Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, Обобщенные классы Грея–Хервеллы и голоморфно-проективные преобразования обобщенных почти эрмитовых структур, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 5, 107–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/im656>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:30:59

УДК 514.76

В. Ф. Кириченко

**Обобщенные классы Грея–Хервеллы
и голоморфно-проективные преобразования
обобщенных почти эрмитовых структур**

Получено новое описание и естественное обобщение классов Грея–Хервеллы на случай обобщенных почти эрмитовых структур. Изучены особенности голоморфно-проективных преобразований структур этих классов, в частности построены некоторые инварианты таких преобразований. Изучено поведение классов Грея–Хервеллы при голоморфно-проективных преобразованиях, в частности найдены классы, инвариантные при таких преобразованиях.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

Теория геодезических отображений, т. е. отображений псевдоримановых пространств, при которых сохраняются геодезические (т. е. геодезические переводятся в геодезические), является одним из направлений исследований в римановой геометрии, истоки которого восходят к трудам [1]–[3]. В последние десятилетия интерес к этой проблематике был возрожден в многочисленных работах как отечественных, так и зарубежных исследователей (см., например, [4]). Во многих работах изучаются геодезические отображения псевдоримановых многообразий, наделенных дополнительной структурой. Однако исследования показывают, что зачастую такие структуры обладают свойством *геодезической жесткости*, т. е. не допускают нетривиальных геодезических преобразований, сохраняющих структуру. Классическим результатом в этом направлении является результат Уэстлейка [5] и Яно [6], согласно которому келерово многообразие не допускает геодезических отображений, сохраняющих комплексную структуру. В связи с этим внимание исследователей привлек другой тип отображений келеровых многообразий, при которых сохраняются почти геодезические специального вида, так называемые *аналитические планарные кривые*. Эти отображения были введены в рассмотрение Оцуки и Тасиро [7] и названы ими *голоморфно-проективными* (короче, НР-) *отображениями*. В действительности такие отображения имеют смысл и для произвольных почти эрмитовых многообразий, однако фактически они изучались главным образом в келеровом случае.

В настоящей работе изучаются НР-отображения произвольных почти эрмитовых многообразий как классического, так и гиперболического типа (короче, обобщенных почти эрмитовых, или *GAH*-многообразий). Получено новое описание и естественное обобщение классов Грея–Хервеллы [8] в случае обобщенных

почти эрмитовых структур. Изучены особенности НР-преобразований структур этих классов, в частности построены некоторые инварианты таких преобразований, в том числе и инвариант, обобщающий тензор Вейля голоморфно-проективной кривизны келеровых многообразий, введенный в рассмотрение Й. Тасиро [9] и С. Исихарой [10], на класс произвольных обобщенных почти эрмитовых многообразий. Отметим, что в общем случае произвольных обобщенных почти эрмитовых структур этот инвариант имеет, вообще говоря, нетензорную природу. Выяснен геометрический смысл обращения в нуль этого инварианта на пространстве присоединенной G -структуры. Выявлены классы структур, инвариантные относительно НР-преобразований, а также найдены условия, при выполнении которых НР-преобразование сохраняет остальные классы Грея–Хервеллы.

§ 2. Обобщенные классы Грея–Хервеллы GAH -структур

Пусть $(M, g), g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, – связное $2n$ -мерное ($n > 1$) псевдориманово многообразие, $\mathcal{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M , ∇ – риманова связность метрики g , R – тензор Римана–Кристоффеля, d – оператор внешнего дифференцирования, δ – оператор кодифференцирования. Пусть $\{g, J\}$ – почти эрмитова структура классического либо гиперболического типа, короче – обобщенная почти эрмитова, или GAH -структура на M , $J^2 = \alpha \text{id}$, $\alpha = -1$ в классическом и $\alpha = 1$ в гиперболическом случаях, $\langle JX, JY \rangle = -\alpha \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $\Omega(X, Y) = \langle J^3 X, Y \rangle$ – фундаментальная форма структуры. Хорошо известно, что в гиперболическом случае g – нейтральная метрика, т. е. ее сигнатура равна нулю.

Напомним [13], [14], что модуль $\mathcal{X}(M)$ GAH -многообразия $\{M, J, g\}$ (а также касательное пространство $T_p(M)$, $p \in M$) имеет естественную структуру $\mathbb{K}$ -модуля, где $\mathbb{K}$ – поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел в классическом и кольцо $\mathbb{D}$ двойных чисел в гиперболическом случаях. Операция умножения вектора $X \in \mathcal{X}(M)$ на элемент $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{K} \otimes C^\infty(M)$ определяется формулой

$$(\alpha + i\beta)X = \alpha X + \beta(JX), \quad \alpha, \beta \in C^\infty(M).$$

В $\mathbb{K} \otimes C^\infty(M)$ -модуле внутренним образом определена невырожденная эрмитова форма

$$\langle \langle X, Y \rangle \rangle = \langle X, Y \rangle + i \langle J^3 X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Непосредственно проверяется, что эта форма $\mathbb{K}$ -линейна по первому и $\mathbb{K}$ -антилинейна по второму аргументам. Ортонормированный базис $\mathbb{K}$ -модуля $T_p(M)$ относительно сужения этой формы на $T_p(M)$ состоит из попарно ортогональных векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$ таких, что

$$\|e_a\|^2 \equiv \langle \langle e_a, e_a \rangle \rangle = \pm 1, \quad a = 1, \dots, n.$$

ЛЕММА 1. Тензор ∇J GAH -многообразия (M, J, g) , $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, обладает следующими свойствами:

- 1) $\nabla_X(J) \circ J + J \circ \nabla_X(J) = 0$;
- 2) $\langle \nabla_X(J)Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X(J)Z \rangle = 0$, $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое тождество получается, если применить оператор ∇_X к обеим частям соотношения $J^2 = \alpha \text{id}$, а второе – если применить этот оператор к обеим частям тождества $\langle JY, Z \rangle + \langle Y, JZ \rangle = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $p \in M$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ортонормированный базис касательного пространства $T_p(M)$, рассматриваемого как $\mathbb{K}$ -модуль. Тогда

$$\forall \xi \in T_p(M) \implies \xi = \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \langle \xi, e_a \rangle e_a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $J^2 = \alpha \text{id}$, $\langle JX, JY \rangle = -\alpha \langle X, Y \rangle$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \langle \xi, e_a \rangle e_a &= \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \langle \xi, e_a \rangle e_a + \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \langle J^3 \xi, e_a \rangle J e_a \\ &= \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \langle \xi, e_a \rangle e_a - \sum_{a=1}^n \|J e_a\|^2 \langle J \xi, e_a \rangle J e_a \\ &= \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \langle \xi, e_a \rangle e_a + \sum_{a=1}^n \|J e_a\|^2 \langle \xi, J e_a \rangle J e_a = \xi, \end{aligned}$$

так как $\{e_1, \dots, e_n, J e_1, \dots, J e_n\}$ – ортонормированный базис $\mathbb{R}$ -линейного пространства $T_p(M)$.

Введем в рассмотрение двуместные эндоморфизмы B и C модуля $\mathcal{X}(M)$ формулами

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \frac{1}{2} (\nabla_{JX}(J)Y - \nabla_X(J)(JY)), \\ C(X, Y) &= \frac{1}{2} (\nabla_{JX}(J)Y + \nabla_X(J)(JY)) \end{aligned}$$

и назовем их *виртуальным* и *структурным* тензорами $GA\mathcal{H}$ -структуры соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, тензор C (с точностью до множителя 2) совпадает с композиционным тензором присоединенной Q -алгебры $GA\mathcal{H}$ -структуры [13], [14].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Тензоры B и C обладают следующими свойствами:

- 1) $J \circ B(X, Y) = B(JX, Y) = -B(X, JY)$;
- 2) $\langle \langle B(X, Y), Z \rangle \rangle + \langle \langle Y, B(X, Z) \rangle \rangle = 0$;
- 3) $J \circ C(X, Y) = -C(JX, Y) = -C(X, JY)$;
- 4) $\langle \langle C(X, Y), Z \rangle \rangle + \langle \langle Y, C(X, Z) \rangle \rangle = 0$, $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 1 (примененной к $GA\mathcal{H}$ -многообразиям) имеем

$$\begin{aligned} 2J \circ B(X, Y) &= J \circ \nabla_{JX}(J)Y - J \circ \nabla_X(J)(JY) = -\nabla_{JX}(J)(JY) + \alpha \nabla_X(J)Y, \\ 2B(JX, Y) &= \alpha \nabla_X(J)Y - \nabla_{JX}(J)(JY), \\ 2B(X, JY) &= \nabla_{JX}(J)(JY) - \alpha \nabla_X(J)Y. \end{aligned}$$

Сравнивая эти соотношения, получаем утверждение 1). Далее имеем

$$\begin{aligned}
2\langle\langle B(X, Y), Z \rangle\rangle &= 2\langle B(X, Y)Z \rangle + 2i\langle J^3 \circ B(X, Y), Z \rangle \\
&= \langle \nabla_{JX}(J)Y, Z \rangle - \langle \nabla_X(J)(JY), Z \rangle + i\langle J^3 \nabla_{JX}(J)Y, Z \rangle \\
&\quad - i\langle J^3 \nabla_X(J)(JY), Z \rangle = -\langle Y, \nabla_{JX}(J)Z \rangle + \langle JY, \nabla_X(J)Z \rangle \\
&\quad + i\langle Y, \nabla_{JX}(J)(J^3 Z) \rangle - i\langle JY, \nabla_X(J)(J^3 Z) \rangle = -\langle Y, \nabla_{JX}(J)Z \rangle \\
&\quad + \langle Y, \nabla_X(J)(JZ) \rangle + i\langle J^3 Y, \nabla_{JX}(J)Z \rangle - i\langle J^3 Y, \nabla_X(J)(JZ) \rangle \\
&= -2\langle Y, B(X, Z) \rangle + 2i\langle J^3 Y, B(X, Y) \rangle = -2\overline{\langle Y, B(X, Z) \rangle}.
\end{aligned}$$

Аналогично доказываются тождества 3) и 4).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Виртуальный тензор $\mathbb{K}$ -линеен по первому и $\mathbb{K}$ -антилинеен по второму аргументам. Структурный тензор $\mathbb{K}$ -антилинеен по обоим аргументам.*

Рассмотрим два линейных пространства на $GA\mathcal{H}$ -многообразии M :

- i) линейное пространство $\mathcal{B}$ тензоров типа $(2,1)$, обладающих свойствами 1), 2) предложения 1;
- ii) линейное пространство $\mathcal{C}$ тензоров типа $(2,1)$, обладающих свойствами 3), 4) предложения 1.

Изучим строение линейного пространства $\mathcal{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Следом* тензора $B \in \mathcal{B}$ назовем вектор $\text{tr } B$, в каждой точке $p \in M$ вычисляемый по формуле

$$(\text{tr } B)_p = -\frac{1}{n-1} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 B_p(e_a, e_a),$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$, как обычно, ортонормированный базис касательного пространства $T_p(M)$, рассматриваемого как $\mathbb{K}$ -модуль.

С учетом свойства 1) предложения 1 легко проверить, что вектор $\text{tr } B$ определен корректно в смысле независимости от выбора базиса. Тензор $B \in \mathcal{B}$ называется *бесследным*, если $\text{tr } B = 0$. Очевидно, совокупность $\mathcal{B}_0$ всех бесследных тензоров образует подпространство пространства $\mathcal{B}$.

С другой стороны, рассмотрим подпространство $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ тензоров вида $T(X, Y) = \langle\langle \zeta, Y \rangle\rangle X - \langle\langle X, Y \rangle\rangle \zeta$, где ζ – вектор, с необходимостью равный следу тензора T (что непосредственно следует из леммы 2). Элементы этого подпространства назовем *примитивными тензорами*.

ТЕОРЕМА 1. *Линейное пространство $\mathcal{B}$ распадается в прямую сумму подпространств бесследных и примитивных тензоров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \in \mathcal{B}$, и пусть

$$B(X, Y) = B_0(X, Y) + \langle\langle \zeta, Y \rangle\rangle X - \langle\langle X, Y \rangle\rangle \zeta, \quad (1)$$

где B_0 – бесследный тензор. Тогда

$$\sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 B(e_a, e_a) = (1 - n)\zeta,$$

а значит, $\zeta = \text{tr } B$. Соответственно,

$$B_0(X, Y) = B(X, Y) - \langle \langle \zeta, Y \rangle \rangle X + \langle \langle X, Y \rangle \rangle \zeta.$$

Следовательно, если такое представление тензора B существует, то оно единственно.

Обратно, рассмотрим разложение тензора B по формуле (1), где выбрано $\zeta = \text{tr } B$, $B_0(X, Y) = B(X, Y) - \langle \langle \zeta, Y \rangle \rangle X + \langle \langle X, Y \rangle \rangle \zeta$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr } B_0 &= -\frac{1}{n-1} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 B_0(e_a, e_a) = -\frac{1}{n-1} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 B(e_a, e_a) \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \{ \langle \langle \zeta, e_a \rangle \rangle e_a - \langle \langle e_a, e_a \rangle \rangle \zeta \} = \text{tr } B - \zeta = 0, \end{aligned}$$

а значит, $B_0 \in \mathcal{B}_0$.

В качестве следствия получаем теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Виртуальный тензор ГАН-структуры однозначно представляется в виде суммы бесследного и примитивного тензоров. Именно, $B = B_0 + B_1$, $\text{tr } B_0 = 0$, $B_1(X, Y) = \frac{1}{2}(\langle \langle \xi, Y \rangle \rangle X - \langle \langle X, Y \rangle \rangle \xi)$, где ξ – обобщенный вектор Ли, т. е. вектор, дуальный обобщенной форме Ли*

$$\omega = -\frac{\alpha}{n-1} \delta\Omega \circ J.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что применение оператора ∇_X к обеим частям тождества $\Omega(Y, Z) = \alpha \langle JY, Z \rangle$ приводит к тождеству

$$\nabla_X(\Omega)(Y, Z) = \alpha \langle \nabla_X(J)Y, Z \rangle,$$

а значит, с учетом леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} \delta\Omega(Y) &= \sum_{a=1}^n (\|e_a\|^2 (\nabla_{e_a}(\Omega)(Y, e_a) + \|Je_a\|^2 \nabla_{Je_a}(\Omega)(Y, Je_a)) \\ &= \alpha \sum_{a=1}^n (\|e_a\|^2 \langle \nabla_{e_a}(J)Y, e_a \rangle + \|Je_a\|^2 \langle \nabla_{Je_a}(J)Y, Je_a \rangle) \\ &= -\alpha \sum_{a=1}^n (\|e_a\|^2 \langle \nabla_{e_a}(J)e_a, Y \rangle + \|Je_a\|^2 \langle \nabla_{Je_a}(J)Je_a, Y \rangle). \end{aligned} \quad (2)$$

С другой стороны, поскольку $\xi = 2 \operatorname{tr} B$, с учетом предложения 1 и определения виртуального тензора имеем

$$\begin{aligned} J\xi &= -\frac{2}{n-1} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 J \circ B(e_a, e_a) = \frac{2}{n-1} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 B(e_a, Je_a) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \{ \nabla_{Je_a}(J)(Je_a) - \nabla_{e_a}(J)(J^2 e_a) \} \\ &= -\frac{\alpha}{n-1} \sum_{a=1}^n \{ \|Je_a\|^2 \nabla_{Je_a}(J)(Je_a) + \|e_a\|^2 \nabla_{e_a}(J)(e_a) \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Сравнивая тождества (2) и (3), найдем, что $\langle J\xi, Y \rangle = \frac{1}{n-1} \delta\Omega(Y)$. Положив здесь $Y = JX$, окончательно получаем

$$\langle \xi, X \rangle = -\frac{\alpha}{n-1} \delta\Omega \circ J(X), \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Теперь рассмотрим линейное пространство $\mathcal{C}$. В силу предложения 1 его элементы естественно отождествляются с $\mathbb{K}$ -линейными 3-формами (обозначаемыми той же буквой) по формуле

$$C(X, Y, Z) = \langle \langle X, C(Y, Z) \rangle \rangle, \quad C \in \mathcal{C}, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

При таком отождествлении в $\mathbb{K}$ -модуле $\mathcal{C}$ внутренним образом определен проектор – оператор альтернирования Alt , а значит, $\mathbb{K}$ -модуль $\mathcal{C}$ распадается в прямую сумму ядра $\mathcal{C}_0$ и образа $\mathcal{C}_1$ этого проектора. Элементы ядра назовем *квазисимметричными* тензорами, а элементы образа – *абсолютно кососимметричными* тензорами. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. *При надлежащих отождествлениях $\mathbb{K}$ -модуль $\mathcal{C}$ распадается в прямую сумму подмодулей квазисимметричных и абсолютно кососимметричных тензоров.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Структурный тензор $GA\mathcal{H}$ -структуры однозначно представляется в виде суммы квазисимметричного и абсолютно кососимметричного тензоров. Именно, $C = C_0 + C_1$, $\operatorname{Alt} C_0 = 0$, $C_1 = \operatorname{Alt} C$.*

Рассмотрим, наконец, линейное пространство $\mathcal{T}$ тензоров T типа $(2, 1)$ на $GA\mathcal{H}$ -многообразии M , удовлетворяющих тождествам:

- 1°) $T(X, JY) = -J \circ T(X, Y)$;
- 2°) $\langle \langle T(X, Y), Z \rangle \rangle = -\langle \langle Y, T(X, Z) \rangle \rangle$.

ТЕОРЕМА 4. *В принятых обозначениях $\mathcal{T} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним [13], [14], что всякий тензор T типа $(r, 1)$ на M , рассматриваемый как r -линейное отображение:

$$T: \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_r \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

однозначно распадается в сумму тензоров того же вида, $\mathbb{K}$ -линейных либо $\mathbb{K}$ -антилинейных по своим аргументам. Совокупность таких тензоров называется *спектром* тензора T . Число элементов спектра равно, очевидно, 2^r , причем элементы спектра обозначаются символами $\binom{T}{k}$, где k – десятичное число, двоичная запись которого в s -м разряде имеет 0 либо 1, в зависимости от того, является ли тензор $\binom{T}{k}$ $\mathbb{K}$ -линейным либо $\mathbb{K}$ -антилинейным по s -му аргументу соответственно. В явном виде тензор $\binom{T}{k}$ задается соотношением

$$\binom{T}{k}(X_1, \dots, X_r) = \sigma \circ T(\theta X_1, \dots, \theta X_r) + \bar{\sigma} \circ T(\bar{\theta} X_1, \dots, \bar{\theta} X_r),$$

где $\theta X_s = \sigma X_s$, если в двоичной записи числа k в s -м разряде стоит нуль, и $\theta X_s = \bar{\sigma} X_s$, если в двоичной записи числа k в s -м разряде стоит единица.

Фиксируем $T \in \mathcal{T}$. Пусть $\left\{ \binom{T}{(0)}, \binom{T}{(1)}, \binom{T}{(2)}, \binom{T}{(3)} \right\}$ – спектр этого тензора.

ЛЕММА 3. В принятых обозначениях имеем:

- 1) $\binom{T}{(0)} = \binom{T}{(2)} = 0$;
- 2) $\binom{T}{(1)}(X, Y) = \frac{1}{2}(T(X, Y) + J^3 \circ T(JX, Y))$;
- 3) $\binom{T}{(3)}(X, Y) = \frac{1}{2}(T(X, Y) - J^3 \circ T(JX, Y))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, согласно [13], [14] внутренним образом определены взаимно дополнительные проекторы модуля $\mathbb{K} \otimes \mathcal{X}(M)$ на собственные распределения эндоморфизма J . Они определяются формулами

$$\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} + iJ^3), \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} - iJ^3).$$

В терминах этих проекторов с учетом 1°) имеем

$$\begin{aligned} \binom{T}{(0)}(X, Y) &= \sigma \circ T(\sigma X, \sigma Y) + \bar{\sigma} \circ T(\bar{\sigma} X, \bar{\sigma} Y) \\ &= \sigma \circ \bar{\sigma} \circ T(\sigma X, Y) + \bar{\sigma} \circ \sigma \circ T(\bar{\sigma} X, Y) = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\sigma \circ \bar{\sigma} = 0$. Аналогично,

$$\begin{aligned} \binom{T}{(2)}(X, Y) &= \sigma \circ T(\bar{\sigma} X, \sigma Y) + \bar{\sigma} \circ T(\sigma X, \bar{\sigma} Y) = 0, \\ \binom{T}{(1)}(X, Y) &= \sigma \circ T(\sigma X, \bar{\sigma} Y) + \bar{\sigma} \circ T(\bar{\sigma} X, \sigma Y) \\ &= \sigma^2 \circ T(\sigma X, Y) + \bar{\sigma}^2 \circ T(\bar{\sigma} X, Y) = \sigma \circ T(\sigma X, Y) + \bar{\sigma} \circ T(\bar{\sigma} X, Y) \\ &= \frac{1}{4} \{ (\text{id} + iJ^3) \circ T((\text{id} + iJ^3)X, Y) + (\text{id} - iJ^3) \circ T((\text{id} - iJ^3)X, Y) \} \\ &= \frac{1}{2}(T(X, Y) + J^3 \circ T(JX, Y)), \\ \binom{T}{(3)}(X, Y) &= T(X, Y) - 0 - \binom{T}{(1)}(X, Y) = \frac{1}{2}(T(X, Y) - J^3 \circ T(JX, Y)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 4. Прежде всего, из утверждения 1) леммы 3 вытекает, что тензор T однозначно распадается в сумму тензоров $\begin{smallmatrix} T \\ (1) \end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix} T \\ (3) \end{smallmatrix}$, для которых выполнены соотношения 1), 3) предложения 1 соответственно. Далее, в силу очевидных тождеств $\langle \langle \sigma X, Y \rangle \rangle = \langle \langle X, \bar{\sigma} Y \rangle \rangle$ и $\langle \langle \bar{\sigma} X, Y \rangle \rangle = \langle \langle X, \sigma Y \rangle \rangle$ имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \begin{smallmatrix} T \\ (1) \end{smallmatrix} (X, Y), Z \right\rangle \right\rangle &= \langle \langle \sigma \circ T(\sigma X, \bar{\sigma} Y), Z \rangle \rangle + \langle \langle \bar{\sigma} \circ T(\bar{\sigma} X, \sigma Y), Z \rangle \rangle \\ &= \langle \langle T(\sigma X, \bar{\sigma} Y), \bar{\sigma} Z \rangle \rangle + \langle \langle T(\bar{\sigma} X, \sigma Y), \sigma Z \rangle \rangle \\ &= -\overline{\langle \langle \bar{\sigma} Y, T(\sigma X, \bar{\sigma} Z) \rangle \rangle} - \overline{\langle \langle \sigma Y, T(\bar{\sigma} X, \sigma Z) \rangle \rangle} \\ &= -\overline{\langle \langle Y, \sigma T(\sigma X, \bar{\sigma} Z) \rangle \rangle} - \overline{\langle \langle Y, \bar{\sigma} T(\bar{\sigma} X, \sigma Z) \rangle \rangle} = -\overline{\left\langle \left\langle Y, \begin{smallmatrix} T \\ (1) \end{smallmatrix} (X, Z) \right\rangle \right\rangle}. \end{aligned}$$

Аналогично это соотношение проверяется для тензора $\begin{smallmatrix} T \\ (3) \end{smallmatrix}$. Следовательно, $\begin{smallmatrix} T \\ (1) \end{smallmatrix} \in \mathcal{B}$, $\begin{smallmatrix} T \\ (3) \end{smallmatrix} \in \mathcal{C}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Во введенных обозначениях имеем $\mathcal{T} = \mathcal{B}_0 \oplus \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1$.

Назовем это разложение каноническим.

ТЕОРЕМА 5. Спектр тензора ∇J GAH -многообразия имеет вид:

- 1) $\begin{smallmatrix} \nabla J \\ (0) \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \nabla J \\ (2) \end{smallmatrix} = 0$;
- 2) $\begin{smallmatrix} \nabla J \\ (1) \end{smallmatrix} = J^3 \circ B$;
- 3) $\begin{smallmatrix} \nabla J \\ (3) \end{smallmatrix} = -J^3 \circ C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку согласно свойствам 1), 2) леммы 1 $\nabla J \in \mathcal{T}$, то с учетом теоремы 4 имеем $\begin{smallmatrix} \nabla J \\ (0) \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \nabla J \\ (2) \end{smallmatrix} = 0$. Далее, с учетом той же теоремы имеем

$$\begin{aligned} \begin{smallmatrix} \nabla J \\ (1) \end{smallmatrix} (X, Y) &= \frac{1}{2} (\nabla_X(J)Y + J^3 \nabla_{JX}(J)Y) \\ &= \frac{1}{2} J^3 (-\nabla_X(J)(JY) + \nabla_{JX}(J)Y) = J^3 \circ B(X, Y). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается соотношение 3).

СЛЕДСТВИЕ 4. Каноническое разложение тензора ∇J имеет вид

$$\nabla J = J^3 B - J^3 C,$$

где дальнейшие разложения виртуального и структурного тензоров находятся в соответствии с теоремой 4 и настоящей формулой.

Из проведенных рассуждений следует, что в классе всех GAH -структур естественно выделяются 16 подклассов в зависимости от того, в какое из 16 внутренним образом определенных подпространств пространства $\mathcal{T}$, заданных каноническим разложением, попадет тензор ∇J . Эти классы можно рассматривать как обобщения хорошо известных классов Грея–Хервеллы.

Напомним [8], что А. Греем и Л. М. Хервеллой естественным образом выделены 16 классов почти эрмитовых структур классического типа со знакопеременной метрикой. Именно, пусть V – $2n$ -мерное вещественное линейное пространство, в котором фиксирована эрмитова структура (J, g) , $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. А. Грей и Л. М. Хервелла показали, что унитарная группа $U(n)$ естественно действует на пространстве

$$W = \{ \alpha \in \mathcal{T}_3^0(V) \mid \alpha(X, Y, Z) = -\alpha(X, Y, Z) = -\alpha(X, JY, JZ) \}$$

тензоров типа $(3, 0)$ линейного пространства V , обладающих определенными свойствами симметрии, и нашли четыре неприводимые компоненты $W_1, \dots, W_4$ этого действия, так что $W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$. Тем самым в пространстве W внутренним образом определено 16 подпространств, инвариантных относительно этого действия. Оказывается, тензор $\nabla\Omega$ в каждой точке почти эрмитова многообразия принадлежит пространству W . Почти эрмитова структура, по Грею–Хервелле, принадлежит одному из 16 классов, если тензор $\nabla\Omega$ лежит в соответствующем инвариантном подпространстве в каждой точке многообразия. Эти классы обозначаются, как соответствующие им подпространства пространства W . Например, класс QK квазикелеровых структур в этой системе обозначается $W_1 \oplus W_2$, класс $\mathcal{H}$ эрмитовых структур – $W_3 \oplus W_4$, и т. п. Система классов Грея–Хервеллы в известном смысле является полной и охватывает все ранее изучавшиеся классы $\mathcal{AH}$ -структур. А. Грей и Л. М. Хервелла получили аналитические признаки принадлежности $\mathcal{AH}$ -структуры соответствующему классу [8]. Легко заметить, что в случае классических почти эрмитовых структур при отождествлении тензоров типа $(2, 1)$ с тензорами типа $(3, 0)$ с помощью операции опускания индексов имеют место следующие отождествления:

$$B_0 \equiv W_3, \quad B_1 \equiv W_4, \quad C_0 \equiv W_2, \quad C_1 \equiv W_1.$$

В силу этого для обозначения обобщенных классов Грея–Хервеллы $G\mathcal{AH}$ -структур естественно пользоваться обозначениями Грея–Хервеллы. Используя следствие 3 и приведенные выше соображения, мы получаем удобные аналитические критерии принадлежности $G\mathcal{AH}$ -структуры к тому или иному обобщенному классу Грея–Хервеллы. Эти критерии наиболее удобно использовать, записывая их на пространстве G -структуры, присоединенной к данной $G\mathcal{AH}$ -структуре. Напомним [15], что пространство присоединенной G -структуры состоит из так называемых A -реперов, характеризующихся тем, что матрицы метрического тензора g индекса $2s$ и структурного эндоморфизма J в них имеют соответственно вид

$$(g_{jk}) = (g^{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n,s} \\ I_{n,s} & 0 \end{pmatrix}, \quad (J^j_k) = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix},$$

где $j, k = 1, \dots, 2n$. Напомним также [12], что A -репер $(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$ получается из ортонормированного репера $(p, e_1, \dots, e_n)$ пространства $T_p(M)$, рассматриваемого как $\mathbb{K}$ -модуль, по формулам $\varepsilon_a = \sqrt{2} \sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2} \bar{\sigma}(e_a)$, $a =$

$1, \dots, n$, где $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} + i^3 J)$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} - i^3 J)$. Принимая традиционные обозначения [12]

$$B^{ab}{}_c = \frac{i^3}{2} \varepsilon(b) J^a{}_{\hat{b},c}, \quad B_{ab}{}^c = \overline{B^{ab}{}_c}, \quad B^{abc} = -\frac{i^3}{2} \varepsilon(b, c) J^a{}_{[\hat{b}, \hat{c}]}, \quad B_{abc} = \overline{B^{abc}},$$

где $\varepsilon(b) = g_{b\hat{b}}$, $\varepsilon(b, c) = g_{b\hat{b}} g_{c\hat{c}}$, легко проверить, что на пространстве присоединенной G -структуры

$$B^{ab}{}_c = \frac{\alpha}{2} \varepsilon(b) B(\varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{b}})^a, \quad B^{abc} = \frac{\alpha}{4} \varepsilon(b, c) (C(\varepsilon_{\hat{c}}, \varepsilon_{\hat{b}})^a - C(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_{\hat{c}})^a).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \varepsilon(b) B(\varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{b}})^a &= \frac{\alpha}{4} \varepsilon(b) \{ \nabla_{J\varepsilon_c}(J)\varepsilon_{\hat{b}} - \nabla_{\varepsilon_c}(J)(J\varepsilon_{\hat{b}}) \} \\ &= \frac{i^2}{4} \varepsilon(b) \{ i \nabla_{\varepsilon_c}(J)\varepsilon_{\hat{b}} + i \nabla_{\varepsilon_c}(J)\varepsilon_{\hat{b}} \}^a = \frac{i^3}{2} \varepsilon(b) J^a{}_{\hat{b},c} = B^{ab}{}_c. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе соотношение. Далее,

$$\begin{aligned} B^{ab}{}_b &= \frac{\alpha}{2} \sum_{b=1}^n \varepsilon(b) B(\varepsilon_b, \varepsilon_{\hat{b}})^a = \frac{\alpha}{4} \sum_{b=1}^n \|e_b\|^2 B(e_b + i^3 J e_b, e_b - i^3 J e_b)^a \\ &= \frac{\alpha}{4} \sum_{b=1}^n \|e_b\|^2 ((\text{id} + 2i^3 J + i^6 J^2) \circ B(e_b, e_b))^a \\ &= \frac{\alpha}{2} \sum_{b=1}^n \|e_b\|^2 ((\text{id} + iJ^3) \circ B(e_b, e_b))^a = \alpha \sum_{b=1}^n \|e_b\|^2 ((\sigma \circ B)(e_b, e_b))^a \\ &= \alpha \left(\sigma \left(\sum_{b=1}^n \|e_b\|^2 B(e_b, e_b) \right) \right)^a = -\alpha(n-1)(\sigma(\text{tr } B))^a = -\frac{\alpha}{2}(n-1)\xi^a, \end{aligned}$$

следовательно, $\xi^a = -\frac{2\alpha}{n-1} B^{ab}{}_b$, $\xi^{\hat{a}} = -\frac{2\alpha}{n-1} B_{ab}{}^{\hat{b}}$. Отсюда следует, что на пространстве присоединенной G -структуры условие $B_1 = 0$, т.е. $\xi = 0$, запишется в форме $B^{ab}{}_b = 0$. С другой стороны, поскольку

$$\begin{aligned} \langle \langle \xi, \varepsilon_{\hat{b}} \rangle \rangle &= \langle \xi, \varepsilon_{\hat{b}} \rangle + i \langle J^3 \xi, \varepsilon_{\hat{b}} \rangle = 2 \langle \xi, \varepsilon_{\hat{b}} \rangle = 2 \varepsilon(b) \xi^{\hat{b}}, \\ \langle \langle \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}} \rangle \rangle &= 2 \varepsilon(b) (\varepsilon_a)^{\hat{b}} = 2 \varepsilon(b) \delta_a^{\hat{b}}, \end{aligned}$$

условие $B_0 = 0$, т.е. $B(X, Y) = \frac{1}{2} (\langle \langle \xi, Y \rangle \rangle X - \langle \langle X, Y \rangle \rangle \xi)$, на пространстве присоединенной G -структуры запишется в форме

$$B^{ab}{}_c = \frac{\alpha}{2} \varepsilon(b) B(\varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{b}})^a = \frac{\alpha}{4} \varepsilon(b) (\langle \langle \xi, \varepsilon_{\hat{b}} \rangle \rangle \delta_c^a - \langle \langle \varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{b}} \rangle \rangle \xi^a) = -\alpha \xi^{[a} \delta_c^{\hat{b}]}$$

С учетом этого мы получаем критерии, перечисленные в табл. 1.

Таблица 1

Обобщенные классы Грея–Хервеллы

Принятое название структуры	Обобщенный класс Грея–Хервеллы	Критерий принадлежности	Критерий принадлежности на пространстве G -структуры
Келерова	$G\mathcal{K} = \{0\}$	$B = 0$ $C = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$ $B^{abc} = 0$
Приближенно келерова	$GN\mathcal{K} = W_1$	$B = 0$ $C_0 = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$ $B^{[abc]} = B^{abc}$
Почти келерова	$GA\mathcal{K} = W_2$	$B = 0$ $C_1 = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$ $B^{[abc]} = 0$
—	W_3	$B_1 = 0$ $C = 0$	$B^{ac}{}_c = 0$ $B^{abc} = 0$
—	W_4	$B_0 = 0$ $C = 0$	$B^{ab}{}_c = -\alpha\xi^{[a}\delta_c^{b]}$ $B^{abc} = 0$
Квази-келерова	$GQ\mathcal{K} = W_1 \oplus W_2$	$B = 0$	$B^{ab}{}_c = 0$
—	$W_1 \oplus W_3$	$B_1 = 0$ $C_0 = 0$	$B^{ab}{}_b = 0$ $B^{abc} = B^{[abc]}$
VG -структура	$GV\mathcal{G} = W_1 \oplus W_4$	$B_0 = 0$ $C_0 = 0$	$B^{ab}{}_c = -\alpha\xi^{[a}\delta_c^{b]}$ $B^{[abc]} = B^{abc}$
—	$W_2 \oplus W_3$	$B_1 = 0$ $C_1 = 0$	$B^{ab}{}_b = 0$ $B^{[abc]} = 0$
—	$W_2 \oplus W_4$	$B_0 = 0$ $C_1 = 0$	$B^{ab}{}_c = -\alpha\xi^{[a}\delta_c^{b]}$ $B^{[abc]} = 0$
Эрмитова	$G\mathcal{H} = W_3 \oplus W_4$	$C = 0$	$B^{abc} = 0$
G_2 -структура	$GG_2 = W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$	$C_1 = 0$	$B^{[abc]} = 0$
G_1 -структура	$GG_1 = W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$	$C_0 = 0$	$B^{abc} = B^{[abc]}$
—	$W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$	$B_0 = 0$	$B^{ab}{}_c = -\alpha\xi^{[a}\delta_c^{b]}$
Семи-келерова	$GSK = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$	$B_1 = 0$	$B^{ab}{}_b = 0$
Почти эрмитова	$GA\mathcal{H} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$	—	—

§ 3. Голоморфно-проективные преобразования $GA\mathcal{H}$ -структур и их тензорные инварианты

Изучим НР-преобразования $GA\mathcal{H}$ -структур. Кривая $\gamma: I \rightarrow M$ называется *голоморфно почти геодезической*, короче – *h-геодезической* (в иной терминологии *аналитически планарной кривой* [4]), если любой ее касательный вектор ξ_p после параллельного переноса вдоль этой кривой из точки p в любую ее точку q принадлежит линейной оболочке векторов ξ_q и $(J\xi)_q$.

Это понятие было введено в работе [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Переход от GAH -структуры (g, J) к GAH -структуре $(\tilde{g}, J)$ на многообразии M называется *голоморфно-проективным* (короче НР-) *преобразованием* GAH -структуры (g, J) , если любая кривая γ на M является h -геодезической в метрике $\tilde{g}$ тогда и только тогда, когда она является h -геодезической в метрике g , или, иными словами, метрики g и $\tilde{g}$ имеют общие h -геодезические.

Это условие тривиальным образом выполняется, если обе метрики имеют общую риманову связность, т.е. аффинно-эквивалентны. В этом случае НР-преобразование GAH -структуры называется *тривиальным*.

ПРИМЕР 1. Дiffeоморфизм $\varphi: M \rightarrow \bar{M}$ GAH -многообразия (M, g, J) на GAH -многообразие $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{J})$ называется *голоморфно-проективным отображением* [4], если любую h -геодезическую метрики g переводит в h -геодезическую метрики $\bar{g}$, причем $\varphi_* \circ J = \bar{J} \circ \varphi_*$, где φ_* – отображение увлечения тензорной алгебры многообразия M , порожденное диффеоморфизмом φ . В этом случае на M возникает новая GAH -структура $(\tilde{g}, J)$, $\tilde{g} = \varphi^* \bar{g}$, которая, очевидно, является голоморфно-проективным преобразованием исходной GAH -структуры.

Поднимая индекс у метрики $\tilde{g}$ с помощью метрики g , мы приходим к самосопряженному эндоморфизму f модуля $\mathcal{X}(M)$, задаваемому тождеством

$$\tilde{g}(X, Y) = g(X, fY), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Назовем этот эндоморфизм *оператором НР-деформации*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Во введенных обозначениях:

- 1) $f \circ J = J \circ f$;
- 2) $\langle \langle fX, Y \rangle \rangle = \langle \langle X, fY \rangle \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\tilde{g}(JX, Y) = g(JX, fY) = -g(X, J(fY))$. С другой стороны, $\tilde{g}(JX, Y) = -\tilde{g}(X, JY) = -g(X, f(JY))$. Сравнивая эти соотношения, с учетом невырожденности метрики получаем соотношение 1). Далее,

$$\begin{aligned} \langle \langle fX, Y \rangle \rangle &= \langle fX, Y \rangle + i \langle J^3(fX), Y \rangle = \langle X, fY \rangle + i \langle f \circ J^3 X, Y \rangle \\ &= \langle X, fY \rangle + i \langle J^3 X, fY \rangle = \langle \langle X, fY \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Пусть задано НР-преобразование GAH -структуры (g, J) на многообразии M . Пусть на M фиксирована карта, в которой h -геодезическая γ задается уравнениями $x^k = x^k(t)$, $k = 1, \dots, n$, и пусть $\xi^k = \frac{dx^k}{dt}$. Тогда условие аналитической планарности кривой γ в римановой связности ∇ метрики g примет вид

$$\frac{d\xi^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j = a(t)\xi^k + b(t)J_r^k \xi^r, \quad (4)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ – подходящие функции на γ , Γ_{ij}^k – коэффициенты Кристоффеля связности ∇ . С другой стороны, поскольку кривая γ будет аналитически-планарной и в римановой связности $\tilde{\nabla}$ метрики $\tilde{g}$, то

$$\frac{d\xi^k}{dt} + \tilde{\Gamma}_{ij}^k \xi^i \xi^j = \tilde{a}(t)\xi^k + \tilde{b}(t)J_r^k \xi^r,$$

откуда получаем

$$T_{ij}^k \xi^i \xi^j = 2(\psi(t) \xi^k + \sigma(t) J_r^k \xi^r),$$

где T_{ij}^k – компоненты тензора аффинной деформации от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$, $\psi(t) = \frac{1}{2}(\tilde{a}(t) - a(t))$, $\sigma(t) = \frac{1}{2}(\tilde{b}(t) - b(t))$. Следовательно, ψ и σ – однородные степени 1 функции от переменных ξ^k , и, таким образом, $\psi(t) = \psi_k(t) \xi^k$, $\sigma(t) = \sigma_k(t) \xi^k$, откуда вытекает, что

$$(T_{ij}^k - 2\psi_r(t) \delta_i^r \delta_j^k - 2\sigma_r(t) \delta_i^r J_j^k) \xi^i \xi^j = 0.$$

Поскольку это соотношение должно выполняться тождественно относительно переменных ξ^k , имеем $T_{ij}^k = \psi_i \delta_j^k + \psi_j \delta_i^k + \sigma_i J_j^k + \sigma_j J_i^k$, или, в безындексной записи,

$$T(X, Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X + \sigma(X)JY + \sigma(Y)JX, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (5)$$

С учетом этого соотношения получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(J)Y &= \tilde{\nabla}_X(JY) - J \circ \tilde{\nabla}_X Y \\ &= \nabla_X(JY) + T(X, JY) - J \circ \nabla_X Y - J \circ T(X, Y) \\ &= \nabla_X(J)Y + T(X, JY) - J \circ T(X, Y) \\ &= \nabla_X(J)Y + \psi(JY)X - \psi(Y)JX + \sigma(JY)JX - \alpha\sigma(Y)X. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{\nabla}_X(J)Y = \nabla_X(J)Y + \psi(JY)X - \psi(Y)JX + \sigma(JY)JX - \sigma(J^2Y)X. \quad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. НР-преобразование $GA\mathcal{H}$ -структуры назовем *допустимым*, если $\psi = \sigma \circ J$, или, что равносильно, $\sigma = \psi \circ J^3$.

Значение этого понятия определяется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 6. НР-преобразование почти эрмитовой структуры со знакоопределенной метрикой всегда допустимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 1 и соотношения (6) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X(J)Y, Y) = \tilde{g}(\nabla_X(J)Y, Y) + \psi(JY)\tilde{g}(X, Y) \\ &\quad - \psi(Y)\tilde{g}(JX, Y) + \sigma(JY)\tilde{g}(JX, Y) - \sigma(Y)\tilde{g}(J^2X, Y). \end{aligned}$$

Заметим, что если Y – собственный вектор эндоморфизма f с собственным значением λ , то

$$\tilde{g}(\nabla_X(J)Y, Y) = \langle \nabla_X(J)Y, fY \rangle = \lambda \langle \nabla_X(J)Y, Y \rangle = 0.$$

Поэтому предыдущее соотношение в силу невырожденности метрики дает равенство

$$\psi(JY)Y + \psi(Y)JY - \sigma(JY)JY - \alpha\sigma(Y)Y = 0.$$

С учетом линейной независимости векторов Y и JY получаем

$$\psi(Y) = \sigma \circ J(Y), \quad \sigma(Y) = \psi \circ J^3(Y). \quad (7)$$

С другой стороны, поскольку метрика g знакоопределена, в каждой точке $p \in M$ эндоморфизм f_p допускает базис, состоящий из собственных векторов. Следовательно, соотношения (7) выполняются тождественно на M .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из проведенного доказательства видно, что НР-преобразование простого спектра (т.е. допускающее базис из собственных векторов) всегда допустимо.

Условимся в дальнейшем все НР-преобразования $GA\mathcal{H}$ -структур подразумевать допустимыми. Для таких преобразований соотношение (5) примет вид

$$T(X, Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X + \alpha\psi(JX)JY + \alpha\psi(JY)JX. \quad (8)$$

Скалярно умножая обе части (8) на вектор $Z \in \mathcal{X}(M)$ и свертывая полученное соотношение по аргументам Y и Z , найдем, что

$$\psi(X) = \frac{1}{2(n+1)} t(X), \quad X \in \mathcal{X}(M), \quad (9)$$

где t – ковектор с компонентами $t_i = T_{ik}^k$, откуда следует, в частности, что ψ является 1-формой на M . Более того, это соотношение можно записать в форме

$$\psi_i = \frac{1}{2(n+1)} T_{ik}^k = \frac{1}{2(n+1)} (\tilde{\Gamma}_{ik}^k - \Gamma_{ik}^k). \quad (10)$$

Хорошо известно, что $\Gamma_{ik}^k = \frac{\partial \ln |\det g|}{\partial x^i}$, и, таким образом,

$$\psi = \frac{1}{2(n+1)} d \left(\ln \left| \frac{\det \tilde{g}}{\det g} \right| \right).$$

Введем в рассмотрение 1-форму Γ на пространстве расслоения реперов над многообразием M формулой

$$\Gamma = \frac{1}{2(n+1)} d(\ln |\det g|).$$

В силу локальной тривиальности этого расслоения ее можно отождествить с локальным геометрическим объектом (псевдотензором) на M , в фиксированной карте имеющим компоненты

$$\Gamma_i = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln |\det g|) = \frac{1}{2(n+1)} \Gamma_{ik}^k.$$

Из сказанного выше следует, что форма ψ является мерой изменения этого псевдотензора при (допустимых) НР-преобразовании $GA\mathcal{H}$ -структуры, т.е. $\psi = \tilde{\Gamma} - \Gamma$. По этой причине введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем форму ψ заданного НР-преобразования $GA\mathcal{H}$ -структуры *формой НР-искажения*.

Из соотношения (8) непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Тензор T , рассматриваемый как двуместный эндоморфизм $\mathbb{K} \otimes C^\infty(M)$ -модуля $\mathcal{X}(M)$, является $\mathbb{K}$ -билинейным, или, что равносильно,

$$T(JX, Y) = T(X, JY) = J \circ T(X, Y), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Отсюда (как, впрочем, и непосредственно из (8)) вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Тензоры ∇J , B и C являются инвариантами (допустимых) НР-преобразований.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из свойства 4) предложения 1 легко следует, что условие $C_0 = 0$ равносильно кососимметричности структурного тензора по ковариантным аргументам, в частности инвариантно при h -геодезических преобразованиях.

Изучим теперь, как меняется при НР-преобразовании обобщенный вектор Ли. Прежде всего, отметим, что вектор η , дуальный форме $\delta\Omega$, вычисляется по формуле

$$\eta = -\alpha g^{ij} \nabla_{e_j}(J) e_i.$$

В самом деле, как уже отмечалось, $\nabla_X(\Omega)(Y, Z) = \alpha \langle \nabla_X(J)Y, Z \rangle$. С учетом этого обстоятельства, а также формулы 2) из леммы 1 имеем

$$\delta\Omega(Y) = g^{ij} \nabla_{e_j}(\Omega)(Y, e_i) = \alpha g^{ij} \langle \nabla_{e_j}(J)Y, e_i \rangle = -\alpha g^{ij} \langle \nabla_{e_j}(J)e_i, Y \rangle.$$

Заметим, что при НР-преобразовании вектору η соответствует вектор $\tilde{\eta} = -\alpha \tilde{g}^{ij} \tilde{\nabla}_{e_j}(J)e_i$, дуальный 1-форме $\tilde{\delta}\tilde{\Omega}$, где $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ – произвольный базис пространства $T_p(M)$, $p \in M$ (все тензорные поля представляются своими значениями в точке p). Согласно определению оператора НР-деформации имеем $\tilde{g}_{ij} = g_{ik} f_j^k$. Поскольку $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, отсюда следует, что $\tilde{g}^{ij} = (f^{-1})_k^i g^{kj}$. С учетом предложения 4 получаем

$$\tilde{\eta} = -\alpha (f^{-1})_k^i g^{kj} \tilde{\nabla}_{e_j}(J)e_i = -\alpha (f^{-1})_k^i g^{kj} \nabla_{e_j}(J)e_i = -\alpha g^{kj} \nabla_{e_j}(J)((f^{-1})e_k).$$

Очевидно, если $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ортонормированный базис пространства $T_p(M)$ как $\mathbb{C}$ -модуля, это соотношение переписывается в форме

$$\tilde{\eta} = \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \{-\alpha \nabla_{e_a}(J)(f^{-1}e_a) + \nabla_{J e_a}(J)(f^{-1}(J e_a))\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J(\tilde{\eta}) &= -\alpha \left(\sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \{-\nabla_{e_a}(J)(J \circ f^{-1}e_a) + \nabla_{J e_a}(J)(f^{-1}e_a)\} \right) \\ &= -2\alpha \left(\sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 B(e_a, f^{-1}e_a) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

ЛЕММА 4. Во введенных обозначениях имеем $(\tilde{\delta}\tilde{\Omega} \circ J)^\# = -J\tilde{\eta}$, где $\#$ – оператор дуальности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\tilde{g}((\tilde{\delta}\tilde{\Omega} \circ J)^\#, X) = \tilde{\delta}\tilde{\Omega} \circ J(X) = \tilde{g}(\tilde{\eta}, JX) = -\tilde{g}(J\tilde{\eta}, X)$. В силу невырожденности метрики получаем требуемое.

С учетом леммы 4 и соотношения (11) имеем

$$\tilde{\xi} = -\frac{\alpha}{n-1} (\tilde{\delta}\tilde{\Omega} \circ J)^\# = \frac{\alpha}{n-1} J(\tilde{\eta}) = -\frac{2}{n-1} \sum_{a=1}^n (\|e_a\|^2 B(e_a, f^{-1}e_a)). \quad (12)$$

Определим тензор B^* , сопряженный тензору B , формулой

$$\langle\langle B(X, Y), Z \rangle\rangle = \langle\langle X, B^*(Y, Z) \rangle\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. При НР-преобразовании $GA\mathcal{H}$ -структуры тензор B^* преобразуется по закону

$$\tilde{B}^*(Y, Z) = f^{-1} \circ B^*(Y, fZ), \quad Y, Z \in \mathcal{X}(M). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом предложения 4 имеем

$$\begin{aligned} \tilde{h}(X, \tilde{B}^*(Y, Z)) &= \tilde{h}(\tilde{B}(X, Y), Z) = \tilde{h}(B(X, Y), Z) \\ &= \langle\langle B(X, Y), fZ \rangle\rangle = \langle\langle X, B^*(Y, fZ) \rangle\rangle, \end{aligned}$$

и, поскольку $\tilde{h}(X, \tilde{B}^*(Y, Z)) = h(X, f \circ \tilde{B}^*(Y, Z))$, с учетом невырожденности метрики получаем (13).

Очевидно, $B^*(Y, Z) = -B^*(Z, Y)$, поскольку, в силу свойств 1)–4) предложения 1

$$\begin{aligned} \langle\langle X, B^*(Y, Z) \rangle\rangle &= \langle\langle B(X, Y), Z \rangle\rangle = -\overline{\langle\langle Y, B(X, Z) \rangle\rangle} \\ &= -\langle\langle B(X, Z), Y \rangle\rangle = -\langle\langle X, B^*(Z, Y) \rangle\rangle, \end{aligned}$$

а метрика невырождена. Аналогичным свойством обладает тензор $\tilde{B}^*$, сопряженный относительно формы $\tilde{h}$ виртуальному тензору $\tilde{B}$ преобразованной $GA\mathcal{H}$ -структуры. С учетом этого замечания и соотношения (13) имеем

$$B^*(Y, fY) = 0, \quad Y \in \mathcal{X}(M). \quad (14)$$

Поляризация этого соотношения приводит к тождеству

$$B^*(Y, fZ) + B^*(Z, fY) = 0.$$

Следовательно,

$$\langle\langle B(X, Y), fZ \rangle\rangle + \langle\langle B(X, Z), fY \rangle\rangle = \langle\langle X, B^*(Y, fZ) \rangle\rangle + \langle\langle X, B^*(Z, fY) \rangle\rangle = 0.$$

С учетом свойства 3) предложения 1 и невырожденности метрики отсюда находим, что

$$f \circ B(X, Y) = B(X, fY). \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Аналогично формуле (15) доказываем, что

$$f \circ C(X, Y) = C(X, fY),$$

и, таким образом, структурный тензор f -линеен по второму аргументу.

Положив в (15) $X = e_a$, $Y = f^{-1}(e_a)$, получим

$$\sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 f \circ B(e_a, f^{-1}e_a) = \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 B(e_a, e_a),$$

в силу чего предыдущее соотношение можно записать в форме

$$-\frac{1}{n-1} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 B(e_a, f^{-1}e_a) = f^{-1}(\text{tr } B).$$

Подставляя это соотношение в (12), получим окончательно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. При НР-преобразовании GAH -структуры обобщенный вектор Ли преобразуется по закону

$$\tilde{\xi} = f^{-1}(\xi). \quad (16)$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Обобщенная форма Ли является инвариантом НР-преобразований GAH -структуры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если ω и $\tilde{\omega}$ – обобщенные формы Ли исходной и преобразованной GAH -структур соответственно, то в силу предложений 2 и 6 имеем

$$\tilde{\omega}(X) = \tilde{g}(\tilde{\xi}, X) = g(\tilde{\xi}, fX) = g(f\tilde{\xi}, X) = g(\xi, X) = \omega(X), \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Условие $B_1 = 0$ инвариантно относительно НР-преобразований GAH -структуры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, условие $B_1 = 0$ равносильно равенству нулю обобщенного вектора Ли ξ и в силу предложения 6 равенству нулю вектора $\tilde{\xi} = f^{-1}(\xi)$, а значит, и условию $\tilde{B}_1 = 0$.

Заметим, что из предложения 4 и замечания 2 следует, что условия $B = 0$, $C = 0$ и $C_0 = 0$ также инвариантны относительно НР-преобразований. Используя эти соображения и табл. 1, приходим к следующему результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Классы $\{0\}$, W_1 , W_3 , $W_1 \oplus W_2$, $W_1 \oplus W_3$, $W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ инвариантны относительно НР-преобразований GAH -структуры.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Аналогичные соображения показывают, что для остальных классов при НР-преобразовании $GA\mathcal{H}$ -структура класса U переходит в $GA\mathcal{H}$ -структуру класса V в соответствии с табл. 2.

ТАБЛИЦА 2
Соответствие неинвариантных классов $GA\mathcal{H}$ -структур
при НР-преобразованиях

U	V
$GA\mathcal{K} = W_2$	$GQ\mathcal{K} = W_1 \oplus W_2$
W_4	$GH = W_3 \oplus W_4$
$W_1 \oplus W_4$	$GG_1 = W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$
$W_2 \oplus W_3$	$GSK = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$
$W_2 \oplus W_4$	$GA\mathcal{H} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$
$GG_2 = W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$	$GA\mathcal{H} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$	$GA\mathcal{H} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$

Для нахождения условий инвариантности остальных классов Грея–Хервеллы докажем следующие два утверждения.

ЛЕММА 5. *Условие $C_1 = 0$ инвариантно при НР-преобразованиях $GA\mathcal{H}$ -структуры тогда и только тогда, когда ее структурный тензор f -билинеен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $C_1 = 0$ для исходной структуры, очевидно, равносильно тождеству

$$\langle\langle C(X, Y), Z \rangle\rangle + \langle\langle C(Y, Z), X \rangle\rangle + \langle\langle C(Z, X), Y \rangle\rangle = 0.$$

С другой стороны, для преобразованной структуры это условие равносильно тождеству

$$\langle\langle C(X, Y), fZ \rangle\rangle + \langle\langle C(Y, Z), fX \rangle\rangle + \langle\langle C(Z, X), fY \rangle\rangle = 0.$$

Заменив в первом соотношении Z на fZ и используя во втором соотношении f -линейность структурного тензора по второму аргументу (см. замечание 4), а также предложение 2, почленно вычтем полученные соотношения:

$$\langle\langle C(fZ, X), Y \rangle\rangle - \langle\langle f \circ C(Z, X), Y \rangle\rangle = 0,$$

откуда следует, что $C(fZ, X) = f \circ C(Z, X)$, $Z, X \in \mathcal{X}(M)$. Очевидно, верно и обратное.

ЛЕММА 6. *Условие $B_0 = 0$ инвариантно при НР-преобразовании $GA\mathcal{H}$ -структуры тогда и только тогда, когда это преобразование тривиально в области, где $B_1 \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что условие $B_0 \neq 0$ равносильно условию $\xi \neq 0$. Далее, согласно предложению 4 и следствию 5 тензор

$$\beta(X, Y) = B(X, Y) - \frac{1}{2} \langle \langle \xi, Y \rangle \rangle X = B(X, Y) - \frac{1}{2} \omega(Y)X + \frac{1}{2} \omega(J^3 Y)JX$$

является инвариантом НР-преобразований. С учетом соотношения (1) этот инвариант можно представить в форме

$$\beta(X, Y) = B_0(X, Y) - \frac{1}{2} \langle \langle X, Y \rangle \rangle \xi.$$

Следовательно, условие НР-инвариантности равенства нулю тензора B_0 можно записать в форме $\tilde{h}(X, Y)\tilde{\xi} = h(X, Y)\xi$, или с учетом (16) в форме

$$\langle \langle X, fY \rangle \rangle \xi = \langle \langle X, Y \rangle \rangle f\xi, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Положив здесь $Y = X$, находим, что $\langle X, fX \rangle \xi = \langle X, X \rangle f(\xi)$, а значит, ξ – собственный вектор эндоморфизма f . Пусть λ – его собственное значение. Тогда $\langle X, fX \rangle = \lambda \langle X, X \rangle$. Поляризуя это соотношение, с учетом самосопряженности эндоморфизма f и невырожденности метрики получаем, что $f = \lambda \text{id}$, а значит, $\tilde{g} = \lambda g$, т. е. преобразование метрики g является конформным. Но тогда, как хорошо известно (см., например, [8], [4]),

$$T_{ij}^k = \theta_i \delta_j^k + \theta_j \delta_i^k - \theta^k g_{ij}$$

для подходящей 1-формы θ . С другой стороны, согласно (8)

$$T_{ij}^k = \psi_i \delta_j^k + \psi_j \delta_i^k + \alpha(\psi_r J_i^r J_j^k + \psi_r J_j^r J_i^k).$$

Свертывая эти соотношения с тензором g^{ij} и учитывая, что $g^{ij} J_i^r J_j^k = -\alpha g^{rk}$, убеждаемся в том, что $\theta = 0$, а значит, $T = 0$, т. е. преобразование $GA\mathcal{H}$ -структуры тривиально. Обратное утверждение очевидно.

Используя эти факты и табл. 1, приходим к следующему основному результату.

ТЕОРЕМА 7. *Классы $\{0\}$, W_1 , W_3 , $W_1 \oplus W_2$, $W_1 \oplus W_3$, $W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ $GA\mathcal{H}$ -структур инвариантны относительно НР-преобразований; $GA\mathcal{H}$ -структуры классов W_2 , W_4 , $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_3$ при НР-преобразованиях переходят в $GA\mathcal{H}$ -структуры классов $W_1 \oplus W_2$, $W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ соответственно; $GA\mathcal{H}$ -структуры классов $W_2 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ могут переходить в $GA\mathcal{H}$ -структуры любого класса. При этом структуры классов W_2 , $W_2 \oplus W_3$, $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ переходят в структуры того же класса тогда и только тогда, когда структурный тензор f -билинеен. Структуры классов W_4 , $W_1 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ переходят в структуры того же класса тогда и только тогда, когда НР-преобразование тривиально в области, где $\xi \neq 0$. Структура класса $W_2 \oplus W_4$ переходит в структуру того же класса тогда и только тогда,*

когда НР-преобразование тривиально в области, где $\xi \neq 0$, а структурный тензор f -билинеен.

Пусть M – гладкое многообразие, на котором фиксирована GAH -структура $\mathcal{S} = \{J, g\}$, и пусть $g \rightarrow \tilde{g}$ – ее НР-преобразование. Заметим, что из формулы (1) следует, что

$$\begin{aligned} \langle\langle X, B^*(Y, Z) \rangle\rangle &= \langle\langle B(X, Y), Z \rangle\rangle \\ &= \langle\langle B_0(X, Y), Z \rangle\rangle + \frac{1}{2}(\langle\langle \xi, Y \rangle\rangle \langle\langle X, Z \rangle\rangle - \langle\langle X, Y \rangle\rangle \langle\langle \xi, Z \rangle\rangle), \end{aligned}$$

откуда в силу невырожденности метрики имеем

$$B^*(Y, Z) = B_0^*(Y, Z) + \frac{1}{2}(\langle\langle Y, \xi \rangle\rangle Z - \langle\langle Z, \xi \rangle\rangle Y), \quad Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Положив здесь $Z = fY$, получим

$$B^*(Y, fY) = B_0^*(Y, fY) + \frac{1}{2}(\langle\langle Y, \xi \rangle\rangle fY - \langle\langle fY, \xi \rangle\rangle Y).$$

Пусть, в частности, $B_0 = 0$. С учетом данных табл. 1 отсюда следует, что структура $\mathcal{S}$ принадлежит классу $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ (или любому его подклассу). В этом случае

$$B^*(Y, fY) = \frac{1}{2}(\langle\langle Y, \xi \rangle\rangle fY - \langle\langle fY, \xi \rangle\rangle Y), \quad Y \in \mathcal{X}(M),$$

или, с учетом (14),

$$\langle\langle Y, \xi \rangle\rangle fY = \langle\langle fY, \xi \rangle\rangle Y, \quad Y \in \mathcal{X}(M). \quad (17)$$

Фиксируем точку $p \in M$ и условимся, что все тензорные поля представляются своими значениями в этой точке. Пусть эндоморфизм f скалярен. Как мы уже видели, в этом случае $\theta = 0$, т. е. НР-преобразование тривиально.

Пусть теперь эндоморфизм f не является скалярным в точке p , а значит, и в некоторой ее окрестности. Рассмотрим два случая.

1) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Выберем в $T_p(M)$, рассматриваемом как $\mathbb{C}$ -модуль, базис, состоящий из несобственных векторов эндоморфизма f . Если Y – один из векторов такого базиса, то векторы Y и fY будут $\mathbb{C}$ -линейно независимыми и в силу (17)

$$\langle\langle fY, \xi \rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle Y, \xi \rangle\rangle = 0.$$

Вследствие произвольности выбора элемента базиса и невырожденности метрики отсюда вытекает, что $\xi = 0$, а значит, $B = 0$.

2) $\mathbb{K} = \mathbb{D}$. Если Y – несобственный вектор эндоморфизма f , соотношение (17) возможно лишь в случае, когда $\langle\langle Y, \xi \rangle\rangle, \langle\langle fY, \xi \rangle\rangle Y$ – необратимые элементы кольца $\mathbb{D}$, и, таким образом,

$$\langle Y, \xi \rangle = \pm \langle JY, \xi \rangle, \quad \langle fY, \xi \rangle = \pm \langle (J \circ f)Y, \xi \rangle.$$

В силу произвольности выбора $Y \in T_p(M)$ отсюда следует, что $J\xi = \pm\xi$. В этом случае соотношение (17) принимает вид

$$\langle Y, \xi \rangle f(Y \mp JY) = \langle fY, \xi \rangle (Y \mp JY).$$

Рассмотрим это соотношение для элементов базиса пространства $T_p(M)$, состоящего из векторов, не являющихся собственными для эндоморфизмов $f \circ (\text{id} \pm J)$. В силу линейной независимости векторов $Y \pm JY$ и $f(Y \pm JY)$ и невырожденности метрики получаем, как и выше, что $\xi = 0$, т. е. $B = 0$.

Мы приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 8. *Собственные GAH-структуры классов W_4 , $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_4$ и $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ не допускают нетривиальных HP-преобразований.*

Здесь под собственной GAH-структурой понимается GAH-структура данного класса, не лежащая в каком-либо его подклассе.

§ 4. Объект Вейля

Перейдем к выводу основного инварианта HP-преобразований GAH-структур. Пусть это преобразование переводит метрику g в метрику $\tilde{g}$, и пусть, как и выше, T – тензор аффинной деформации от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$. Обозначим R и $\tilde{R}$ тензоры римановой кривизны связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ соответственно. Напомним, что по определению

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

аналогично определяется тензор $\tilde{R}$. Учитывая, что $\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = T(X, Y)$, отсюда нетрудно получить

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \nabla_X(T)(Y, Z) - \nabla_Y(T)(X, Z) \\ &\quad + T(X, T(Y, Z)) - T(Y, T(X, Z)), \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

С учетом формулы (8) это соотношение принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \Psi(X, Z)Y - \Psi(Y, Z)X + \alpha\{\Psi(X, JZ)JY \\ &\quad - \Psi(Y, JZ)JX + \Psi(X, JY)JZ - \Psi(Y, JX)JZ \\ &\quad + \psi(\nabla_X(J)Y)JZ + \psi(\nabla_X(J)Z)JY - \psi(\nabla_Y(J)X)JZ \\ &\quad - \psi(\nabla_Y(J)Z)JX + \psi(JY)\nabla_X(J)Z + \psi(JZ)\nabla_X(J)Y \\ &\quad - \psi(JX)\nabla_Y(J)Z - \psi(JZ)\nabla_Y(J)X\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\Psi(X, Y) = \nabla_X(\psi)Y - \psi(X)\psi(Y) - \alpha\psi(JX)\psi(JY)$. Запишем это соотношение в индексной форме:

$$\begin{aligned} \tilde{R}^i_{jkl} &= R^i_{jkl} + \Psi_{kj}\delta_l^i - \Psi_{lj}\delta_k^i + \alpha\{\Psi_{kr}J_j^r J_l^i - \Psi_{lr}J_j^r J_k^i + \Psi_{kr}J_l^r J_j^i \\ &\quad - \Psi_{lr}J_k^r J_j^i + \psi_r J_{l,k}^r J_j^i + \psi_r J_{j,k}^r J_l^i - \psi_r J_{k,l}^r J_j^i - \psi_r J_{j,l}^r J_k^i \\ &\quad + \psi_r J_l^r J_{j,k}^i + \psi_r J_j^r J_{l,k}^i - \psi_r J_k^r J_{j,l}^i - \psi_r J_j^r J_{k,l}^i\}. \end{aligned}$$

Для выявления связи соответствующих тензоров Риччи $\tilde{r}$ и r свернем это соотношение по индексам i и l :

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{jk} = r_{jk} + 2n\Psi_{jk} + \alpha\{-\Psi_{ir}J_k^iJ_j^r - \Psi_{ir}J_j^iJ_k^r + \psi_rJ_{i,k}^rJ_j^i - \psi_rJ_{k,i}^rJ_j^i \\ - \psi_rJ_{j,i}^rJ_k^i + \psi_rJ_{j,k}^iJ_i^r - \psi_rJ_k^rJ_{j,i}^i - \psi_rJ_j^rJ_{k,i}^i\},\end{aligned}$$

или, в безындexсной форме,

$$\begin{aligned}\tilde{r}(X, Y) = r(X, Y) + 2n\Psi(X, Y) - 2\alpha\Psi(JX, JY) - \alpha\psi\{\nabla_{JX}(J)Y \\ + \nabla_{JY}(J)X + \delta\Omega(X)JY + \delta\Omega(Y)JX\}.\end{aligned}$$

Разрешим это соотношение относительно формы Ψ :

$$\begin{aligned}\Psi(X, Y) = \frac{1}{2(n^2 - 1)}\{n(\tilde{r}(X, Y) - r(X, Y)) + \alpha(\tilde{r}(JX, JY) - r(JX, JY))\} \\ + \frac{\alpha n}{2(n^2 - 1)}\psi(\nabla_{JX}(J)Y + \nabla_{JY}(J)X + \delta\Omega(X)JY + \delta\Omega(Y)JX) \\ + \frac{\alpha}{2(n^2 - 1)}\psi(\nabla_X(J)(JY) + \nabla_Y(J)(JX) + \delta\Omega(JX)Y + \delta\Omega(JY)X).\end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в (18), с учетом предложения 4 и следствия 5 получим, что следующий объект, который мы назовем *объектом Вейля*, является инвариантом НР-преобразований:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{n}{2(n^2 - 1)}\{r(X, Z)Y - r(Y, Z)X \\ + \alpha r(X, JZ)JY - \alpha r(Y, JZ)JX + \alpha r(X, JY)JZ - \alpha r(Y, JX)JZ\} \\ - \frac{\alpha}{2(n^2 - 1)}\{r(JX, JZ)Y - r(JY, JZ)X + r(JX, Z)JY \\ - r(JY, Z)JX + r(JX, Y)JZ - r(JY, X)JZ\} \\ - \frac{\alpha n}{2(n^2 - 1)}\{\Gamma(\nabla_{JX}(J)Z + \nabla_{JZ}(J)X)Y - \Gamma(\nabla_{JY}(J)Z + \nabla_{JZ}(J)Y)X \\ + \Gamma(\nabla_Z(J)X + \alpha\nabla_{JX}(J)(JZ))JY - \Gamma(\nabla_Z(J)Y + \alpha\nabla_{JY}(J)(JZ))JX \\ + \Gamma(\nabla_Y(J)X + \alpha\nabla_{JX}(J)(JY))JZ - \Gamma(\nabla_X(J)Y + \alpha\nabla_{JY}(J)(JX))JZ \\ + \Gamma(\delta\Omega(X)JZ + \delta\Omega(Z)JX)Y - \Gamma(\delta\Omega(Y)JZ + \delta\Omega(Z)JY)X \\ + \Gamma(\delta\Omega(X)Z + \alpha\delta\Omega(JZ)JX)JY - \Gamma(\delta\Omega(Y)Z - \alpha\delta\Omega(JZ)JY)JX \\ + \Gamma(\delta\Omega(X)Y + \alpha\delta\Omega(JY)JX)JZ - \Gamma(\delta\Omega(Y)X - \alpha\delta\Omega(JX)JY)JZ\} \\ - \frac{\alpha}{2(n^2 - 1)}\{\Gamma(\nabla_X(J)JZ + \nabla_Z(J)JX)Y - \Gamma(\nabla_Y(J)JZ + \nabla_Z(J)JY)X \\ + \Gamma(\nabla_X(J)Z + \alpha\nabla_{JZ}(J)(JX))JY - \Gamma(\nabla_Y(J)Z + \alpha\nabla_{JZ}(J)(JY))JX \\ + \Gamma(\nabla_X(J)Y + \alpha\nabla_{JY}(J)(JX))JZ - \Gamma(\nabla_Y(J)X + \alpha\nabla_{JX}(J)(JY))JZ \\ + \Gamma(\delta\Omega(JX)Z + \delta\Omega(JZ)X)Y - \Gamma(\delta\Omega(JY)Z + \delta\Omega(JZ)Y)X \\ + \alpha\Gamma(\delta\Omega(JX)JZ + \delta\Omega(Z)X)JY - \alpha\Gamma(\delta\Omega(JY)JZ + \delta\Omega(Z)Y)JX\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha \Gamma(\delta\Omega(JX)JY + \alpha\delta\Omega(Y)X)JZ - \alpha \Gamma(\delta\Omega(JY)JX + \delta\Omega(X)Y)JZ\} \\
& + \alpha \{-\Gamma(\nabla_X(J)Y)JZ - \Gamma(\nabla_X(J)Z)JY + \Gamma(\nabla_Y(J)X)JZ \\
& + \Gamma(\nabla_Y(J)Z)JX - \Gamma(JY)\nabla_X(J)Z - \Gamma(JZ)\nabla_X(J)Y \\
& + \Gamma(JX)\nabla_Y(J)Z + \Gamma(JZ)\nabla_Y(J)X\}.
\end{aligned}$$

Это весьма громоздкое выражение приобретает существенно более компактный вид в случае обобщенных приближенно келеровых структур. В самом деле, для таких структур в силу табл. 1 имеем $B = 0$, $C_1 = 0$, что (с учетом леммы 1) равносильно тождествам:

- 1) $\nabla_{JX}(J)Y = \nabla_X(J)(JY) = -J \circ \nabla_X(J)Y$;
- 2) $\nabla_X(J)Y = -\nabla_Y(J)X$.

Кроме того, в силу теоремы 2 имеем $\xi = 0$, а значит, $\delta\Omega = 0$. Наконец, согласно [15] выполнено равенство $r(JX, Y) = -r(X, JY)$, а значит, $r(JX, JY) = -\alpha r(X, Y)$. С учетом этих соображений

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \frac{1}{2(n+1)} \{r(X, Z)Y - r(Y, Z)X + \alpha r(X, JZ)JY \\
&\quad - \alpha r(Y, JZ)JX + 2\alpha r(X, JY)JZ\} \\
&\quad + \alpha \{-\Gamma(\nabla_X(J)Y)JZ - \Gamma(\nabla_X(J)Z)JY + \Gamma(\nabla_Y(J)X)JZ \\
&\quad + \Gamma(\nabla_Y(J)Z)JX - \Gamma(JY)\nabla_X(J)Z - \Gamma(JZ)\nabla_X(J)Y \\
&\quad + \Gamma(JX)\nabla_Y(J)Z + \Gamma(JZ)\nabla_Y(J)X\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что в случае келеровых многообразий классического типа этот объект совпадает с тензором голоморфной проективной кривизны, введенным Тасиро и Исихарой [9], [10]. Тензором он является и в случае $G\mathcal{K}$ -многообразий:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \frac{1}{2(n+1)} \{r(X, Z)Y - r(Y, Z)X + \alpha r(X, JZ)JY \\
&\quad - \alpha r(Y, JZ)JX + 2\alpha r(X, JY)JZ\}. \tag{19}
\end{aligned}$$

В общем случае объект Вейля, очевидно, не является тензором, в частности его обращение в нуль на многообразии M не имеет инвариантного смысла. Инвариантный смысл имеет, однако, его обращение в нуль на пространстве присоединенной G -структуры. В самом деле, на этом пространстве $\det g = \pm 1$, а значит, $\Gamma = 0$, в силу чего сужение объекта Вейля на это пространство вычисляется по формуле (19), откуда для таких $G\mathcal{AH}$ -многообразий

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \frac{1}{2(n+1)} \{r(X, Z)Y - r(Y, Z)X + \alpha r(X, JZ)JY \\
&\quad - \alpha r(Y, JZ)JX + 2\alpha r(X, JY)JZ\},
\end{aligned}$$

или, в индексной записи,

$$R^l_{kij} = \frac{1}{2(n+1)} (r_{ik}\delta_j^l - r_{jk}\delta_i^l + \alpha r_{ip}J_k^p J_j^l - \alpha r_{jp}J_k^p J_i^l + 2\alpha r_{ip}J_j^p J_k^l). \tag{20}$$

Свернем это соотношение по индексам l и j : $r_{ik} = -\alpha r_{jp} J_i^j J_k^p$, или, в эквивалентной записи, $r_k^i J_j^k = J_k^i r_j^k$. Таким образом,

$$\text{ric} \circ J = J \circ \text{ric}, \quad (21)$$

где ric – эндоморфизм Риччи многообразия. Свернем (20) с тензором g^{ki} :

$$g^{ki} R^l_{kij} = \frac{1}{2(n+1)} (\kappa \delta_j^l - r_j^i \delta_i^l + \alpha r_{ip} g^{ki} J_k^p J_j^l - \alpha r_{jp} g^{ki} J_k^p J_i^l + 2\alpha r_{ip} g^{ki} J_j^p J_k^l), \quad (22)$$

где $\kappa = r_{ij} g^{ij}$ – скалярная кривизна. Заметим, что с учетом (21):

- 1) $\alpha r_{ip} g^{ki} J_k^p J_j^l = \alpha r_{ip} J^{pi} J_j^l = 0$,
- 2) $-\alpha r_{jp} g^{ki} J_k^p J_i^l = r_{jp} J^{pl} = r_j^l$,
- 3) $2\alpha r_{ip} g^{ki} J_j^p J_k^l = 2\alpha r_p^k J_j^p J_k^l = 2\alpha J_p^k r_j^p J_k^l = 2r_j^p \delta_p^l = 2r_j^l$,

в силу чего (22) принимает вид

$$r_j^l = \frac{\kappa}{2n} \delta_j^l,$$

т.е. M – многообразие Эйнштейна. В частности, соотношение (20) запишется в форме

$$R^l_{kij} = \frac{\kappa}{4n(n+1)} (g_{ik} \delta_j^l - g_{jk} \delta_i^l + \alpha g_{ip} J_k^p J_j^l - \alpha g_{jp} J_k^p J_i^l + 2\alpha g_{ip} J_j^p J_k^l),$$

или, в безындексной записи,

$$R(X, Y)Z = \frac{\kappa}{4n(n+1)} \{ \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X + \alpha \langle X, JZ \rangle JY - \alpha \langle Y, JZ \rangle JX + 2\alpha \langle X, JY \rangle JZ \}. \quad (23)$$

Отсюда вытекает, в частности, что

$$R(JX, JY)Z = -\alpha R(X, Y)Z, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \quad (24)$$

Классические почти эрмитовы многообразия, удовлетворяющие тождеству (24), называются *паракелеровыми многообразиями*, в силу чего $GA\mathcal{H}$ -многообразия, ему удовлетворяющие, назовем *обобщенными паракелеровыми многообразиями*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *$GA\mathcal{H}$ -многообразие M является обобщенно-паракелеровым тогда и только тогда, когда его операторы римановой кривизны удовлетворяют тождествам*

$$J \circ R(X, Y) = R(X, Y) \circ J, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, тождество (24), очевидно, равносильно тождеству

$$R(JX, Y)Z = -R(X, JY)Z, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

С учетом этого, используя классические свойства симметрии тензора римановой кривизны, имеем

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)JZ, W \rangle &= \langle R(JZ, W)X, Y \rangle = -\langle R(Z, JW)X, Y \rangle \\ &= -\langle R(X, Y)Z, JW \rangle = \langle J \circ R(X, Y)Z, W \rangle, \end{aligned}$$

откуда в силу невырожденности метрики получаем (25). Очевидно, верно и обратное утверждение.

Далее, из соотношения (23) вытекает, что

$$\langle R(X, JX)X, JX \rangle = -\frac{\alpha\kappa}{n(n+1)} \|X\|^4, \quad X \in \mathcal{X}(M),$$

т. е. M – многообразие точечно постоянной голоморфной секционной кривизны [11], [15]. Более того, поскольку M – многообразие Эйнштейна, его скалярная кривизна постоянна, а значит, M – многообразие глобально постоянной голоморфной секционной кривизны.

Обратно, повторяя классическое рассуждение, приведенное при выводе предложения 7.3 из [16, гл. 9], в котором по существу используется лишь паракелеровость келерова многообразия, убеждаемся, что тензор римановой кривизны обобщенно-паракелерова GAH -многообразия точечно постоянной голоморфной секционной кривизны имеет вид (23), а значит, и (20), что, очевидно, равносильно обращению в нуль объекта Вейля на пространстве присоединенной G -структуры. Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 9. *Объект Вейля GAH -многообразия M обращается в нуль на пространстве присоединенной G -структуры тогда и только тогда, когда M – обобщенное паракелерово многообразие точечно постоянной голоморфной секционной кривизны. Это многообразие с необходимостью является многообразием Эйнштейна глобально постоянной голоморфной секционной кривизны.*

Эта теорема приводит к исчерпывающему результату в случае GNK -многообразий (см. табл. 1), обобщающих один из наиболее интересных классов почти эрмитовых многообразий – класс приближенно келеровых многообразий, характеризующихся киллинговостью фундаментальной формы структуры (о приближенно келеровых многообразиях см., например, [11], [15]). В самом деле, из [15, следствие 3 теорема 26] вытекает, что обобщенная паракелеровость GNK -многообразия равносильна абелевости его присоединенной K -алгебры, а значит, и обобщенной келеровости этого многообразия. С учетом [15, теорема 36] получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10. *Объект Вейля GNK -многообразия M обращается в нуль на пространстве присоединенной G -структуры тогда и только тогда, когда M локально эквивалентно одному из следующих многообразий, снабженных канонической GK -структурой:*

- 1) *комплексному псевдоевклидову пространству $\mathbb{C}_k^n$;*
- 2) *комплексному псевдопроективному пространству $\mathbb{C}P_k^n$;*
- 3) *комплексному псевдогиперболическому пространству $\mathbb{C}H_k^n$;*
- 4) *двойному евклидову пространству $\mathbb{R}^n \boxtimes \mathbb{R}^n$;*
- 5) *многообразию $\mathbb{R}P^n \diamond \mathbb{R}P^n$ нуль-пар вещественного проективного пространства.*

В случае односвязности многообразия эти локальные эквивалентности определены глобально.

Список литературы

1. *Levi-Civita T.* Sulle transformationi delle equazioni dinamiche // Ann. Math. Milano. Ser. 2. 1894. V. 24. P. 255–300.
2. *Thomas T. Y.* On projective and equiprojective geometries of paths // PWC Nat. Acad. Sci. USA. 1925. V. 11. P. 198–203.
3. *Weyl H.* Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projectiven und der conformen Auffassung // Göttingen Nachr. 1921. P. 99–112.
4. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.
5. *Westlake W. J.* Hermitian spaces in geodesic correspondence // Proc. AMS. 1954. V. 5. № 2. P. 301–303.
6. *Yano K.* Sur la correspondance projective entre deux espaces pseudohermitens // C.R. Acad. Sci. Paris. 1956. V. 239. P. 1346–1348.
7. *Otsuki T., Tashiro Y.* On curves in Kählerian spaces // Math. J. Okayama univ. 1954. V. 4. № 1. P. 57–78.
8. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. Pure ed Appl. 1980. V. 123. № 4. P. 35–58.
9. *Tashiro Y.* On holomorphically projective correspondences in an almost complex space // Math. J. Okayama Univ. 1957. V. 6. № 2. P. 147–152.
10. *Ishihara S.* Holomorphically changes and their groups in an almost complex manifold // Tohoku Math. J. 1957. V. 9. № 3. P. 273–297.
11. *Gray A.* Nearly Kähler manifolds // J. Different. Geom. 1970. V. 4. № 3. P. 283–309.
12. *Арсеньева О. Е., Кириченко В. Ф.* Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 1. С. 21–44.
13. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНТИ АН СССР, 1986. С. 25–71.
14. *Kirichenko V. F.* Generalized quasi-Kählerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry. I // Geometriae Dedicata. 1994. V. 51. P. 75–104.
15. *Kirichenko V. F.* Generalized quasi-Kählerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry. II // Geometriae Dedicata. 1994. V. 52. P. 53–85.
16. *Кобаяши Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.

Поступило в редакцию
15.09.2004