 не пересекаются при $i \neq j$ и их можно представить в качестве H -орбит *специального* левого действия группы H на G -орбите C . А именно, пусть орбита C представлена в виде $C = Gx$, т. е. сделан выбор точки на орбите. Тогда имеется левое H -действие на C (зависящее от выбора точки на орбите)

$$\varphi_x: H \times C \rightarrow C, \quad \varphi_x(h, gx) = gh^{-1}x$$

и орбита C представляется в виде объединения непересекающихся H -орбит: $C = \bigcup_{i=1}^s g_iHx$. Отметим также, что каждая такая H -орбита g_iHx (относительно действия φ_x) в силу равенства $g_iHx = g_iHg_i^{-1} \cdot g_ix$ совпадает с $g_iHg_i^{-1}$ -орбитой точки g_ix при естественном действии подгруппы $g_iHg_i^{-1}$ (под естественным понимается ограничение G -действия на подгруппу). В случае, когда G абелева или когда H лежит в центре, орбиты действия φ_x совпадают с орбитами естественного левого действия подгруппы H на Gx .

Пусть теперь задано отображение $f: X \rightarrow Y$. Возьмем в качестве E пространство $E := \text{Map}(G, Y) = Y(G) \cong Y^{|G|}$. Тогда имеем эквивариантное отображение $\hat{f}: X \rightarrow E$ (напомним, что оно задается как $\hat{f}(x)(g) = f(g^{-1}x)$).

Положим $A(f; H, G) := \hat{f}^{-1}P_H$. Если $x \in A(f; H, G)$, то найдется точка $x_0 \in Gx$ такая, что $\hat{f}(x_0) \in Y(G)^H$, т. е. $h\hat{f}(x_0) = \hat{f}(x_0) \forall h \in H$. Это означает, что $(h\hat{f}(x_0))(g) = \hat{f}(x_0)(g)$ для всех $h \in H$ и $g \in G$. Правая часть предыдущего равенства равна $f(g^{-1}x_0)$, а левая равна $f(g^{-1}hx_0)$. Таким образом, $f(g^{-1}x_0) = f(g^{-1}Hx_0) \forall g \in G$. Иными словами, отображение f постоянно на орбитах φ_{x_0} -действия группы H на $Gx = Gx_0$.

Если действие группы G на X не является свободным, то для того, чтобы отображение φ_x (т. е. H -действие на орбите Gx) было корректно определено, необходимо потребовать, чтобы для всех $g \in G_x$ и $h \in H$ было выполнено равенство $ghx = hx$, где G_x – стационарная подгруппа точки $x \in X$. Это означает, что H должна быть подгруппой нормализатора группы G_x .

Множество $A(f; H, G)$ Гонсалвес, Яворовский и Пергер [45] называют множеством точек (H, G) -совпадений. Из обсуждения, приведенного выше, следует, что для сопряженных подгрупп H и H' множества точек (H, G) -совпадений и (H', G) -совпадений одинаковы.

Положим $B(f) = \bigcup_{H' \neq \{e\}} A(f; H', G)$ – объединение по всем нетривиальным подгруппам H' .

Положим $|G| = q$. Рассмотрим G -отображение $\hat{f}: X \rightarrow Y^q$. Пусть $P \subset Y^q$ – наименьшее замкнутое множество, на дополнении к которому группа G действует свободно. Ясно, что $P = \bigcup_{H' \neq \{e\}} P_{H'}$ и $B(f) = \hat{f}^{-1}P$.

Предположим, что G содержит в качестве подгруппы p -тор H . Тогда X является также пространством с H -действием, и поэтому определен его индекс $i(X) = i_H(X)$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть X компактно, связно и $i(X) \geq m|G| + 1$, где $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$. При $i(X) = m|G| + 1$ пусть $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Предположим, что p -тор $H \subset G$ действует на X без неподвижных точек. Тогда $A(f; H, G) \neq \emptyset$, в частности множество $B(f)$ непусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно рассмотреть G -отображение $\hat{f}: X \rightarrow Y^q$, $q = |G|$. Подпространство $P_H \subset Y^q$ замкнуто и G -инвариантно, и $A(f; H, G) = \hat{f}^{-1}P_H$. Далее рассуждения проводятся так же, как при доказательстве теоремы 2.2, но с заменой диагонали Δ на P_H и по отношению к действию подгруппы H .

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Пусть X компактно, связно и ациклично над полем $\mathbb{Z}_p$ до размерности $m|G| - 1$ включительно, где p – простое число, делящее $|G|$. Тогда для любого p -тора $H \subset G$, действующего на X без неподвижных точек, имеем $A(f; H, G) \neq \emptyset$. В частности, множество $B(f)$ непусто.*

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Пусть X компактно, связно и гомологически локально связно над $\mathbb{Z}$ и p -тор $H \subset G$ действует на X без неподвижных точек. Предположим, что $H_j^c(X; \mathbb{Z}) = 0$ при $0 < j < m|G|$, где $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$. Тогда $A(f; H, G) \neq \emptyset$. В частности, множество $B(f)$ непусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы универсальных коэффициентов следует, что $\tilde{H}^j(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ при всех $j < m|G|$ и любом простом p . Поэтому из свойств индекса следует, что $i_H(X) \geq m|G| + 1$ и можно воспользоваться теоремой 5.1 или следствием 5.1.

Заметим, что если простое число p делит порядок группы $|G|$, то в G заведомо имеется циклическая подгруппа $\mathbb{Z}_p$, т.е. p -тор ранга 1.

Аналогичные результаты имеются и при использовании индекса ind . Предположим, что $H = \mathbb{Z}_p$ – подгруппа в G . Тогда определен индекс $\text{ind } X = \text{ind}_H X$ и имеет место следующий аналог теоремы 5.1.

ТЕОРЕМА 5.2. *Предположим, что подгруппа $H = \mathbb{Z}_p$ группы G действует свободно на X . Пусть X компактно, связно и $\text{ind } X \geq m|G|$, где $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$. При $\text{ind } X = m|G|$ пусть $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда $A(f; H, G) \neq \emptyset$, в частности множество $B(f)$ непусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая G -отображение $\hat{f}: X \rightarrow \text{Map}(G, Y) \approx Y^{|G|}$ как H -отображение, повторяем доказательство теоремы 3.1, взяв H -инвариантное подпространство P_H вместо Δ и $A(f; H, G)$ вместо $A(f)$.

§ 6. Отображение Хопфа

Приведем теперь обобщение конструкции Хопфа (переоткрытой Е. В. Шепиным) не склеивающего антиподов отображения $S^{2m-1} \rightarrow T^m$ в декартову степень триода для случая действия произвольной конечной группы.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Существование не склеивающего антиподов отображения сферы S^{2m-1} в стягиваемый m -мерный полиэдр легко получить из более ранней работы [43]. Флорес рассмотрел взрезанный джойн $\Delta_{s-1}^{2s} *' \Delta_{s-1}^{2s}$, т.е. подпространство в джойне $\Delta_{s-1}^{2s} * \Delta_{s-1}^{2s}$, которое является объединением симплексов $\sigma_1 * \sigma_2$

таких, что σ_1 и σ_2 — попарно непересекающиеся симплексы в Δ_{s-1}^{2s} . Он показал, что взрезанный джойн эквивариантно гомеоморфен сфере S^{2n-1} . Имеется очевидное симплицальное отображение $\Delta_{s-1}^{2s} * \Delta_{s-1}^{2s} \rightarrow C\Delta_{s-1}^{2s}$ в конус $C\Delta_{s-1}^{2s}$, при котором второй сомножитель отображается в вершину конуса. Таким образом, получаем симплицальное отображение $\Delta_{s-1}^{2s} *' \Delta_{s-1}^{2s} \rightarrow C\Delta_{s-1}^{2s}$, которое не склеивает орбиты. Композиция с $\mathbb{Z}_2$ -гомеоморфизмом $S^{2n-1} \approx \Delta_{s-1}^{2s} *' \Delta_{s-1}^{2s}$ дает не склеивающее антиподов отображение $S^{2n-1} \rightarrow C\Delta_{s-1}^{2s}$.

Точки джойна $X_1 * \dots * X_m$ будем записывать в виде $t_1x_1 + \dots + t_mx_m$, где $t_1 + \dots + t_m = 1$, $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. Пусть $K = CP = P * \{z_0\}$ — конус над P с вершиной z_0 . Пусть $z \in K$ и $\alpha \in [0, 1]$. Записывая z в виде $z = (t, y)$, $t \in [0, 1]$ (т.е. $z = ty + (1-t)z_0$), положим $\alpha z = (\alpha t, y)$. Ясно, что умножение точек конуса K на $\alpha \neq 0$ определяет вложение K в себя.

Пусть X_i , $i = 1, \dots, m$, — G -пространства, где G — конечная группа. Предположим, что имеются отображения $f_i: X_i \rightarrow K_i$ в компактные пространства K_i , каждое из которых является конусом над P_i (т.е. $K_i = CP_i$). Определим $f: X_1 * \dots * X_m \rightarrow K_1 \times \dots \times K_m$ по формуле

$$f(t_1x_1 + \dots + t_mx_m) = (t_1f(x_1), \dots, t_mf(x_m)).$$

ЛЕММА 6.1. Если $A(f_i) = \emptyset$, $i = 1, \dots, m$, то и $A(f) = \emptyset$.

Пусть G — любая конечная группа. Тогда G действует на $\text{Map}(G, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^q$, $q = |G|$, с помощью регулярного представления. Рассмотрим сферу $S^{q-2} \subset \mathbb{R}^q$ единичного радиуса, выделяемую уравнениями $x_1 + \dots + x_q = 0$ и $x_1^2 + \dots + x_q^2 = 1$. Для отображения $\varphi: S^{q-2} \rightarrow \mathbb{R}$, заданного формулой $\varphi(x_1, \dots, x_q) = x_1$, очевидно, имеем $A(\varphi) = \emptyset$. В записи через отображения имеем

$$S^{q-2} = \left\{ \eta \in \text{Map}(G, \mathbb{R}) \mid \sum_{g \in G} \eta(g) = 0, \sum_{g \in G} \eta^2(g) = 1 \right\},$$

и $\varphi: S^{q-2} \rightarrow \mathbb{R}$ действует по формуле $\varphi(\eta) = \eta(e)$, где e — единица группы G . Кроме того, $h\eta$ — функция, принимающая на g значение $\eta(h^{-1}g)$. Если определить скалярное произведение в $\mathbb{R}^q$ формулой $(\eta, \zeta) = \sum_{g \in G} \eta(g)\zeta(g)$, то S^{q-2} можно описать как единичную сферу, лежащую в ортогональном дополнении $\Delta^\perp$ к диагонали Δ .

ЛЕММА 6.2. Существует продолжающее φ отображение $\psi: S^{q-2} * G \rightarrow T$ в триод T такое, что $A(\psi) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точки пространства $S^{q-2} * G$ будем записывать в виде (η, t, g) , где $\eta \in S^{q-2}$, $t \in [0, 1]$, $g \in G$. Элемент $h \in G$ действует на (η, t, g) по формуле $h(\eta, t, g) = (h\eta, t, hg)$. Триод T будем представлять как объединение двух отрезков на плоскости: отрезка $[-1, 1]$ на оси абсцисс и отрезка $[0, 1]$ на оси ординат. Обозначим первый из отрезков через I_1 , второй — через I_2 . Ясно, что $\varphi(S^{q-2}) \subset I_1$. При $g \neq e$ положим $\psi(\eta, t, g) = t\eta(e) \in I_1$. Если $g = e$ и $t \in [1/2, 1]$, то положим $\psi(\eta, t, e) = (2t - 1)\eta(e) \in I_1$. Точки вида $(\eta, 1/2, e)$ перейдут в начало координат O плоскости, т.е. в начало отрезка I_2 . Продолжим ψ по линейности, переведя вершину конуса $(\eta, 0, e)$ в конец отрезка I_2 (т.е. в точку на плоскости

с координатами $(0, 1)$). Таким образом, по определению $\psi(\eta, t, e) = 1 - 2t \in I_2$, $0 \leq t \leq 1/2$. Иными словами, ψ можно задать следующим образом:

$$\psi(\eta, t, g) = \begin{cases} t\eta(e) \in I_1, & g \neq e, \\ (2t - 1)\eta(e) \in I_1, & g = e, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 1 - 2t \in I_2, & g = e, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Орбита точки (η, t, e) состоит из точек $(g\eta, t, g)$. Если ψ постоянна на такой орбите и $t \in [1/2, 1]$, то из определения функции ψ вытекает, что

$$\psi(\eta, t, e) = (2t - 1)\eta(e) = \psi(g\eta, t, g) = t\eta(g^{-1})$$

для любого $g \neq e$. Поэтому $t\eta(g) = t\eta(h)$ для $h, g \neq e$, т.е. $\eta(g) = \eta(h)$. Отсюда для η имеются две возможности: $\eta(g) = 1/\sqrt{q(q-1)}$, $g \neq e$, и $\eta(e) = (1-q)/\sqrt{q(q-1)}$, либо $\eta(g) = -1/\sqrt{q(q-1)}$ и $\eta(e) = (q-1)/\sqrt{q(q-1)}$. Равенство $(2t-1)\eta(e) = t\eta(g)$ превращается в соотношение $(2t-1)(1-q) = t$, откуда следует, что $t = (q-1)/(2q-1) < 1/2$. Следовательно, ψ не склеивает целиком всю орбиту. При $t \in [0, 1/2)$ полного склеивания орбиты также нет, поскольку точка $\psi(\eta, t, e)$ лежит на полуинтервале $I_2 \setminus O$, где O – начало координат, а образы остальных точек орбиты – на отрезке I_1 . Таким образом, множество $A(\psi)$ пусто.

Для CW -комплекса Z обозначим через $J^m(Z)$ джойн m экземпляров пространства Z . Имеем $\dim J^m(Z) = m \dim Z + m - 1$. В частности, $\dim J^m(S^{q-2} * G) = \dim J^{mq}(G) = mq - 1$.

Из лемм 6.1 и 6.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Существуют отображения $\psi_m: J^m(S^{q-2} * G) \rightarrow T^m$ и $\theta_m: J^{mq}(G) \rightarrow T^m$ такие, что $A(\psi_m) = \emptyset$ и $A(\theta_m) = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо лишь объяснить, как строится θ_m , а для этого, в свою очередь, достаточно построить эквивариантное отображение $J^{q-1}(G) \rightarrow S^{q-2}$ (с его помощью легко определить эквивариантные отображения $J^q(G) \rightarrow S^{q-2} * G$ и $J^{mq}(G) \rightarrow J^m(S^{q-2} * G)$), или, эквивалентно, сечение расслоения $(J^{q-1}(G) \times S^{q-2})/G \rightarrow J^{q-1}(G)/G$. Слой этого расслоения гомеоморфен S^{q-2} (поскольку G действует свободно на $J^{q-1}(G)$), и для построения такого сечения нет препятствий, так как $\dim J^{q-1}(G)/G = q - 2$.

Отметим, что при $G = \mathbb{Z}_2$ пространство $J^{2m}(G)$ эквивариантно гомеоморфно сфере S^{2m-1} , рассматриваемой с антиподальной инволюцией. Таким образом, возникает отображение $S^{2m-1} \rightarrow T^m$, не склеивающее антиподов, т.е. обладающее таким же свойством, что и отображение, построенное Хопфом [48] и Шеппиным в [24].

Пространства $J^m(S^{q-2} * G)$ и $J^{mq}(G)$ связаны до размерности $mq - 2$ включительно и $(mq - 1)$ -мерны, поэтому $i(J^m(S^{q-2} * G)) = i(J^{mq}(G)) = mq$. Это показывает, что предположения в теоремах 2.1 и 2.2 относительно ацикличности и индекса соответственно нельзя ослабить. Для групп, отличных от элементарных абелевых, ситуация, вообще говоря, иная. Обозначим через $d(G)$ наибольшее из чисел d , для которых существует $f: J^d(G) \rightarrow \mathbb{R}$ с $A(f) = \emptyset$. Такое отображение дает эквивариантное отображение $J^{d(G)}(G) \rightarrow S^{q-2}$, $q = |G|$, и, наоборот,

имея такое эквивариантное отображение, мы можем определить $f: J^d(G) \rightarrow \mathbb{R}$ с $A(f) = \emptyset$ как композицию с $\varphi: S^{q-2} \rightarrow \mathbb{R}$ (т.е. с ограничением на сферу S^{q-2} проекции $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ на первую координату). С помощью эквивариантного отображения $J^{d(G)}(G) \rightarrow S^{q-2}$ легко определить эквивариантные отображения $J^{d(G)+1}(G) \rightarrow S^{q-2} * G$ и $J^{m(d(G)+1)}(G) \rightarrow J^m(S^{q-2} * G)$. Взяв композицию последнего отображения с отображением $\psi_m: J^m(S^{q-2} * G) \rightarrow T^m$, построенным в следствии 6.1, получаем отображение $\tau_m: J^{m(d(G)+1)}(G) \rightarrow T^m$, для которого $A(\tau_m) = \emptyset$.

Из леммы 6.2 следует, что $d(G) \geq |G| - 1 = q - 1$. Если G – элементарная абелева группа, то из [8] легко следует, что имеет место равенство $d(G) = |G| - 1 = q - 1$. Мало что известно для других групп. Точное значение $d(G)$ не получено даже для циклической группы $G = \mathbb{Z}_{p^k}$ порядка $q = p^k$, где p – простое нечетное число (эта группа имеет такой же порядок, что и элементарная абелева группа $\mathbb{Z}_p^k$, и может действовать свободно на любой нечетномерной сфере). Верхнюю и нижнюю оценки числа $d(G)$ для этой группы можно извлечь из работы [57] (улучшенная нижняя оценка может быть получена из работы автора [13]).

§ 7. Оценка размерности

Рассмотрим сначала случай инволюции. В случае $G = \mathbb{Z}_2$ теорему 2.2 можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть $G = \mathbb{Z}_2$, пространство X компактно и связно и $f: X \rightarrow Y$ – отображение в компактное пространство Y такое, что $m = \dim_{\mathbb{Z}_2} Y$. Предположим, что $\text{in } X \geq 2m$. При $\text{in } X = 2m$ предположим дополнительно, что $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда множество $A(f)$ непусто.*

Из этой теоремы следует и оценка индекса пространства $A(f)$ в случае, когда $\text{in } X > 2m$.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. *Пусть $G = \mathbb{Z}_2$, пространство X компактно и связно и $f: X \rightarrow Y$ – отображение в компактное пространство Y такое, что $m = \dim_{\mathbb{Z}_2} Y$. Предположим, что $\text{in } X = n > 2m$ и $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда $\text{in } A(f) \geq n - 2m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $\text{in } A(f) \leq n - 2m - 1$. Тогда имеются замкнутые инвариантные подмножества $Q, R \subset X$ такие, что $Q \cup R = X$, причем $A(f) \subset Q$, $R \subset X \setminus A(f)$ и $\text{in } A(f) = \text{in } Q$.

Сначала необходимо, пользуясь свойством непрерывности когомологий, найти Q , а затем из общетопологических соображений найти R .

Из свойств индекса вытекает, что $\text{in } X \leq \text{in } Q + \text{in } R + 1$, поэтому $\text{in } R \geq \text{in } X - \text{in } Q - 1 \geq 2m$. Обозначим $f|_R$ через $g: R \rightarrow Y$. Из определений следует, что $A(g) = \emptyset$. С другой стороны, $\text{in } R \geq 2m$ и $0 = g^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(R)$, поэтому из теоремы 10.1 следует, что $A(g) \neq \emptyset$. Полученное противоречие завершает доказательство следствия.

Пусть группа $G = \mathbb{Z}_p$ действует свободно на компактном связном пространстве X и действует на пространстве E так, что неподвижные точки содержатся в замкнутом инвариантном подмножестве $P \subset E$. Пусть $f: X \rightarrow E$ – G -отображение. В этих обозначениях справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Предположим, что $\text{ind } X > \text{ind } E \setminus P$. Тогда $\text{ind } f^{-1}P \geq \text{ind } X - \text{ind}(E \setminus P) - 1$. Если, кроме того, X является когомологическим l -мерным многообразием над полем $\mathbb{Z}_p$, то $\dim f^{-1}P \geq l - \text{ind}(E \setminus P) - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение уже было доказано выше. Второе утверждение доказывается так же, как аналогичное утверждение следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Пусть $k = \text{ind } E \setminus P \leq \text{ind } X$ и $0 = f^*: H^k(E \setminus P) \rightarrow H^k(X \setminus f^{-1}P)$. Тогда $\text{ind } f^{-1}P \geq \text{ind } X - \text{ind}(E \setminus P)$. Если, кроме того, X является когомологическим l -мерным многообразием над полем $\mathbb{Z}_p$, то $\dim f^{-1}P \geq l - \text{ind}(E \setminus P)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий предложения и леммы 3.1 следует, что $\text{ind}(X \setminus f^{-1}P) \leq \text{ind}(E \setminus P) - 1 = k - 1$. Поэтому

$$\text{ind } X \leq \text{ind}(X \setminus f^{-1}P) + \text{ind } f^{-1}P + 1 \leq k + \text{ind } f^{-1}P,$$

откуда следует первое неравенство.

Поскольку $\text{ind}(X \setminus f^{-1}P) \leq k - 1$, имеем $u_k(X \setminus f^{-1}P) = 0$. Кроме того, $u_k(X) \neq 0$. Если k четно, то из этого следует, что $H^k(X/G, (X \setminus f^{-1}P)/G) \neq 0$. Последняя группа когомологий двойственна группе гомологий с компактными носителями $H_k^c(X/G, (X \setminus f^{-1}P)/G)$ (если X – топологическое многообразие, то под H_*^c можно понимать сингулярные гомологии). Таким образом, имеем $H_k^c(X/G, (X \setminus f^{-1}P)/G) \neq 0$. По двойственности Пуанкаре–Лефшеца получаем $H_c^{l-k}((f^{-1}P)/G; \mathcal{O}) \neq 0$ и, следовательно, $\dim(f^{-1}P)/G \geq l - k$. Здесь $\mathcal{O}$ – ориентирующий пучок многообразия X/G (пучок $\mathcal{O}$ – локально постоянный пучок со слоем $\mathbb{Z}_p$). Поскольку $\dim f^{-1}P = \dim(f^{-1}P)/G$, получаем требуемое неравенство $\dim f^{-1}P \geq l - k$.

Пусть теперь k нечетно. Тогда мы получаем, что

$$0 \neq H_\rho^k(X, X \setminus f^{-1}P) = H^k(X/G, (X \setminus f^{-1}P)/G; \rho\mathcal{A}).$$

Отметим, что $\rho\mathcal{A}$ – локально постоянный пучок на X/G . По двойственности Пуанкаре–Лефшеца получаем, что указанная группа когомологий изоморфна группе гомологий $H_{l-k}((f^{-1}P)/G; \mathcal{O}^{-1} \otimes \rho\mathcal{A})$, которая, тем самым, отлична от нуля и, следовательно, $\dim f^{-1}P \geq l - k$. Здесь пучок $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{Z}_p) = \mathcal{H}_n(\mathbb{Z}_p)$ на X/G порожден предпучком $U \rightarrow H_n(X/G, X/G \setminus U; \mathbb{Z}_p)$ и $\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}(\mathbb{Z}_p)^{-1}$ – единственный пучок на X/G такой, что $\mathcal{O}(\mathbb{Z}_p) \otimes \mathcal{O}(\mathbb{Z}_p)^{-1} = \mathbb{Z}_p$ – постоянный пучок со слоем $\mathbb{Z}_p$ (см., например, [18]).

Можно привести иное доказательство. Поскольку $H_\rho^k(X, X \setminus f^{-1}P)$ – двойственное векторное пространство к $H_k^{c\rho}(X, X \setminus f^{-1}P)$ (группа гомологий Смита с компактными носителями), имеем $H_k^{c\rho}(X, X \setminus f^{-1}P) \neq 0$. По двойственности Пуанкаре получаем $H_c^{l-k}((f^{-1}P)/G; \rho\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}) \neq 0$, откуда следует требуемое неравенство $\dim f^{-1}P \geq l - k$.

Практически так же, как предложение 7.2, доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $G = \mathbb{Z}_p$ действует свободно на компактном связном пространстве X и $f: X \rightarrow Y$ — отображение в компактное пространство Y такое, что $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$. Предположим, что $\text{ind } X \geq mp$ и $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда $\text{ind } A(f) \geq \text{ind } X - mp$. Если, кроме того, X является когомологическим l -мерным многообразием над полем $\mathbb{Z}_p$, то $\dim A(f) \geq l - mp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем открытую инвариантную окрестность $V_1 \supset A(f)$ такую, что $\text{ind } V_1 = \text{ind } A(f)$. Тогда для любой инвариантной окрестности $V \supset A(f)$, содержащейся в V_1 , имеем $\text{ind } V = \text{ind } V_1$. Поскольку $X \setminus V$ компактно, найдется такая открытая инвариантная окрестность U диагонали Δ в Y^p , что $\hat{f}(X \setminus V) \subset Y^p \setminus U$. Докажем, что $0 = \hat{f}^*: H^{mp}(Y^p \setminus U) \rightarrow H^{mp}(X \setminus V)$. Из условий теоремы и формулы Кюннета следует, что $0 = (f^p)^*: H^{mp}(Y^p) \rightarrow H^{mp}(X^p)$, откуда вытекает, что $0 = \hat{f}^*: H^{mp}(Y^p) \rightarrow H^{mp}(X \setminus V)$. Поскольку $Y^p \setminus U$ замкнуто в Y^p и $\dim_{\mathbb{Z}_p} Y^p = mp$, вложение $Y^p \setminus U \subset Y^p$ индуцирует эпиморфизм $H^{mp}(Y^p) \rightarrow H^{mp}(Y^p \setminus U)$, что и доказывает сделанное утверждение. Из леммы 3.1 получаем, что $\text{ind}(X \setminus V) < \text{ind}(Y^p \setminus U) \leq mp$. Поэтому из того, что $X = (X \setminus V) \cup V_1$, получаем

$$\text{ind } X \leq mp + \text{ind } V_1 = mp + \text{ind } A(f),$$

откуда вытекает первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение. Имеем $\text{ind}(X \setminus V) < mp$. Следовательно, $u_{mp}(X \setminus V) = 0$. В силу гомологической локальной связности многообразия имеем

$$H_\rho^{mp}(X \setminus A(f)) = \varprojlim H_\rho^{mp}(X \setminus V).$$

Поэтому $u_{mp}(X \setminus A(f)) = 0$. Кроме того, $u_{mp}(X) \neq 0$. Отсюда так же, как при доказательстве предыдущего предложения, выводится требуемая оценка размерности пространства $A(f)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Если предположить, что $\text{ind } X > mp$, но не налагать никаких условий на f^* , то можно утверждать, что $\text{ind } A(f) \geq \text{ind } X - mp - 1$, а в случае многообразия, что $\dim A(f) \geq l - mp - 1$.

Из теоремы 7.2 и предложения 3.3 получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть $G = \mathbb{Z}_p$ действует свободно на компактном связном пространстве X , ациклическом (над полем $\mathbb{Z}_p$) до размерности $mp - 1$ включительно, и $f: X \rightarrow Y$ — отображение в компактное пространство Y такое, что $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$. Тогда $\text{ind } A(f) \geq \text{ind } X - mp$. Если, кроме того, X является когомологическим l -мерным многообразием над полем $\mathbb{Z}_p$, то $\dim A(f) \geq l - mp$.

ТЕОРЕМА 7.3. Предположим, что подгруппа $H = \mathbb{Z}_p$ группы G действует свободно на компактном связном пространстве X и $f: X \rightarrow Y$ — отображение в компактное пространство Y такое, что $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$. Пусть $\text{ind } X \geq m|G|$, где индекс рассматривается по отношению к действию подгруппы H . Предположим, что $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда $\text{ind } A(f; H, G) \geq \text{ind } X - m|G|$. Если, кроме того, X — гомологическое l -мерное многообразие над полем $\mathbb{Z}_p$, то $\dim A(f; H, G) \geq l - m|G|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Если не налагать никаких условий на f^* , то при условии $\text{ind } X > m|G|$ имеет место неравенство $\text{ind } A(f; H, G) \geq \text{ind } X - m|G| - 1$, а в случае, когда X – многообразие, справедливо неравенство $\dim A(f; H, G) \geq l - m|G| - 1$.

§ 8. Отображения в многообразия

Пусть X – компактное пространство со свободным действием циклической группы $G = \mathbb{Z}_p$ простого порядка p .

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть $f: X \rightarrow M$ – непрерывное отображение, M – m -мерное гомологическое многообразие над полем $\mathbb{Z}_p$, ориентируемое при $p > 2$. Предположим, что $\text{ind } X > m(p-1)$ и $f^*V_i = 0$, где V_i – классы Ву многообразия M . Тогда $\text{ind } A(f) \geq \text{ind } X - m(p-1)$. Если, кроме того, X – l -мерное гомологическое многообразие над $\mathbb{Z}_p$, то $\dim A(f) \geq l - m(p-1)$.

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть $f: X \rightarrow M$ – непрерывное отображение, M – m -мерное гомологическое многообразие над полем $\mathbb{Z}_p$, ориентируемое при $p > 2$. Предположим, что $\text{ind } X = m(p-1)$ и $0 = f^*: H^i(M) \rightarrow H^i(X)$ при $i \geq 1$. Тогда $A(f) \neq \emptyset$. Если, кроме того, X – l -мерное гомологическое многообразие над $\mathbb{Z}_p$, то $\dim A(f) \geq l - m(p-1)$.

В случае, когда X когомологически локально связно над полем $\mathbb{Z}_p$, можно не требовать компактности пространства X , поскольку существует компактное G -инвариантное подмножество $C \subset X$ такое, что $\text{ind } C = \text{ind } X$. 1

Индекс ind в этих утверждениях можно заменить на in (см. [5]). Приведенные результаты анонсированы в [62] и подробно изложены в [6] (индекс ind в [62], [6] обозначался через co-ind). Доказательства для индекса ind отличаются некоторыми дополнительными техническими деталями от доказательства, приведенного в работе автора [5] для индекса in .

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Нетрудно видеть, что любой компактный m -мерный полиэдр вкладывается в $2m$ -мерное многообразие (многомерный аналог того факта, что существует укладка конечного графа на сфере с ручками). Поэтому при $p = 2$ теоремы об отображениях в полиэдры (а с помощью предельного перехода и теоремы об отображениях в компакты), включая оценки размерности, несимметричный случай и обобщения на случай многозначных отображений, можно получать из приведенных результатов об отображениях в многообразия. Этот подход изложен в совместной работе автора и Е. В. Шепина [16].

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Можно объединить результаты об отображениях в полиэдры (компакты) и многообразия в одно утверждение, рассмотрев отображение в произведение многообразия на полиэдр, или, что равносильно, два отображения: одно в многообразие, другое в полиэдр. При этом прежние утверждения будут получаться из нового, если взять в качестве многообразия (соответственно, полиэдра) одноточечное пространство.

§ 9. Лемма Янга

Пусть X – G -пространство, где G – компактная группа Ли. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – такое отображение, что слои отображения f инвариантны относительно G -действия.

ЛЕММА 9.1. *Предположим, что $\theta_1, \dots, \theta_k \in \text{Ind}_G f^{-1}y$ для любой точки $y \in Y$. Тогда если $\dim Y < k$, то $\theta_1 \dots \theta_k \in \text{Ind}_G X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $n_j = \deg \theta_j$. Рассмотрим спектральную последовательность отображения $E_G \times_G X \rightarrow Y$ со слоями $E_G \times_G f^{-1}y$, $y \in Y$. В силу сделанных предположений имеем $\theta_j \in F^{1, n_j-1} \subset H_G^{n_j}(X)$, где $F^{*,*}$ – возникающая из спектральной последовательности фильтрация в когомологиях $H_G^*(X)$. Поэтому $\theta_1 \dots \theta_k \in F^{k, n_1+\dots+n_k-k}$. Однако $F^{s,*} = 0$ при $s \geq k$, откуда и следует требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. *Пусть $G = \mathbb{Z}_p$, где p – нечетное простое число, и пусть $\dim Y < k$. Предположим, что выполнено одно из следующих двух условий:*

- a) *d четно и $\text{in } X \geq dk$;*
- b) *d нечетно и $\text{in } X \geq (d+1)k - 1$.*

Тогда найдется точка $y \in Y$ такая, что $\text{in } f^{-1}y \geq d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $\text{in } X \leq d-1$ для любой точки $y \in Y$. Если d четно, то $w_{dk} \in \text{Ind}_G X$. Действительно, поскольку $w_d \in \text{Ind}_G f^{-1}y$ для любой точки $y \in Y$, из леммы 9.1 следует, что $w_d^k \in \text{Ind}_G X$. Из четности d вытекает, что $w_d^k = w_{dk}$. Поэтому $\text{in } X < \deg w_{dk} = dk$. Противоречие.

Если d нечетно, то, полагая в лемме $\theta_j = w_{d+1}$ при $1 \leq j \leq k-1$ и $\theta_k = w_d$, получаем, что $w_{d+1}^{k-1}w_d \in \text{Ind}_G X$. Поскольку $w_{d+1}^{k-1}w_d = w_{(d+1)k-1}$, имеем $\text{in } X < \deg w_{(d+1)k-1} = (d+1)k - 1$. Противоречие.

Аналогичное утверждение для $G = \mathbb{Z}_2$ является следующей леммой Янга [68].

СЛЕДСТВИЕ 9.2. *Пусть $G = \mathbb{Z}_2$ и $\dim Y < k$. Если $\text{in } X \geq dk$, то найдется точка $y \in Y$ такая, что $\text{in } f^{-1}y \geq d$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $\text{in } X \leq d-1$ для любой точки $y \in Y$. Тогда $w_d \in \text{Ind}_G f^{-1}y$ для любой точки $y \in Y$ и из леммы 9.1 следует, что $w_d^k \in \text{Ind}_G X$. Поскольку $w_d^k = w_{dk}$, имеем $\text{in } X < \deg w_{dk} = dk$. Противоречие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Пусть X – компактное пространство со свободным действием группы $G = \mathbb{Z}_p$ и $f: X \rightarrow Y$ – отображение в метризуемое пространство Y такое, что $\dim Y = m$. Предположим, что все слои отображения f инвариантны относительно действия группы G . Тогда если $\text{ind } X \geq d(m+1)$, то найдется точка $y \in Y$ такая, что $\text{ind } f^{-1}y \geq d$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку X компактно, можно считать, что Y – метрический компакт. Проведем индукцию по m .

Пусть $\dim Y = 0$. Используя это предположение и свойство непрерывности индекса, для каждой точки $y \in Y$ можно найти содержащее ее открыто-замкнутое множество U_y такое, что $\text{ind } f^{-1}U_y = \text{ind } f^{-1}y$. В полученное покрытие пространства Y впишем конечное покрытие открыто-замкнутыми попарно непересекающимися множествами U_i , $i = 1, \dots, k$. Тогда в U_i можно найти точку y_i такую, что $\text{ind } f^{-1}U_i = \text{ind } f^{-1}y_i$ и, кроме того, $\text{ind } X$ совпадает с наибольшим из индексов $\text{ind } f^{-1}U_i$ (поскольку $X = f^{-1}U_1 \cup \dots \cup f^{-1}U_k$ и множества $f^{-1}U_k$ открыто-замкнуты и попарно не пересекаются). Следовательно, $\text{ind } X = \text{ind } f^{-1}y_j$ для некоторого j .

Предположим, что утверждение верно для всех размерностей меньше m . Докажем его для $\dim Y = m$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что для некоторого Y , $\dim Y = m$, утверждение неверно. Тогда $\forall y \in Y$ имеем $\text{ind } f^{-1}y < d$. В силу непрерывности индекса каждое множество $f^{-1}y$ имеет инвариантную окрестность, индекс которой также строго меньше d . Тогда для любой точки $y \in Y$ можно найти окрестность U такую, что $\text{ind } f^{-1}U < d$. Тем самым возникает покрытие $\mathcal{W}$. Можно представить Y в виде $Y = Y_1 \cup U_1 \cup \dots \cup U_k$, где $\dim Y_1 \leq m - 1$, а U_i открыты, попарно не пересекаются и вписаны в $\mathcal{W}$, откуда следует, что $\text{ind } f^{-1}U_i < d$ при всех i . Поскольку $\dim Y_1 \leq m - 1$, из предположения индукции вытекает, что $\text{ind } Y_1 < dm$. Найдем G -инвариантную окрестность $V_1 \supset Y_1$ такую, что $\text{ind } V_1 = \text{ind } f^{-1}Y_1$. Положим $V_2 = f^{-1}U_1 \cup \dots \cup f^{-1}U_k$. Поскольку подпространства $f^{-1}U_j$ попарно не пересекаются и $\text{ind } f^{-1}U_j < d$, получаем, что $\text{ind } V_2 \leq d - 1$. Итак, имеем $X = V_1 \cup V_2$ и $\text{ind } V_1 \leq md - 1$, $\text{ind } V_2 \leq d - 1$, откуда получаем

$$\text{ind } X \leq \text{ind } V_1 + \text{ind } V_2 + 1 \leq d(m + 1) - 1,$$

что противоречит условию $\text{ind } X \geq (m + 1)d$.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть X – компактное пространство со свободным действием группы $G = \mathbb{Z}_p$ и $f: X \rightarrow M$ – отображение в m -мерное гомологическое многообразие (над полем $\mathbb{Z}_p$), ориентируемое над $\mathbb{Z}_p$ при $p > 2$. Пусть $f^*V_i = 0$ при всех $i \geq 1$, где V_i – классы Ву многообразия M . Тогда если $\text{ind } X > m(p + d - 1) + d$, то существует замкнутое G -инвариантное подмножество $A \subset A(f)$ такое, что $\text{ind } A \geq d$ и $f|_A$ – постоянное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 8.1 имеем

$$\text{ind } A(f) \geq \text{ind } X - m(p - 1) \geq m(p + d - 1) + d - m(p - 1) = m(d + 1).$$

Применяя предложение 9.1 к отображению $\varphi = f|_{A(f)}: A(f) \rightarrow M$, получаем, что найдется точка $y_0 \in M$ такая, что $\text{ind } \varphi^{-1}y_0 \geq d$. Таким образом, в качестве A можно взять подпространство $A(f) \cap f^{-1}y_0$.

Аналогичным образом, с использованием результатов §3, доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть X – компактное пространство со свободным действием группы $G = \mathbb{Z}_p$ и $f: X \rightarrow Y$ – отображение в m -мерный полиэдр Y . Предположим, что либо $\text{ind } X \geq m(p + d) + d + 1$, либо $\text{ind } X \geq m(p + d) + d$ и $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда существует замкнутое G -инвариантное подмножество $A \subset A(f)$ такое, что $\text{ind } A \geq d$ и $f|_A$ – постоянное отображение.

ПРИМЕР 9.1. Рассмотрим отображение $f: \text{SO}(p) \rightarrow \mathbb{R}$, где p – нечетное простое число. Будем представлять точку в $\text{SO}(p)$ как положительно ориентированный ортонормированный репер. Тогда $G = \mathbb{Z}_p$ действует на $\text{SO}(p)$, циклически переставляя векторы в репере. Буржен показал в [31], что $\text{in } \text{SO}(p) = 2p - 3$. Поскольку это число нечетно, имеем $\text{ind } \text{SO}(p) = 2p - 3$. Далее, $\text{ind } A(f) \geq p - 2 \geq 2 \cdot \frac{p-3}{2}$. Следовательно, найдется инвариантное подпространство $A \subset A(f)$ такое, что $\text{ind } A \geq \frac{p-3}{2}$ и $f|_A$ – постоянное отображение. Отметим, что если в качестве f

взять длину ортогональной проекции фиксированного компактного выпуклого тела в $\mathbb{R}^p$ на прямую, порожденную первым вектором репера, то каждая точка в $A(f)$ определяет описанный вокруг тела куб и, следовательно, точки подпространства A определяют описанные вокруг тела кубы с одной и той же длиной ребра (вокруг компактного выпуклого тела в $\mathbb{R}^N$ всегда можно описать куб: для $N = 3$ – теорема Какутани [53], для произвольного N утверждение доказано в [66]).

§ 10. Многозначные отображения

Предыдущие результаты несложно обобщить на случай многозначных отображений. Гомологическим методам при изучении многозначных отображений посвящена статья [4].

В качестве примера приведем соответствующее обобщение теоремы 2.2. Пусть вместо однозначного отображения из X в Y мы имеем многозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ вида $F = f \circ \pi^{-1}$, где $\pi: Z \rightarrow X$ и $f: Z \rightarrow Y$. Будем предполагать, что Z так же, как и X, Y , компактно и π – сюръективное ациклическое (виеторисово) над полем $\mathbb{Z}_p$ отображение (т. е. слои отображения π связны и ациклически над $\mathbb{Z}_p$). Положим

$$A(F) = \left\{ x \in X \mid \bigcap_{g \in G} F(gx) \neq \emptyset \right\}.$$

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть X компактно и связно, $i(X) \geq m|G| + 1 = mq + 1$, где $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$. При $i(X) = mq + 1$ пусть $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(Z)$. Предположим, что $\pi: Z \rightarrow X$ сюръективно и ациклично над $\mathbb{Z}_p$. Тогда множество $A(F)$ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на стандартной процедуре сведения случая многозначного отображения к однозначному (см., например, [10]). Приведем соответствующие конструкции (пригодные для любой конечной G).

Рассмотрим G -отображения $s: X \rightarrow X(G)$, $\pi_g: Z(G) \rightarrow X(G)$, определенные в конце доказательства теоремы 2.2. Положим $\hat{Z} = \pi_g^{-1}(s(X))$. Определим $\hat{\pi}: \hat{Z} \rightarrow X$ как $\hat{\pi}(\eta) = \pi(\eta(e))$. Таким образом, $\hat{\pi}$ получается из π_g отступлением вдоль отображения s (pull back). Тогда $\hat{\pi}$ – эквивариантное виеторисово отображение. Действительно, нетрудно показать, что $\hat{\pi}^{-1}(x)$ гомеоморфно декартову произведению компактов $\pi^{-1}(gx)$ по всем $g \in G$. Используя теорему Виеториса–Бегля нетрудно показать, что $i(X) = i(\hat{Z})$; более того, $\hat{\pi}$ индуцирует изоморфизм спектральных последовательностей расслоений $X_G \rightarrow B_G$ и $\hat{Z}_G \rightarrow B_G$, в частности у пространств X и $\hat{Z}$ одинаков фильтрованный идеалозначный индекс (см. [12]), т. е. ${}_r\text{Ind}^G X = {}_r\text{Ind}^G \hat{Z}$ для всех r . Наконец, определим $f_1: \hat{Z} \rightarrow M$ формулой $f_1(\eta) = f(\eta(e))$. Таким образом, мы видим, что по отношению к $\hat{Z}$ и f_1 выполнены все условия теоремы 2.2, следовательно, $A(f_1) \neq \emptyset$. Покажем, что отсюда следует, что $A(F) \neq \emptyset$. Пусть $\eta \in A(f_1)$. Тогда $f_1(g\eta) = f_1(\eta) \forall g \in G$, т. е. $f(\eta(g^{-1})) = f(\eta(e))$. Поскольку $\eta \in A(f_1) \subset \hat{Z}$, найдется точка $x \in X$ такая, что $\pi_g \eta = \pi \circ \eta$ совпадает с $s(x)$, т. е. $\pi \eta(g) = g^{-1}x \forall g \in G$. Таким образом, $\eta(g^{-1}) \in \pi^{-1}(gx)$, и поскольку $F(gx) = f(\pi^{-1}(gx))$, соотношение $f(\eta(g^{-1})) = f(\eta(e)) \forall g \in G$ показывает, что $\bigcap_{g \in G} F(gx) \neq \emptyset$, а это и означает, что $A(F)$ непусто.

Аналогично, в случае действия циклической группы простого порядка имеет место

ТЕОРЕМА 10.2. Пусть $F: X \rightarrow Y$ – многозначное отображение вида $F = f \circ \pi^{-1}$, где $\pi: Z \rightarrow X$, $f: Z \rightarrow Y$ и X, Y и Z компактны. Предположим, что X – связное пространство со свободным действием циклической группы $G = \mathbb{Z}_p$ простого порядка p . Пусть $\text{ind } X = n \geq mp$, где $m = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$, и $0 = f^*: H^m(Z) \rightarrow H^m(X)$. Предположим, что $\pi: Z \rightarrow X$ сюръективно и ациклично над полем $\mathbb{Z}_p$ до размерности $n - 1$ включительно. Тогда $\text{ind } A(F) \geq \text{ind } X - mp$.

Этот результат вытекает непосредственно из теоремы 7.2 и следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. Пусть циклическая группа $G = \mathbb{Z}_p$ простого порядка p свободно действует на компактных пространствах $X, \hat{Z}$ и $\mu: \hat{Z} \rightarrow X$ – эквивариантное отображение. Предположим, что $\tilde{H}^i(\mu^{-1}x) = 0$ при всех $0 \leq i \leq n - 1$ и всех $x \in X$. Тогда $H^n(X/G) \rightarrow H^n(\hat{Z}/G)$ и $H_\rho^n(X) \rightarrow H_\rho^n(\hat{Z})$ – мономорфизмы. В частности, если $\text{ind } X \geq n$ (или $\text{in } X \geq n$), то $\text{ind } \hat{Z} \geq n$ (соответственно, $\text{in } \hat{Z} \geq n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Виеториса–Бегля следует, что отображения μ и $\bar{\mu}: \hat{Z}/G \rightarrow X/G$ индуцируют гомоморфизмы $\mu^*: H^i(X) \rightarrow H^i(\hat{Z})$ и $\bar{\mu}^*: H^i(X/G) \rightarrow H^i(\hat{Z}/G)$, являющиеся изоморфизмами при $i \leq n - 1$ и мономорфизмами при $i = n$. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} H^{n-1}(X) & \longrightarrow & H^{n-1}(X/G) & \longrightarrow & H_\rho^n(X) & \longrightarrow & H^n(X) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \text{моно} \\ H^{n-1}(\hat{Z}) & \longrightarrow & H^{n-1}(\hat{Z}/G) & \longrightarrow & H_\rho^n(Z) & \longrightarrow & H^n(\hat{Z}) \end{array}$$

и леммы о пяти гомоморфизмах следует, что $H_\rho^n(X) \rightarrow H_\rho^n(\hat{Z})$ – мономорфизм.

§ 11. Теоремы Хопфа и Янга

11.1. Следующая теорема доказана Х. Хопфом [49].

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольное непрерывное отображение и $0 < \varphi \leq \pi$ – фиксированный угол. Тогда найдется пара точек $x, y \in S^n$, угол между радиус-векторами которых равен φ , такая, что $f(x) = f(y)$.

Заметим, что в случае $\varphi = \pi$ теорема 11.1 совпадает с теоремой Борсука–Улама, кроме того, этот случай легко выводится из утверждения теоремы 11.1 для множества углов $0 < \varphi < \pi$ предельным переходом.

Таким образом, далее мы можем считать, что $0 < \varphi < \pi$.

Обозначим через V_φ множество пар $(x, y) \in S^n \times S^n$, угол между радиус-векторами которых равен φ . Формула $T(x, y) = (y, x)$ определяет свободную инволюцию на V_φ . Ясно, что V_φ гомеоморфно многообразию Штифеля ортонормированных 2-реперов в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Определим $\psi: V_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой $\psi(z) = \psi(x, y) = f(x)$, где $z = (x, y) \in V_\varphi$. Если $z^* = (x^*, y^*) \in V_\varphi$ и $\psi(z^*) = \psi(Tz^*)$, то $f(x^*) = f(y^*)$. Таким образом, для

доказательства теоремы достаточно установить, что $A(\psi) \neq \emptyset$. Предположим противное. Тогда для любого $z = (x, y) \in V_\varphi$ имеем $f(x) \neq f(y)$, поэтому формула

$$\mu(z) = \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}$$

определяет эквивариантное отображение $\mu: V_\varphi \rightarrow S^{n-1}$ в $(n-1)$ -мерную сферу через S^{n-1} , рассматриваемую с антиподальной инволюцией.

Для $v \in S^n$ положим

$$S_v = \left\{ (x, y) \in V_\varphi \mid \frac{x+y}{\|x+y\|} = v \right\} \subset V_\varphi.$$

Подпространство S_v инвариантно относительно инволюции T и гомеоморфно $(n-1)$ -мерной сфере. Таким образом, построенное эквивариантное отображение при ограничении на S_v дает эквивариантное отображение $(n-1)$ -мерных сфер $S_v \rightarrow S^{n-1}$, при котором $(x, y) \in S_v$ переходит в $\frac{f(x)-f(y)}{\|f(x)-f(y)\|}$.

Обозначим через $w \in S^n$ северный полюс. Пусть $(x, y) \in S_w$. Точка x соединяется с w единственной кратчайшей геодезической, т. е. кратчайшим отрезком дуги большого круга, являющегося пересечением сферы S^n с двумерной плоскостью, порожденной векторами x и w . Заметим, что угол между радиус-векторами точек x и w равен $\frac{\varphi}{2}$. Рассмотрим вращение $\sigma_{x,t} \in \text{SO}(n+1)$, оставляющее неподвижным ортогональное дополнение к указанной двумерной плоскости и поворачивающее эту плоскость на угол $\frac{\varphi}{2}t$ от x к w . Определим $H: S_w \times I \rightarrow V_\varphi$ формулой

$$H((x, y), t) = \sigma_{x,t}(x, y) = (\sigma_{x,t}x, \sigma_{x,t}y).$$

Поскольку $\sigma_{x,0}$ – тождественное отображение, а $\sigma_{x,1}(x) = w$, гомотопия $H_t = H(\cdot, t)$ обладает тем свойством, что $H_0: S_w \rightarrow V_\varphi$ совпадает с вложением $S_w \subset V_\varphi$ и $H_1(S_w)$ содержится во множестве 2-реперов из V_φ , первый вектор которых есть w . Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$ – запись отображения f в координатах, где f_i – вещественнозначные функции на S^n . Без ограничения общности можно считать, что w – точка глобального максимума функции f_1 . Подмножество $\mu \circ H_1(S_w) \subset S^n$ состоит из точек сферы вида $\frac{f(w)-f(x)}{\|f(w)-f(x)\|}$, где угол между радиус-векторами точек x и w равен φ . Первая координата каждой точки из этого подмножества имеет вид $\frac{f_1(w)-f_1(x)}{\|f(w)-f(x)\|}$ и, следовательно, неотрицательна. Поэтому подмножество $\mu \circ H_1(S_w)$ не совпадает со всей сферой S^n , откуда вытекает, что отображение $\mu \circ H_1$ гомотопно нулю, а значит, и отображение $\mu \circ H_0$ нульгомотопно. Но последнее отображение является эквивариантным отображением сфер и, следовательно, должно иметь нечетную степень (это хорошо известное утверждение, очевидно, можно рассматривать как следствие леммы 2.1 или леммы 3.1). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1. Обозначим многообразие Штифеля ортонормированных 2-реперов в $\mathbb{R}^{n+1}$ через

$$V_{n+1} = V_{n+1,2} = \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid \langle x, y \rangle = 0\},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$. Определим свободную инволюцию на V_{n+1} формулой $T(x, y) = (x, -y)$. Таким образом, можно рассматривать V_{n+1} как тотальное пространство расслоения единичных касательных векторов к сфере S^n с послойной антиподальной инволюцией. Пусть $\varphi \neq \pi$. Отображение $V_\varphi \rightarrow V_{n+1}$, при котором $(x, y) \rightarrow \left(\frac{x+y}{\|x+y\|}, \frac{x-y}{\|x-y\|} \right) \in V_{n+1}$, где $(x, y) \in V_\varphi$, является эквивариантным гомеоморфизмом. Поэтому $\text{in } V_\varphi = \text{in } V_{n+1}$. Имеются эквивариантные отображения $S^{n-1} \rightarrow V_{n+1} \rightarrow S^n$, первое из которых – отображение на слой, а второе – проекция на второй вектор $(x, y) \rightarrow y$.

Из работы [36] вытекает, что $\text{in } V_\varphi = V_{n+1} = n - 1$. В [37] показано, что при $n \neq 1, 3, 7$ не существует эквивариантного отображения из V_{n+1} в S^{n-1} (при $n = 1, 3, 7$, напротив, эквивариантные отображения существуют, поскольку для таких n сферы S^n параллелизуемы). Таким образом, $g(V_{n+1}) = n + 1$ при $n \neq 1, 3, 7$ и $g(V_{n+1}) = n$ при $n = 1, 3, 7$. Отсюда следует, что при $n \neq 1, 3, 7$ для любого $f: V_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ множество $A(f)$ непусто. Для многозначных отображений теорема Хопфа получена Скордевым [58].

11.2. Следующая теорема доказана Ч. Янгом [69].

ТЕОРЕМА 11.2. Пусть $f: S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольное непрерывное отображение и $0 < \varphi \leq 2\pi/3$ – фиксированный угол. Тогда найдутся три точки $x_1, x_2, x_3 \in S^{n+1}$ такие, что угол между радиус-векторами любых двух из них равен φ и $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$.

Ч. Янг доказывает эту теорему, используя последовательности Смита. Мы кратко прокомментируем результат Янга, используя индекс, и приведем более сильное утверждение для нечетного n .

Пусть $v_k^0 = e^{2\pi i(k-1)/p} \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, где $k = 1, \dots, p$ и p – нечетное простое число. Множество наборов $(v_1, \dots, v_p) = (Cv_1^0, \dots, Cv_p^0) \in S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}$, где $C \in \text{SO}(n)$, гомеоморфно $V_{n,2}$, и имеется свободное действие (циклическими перестановками) на этом пространстве циклической группы $G = \mathbb{Z}_p$. Имеем $\text{in } V_{n,2} = 2n - 3$, что очевидно для нечетного n , поскольку $V_{n,2}$ является в этом случае гомологической $(2n - 3)$ -мерной сферой по модулю p (см., например, [28]). Используя это, нетрудно доказать сделанное утверждение и для четного n (см. [15]). Заметим, что для $(v_1, \dots, v_p) \in V_{n,2}$ множество точек $v_1, \dots, v_p$ образует множество вершин правильного p -угольника, вписанного в единичную сферу S^{n-1} , и центр тяжести этого множества, т. е. центр правильного p -угольника, совпадает с началом координат.

Аналогично можно рассмотреть случай p -угольников со смещенными центрами, вписанных в S^{n-1} . Пусть $u_k^0 = \frac{v_k^0 + w}{\|v_k^0 + w\|}$, $k = 1, \dots, p$, $w = (0, 0, t) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. Множество наборов $(u_1, \dots, u_p) = (Cu_1^0, \dots, Cu_p^0)$, где $C \in \text{SO}(n)$, гомеоморфно $V_{n,3}$, и имеется свободное действие (циклическими перестановками) группы $G = \mathbb{Z}_p$. Построенные G -пространства зависят от параметра $t > 0$, но нетрудно видеть, что все они эквивариантно гомеоморфны между собой и, кроме того, имеется эквивариантное отображение $V_{n,3} \rightarrow V_{n,2}$. С другой стороны, множество наборов $(u_1, \dots, u_p)$ из $V_{n,3}$ с фиксированным центром тяжести эквивариантно гомеоморфно $V_{n-1,2}$. Таким образом, имеем эквивариантные отображения $V_{n-1,2} \rightarrow V_{n,3} \rightarrow V_{n,2}$, первое из которых является гомеоморфизмом на свой

образ. Следовательно, $2n - 5 \leq V_{n,3} \leq 2n - 3$. Точное значение индекса дает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. Пусть p – нечетное простое число. Тогда для указанного свободного действия группы $G = \mathbb{Z}_p$ на $V_{n,3}$ имеем $\text{in } V_{n,3} = 2n - 5$ при четном n и $\text{in } V_{n,3} = 2n - 3$ при нечетном n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кольца когомологий многообразий Штифеля с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_p$, где p – простое нечетное число, найдены Борелем [28, предложение 10.2]. В частности, из результата Бореля следует, что имеет место изоморфизм колец $H^*(V_{n,3}) \cong H^*(S^{n-1} \times S^{2n-5})$ при четном n и $H^*(V_{n,3}) \cong H^*(S^{n-3} \times S^{2n-3})$ при нечетном n . Поскольку $V_{n-1,2} \subset V_{n,3}$ и $\text{in } V_{n-1,2} = 2n - 5$, имеем $\text{in } V_{n,3} \geq 2n - 5$. Теперь доказываемое утверждение немедленно следует из рассмотрения спектральной последовательности накрытия $V_{n,3} \rightarrow V_{n,3}/G$.

Мы применим это предложение в случае $p = 3$.

ТЕОРЕМА 11.3. Пусть n нечетно, $G = \mathbb{Z}_3$ и M – n -мерное многообразие. Тогда для любого непрерывного $f: V_{n+2,3} \rightarrow M$ имеем $\text{in } A(f) \geq 1$ и $\dim A(f) \geq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 11.1 следует, что $\text{in } V_{n+2,3} = 2n + 1 > 2n = (p-1) \dim M$. Из соотношений размерности и из изоморфизма $H^*(V_{n+2,3}) \cong H^*(S^{n-1} \times S^{2n+1})$ вытекает, что классы Ву многообразия M лежат в ядре гомоморфизма f^* , поэтому результат следует из [5] (см. также теорему 8.1).

СЛЕДСТВИЕ 11.1. Пусть n нечетно, $f: S^{n+1} \rightarrow M$ – произвольное непрерывное отображение в n -мерное многообразие и $0 < \varphi \leq 2\pi/3$ – фиксированный угол. Тогда найдутся три точки $x_1, x_2, x_3 \in S^{n+1}$ такие, что угол между радиус-векторами любых двух из них равен φ и $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $0 < \varphi < 2\pi/3$ нужно применить предыдущую теорему к отображению $h = f \circ \nu_1: V_{n+2,3} \rightarrow M$, где $\nu_1: V_{n+2,3} \rightarrow S^{n+1}$ – проекция на первый вектор, т.е. $\nu_1(z) = v_1$, $z = (v_1, v_2, v_3) \in V_{n+2,3}$ (выбор параметра $t > 0$ при построении $\mathbb{Z}_3$ -пространства $V_{n+2,3}$, разумеется, связан с φ). Если $z = (v_1, v_2, v_3) \in A(h)$, то $f(v_1) = f(v_2) = f(v_3)$.

В случае $\varphi = 2\pi/3$ можно либо воспользоваться переходом к пределу по углу, стремящемуся к $2\pi/3$, либо рассмотреть отображение $h = f \circ \nu_1: V_{n+2,2} \rightarrow M$. Второй способ предпочтительнее, поскольку из равенства $\text{in } V_{n+2,2} = 2n + 1$ (верного как при нечетном, так и при четном n) и [5] (см. также теорему 8.1) следует, что $\dim A(h) \geq 1$ для любого n и любого (непрерывного) отображения $h: V_{n+2,2} \rightarrow M$ в n -мерное многообразие M .

Доказательство Янга основано на следующем рассуждении от противного. Предположим, что утверждение несправедливо, тогда имеем эквивариантное отображение $\hat{h}: V_{n+2,3} \rightarrow (\mathbb{R}^n)^3 \setminus \Delta$, где $h = f \circ \nu_1: V_{n+2,3} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\nu_1(z) = v_1$, $z = (v_1, v_2, v_3) \in V_{n+2,3}$. Пространство $(\mathbb{R}^n)^3 \setminus \Delta$ эквивариантно ретрагируется на единичную $(2n-1)$ -сферу S в ортогональном дополнении к Δ . Таким образом, имеем эквивариантные отображения $V_{n+1,2} \rightarrow V_{n+2,3} \rightarrow S$, первое из которых – вложение. Затем Ч. Янг показывает, что композиция $V_{n+1,2} \rightarrow S$ гомотопна нулю, а с другой стороны, используя последовательности Смита, доказывает, что гомоморфизм $H^{2n-1}(S) \rightarrow H^{2n-1}(V_{n+1,2})$ нетривиален (и, следовательно, является

изоморфизмом, поскольку обе группы изоморфны $\mathbb{Z}_3$). Мы же для доказательства нетривиальности указанного гомоморфизма можем воспользоваться равенством индексов $i(V_{n+1,2}) = i(S) = 2n$ и леммой 2.1.

Приведенное рассуждение пригодно как для четного, так и для нечетного n , но при этом приходится ограничиваться отображениями в евклидово пространство. Имеются аналоги теоремы Янга для действия на многообразиях Штифеля (см. [7], [63], [64], [8] и [54]). Мы приведем доказательство (с использованием леммы 3.1) одного из утверждений, анонсированных в [9].

Группа $G = \mathbb{Z}_p$, где p – простое нечетное число, свободно действует на многообразии Штифеля $V_{m,p}$ ортонормированных p -реперов в $\mathbb{R}^m$ [8] (образующая действует как циклическая перестановка векторов в репере). Положим $W_{l,k} = V_{l(p-1)+k,p}$, где $1 \leq k \leq p-1$.

Пусть $\nu: V_{r,p} \rightarrow S^{r-1}$ – проекция на первый вектор, т.е. $\nu(z) = v_1$, где $z = (v_1, \dots, v_p) \in V_{r,p}$.

ТЕОРЕМА 11.4. *Для любого непрерывного отображения $f: S^{l(p-1)+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2l}$ множество $A(f \circ \nu)$ непусто, где $f \circ \nu: W_{l,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2l}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Буржен показал в [31], что $\text{in } W_{l,k} = 2l(p-1) - 1$. Следовательно, $\text{ind } W_{l,k} = 2l(p-1) - 1$ (в силу нечетности этого числа). Имеется эквивариантное отображение $W_{l,2} = V_{l(p-1)+2,p} \rightarrow V_{l(p-1)+1,p-1}$, откуда следует, что

$$\text{in } V_{l(p-1)+1,p-1} \geq 2l(p-1) - 1.$$

Имеем вложение $V_{l(p-1)+1,p-1} \subset W_{l,2}$, откуда следует, что

$$\text{in } V_{l(p-1)+1,p-1} = 2l(p-1) - 1.$$

Если предположить, что $A(f \circ \nu)$ пусто, то возникает эквивариантное отображение $W_{l,2} \rightarrow S^{2l(p-1)-1}$. Так же, как при доказательстве теоремы Янга, устанавливается, что композиция $V_{(p-1)+1,p-1} \rightarrow W_{l,2} \rightarrow S^{2l(p-1)-1}$ гомотопна нулю (см. ниже). Но это противоречит лемме 3.1, поскольку

$$\text{ind } V_{(p-1)+1,p-1} = \text{ind } S^{2l(p-1)-1} = 2l(p-1) - 1.$$

Положим $X = W_{l,2}$, $h = f \circ \nu$. Тогда $\hat{h}: X \rightarrow (\mathbb{R}^{2l})^p$ – эквивариантное отображение, причем $\hat{h}(x) = (f(v_1), \dots, f(v_p))$, где $x = (v_1, \dots, v_p) \in X$. Если $A(h) = \emptyset$, то определено отображение $\mu: X \rightarrow S$, где S – сфера единичного радиуса в ортогональном дополнении $\Delta^\perp$ к диагонали $\Delta \subset (\mathbb{R}^{2l})^p$ (размерность этой сферы равна $2l(p-1) - 1$). Отображение μ определяется формулой

$$\mu(x) = \frac{\delta(\hat{h}(x))}{\|\delta(\hat{h}(x))\|},$$

где $\delta: (\mathbb{R}^{2l})^p \rightarrow \Delta^\perp \subset (\mathbb{R}^{2l})^p$ – проекция на ортогональное дополнение к диагонали:

$$\begin{aligned} \delta(\xi_1, \dots, \xi_p) &= (\xi_1, \dots, \xi_p) - \frac{1}{p}(\xi_1 + \dots + \xi_p, \dots, \xi_1 + \dots + \xi_p), \\ \xi_j &\in \mathbb{R}^{2l}, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Пусть $Y \subset X$ состоит из таких $x = (v_1, \dots, v_p) \in X$, что

$$\frac{(v_1 + \dots + v_p)}{\|v_1 + \dots + v_p\|} = w,$$

где w – северный полюс единичной сферы $S^{l(p-1)+1} \subset \mathbb{R}^{l(p-1)+2}$. Тогда Y – инвариантное подпространство в пространстве X , гомеоморфное многообразию Штифеля $V_{l(p-1)+1, p-1}$. Пусть $f = (f_1, \dots, f_{2l})$ – запись в координатах отображения $f: S^{l(p-1)+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2l}$. Без ограничения общности можно считать, что функция f_1 принимает минимальное значение в северном полюсе w сферы $S^{l(p-1)+1}$.

Для $(v_1, \dots, v_p) \in Y$ концы векторов v_i лежат на $l(p-1)$ -мерной сфере $\Sigma \subset S^{l(p-1)+1}$. Любая точка $z \in \Sigma$ соединяется с w единственной геодезической, т. е. отрезком дуги большого круга, являющегося пересечением сферы $S^{l(p-1)+1}$ с двумерной плоскостью, порожденной векторами z и w . Рассмотрим вращение $\sigma_{z,t} \in \text{SO}(l(p-1)+2)$, оставляющее неподвижным ортогональное дополнение к указанной двумерной плоскости и поворачивающее эту плоскость на угол $\frac{\pi}{2}t$ от z к w . Определим $H: Y \times I \rightarrow X$ формулой

$$H((v_1, \dots, v_p), t) = \sigma_{v_1,t}(v_1, \dots, v_p) = (\sigma_{v_1,t}(v_1), \dots, \sigma_{v_1,t}(v_p)).$$

Поскольку $\sigma_{z,0}$ – тождественное отображение, а $\sigma_{z,1}(z) = w$, имеем $H(Y_0) = Y \subset X$ и $H(Y_1)$ содержится в множестве реперов, у которых первый вектор есть w . Пусть $x = (v_1, \dots, v_p) \in H(Y_1)$, где $v_1 = w$. Тогда $\mu_1(x) \leq \mu_{2l+1}(x)$ при $1 \leq r \leq p-1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= \frac{f_1(v_1) - \frac{1}{p}(f_1(v_1) + \dots + f_1(v_p))}{\|\delta(\hat{h}(x))\|}, \\ \mu_{2l+1}(x) &= \frac{f_1(v_r) - \frac{1}{p}(f_1(v_1) + \dots + f_1(v_p))}{\|\delta(\hat{h}(x))\|}. \end{aligned}$$

Поскольку w – точка минимума для f_1 , мы получаем

$$\mu_1(x) - \mu_{2l+1}(x) = \frac{f_1(w) - f_1(v_r)}{\|\delta(\hat{h}(x))\|} \leq 0.$$

Таким образом, $\mu(H(Y_1))$ – собственное подмножество сферы $S^{2l(p-1)-1} \subset \Delta^\perp$, и, следовательно, ограничение μ на $Y \subset X$ нульгомотопно.

СЛЕДСТВИЕ 11.2. Пусть $z_1, \dots, z_p \in S^{l(p-1)+1}$ – вершины правильного $(p-1)$ -мерного симплекса, вписанного в сферу, и $f: S^{l(p-1)+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2l}$ – произвольное непрерывное отображение.

Тогда найдется вращение $A \in \text{SO}(l(p-1)+2)$ такое, что $f(z_1) = \dots = f(z_p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z_1, \dots, z_p$ – ортонормированный репер, то утверждение прямо вытекает из теоремы 11.4.

Пусть центр тяжести симплекса не совпадает с началом координат. Реперы вида $(Cz_1, \dots, Cz_p)$, где $C \in \text{SO}(l(p-1)+2)$, образуют многообразие, эквивариантно гомеоморфное многообразию Штифеля $W_{l,2}$ и, следовательно, имеющее индекс, равный $2l(p-1)-1$. Далее рассуждения проводятся так же, как и в случае ортонормированного репера.

Наконец, случай вырождения (когда центр тяжести симплекса совпадает с началом координат) рассматривается с помощью предельного перехода.

Список литературы

1. *Богатый С. А.* Циклические системы, конфигурационные пространства и теорема Борсука–Улама–Манкхольма–Фенна–Коннета–Козна–Ласка // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1996. Т. 212. С. 40–54.
2. *Богатый С. А.* Гипотеза Борсука, препятствие Рышкова, интерполяция, чебышевские приближения, трансверсальная теорема Тверберга, проблемы // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2002. Т. 239. С. 63–82.
3. *Болотов Д. В.* Гипотеза Козна–Ласка // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 1. С. 22–26.
4. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Топологические методы в теории неподвижной точки многозначных отображений // УМН. 1980. Т. 35. № 1. С. 59–126.
5. *Воловиков А. Ю.* Отображения свободных $\mathbb{Z}_p$ -пространств в многообразия // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 1. С. 36–55.
6. *Воловиков А. Ю.* Отображения свободных $\mathbb{Z}_p$ -пространств в многообразия: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1982.
7. *Воловиков А. Ю.* К теореме Янга о функциях на сфере // Тез. докл. IX Всесоюзной геометрической конференции. Кишинев: Штиинца, 1988. С. 68–69.
8. *Воловиков А. Ю.* Теорема Буржана–Янга для $\mathbb{Z}_p^n$ -действия // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 7. С. 115–144.
9. *Воловиков А. Ю.* Об отображениях многообразий Штифеля со свободным $\mathbb{Z}_p^n$ -действием в многообразия // УМН. 1992. Т. 47. № 6. С. 27–56.
10. *Воловиков А. Ю.* Об эквивариантных многозначных отображениях // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 159–160.
11. *Воловиков А. Ю.* К теореме ван Кампена–Флореса // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 5. С. 663–670.
12. *Воловиков А. Ю.* Об индексе G -пространств // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 3–22.
13. *Воловиков А. Ю.* Об одном свойстве функций на сфере // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 5. С. 679–690.
14. *Воловиков А. Ю.* Точки совпадения отображений $\mathbb{Z}_p^n$ -пространств в CW-комплексы // УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 153–154.
15. *Воловиков А. Ю.* Эквивариантные отображения и некоторые задачи геометрии выпуклых множеств // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2002. Т. 239. С. 83–97.
16. *Воловиков А. Ю., Щепин Е. В.* Антиподы и вложения // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 1. С. 3–32.
17. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1984.
18. *Скляренко Е. Г.* К теории обобщенных многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 4. С. 831–843.
19. *Стесин М. И.* Об александровских поперечниках шаров // ДАН СССР. 1974. Т. 217. № 1. С. 31–33.
20. *Стинрод Н., Эпштейн Д.* Когомологические операции. М.: Наука, 1983.
21. *Шварц А. С.* Некоторые оценки рода топологического пространства в смысле Красносельского // УМН. 1957. Т. 12. № 4. С. 209–214.
22. *Шварц А. С.* Род расслоенного пространства // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 217–272.
23. *Шварц А. С.* Род расслоенного пространства // Тр. ММО. 1962. Т. 11. С. 99–126.
24. *Щепин Е. В.* Об одной проблеме Л. А. Тумаркина // ДАН СССР. 1974. Т. 217. № 1. С. 42–43.
25. *Щепин Е. В.* Мягкие отображения многообразий // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 209–224.
26. *Aeppli A., Akiyama Y.* Cohomology operations in Smith theory // Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa. 1970. V. 24. P. 741–833.
27. *Björner A., Welker V.* The homology of “ k -equal” manifolds and related partition lattices // Adv. Math. 1995. V. 110. № 2. P. 277–313.
28. *Borel A.* Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compact // Ann. of Math. 1953. V. 57. P. 115–207.
29. *Borel A.* Seminar on transformation groups // Ann. of Math. Stud. № 46. Princeton–New Jersey: Princeton Univ. Press, 1960.

30. Bourgin D. G. On some separation and mapping theorems // Comment. Math. Helv. 1955. V. 29. P. 199–214.
31. Bourgin D. G. Multiplicity of solutions in frame mappings // Illinois J. Math. 1965. V. 9. P. 169–177.
32. Bredon G. E. Introduction to compact transformation groups. N. Y.–London: Academic Press, 1972.
33. Bredon G. Sheaf theory. N. Y.: McGraw-Hill, 1967.
34. Chang T., Skjelbred T. Group actions on Poincaré duality spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78. P. 1024–1026.
35. Clapp M., Puppe D. Critical point theory with symmetries // J. reine angew Math. 1991. V. 418. P. 1–29.
36. Conner P. E., Floyd E. E. Fixed point free involutions and equivariant maps // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 416–441.
37. Conner P. E., Floyd E. E. Fixed point free involutions and equivariant maps. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 105. P. 222–228.
38. Conner P. E., Floyd E. E. Differentiable periodic maps. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1964.
39. Cohen F., Lusk E. L. Coincidence point results for spaces with free $\mathbb{Z}_p$ -actions // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 49. № 1. P. 245–252.
40. Cohen F., Lusk E. L. Configuration-like spaces and the Borsuk–Ulam theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 56. P. 313–317.
41. Tom Dieck T. Transformation groups. Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1987.
42. Fadell E., Husseini S. An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk–Ulam and Bourgin–Yang theorems // Ergodic theory and dynamic systems. 1988. V. 8. Spec. Issue. P. 259–268.
43. Flores A. Über n -dimensionale Komplexe die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind // Ergeb. Math. Kolloq. 1933/34. B. 6. S. 4–7.
44. Goncalves D. L., Pergher P. Q. L. $\mathbb{Z}_p$ -coincidences for maps of spheres into CW complexes // Kobe J. Math. 1998. V. 15. № 1. P. 191–195.
45. Goncalves D. L., Jaworowski J., Pergher P. Q. L. G-coincidences for maps of homotopy spheres into CW complexes // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130. № 10. P. 3111–3115.
46. Goncalves D. L., Jaworowski J., Pergher P. Q. L. Measuring the size of the coincidence set // Topology Appl. 2002. V. 125. № 3. P. 465–470.
47. Goncalves D. L., Jaworowski J., Pergher P. Q. L., Volovikov A. Yu. Coincidences for maps of spaces with finite group actions // Topology Appl. 2004. V. 145. № 1–3. P. 61–68.
48. Hopf H. Freie Überdeckungen und frei Abbildungen // Fund. Math. 1937. V. 28. P. 33–57.
49. Hopf H. Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze // Port. Math. 1943/44. V. 4. P. 129–139.
50. Hsiang W. Y. Cohomological theory of topological transformation groups. Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 1975.
51. Izydorek M., Jaworowski J. Antipodal coincidence for maps of spheres into complexes // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 1947–1950.
52. Jaworowski J. Periodic coincidence for maps of spheres // Kobe J. Math. 2000. V. 17. P. 21–26.
53. Kakutani S. A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex set in $\mathbb{R}^3$ // Ann. of Math. (2). 1942. V. 43. P. 739–741.
54. Li C. Q. On solutions of frame mappings into manifolds // Lect. Notes in Math. 1989. № 1411. P. 143–147.
55. Lusk E. L. The mod p Smith index and a generalized Borsuk–Ulam theorem // Mich. Math. J. 1975. V. 22. P. 151–160.
56. Matousek J. Using the Borsuk–Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry. Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 2003.
57. Munkholm H. J. On the Borsuk–Ulam theorem for $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ actions on S^{2n-1} and maps $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ // Osaka J. Math. 1970. V. 7. P. 451–456.
58. Scordev G. S. On a theorem of H. Hopf // Serdica. Bulg. math. publ. 1975. V. 1. P. 317–325.

59. *Stefanov S. T.* Mapping theorems for $\mathbb{Z}_p$ -actions with fixed points // *Serdica. Bulg. math. publ.* 1990. V. 16. P. 87–93.
60. *Stefanov S. T.* Yang index of the deleted product // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1999. V. 128. № 3. P. 885–891.
61. *Väisälä J.* A theorem of the Borsuk–Ulam type for maps into non-manifolds // *Topology.* 1981. V. 20. P. 319–322.
62. *Volovikov A.* Mappings of free $\mathbb{Z}_p$ -spaces into manifolds // *Leningrad International Topological Conference. Abstracts.* Leningrad: Nauka, 1982. P. 168.
63. *Volovikov A.* Dimension and C -essentiality of the set of $\mathbb{Z}_p$ -coincidences of map // *Abstracts of the Second Soviet-Japanese Symposium on Dimension and related Topics. Preprint № 7 / MIAN SSSR,* 1989. P. 55.
64. *Volovikov A.* Dimension and C -essentiality of $\mathbb{Z}_p$ -coincidence set of map // *Q & A in General Topology.* 1990. V. 8. Spec. Issue. P. 207–217.
65. *Wu W.-T.* A theory of imbedding, immersion, and isotopy of polytopes in a Euclidean space. Peking: Science press, 1965.
66. *Yamabe H. Yujobô Z.* On the continuous functions defined on a sphere // *Osaka Math. J.* 1950. V. 2. № 1. P. 19–22.
67. *Yang C. T.* On theorems of Borsuk–Ulam, Kakutani–Yamabe–Yujobô and Dyson. I // *Ann. of Math.* 1954. V. 60. P. 262–282.
68. *Yang C. T.* Continuous functions from spheres to Euclidean spaces // *Ann. of Math.* 1955. V. 62. № 2. P. 284–292.
69. *Yang C. T.* On maps from spheres to Euclidean spaces // *Amer. J. Math.* 1957. V. 79. P. 725–732.
70. *Živaljević R. T.* User’s guide to equivariant methods in combinatorics // *Publications of the Institute of Mathematics. Belgrade.* 1996. V. 59 (73). P. 114–130.

E-mail: a.volov@list.ru

Поступило в редакцию
25.12.2003