Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. П. Лукашенко, Об интегралах Стилтеса и равенстве Парсеваля для кратных тригонометрических рядов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 5, 149–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/im658>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:44:41

УДК 517.51

Т. П. Лукашенко

Об интегралах Стильеса и равенстве Парсеваля для кратных тригонометрических рядов

Доказано, что если функция f из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{C}$ 2π -периодична по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на $T^n = [0, 2\pi]^n$, комплекснозначная аддитивная функция бруса G определена на всех брусах из $\mathbb{R}^n$ и 2π -периодична по каждой переменной, соответствующая ей функция точки G интегрируема по Лебегу на T^n , функция f интегрируема по $\bar{G}$ в смысле Римана–Стильеса на любом сдвиге бруса T^n , то выполняется равенство Парсеваля, в котором ряд может не сходиться, но суммируется методом Римана. Получены также результаты о равенстве Парсеваля для кратных тригонометрических рядов Фурье–Лебега–Стильеса.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение и формулировки результатов

Среди разновидностей равенства Парсеваля для тригонометрической системы есть одно, относящееся к рядам Фурье–Стильеса. Утверждается, что если f – 2π -периодическая непрерывная функция, а G – 2π -периодическая с точностью до линейной составляющей функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, то справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}(\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_0^{2\pi} f d\bar{G} = (\mathcal{C}, 1) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \overline{\widehat{dG}(k)}, \quad (1)$$

где

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad \widehat{dG}(k) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_0^{2\pi} e^{-ikt} dG(t)$$

– соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стильеса функции G , черта сверху означает комплексное сопряжение, интеграл в равенстве (1) и интегралы, определяющие коэффициенты Фурье–Стильеса функции G , понимаются как интегралы Римана–Стильеса, ряд в правой части равенства (1) может не сходиться, но суммируется методом средних арифметических $(\mathcal{C}, 1)$ (см. [1, с. 26, 255]).

В работе [2] показано, что в равенстве (1) функция f может иметь конечное число точек разрыва первого рода при условии, что G в них непрерывна, а также приведены примеры, в которых для некоторых пар функций равенство Парсеваля

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00192) и программы “Научные школы” (грант НШ-1657.2003.1).

не выполняется. Так, построены примеры непрерывной функции G ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$ и характеристической функции f некоторого измеримого множества, для которых в (1) интеграл существует в смысле Лебега–Стилтьеса, ряд сходится, но равенство Парсеваля не выполняется.

В работе [3] равенство Парсеваля для тригонометрических рядов Фурье–Стилтьеса–Римана и метода суммирования Римана (см. [1, с. 502]) получено при более слабых требованиях интегрируемости по Лебегу функций f и G и условии существования интеграла Римана–Стилтьеса от f по $\bar{G}$ на периоде (любом отрезке длины 2π).

Аналогичный результат верен для кратных тригонометрических рядов.

Будем под *брусом* (сегментом) в n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ понимать декартово произведение отрезков $\Pi = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$, $a_j \leq b_j$, $1 \leq j \leq n$. Под *разбиением* бруса Π понимается любая такая система попарно неперекрывающихся (не имеющих общих внутренних точек) брусков $\{\Pi_k\}_{k=1}^K$, что $\Pi = \bigcup_{k=1}^K \Pi_k$.

Функцией бруса $\mathcal{G}$ будем называть отображение брусков в $\mathbb{C}$. Функция бруса аддитивна, если для любого разбиения $\{\Pi_k\}_{k=1}^K$ любого бруса Π , на котором $\mathcal{G}$ определена, верно равенство

$$\mathcal{G}(\Pi) = \sum_{k=1}^K \mathcal{G}(\Pi_k).$$

Функция бруса $\mathcal{G}$ 2π -периодична по переменной x_j , если при сдвиге любого бруса Π , на котором $\mathcal{G}$ определена, на 2π по переменной x_j функция $\mathcal{G}$ остается определенной на нем и ее значение не меняется.

Аддитивной функции бруса $\mathcal{G}$, определенной на всех брусах из $\mathbb{R}^n$, сопоставим функцию точки $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле

$$G(\mathbf{x}) = G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \mathcal{G}\left(\prod_{j=1}^n [\min\{0, x_j\}, \max\{0, x_j\}]\right)$$

(о функции $\text{sign}(x)$ см. [1, с. 14]).

Легко проверить, что

$$\mathcal{G}\left(\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]\right) = \sum_{\substack{x_j \in \{a_j, b_j\} \\ 1 \leq j \leq n}} (-1)^{k(\mathbf{x})} G(x_1, \dots, x_n),$$

где $k(\mathbf{x}) = k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \text{sign}(b_j - x_j)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ является 2π -периодической по каждой переменной, интегрируемой по Лебегу на $T^n = [0, 2\pi]^n$ функцией, то ее *коэффициенты Фурье* имеют вид

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \hat{f}(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{L}) \int \cdots \int_{T^n} f(\mathbf{t}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} dt_1 \dots dt_n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n,$$

где $\mathbf{k}\mathbf{t} = \sum_{j=1}^n k_j t_j$. Для краткости далее часто вместо $dt_1 \dots dt_n$ будем записывать $d\mathbf{t}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если аддитивная функция бруса $\mathcal{G}$ определена на всех брусах из $\mathbb{R}^n$ и является 2π -периодической по каждой переменной, соответствующая ей функция точки G интегрируема по Лебегу на T^n , то *коэффициенты Фурье–Стилтьеса* $\mathcal{G}$ имеют вид

$$\widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k}) = \widehat{d\mathcal{G}}(k_1, \dots, k_n) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{t_j=0}^{2\pi} + \frac{ik_j}{2\pi}(\mathcal{L}) \int_0^{2\pi} dt_j e^{-ik_j t_j} \right) G(\mathbf{t}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n, \quad (2)$$

где $\int_{t_j=0}^{2\pi}$ означает приращение по переменной t_j на отрезке $[0, 2\pi]$, а $\int_0^{2\pi} dt_j$ – интегрирование по переменной t_j последующего выражения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Далее показано, что некоторое другое естественное определение коэффициентов Фурье–Стилтьеса функции бруса G является частным случаем приведенного определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Простым множеством* назовем конечное объединение брусов. Под *разбиением* простого множества P понимается любая такая система попарно неперекрывающихся (не имеющих общих внутренних точек) брусов $\{\Pi_k\}_{k=1}^K$, что $P = \bigcup_{k=1}^K \Pi_k$.

Любое простое множество имеет разбиения (см. [4, с. 478, 480]).

Пусть даны простое множество P , функция $f: P \rightarrow \mathbb{C}$ и аддитивная функция бруса $\mathcal{G}$, определенная на всех брусах из P . *Функция f интегрируема по $\mathcal{G}$ на P в смысле Римана–Стилтьеса и $\mathbf{I}$ – интеграл от f по $\mathcal{G}$ на P* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения P на брусы $\{\Pi_k\}_{k=1}^K$ диаметра меньше δ и любого выбора точек $\xi_k \in \Pi_k$ имеем

$$\left| \sum_{k=1}^K f(\xi_k) \mathcal{G}(\Pi_k) - \mathbf{I} \right| < \varepsilon.$$

Обозначим интеграл $\mathbf{I}$ как $\int_P \dots \int f d\mathcal{G}$; в случае интегрирования по брусу $\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ для интеграла $\mathbf{I}$ будем также использовать обозначение $\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f d\mathcal{G}$.

Если функция f непрерывна на простом множестве P , а функция $\mathcal{G}$ – ограниченной вариации на P , т.е. конечна точная верхняя грань $\sum_{k=1}^K |\mathcal{G}(\Pi_k)|$ по всем разбиениям P на брусы $\{\Pi_k\}_{k=1}^K$, то функция f интегрируема по функции $\mathcal{G}$ на P по Риману–Стилтьесу. Доказательство такое же, как в одномерном случае.

Числовой ряд $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} d_{\mathbf{k}}$ суммируется методом Римана $(\mathcal{R}, 2)$ к числу S , если

$$S = \lim_{\substack{h_j \rightarrow 0 \\ 1 \leq j \leq n}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} d_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sin(k_j h_j)}{k_j h_j} \right)^2, \quad (3)$$

где $\frac{\sin 0}{0}$ считаем равным 1.

Метод суммирования Римана с дополнительным требованием *регулярности* стремления переменных h_j , $j = 1, \dots, n$, к $+0$, т.е. ограниченности $\max_{1 \leq j, k \leq n} \frac{h_j}{h_k}$ (см. [5, с. 162]), будет называться *методом $(\mathcal{R}^*, 2)$* .

ТЕОРЕМА 1 (о равенстве Парсеваля). Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ является 2π -периодической по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на $T^n = [0, 2\pi]^n$, аддитивная функция бруса $\mathcal{G}$ определена на всех брусах из $\mathbb{R}^n$ и 2π -периодична по каждой переменной, соответствующая ей функция точки G интегрируема по Лебегу на T^n . Если функция f интегрируема по $\bar{\mathcal{G}}$ в смысле Римана–Стилтьеса на любом брусе $T_{\mathbf{a}}^n = \prod_{j=1}^n [a_j, a_j + 2\pi]$, то выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int \cdots \int_{T^n} f d\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{R}, 2) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k})}, \quad (4)$$

где $\hat{f}(\mathbf{k})$ и $\widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k})$ – соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции бруса $\mathcal{G}$, интеграл в равенстве Парсеваля является интегралом Римана–Стилтьеса и ряд в правой части равенства Парсеваля может не сходиться, но суммируется методом Римана $(\mathcal{R}, 2)$.

Условие интегрируемости функции f по функции $\bar{\mathcal{G}}$ в смысле Римана–Стилтьеса на любых брусах $T_{\mathbf{a}}^n$ существенно даже в одномерном случае (см. [3]).

Покажем корректность определения коэффициентов Фурье–Стилтьеса формулой (2). Для интеграла Лебега–Стилтьеса верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть аддитивная функции бруса $\mathcal{G}$ определена на всех брусах из $\mathbb{R}^n$ и является 2π -периодической по каждой переменной. Если для $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ существует интеграл Лебега–Стилтьеса

$$(\mathcal{L} - \mathcal{S}) \int \cdots \int_{T^n} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\mathcal{G}(\mathbf{t})$$

(как функции бруса, в случае функции множества надо интегрировать по $[0, 2\pi]^n$ вместо T^n), то этот интеграл равен $(2\pi)^n \widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k})$ (см. (2)).

В одномерном случае такая же теорема доказана для интеграла Римана–Стилтьеса в работе [3]. Верна ли она в многомерном случае, автору неизвестно.

Каждая аддитивная функция бруса (сегмента) ограниченной вариации порождает меру (см. [5, с. 100–112]) и интеграл Лебега–Стилтьеса. Для интеграла Лебега–Стилтьеса верны следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ является 2π -периодической по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на T^n , функция бруса $\mathcal{G}$ ограниченной вариации на T^n является 2π -периодической по каждой переменной. Тогда для почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функция $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{t})$ интегрируема в смысле Лебега–Стилтьеса по комплексной мере, определяемой функцией бруса $\mathcal{G}$. Если

$$\hat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{L}) \int \cdots \int_{T^n} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\mathbf{t}$$

и

$$\widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{L} - \mathcal{S}) \int \cdots \int_{T^n} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\mathcal{G}(\mathbf{t})$$

– соответственно коэффициенты Фурье–Лебега функции $f_{\mathbf{x}}(t) = f(x+t)$ и коэффициенты Фурье–Лебега–Стилтьеса функции $\mathcal{G}$, то равенство Парсеваля

$$\frac{1}{(2\pi)^n}(\mathcal{L} - \mathcal{S}) \int \cdots \int_{T^n} f_{\mathbf{x}} d\bar{\mathcal{G}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{k})}$$

имеет место для почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ в смысле суммируемости ряда любым методом, суммирующим ряды Фурье интегрируемых по Лебегу функций к этим функциям почти всюду, интеграл понимается в смысле Лебега–Стилтьеса, а черта сверху означает комплексное сопряжение.

Если в теореме 3 функция бруса имеет вид $\mathcal{G}(\Pi) = (\mathcal{L}) \int \cdots \int_{\Pi} g(t) dt$, то получается следующее следствие о произведении сдвигов функции f на функцию $\bar{g}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ являются 2π -периодическими по каждой переменной и интегрируемы по Лебегу на T^n . Тогда для почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функция $f_{\mathbf{x}}(t)g(t) = f(x+t)g(t)$ интегрируема в смысле Лебега на T^n . Если $\hat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k})$ и $\hat{g}(\mathbf{k})$ – соответственно коэффициенты Фурье–Лебега функции $f_{\mathbf{x}}(t) = f(x+t)$ и функции g , то равенство Парсеваля

$$\frac{1}{(2\pi)^n}(\mathcal{L}) \int \cdots \int_{T^n} f_{\mathbf{x}} \bar{g} dt = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}) \overline{\hat{g}(\mathbf{k})}$$

имеет место для почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ в смысле суммируемости ряда любым методом, суммирующим ряды Фурье интегрируемых по Лебегу функций к этим функциям почти всюду, интеграл понимается в смысле Лебега, а черта сверху означает комплексное сопряжение.

Аналогичный теореме 1 результат для интеграла Лебега–Стилтьеса получить нельзя, что следует из упомянутого примера работы [2]. Более того, его нельзя получить без дополнительных ограничений на функцию f ни для одной аддитивной функции бруса $\mathcal{G}$ ограниченной вариации, порождаемая мера которой не является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Если множество $E \subset T^n$ таково, что его мера Лебега $|E| = 0$, но $\mu E \neq 0$, где комплексная мера μ порождена функцией бруса $\mathcal{G}$, то сумма $f + \alpha \chi_E$ (где $\alpha \in \mathbb{C}$, χ_E – продолженная 2π -периодически по каждой переменной характеристическая функция E) имеет тот же ряд Фурье, что и функция f , а интеграл от суммы имеет вид

$$\int \cdots \int_{T^n} (f + \alpha \chi_E) d\bar{\mathcal{G}} = \int \cdots \int_{T^n} f d\bar{\mathcal{G}} + \alpha \overline{\mu E}.$$

Значит, равенство Парсеваля (4) при любом понимании суммы из правой части не выполняется для всех значений $\alpha \in \mathbb{C}$, кроме, быть может, одного. Возникает вопрос о выборе из множества эквивалентных функций тех, для которых равенство Парсеваля выполняется. Ответить на него можно пока только в простейшем случае: если среди эквивалентных функций есть интегрируемая в смысле Римана–Стилтьеса по функции $\bar{\mathcal{G}}$ (в частности, непрерывная) функция f , то для

нее по теореме 1 равенство Парсеваля выполняется при использовании метода Римана $(\mathcal{R}, 2)$ суммирования ряда.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству следствия 1 в одномерном случае [1, с. 256] и будет приведено в § 3. Рассмотрим сначала равенство Парсеваля (1). Отметим, что ряд в нем может не сходиться даже в одномерном случае, когда одна из функций суммируема, а другая непрерывна [6, с. 204]. Только замена условия непрерывности на более жесткое условие ограниченности вариации обеспечивает сходимость ряда в (1) (см. [1, с. 257], [7, с. 220]). Поэтому естественным является использование различных методов суммирования рядов.

Возникает вопрос о выполнении равенства Парсеваля (4) для интеграла Лебега–Стилтьеса при дополнительных ограничениях на функции f и $\mathcal{G}$. Полученные в этом направлении результаты приведем ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$; тогда

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \prod_{j=1}^n [\min\{x_j, y_j\}, \max\{x_j, y_j\}].$$

Для бруса $\Pi = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ его мера (объем) $|\Pi| = \prod_{j=1}^n |b_j - a_j|$.

ТЕОРЕМА 4. Если функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ является 2π -периодической по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на $T^n = [0, 2\pi]^n$, аддитивная функция бруса $\mathcal{G}$ ограниченной вариации на T^n 2π -периодична по каждой переменной, то ряд $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\mathbf{k}) \widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k})$ суммируется методом Римана $(\mathcal{R}, 2)$ (или $(\mathcal{R}^*, 2)$) к числу S тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\substack{h_j \xrightarrow{\neq} +0 \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{1}{(2\pi)^n} \int \dots \int_{T^n} \frac{F([t - \mathbf{h}, t + \mathbf{h}])}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \frac{\overline{G([t - \mathbf{h}, t + \mathbf{h}])}}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} d\mathbf{t} = S$$

(для метода $(\mathcal{R}^*, 2)$ – с дополнительным требованием регулярности стремления переменных h_j , $j = 1, \dots, n$, к $+0$), где функция бруса имеет вид $F(\Pi) = (\mathcal{L}) \int \dots \int_{\Pi} f d\mathbf{t}$.

С помощью теоремы 4 получено следующее достаточное условие справедливости равенства Парсеваля.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ является 2π -периодической по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на $T^n = [0, 2\pi]^n$, неотрицательная аддитивная функция бруса $\mathcal{G}$ определена на всех брусах из $\mathbb{R}^n$ и 2π -периодична по каждой переменной. Если существует интеграл Лебега–Стилтьеса от $\mathfrak{M}f = \max\{|f|, Mf\}$ по $\mathcal{G}$ на T^n , где $Mf(x) = \sup_{\Pi \ni x} \frac{|F(\Pi)|}{|\Pi|}$ (Π – содержащая точку x кубы, т. е. брусы с ребрами одинаковой длины) – неабсолютная максимальная функция Харди–Литтлвуда функции f по кубам, и выполнено одно из следующих двух условий:

- 1) мера $\mu(E) = \int_E \mathfrak{M}f(t) d\mathcal{G}(t)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега,

- 2) существует интеграл Лебега от fM_G на T^n , где $M_G(x) = \sup_{\Pi \ni x} \frac{G(\Pi)}{|\Pi|}$ (Π – содержащие точку x кубы, т.е. брусы с ребрами одинаковой длины) – максимальная функция Харди–Литтлвуда функции бруса G по кубам,

то выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{(2\pi)^n}(\mathcal{L} - \mathcal{S}) \int \cdots \int_{T^n} f d\bar{G} = (\mathcal{R}^*, 2) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

где $\hat{f}(\mathbf{k})$ и $\widehat{dG}(\mathbf{k})$ – соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G , интеграл в равенстве Парсеваля является интегралом Лебега–Стилтьеса, ряд в правой части равенства Парсеваля может не сходиться, но суммируется методом Римана $(\mathcal{R}^*, 2)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ является 2π -периодической по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на $T^n = [0, 2\pi]^n$, аддитивная ограниченной вариации функция бруса G определена на всех брусах из $\mathbb{R}^n$ и 2π -периодична по каждой переменной. Если существует интеграл Лебега–Стилтьеса от $\mathfrak{M}f = \max\{f, Mf\}$ по мере μ , порожденной вариацией G , на T^n и выполнено одно из следующих двух условий:

- 1) мера $\mu(E) = \int \cdots \int_E \mathfrak{M}f(t) d\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега,
- 2) существует интеграл Лебега от произведения fM_G на T^n ,

то выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{(2\pi)^n}(\mathcal{L} - \mathcal{S}) \int \cdots \int_{T^n} f d\bar{G} = (\mathcal{R}, 2) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{dG}(\mathbf{k})},$$

где $\hat{f}(\mathbf{k})$ и $\widehat{dG}(\mathbf{k})$ – соответственно коэффициенты Фурье функции f и коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции G , интеграл в равенстве Парсеваля является интегралом Лебега–Стилтьеса и ряд в правой части равенства Парсеваля может не сходиться, но суммируется методом Римана $(\mathcal{R}, 2)$.

(О мере, порожденной вариацией G , и об интегрировании по ней, обозначаемом как $\int \cdots \int \dots |dG(t)|$, в случае действительной функции бруса см. [5, с. 95–105].) Случай комплексной функции бруса аналогичен.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть функции f и g из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{C}$ 2π -периодичны по каждой переменной и интегрируемы по Лебегу на $T^n = [0, 2\pi]^n$. Если произведение $Mf \cdot g$ интегрируемо по Лебегу на T^n , то выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{(2\pi)^n}(\mathcal{L}) \int \cdots \int_{T^n} f \bar{g} dt = (\mathcal{R}^*, 2) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\mathbf{k}) \overline{\hat{g}(\mathbf{k})},$$

где $\hat{f}(\mathbf{k})$ и $\hat{g}(\mathbf{k})$ – соответственно коэффициенты Фурье функций f и g , ряд в правой части равенства Парсеваля может не сходиться, но суммируется методом Римана $(\mathcal{R}^*, 2)$.

§ 2. Доказательства теорем 1 и 2

В следующих ниже леммах считаем, что все упоминаемые функции брусов определены на всех брусах из $\mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 1. Пусть на простом множестве P задана функция $\varphi: P \rightarrow \mathbb{C}$ и аддитивная комплекснозначная функция бруса Ψ , φ интегрируема по Ψ на P в смысле Римана–Стилтьеса. Тогда на любом простом множестве $Q \subset P$ функция φ интегрируема по Ψ в смысле Римана–Стилтьеса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу интегрируемости φ по Ψ на P выполняется критерий Коши интегрируемости: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых разбиений P на брусы Π_j диаметра меньше δ и на брусы Π'_k диаметра меньше δ , и любого выбора отмеченных точек $\xi_j \in \Pi_j$, $\xi'_k \in \Pi'_k$ выполняется оценка

$$\left| \sum_j f(\xi_j) \Psi(\Pi_j) - \sum_k f(\xi'_k) \Psi(\Pi'_k) \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим любые разбиения Q на брусы Π_j диаметра меньше δ и на брусы Π'_k диаметра меньше δ и любые отмеченные точки $\zeta_j \in \Pi_j$, $\zeta'_k \in \Pi'_k$ и найдем разбиение простого множества, замыкания $P \setminus Q$, на брусы Δ_l диаметра меньше δ с отмеченными точками $\eta_l \in \Delta_l$. Тогда брусы Π_j и Δ_l образуют разбиение P с отмеченными точками $\zeta_j \in \Pi_j$ и $\eta_l \in \Delta_l$; брусы Π'_j и Δ_l также образуют разбиение P с отмеченными точками $\zeta'_j \in \Pi'_j$ и $\eta_l \in \Delta_l$. В силу оценки, приведенной выше, разность соответствующих им интегральных сумм по модулю строго меньше ε , т. е.

$$\left| \sum_j f(\zeta_j) \Psi(\Pi_j) - \sum_k f(\zeta'_k) \Psi(\Pi'_k) \right| < \varepsilon.$$

Выполнен критерий Коши интегрируемости φ по Ψ на Q в смысле Римана–Стилтьеса.

ЛЕММА 2 (аналог леммы Хенстока из [8]). Пусть на простом множестве P задана функция $\varphi: P \rightarrow \mathbb{C}$ и аддитивная комплекснозначная функция бруса Ψ , φ интегрируема по Ψ на P в смысле Римана–Стилтьеса. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения P на брусы Π_j диаметра меньше δ , любого выбора отмеченных точек $\xi_j \in \Pi_j$ и любого подмножества индексов J выполняется неравенство

$$\left| \sum_{j \in J} \left(\varphi(\xi_j) \Psi(\Pi_j) - \int \cdots \int_{\Pi_j} \varphi d\Psi \right) \right| \leq \varepsilon. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция φ интегрируема по Ψ на P в смысле Римана–Стилтьеса, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения P на брусы Π_j диаметра меньше δ и любого выбора отмеченных точек $\xi_j \in \Pi_j$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_j \left(\varphi(\xi_j) \Psi(\Pi_j) - \int \cdots \int_{\Pi_j} \varphi d\Psi \right) \right| < \varepsilon.$$

Для $j \notin J$, дополнительно разбивая брусы Π_j на все более мелкие брусы Π_k^j и взяв $\xi_k^j \in \Delta_k^j$, получим, что появляющиеся вместо членов $\varphi(\xi_j)\Psi(\Pi_j)$ суммы $\sum_k \varphi(\xi_k^j)\Psi(\Pi_k^j)$ будут стремиться к $\int \cdots \int_{\Pi_j} \varphi d\Psi$ (при стремлении максимума из диаметров Π_k^j к нулю) и в пределе получится неравенство (5).

ЛЕММА 3. Пусть на простом множестве P задана функция $\varphi: P \rightarrow \mathbb{C}$ и аддитивная комплекснозначная функция бруса Ψ . Если для любой точки $x \in P$ существует такой брус Π , содержащий точку x как внутреннюю, что φ интегрируема по Ψ на $\Pi \cap P$ в смысле Римана–Стилтьеса, то φ интегрируема по ψ на P в смысле Римана–Стилтьеса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Внутренности указанных брусков покрывают P , можно выбрать из них конечное число брусков $\Pi_1, \dots, \Pi_m$, внутренности которых покрывают P . Функция

$$\lambda(x) = \max_{1 \leq j \leq m} \max\{\delta: U_\delta(x) \subset \Pi_j\},$$

где $U_\delta(x)$ – δ -окрестность точки x , непрерывна на P , и пусть $\delta_0 = \min_P \lambda(x)$, $\delta_0 > 0$. Если Π – брус диаметра меньше δ_0 и $\Pi \subset P$, то существует брус $\Pi_j \supset \Pi$.

Воспользуемся леммой 2 и для произвольного $\varepsilon > 0$ и каждого из простых множеств $P \cap \Pi_j$ найдем такое δ_j , что утверждение леммы 2 будет выполняться для $P \cap \Pi_j$. Пусть $\delta = \min_{0 \leq j \leq m} \delta_j$. Возьмем любое разбиения P на брусы Π'_k , $1 \leq k \leq K$, диаметром меньше δ и любые отмеченные точки $\xi_k \in \Pi'_k$ и разобьем множество индексов k на такие попарно непересекающиеся множества J_j , $1 \leq j \leq m$, что для $k \in J_j$ имеем $\Pi'_k \subset \Pi_j$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^K \left(\varphi(\xi_k) \Psi(\Pi'_k) - \int \cdots \int_{\Pi'_k} \varphi d\Psi \right) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k \in J_j} \left(\varphi(\xi_k) \Psi(\Pi'_k) - \int \cdots \int_{\Pi'_k} \varphi d\Psi \right) \right| \leq m\varepsilon. \end{aligned}$$

Наличие постоянной m несущественно, утверждение леммы верно.

ЛЕММА 4. Пусть заданы функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и комплекснозначная функция бруса $\mathcal{G}$ на $\mathbb{R}^n$, f интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по $\overline{\mathcal{G}}$ на любом брусе $T_{\mathbf{a}}^n = \prod_{j=1}^n [a_j, a_j + 2\pi]$. Тогда f интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по $\overline{\mathcal{G}(x)}$ на любом простом множестве.

Это следствие леммы 3.

Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -периодична по каждой переменной, комплекснозначная функция бруса $\mathcal{G}$ на $\mathbb{R}^n$ также 2π -периодична по каждой переменной (при сдвиге любого бруса по любой переменной на 2π значение $\mathcal{G}$ на нем не меняется) и f интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по $\overline{\mathcal{G}}$ на любом брусе $T_{\mathbf{a}}^n$. Тогда через $\mathcal{I}$ обозначим интеграл $(\mathcal{R} - S) \int \cdots \int_{T_{\mathbf{a}}^n} f d\overline{\mathcal{G}}$, который не зависит от выбора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 5. Если функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -периодична по каждой переменной, комплекснозначная функция бруса $\mathcal{G}$ на $\mathbb{R}^n$ также 2π -периодична по каждой переменной и f интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по $\overline{\mathcal{G}}$ на любом брусе $T_{\mathbf{a}}^n$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $T = \{\Pi_k\}_{k=1}^K$ любого бруса $\Pi_{\mathbf{a}, \mathbf{m}} = \prod_{j=1}^n [a_j, a_j + 2\pi m_j]$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$, на брусы Π_k диаметра меньше δ и при любом выборе отмеченных точек $\xi_k \in \Pi_k$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^K f(\xi_k) \overline{\mathcal{G}(\Pi_k)} - \mathcal{I} \prod_{j=1}^n m_j \right| \leq \varepsilon \prod_{j=1}^n m_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем лемму 2 для функции f , интегрируемой по $\overline{\mathcal{G}}$ на брусе $P = \prod_{j=1}^n [0, 4\pi]$ в смысле Римана–Стилтьеса, и найдем для данного $\varepsilon > 0$ такое δ , $0 < \delta < 2\pi$, что выполняется утверждение леммы 2 (с соответствующими изменениями обозначений) для бруса P , а значит (в силу 2π -периодичности), и для всех брусков $P_{\mathbf{k}} = \prod_{j=1}^n [2\pi k_j, 2\pi k_j + 4\pi]$. Обозначим через k_{a_j} наибольшее целое число, не превосходящее $a_j/2\pi$. Пусть $T = \{\Pi_k\}_{k=1}^K$ – разбиение бруса $\prod_{j=1}^n [a_j, a_j + 2\pi m_j]$ на брусы Π_k диаметра меньше δ с отмеченными точками $\xi_k \in \Pi_k$. Его можно разбить на такие непересекающиеся части $T_{\mathbf{l}}$, $l_j = 0, 1, \dots, m_j - 1$, что если $\Pi_k \in T_{\mathbf{l}}$, то $\Pi_k \subset \prod_{j=1}^n [2\pi(k_{a_j} + l_j), 2\pi(k_{a_j} + l_j) + 4\pi]$. По лемме 2 имеем

$$\left| \sum_{\Pi_k \in T_{\mathbf{l}}} \left(f(\xi_k) \overline{\mathcal{G}(\Pi_k)} - \int \cdots \int_{\Pi_k} f d\overline{\mathcal{G}} \right) \right| \leq \varepsilon,$$

$\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$, $l_j = 0, 1, \dots, m_j - 1$, $j = 1, \dots, n$. Поскольку

$$\sum_{k=1}^K \int \cdots \int_{\Pi_k} f d\overline{\mathcal{G}} = \int \cdots \int_{\Pi_{\mathbf{a}, \mathbf{m}}} f d\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{I} \prod_{j=1}^n m_j,$$

то

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^K f(\xi_k) \overline{\mathcal{G}(\Pi_k)} - \mathcal{I} \prod_{j=1}^n m_j \right| \\ & \leq \sum_{\mathbf{l}} \left| \sum_{\Pi_k \in T_{\mathbf{l}}} \left(f(\xi_k) \overline{\mathcal{G}(\Pi_k)} - \int \cdots \int_{\Pi_k} f d\overline{\mathcal{G}} \right) \right| \leq \varepsilon \prod_{j=1}^n m_j. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Если функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -периодична по каждой переменной, комплекснозначная функция бруса $\mathcal{G}$ на $\mathbb{R}^n$ также 2π -периодична по каждой переменной и f интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по $\overline{\mathcal{G}}$ на любом брусе $T_{\mathbf{a}}^n$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для

любого $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ и любого $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$, где рациональные $q_j = \frac{m_j}{n_j}$ принадлежат интервалу $(0, \frac{\delta}{\sqrt{n}})$, $m_j, n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$, имеем

$$\left| \sum_{k_n=1}^{n_n} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} \int \cdots \int_{\Pi_{\mathbf{k}, \pi \mathbf{q}, \mathbf{s}}} f dt \cdot \overline{G(\Pi_{\mathbf{k}, \pi \mathbf{q}, \mathbf{s}})} - (2\pi)^n \mathcal{I} \prod_{j=1}^n m_j q_j \right| \leq (2\pi)^n \varepsilon \prod_{j=1}^n m_j q_j, \quad (6)$$

где

$$\Pi_{\mathbf{k}, \pi \mathbf{q}, \mathbf{s}} = \prod_{j=1}^n [\pi(2k_j - 1)q_j + s_j; \pi(2k_j + 1)q_j + s_j].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$, любого $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ с рациональными $q_j = \frac{m_j}{n_j} \in (0, \frac{\delta}{\sqrt{n}})$, $m_j, n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$, и любого $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t_j \leq 2\pi q_j$, $j = 1, \dots, n$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k_n=1}^{n_n} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} f(2\pi(\mathbf{k} - \mathbf{1})\mathbf{q} + \mathbf{s} + \mathbf{t}) \overline{\mathcal{G}(\Pi_{\mathbf{k}, \pi \mathbf{q}, \mathbf{s}})} - \mathcal{I} \prod_{j=1}^n m_j \right| \leq \varepsilon \prod_{j=1}^n m_j.$$

Интегрируя это неравенство по $\mathbf{t}$ на $\prod_{j=1}^n [-\pi q_j, \pi q_j]$, получаем оценку (6).

ЛЕММА 7. Если функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -периодична по каждой переменной, комплекснозначная функция бруса $\mathcal{G}$ на $\mathbb{R}^n$ также 2π -периодична по каждой переменной и f интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса по $\overline{\mathcal{G}}$ на любом брус $T_{\mathbf{a}}^n$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$, $q_j = \frac{m_j}{n_j} \in (0, \frac{\delta}{\sqrt{n}})$, $m_j, n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$, верна оценка

$$\left| \int_{T^n} \cdots \int_{\Pi_{\mathbf{s}, \pi \mathbf{q}}} f dt \overline{\mathcal{G}(\Pi_{\mathbf{s}, \pi \mathbf{q}})} d\mathbf{s} - (2\pi)^{2n} \mathcal{I} \prod_{j=1}^n q_j^2 \right| \leq (2\pi)^{2n} \varepsilon \prod_{j=1}^n q_j^2,$$

где

$$\Pi_{\mathbf{s}, \pi \mathbf{q}} = \prod_{j=1}^n [s_j - \pi q_j; s_j + \pi q_j].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 6, проинтегрируем оценку (6) по $\mathbf{s}$ на T^n и получим неравенство

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k_n=1}^{n_n} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} \int_{T^n} \cdots \int_{\Pi_{\mathbf{k}, \pi \mathbf{q}, \mathbf{s}}} f dt \cdot \overline{G(\Pi_{\mathbf{k}, \pi \mathbf{q}, \mathbf{s}})} d\mathbf{s} - (2\pi)^{2n} \mathcal{I} \prod_{j=1}^n m_j q_j \right| \\ \leq (2\pi)^{2n} \varepsilon \prod_{j=1}^n m_j q_j. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \sum_{k_n=1}^{n_n} \cdots \sum_{k_1=1}^{n_1} \int_{T^n} \cdots \int_{\Pi_{\mathbf{k}, \pi \mathbf{q}, \mathbf{s}}} \cdots \int f \, dt \cdot \overline{\mathcal{G}(\Pi_{\mathbf{k}, \pi \mathbf{q}, \mathbf{s}})} \, d\mathbf{s} \\ &= \prod_{j=1}^n n_j \int_{T^n} \cdots \int_{\Pi_{\mathbf{s}, \pi \mathbf{q}}} \cdots \int f \, dt \cdot \overline{\mathcal{G}(\Pi_{\mathbf{s}, \pi \mathbf{q}})} \, d\mathbf{s}, \end{aligned}$$

то утверждение леммы верно.

ЛЕММА 8. Если функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -периодична по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на T^n , $F_{\mathbf{h}}(\mathbf{s}) = \int_{\Pi_{\mathbf{s}, \mathbf{h}}} \cdots \int f \, dt$, где $\Pi_{\mathbf{s}, \mathbf{h}} = \prod_{j=1}^n [s_j - h_j; s_j + h_j]$, то коэффициенты Фурье функции $F_{\mathbf{h}}(\mathbf{s})$ имеют вид

$$\widehat{F}_{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) = \widehat{f}(\mathbf{k}) \prod_{j=1}^n \frac{2 \sin(h_j k_j)}{k_j}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n,$$

где $\frac{\sin 0}{0}$ считаем равным 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) &= \int_{T^n} \cdots \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}} F_{\mathbf{h}}(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} = \int_{-h_n}^{h_n} \cdots \int_{-h_1}^{h_1} \int_{T^n} \cdots \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}} f(\mathbf{s} + \mathbf{t}) \, d\mathbf{s} \, d\mathbf{t} \\ &= \widehat{f}(\mathbf{k}) \int_{-h_n}^{h_n} \cdots \int_{-h_1}^{h_1} e^{i\mathbf{k}\mathbf{t}} \, d\mathbf{t} = \widehat{f}(\mathbf{k}) \prod_{j=1}^n \frac{2 \sin(h_j k_j)}{k_j}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Если аддитивная функция бруса $\mathcal{G}$ 2π -периодична по каждой переменной и определенная по формуле (2) функция точки $G(\mathbf{x})$ суммируема на T^n , $G_{\mathbf{h}}(\mathbf{s}) = \mathcal{G}(\Pi_{\mathbf{s}, \mathbf{h}})$, где $\Pi_{\mathbf{s}, \mathbf{h}} = \prod_{j=1}^n [s_j - h_j; s_j + h_j]$, то коэффициенты Фурье–Стилтьеса функции $G_{\mathbf{h}}(\mathbf{s})$ имеют вид

$$\widehat{G}_{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) = \widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k}) \prod_{j=1}^n \frac{2 \sin(h_j k_j)}{k_j}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n,$$

где $\frac{\sin 0}{0}$ считаем равным 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим лемму для $n = 1$. По условию функция бруса $\mathcal{G}$ 2π -периодична, поэтому для любого $s \geq 0$ верно равенство

$$\begin{aligned} G(s + 2\pi) - G(s) &= \mathcal{G}([0, s + 2\pi]) - \mathcal{G}([0, s]) = \mathcal{G}([0, s + 2\pi]) - \mathcal{G}([2\pi, s + 2\pi]) \\ &= \mathcal{G}([0, 2\pi]) = G(2\pi). \end{aligned}$$

Для любого s , $-2\pi \leq s \leq 0$, имеем

$$\begin{aligned} G(s+2\pi) - G(s) &= \mathcal{G}([0, s+2\pi]) + \mathcal{G}([s, 0]) = \mathcal{G}([0, s+2\pi]) + \mathcal{G}([s+2\pi, 2\pi]) \\ &= \mathcal{G}([0, 2\pi]) = G(2\pi). \end{aligned}$$

Аналогично, для любого $s \leq -2\pi$ верно равенство

$$\begin{aligned} G(s+2\pi) - G(s) &= -\mathcal{G}([s+2\pi, 0]) + \mathcal{G}([s, 0]) = -\mathcal{G}([s+2\pi, 0]) + \mathcal{G}([s+2\pi, 2\pi]) \\ &= \mathcal{G}([0, 2\pi]) = G(2\pi). \end{aligned}$$

В итоге для любого $s \in \mathbb{R}$ верно равенство $G(s+2\pi) - G(s) = G(2\pi)$. Значит,

$$\widehat{G}_h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(s+h) - G(s-h) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(2\pi) ds = G(2\pi) = \widehat{dG}(0).$$

Если $k \neq 0$, то из равенства $G_h(s) = G(s+h) - G(s-h)$ имеем

$$\widehat{G}_h(k) = \widehat{G}(k)(e^{ih} - e^{-ih}) = \widehat{dG}(k) \frac{e^{ihk} - e^{-ihk}}{ik} = \widehat{dG}(k) \frac{2 \sin(hk)}{k}.$$

Для $n = 1$ лемма проверена.

Предположим, что лемма верна для $n = m$, и докажем, что она верна для $n = m + 1$. Введем m -мерную функцию бруса

$$\mathcal{G}^{[a_n, b_n]} \left(\prod_{j=1}^m [a_j, b_j] \right) = \mathcal{G} \left(\prod_{j=1}^n [a_j, b_j] \right).$$

Пусть $\mathbf{s}' = (s_1, \dots, s_m)$, $\mathbf{h}' = (h_1, \dots, h_m)$, $\Pi_{\mathbf{s}', \mathbf{h}'} = \prod_{j=1}^m [s_j - h_j; s_j + h_j]$; тогда по предположению индукции

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int \dots \int_{T^m} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{t}'} \mathcal{G}^{[a_n, b_n]}(\Pi_{\mathbf{s}', \mathbf{h}'}) d\mathbf{s}' = \widehat{\mathcal{G}}^{[a_n, b_n]}(\mathbf{k}') \prod_{j=1}^m \frac{2 \sin(h_j k_j)}{k_j}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \int \dots \int_{T^m} G_{\mathbf{q}}(\mathbf{s}) e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{s}'} d\mathbf{s}' e^{-ik_n s_n} ds_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\widehat{\mathcal{G}}^{[t-h_n, t+h_n]}(\mathbf{k}') \right) e^{-ik_n t} dt \prod_{j=1}^m \frac{2 \sin(h_j k_j)}{k_j} \\ &= \widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{k}) \prod_{j=1}^n \frac{2 \sin(h_j k_j)}{k_j}, \quad \mathbf{k}' \in \mathbb{Z}^m, \end{aligned}$$

где $\frac{\sin 0}{0}$ считаем равным 1. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -периодична по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на T^n , аддитивная функция бруса $\mathcal{G}$ 2π -периодична по каждой переменной и соответствующая ей функция точки $G(x)$ суммируема на T^n . Если существует интеграл Римана–Стилтьеса $\mathcal{I}$ от функции f по функции $\overline{\mathcal{G}}$ на любом бруссе $T_{\mathbf{a}}^n = \prod_{j=1}^n [a_j, a_j + 2\pi]$ (в силу 2π -периодичности не зависящий от $\mathbf{a}$), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых h_j , $0 < |h_j| < \frac{\pi\delta}{\sqrt{n}}$, $j = 1, \dots, n$, верна оценка

$$\left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k})} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sin(k_j h_j)}{k_j h_j} \right)^2 - \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{I} \right| < \varepsilon,$$

где $\frac{\sin 0}{0}$ считаем равным 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 7 и для $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что утверждение леммы 7 выполняется. Пусть q_j рациональны и $0 < q_j < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, $j = 1, \dots, n$. Непрерывная функция $F_{\pi\mathbf{q}}(s)$ (из леммы 8) 2π -периодична по каждой переменной, ограниченная функция $G_{\pi\mathbf{q}}(s)$ также 2π -периодична по каждой переменной, поэтому, пользуясь равенством Парсеваля для функций из $\mathcal{L}^2(T^n)$ и леммами 8 и 9, имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^{3n} \prod_{j=1}^n q_j^2} \int \cdots \int_{T^n} F_{\pi\mathbf{q}}(s) \overline{G_{\pi\mathbf{q}}(s)} ds = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k})} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sin(\pi k_j q_j)}{\pi k_j q_j} \right)^2. \quad (7)$$

Пусть

$$J(h) = \frac{1}{(2\pi)^{3n} \prod_{j=1}^n q_j^2} \int \cdots \int_{T^n} F_{\pi\mathbf{q}}(s) \overline{G_{\pi\mathbf{q}}(s)} ds.$$

Из леммы 7 следует, что для $h_j = \pi q_j$, где q_j рациональны и $0 < q_j < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, $j = 1, \dots, n$, верна оценка $|J(h) - \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{I}| \leq \frac{\varepsilon}{(2\pi)^n} < \varepsilon$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега функция $J(h)$ непрерывна для $h_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, поэтому для всех h_j , $0 < h_j < \frac{\pi\delta}{\sqrt{n}}$, $j = 1, \dots, n$, имеем

$$\left| J(h) - \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{I} \right| = \left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k})} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sin(k_j h_j)}{k_j h_j} \right)^2 - \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{I} \right| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По лемме 10 имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{I} = \lim_{\substack{h_j \xrightarrow{\neq} 0 \\ 1 \leq j \leq n}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k})} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sin(k_j h_j)}{k_j h_j} \right)^2,$$

т. е. равенство (3) верно. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Суммируемость функций f и G , существенно использовавшуюся в равенстве Парсеваля для функций $F_{\pi\mathbf{q}}(s)$ и $G_{\pi\mathbf{q}}(s)$, которое применялось в лемме 10 при доказательстве (7), можно заменить другими условиями, при которых равенство Парсеваля (со сходимостью ряда) выполняется. Например, достаточно, чтобы f была интегрируема одним из многомерных обобщений интеграла Лебега с непрерывной функцией $F(\mathbf{t})$ и выполнялось утверждение леммы 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При $n = 1$ утверждение доказано в работе [3]. Предположим, что утверждение верно для $n = m$, и докажем его для $n = m + 1$, используя теорему Фубини (см. [5, с. 134]):

$$\begin{aligned} (S) \int \dots \int_{T^n} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\overline{\mathcal{G}(\mathbf{t})} \\ &= (S) \int_0^{2\pi} e^{-ik_n t_n} \int \dots \int_{T^m} e^{ik_1 t_1 + \dots + ik_m t_m} d\overline{\mathcal{G}(t_1, \dots, t_m, t_n)} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \Big|_{t_n=0}^{2\pi} + \frac{ik_n}{2\pi}(\mathcal{L}) \int_0^{2\pi} dt_n \cdot e^{-ik_n t_n} \right) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{2\pi} \Big|_{t_j=0}^{2\pi} + \frac{ik_j}{2\pi}(\mathcal{L}) \int_0^{2\pi} dt_j \cdot e^{-ik_j t_j} \right) G(\mathbf{t}) \\ &= \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2\pi} \Big|_{t_j=0}^{2\pi} + \frac{ik_j}{2\pi}(\mathcal{L}) \int_0^{2\pi} dt_j \cdot e^{-ik_j t_j} \right) G(\mathbf{t}) \\ &= \widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k}) = \widehat{d\mathcal{G}}(k_1, \dots, k_n). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 3. Доказательства теорем 3–5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Если комплекснозначная функция бруса $\mathcal{G}$ на $\mathbb{R}^n$ является 2π -периодической и имеет ограниченную вариацию на T^n , то теми же свойствами обладают ее действительная $\operatorname{Re} \mathcal{G}$ и мнимая $\operatorname{Im} \mathcal{G}$ части. Любую действительнoзначную 2π -периодическую функцию бруса ограниченной вариации на T^n можно представить в виде разности неубывающих функций бруса, каждая из которых 2π -периодична (см. [5, с. 95–98]). Поэтому достаточно рассмотреть случай 2π -периодической действительнoзначной неубывающей функции бруса $\mathcal{G}$ и порожденной ею меры (см. [5, с. 100–112]).

Поскольку

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}) \int \dots \int_{T^n} (\mathcal{L} - S) \int \dots \int_{T^n} |f(\mathbf{x} + \mathbf{t})| d\mathcal{G}(\mathbf{t}) d\mathbf{x} \\ &= (\mathcal{L} - S) \int \dots \int_{T^n} (\mathcal{L}) \int \dots \int_{T^n} |f(\mathbf{x} + \mathbf{t})| d\mathbf{x} d\mathcal{G}(\mathbf{t}) \\ &= \mathcal{G}(T^n)(\mathcal{L}) \int \dots \int_{T^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \end{aligned}$$

по теореме Фубини (см. [5, с. 119–120]), то 2π -периодическая по каждой переменной функция

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{L} - \mathcal{S}) \int \cdots \int_{T^n} f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) d\overline{\mathcal{G}(\mathbf{t})}$$

интегрируема по Лебегу на T^n и ее коэффициенты Фурье–Лебега имеют вид

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{L}) \int \cdots \int_{T^n} \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{L} - \mathcal{S}) \int \cdots \int_{T^n} f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) d\overline{\mathcal{G}(\mathbf{t})} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{L} - \mathcal{S}) \int \cdots \int_{T^n} e^{i\mathbf{k}\mathbf{t}} \frac{1}{(2\pi)^n} \\ &\quad \times (\mathcal{L}) \int \cdots \int_{T^n} f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x} + \mathbf{t})} d\mathbf{x} d\overline{\mathcal{G}(\mathbf{t})} \\ &= \widehat{f}(\mathbf{k}) \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{L} - \mathcal{S}) \int \cdots \int_{T^n} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\mathcal{G}(\mathbf{t}) = \widehat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{k})}. \end{aligned}$$

Ряд Фурье–Лебега этой функции

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{k})}$$

суммируется к $\varphi(\mathbf{x})$ почти всюду любым методом, суммирующим ряды Фурье интегрируемых по Лебегу функций к этим функциям почти всюду (см. [9, с. 465], [10, с. 39–54], [11]). Теорема доказана.

ЛЕММА 11. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -периодична по каждой переменной и интегрируема по Лебегу на T^n , аддитивная функция бруса $\mathcal{G}$ 2π -периодична по каждой переменной и соответствующая ей функция точки $G(\mathbf{x})$ суммируема на T^n . Тогда для любых $h_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, верно равенство

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int_{T^n} \frac{F([\mathbf{t} - \mathbf{h}, \mathbf{t} + \mathbf{h}])}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \cdot \frac{\overline{G([\mathbf{t} - \mathbf{h}, \mathbf{t} + \mathbf{h}])}}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} d\mathbf{t} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\mathbf{k}) \overline{\widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{k})} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sin(h_j k_j)}{h_j k_j} \right)^2, \end{aligned}$$

где функция бруса $F(\Pi) = (\mathcal{L}) \int \cdots \int_{\Pi} f d\mathbf{t}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированном $\mathbf{h}$ функция $F_{\mathbf{h}}(\mathbf{t}) = F([\mathbf{t} - \mathbf{h}, \mathbf{t} + \mathbf{h}])$ 2π -периодична и непрерывна по переменной $\mathbf{t}$. По лемме 8 ее коэффициенты Фурье имеют вид

$$\widehat{F}_{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) = \widehat{f}(\mathbf{k}) \prod_{j=1}^n \frac{2 \sin(h_j k_j)}{k_j}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$$

где $\frac{\sin 0}{0}$ считаем равным 1.

При фиксированном $\mathbf{h}$ функция $G_{\mathbf{h}}(\mathbf{t}) = G([\mathbf{t} - \mathbf{h}, \mathbf{t} + \mathbf{h}])$ ограничена и 2π -периодична по переменной $\mathbf{t}$. По лемме 9 ее коэффициенты Фурье имеют вид

$$\widehat{G}_{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) = \widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k}) \prod_{j=1}^n \frac{2 \sin(h_j k_j)}{k_j}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$$

где $\frac{\sin 0}{0}$ считаем равным 1.

Выпишем равенство Парсеваля для этих функций:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int_{T^n} F([\mathbf{t} - \mathbf{h}, \mathbf{t} + \mathbf{h}]) \overline{G([\mathbf{t} - \mathbf{h}, \mathbf{t} + \mathbf{h}])} d\mathbf{t} \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\mathbf{k}) \widehat{d\mathcal{G}}(\mathbf{k}) \prod_{j=1}^n \left(\frac{2 \sin(h_j k_j)}{k_j} \right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $||[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|| = \prod_{j=1}^n 2h_j$, то утверждение леммы верно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Из леммы 11 и равенства (3) следует утверждение теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и, пользуясь условием теоремы, найдем такое $\delta > 0$, что для любого подмножества E любого бруса $T_{\mathbf{a}}^n$, $|E| < \delta$, выполняется одна из следующих двух оценок:

$$\int \cdots \int_E \Re f(\mathbf{t}) d\mathcal{G}(\mathbf{t}) < \varepsilon, \quad \int \cdots \int_E |f(\mathbf{t})| M_{\mathcal{G}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} < \varepsilon. \quad (8)$$

Согласно [5, с. 99] имеется не более чем счетное множество гиперплоскостей, на которых функция бруса $\mathcal{G}$ разрывна. Вычтем эти гиперплоскости из $\mathbb{R}^n$ и обозначим оставшееся борелевское множество через B (см. [12, с. 17–21]). Функция переменных $\mathbf{t}$ и $\mathbf{h}$

$$\frac{\mathcal{G}_{\mathbf{h}}(\mathbf{t})}{||[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]||} = \frac{\mathcal{G}([\mathbf{t} - \mathbf{h}, \mathbf{t} + \mathbf{h}])}{||[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]||}$$

непрерывна на множестве $B \times \{\mathbf{h} > 0: \mathbf{t} \pm \mathbf{h} \in B, h_j > 0, 1 \leq j \leq n\}$. Функция переменных $\mathbf{t}$ и $\mathbf{h}$

$$\frac{F_{\mathbf{h}}(\mathbf{t})}{||[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]||} = \frac{F([\mathbf{t} - \mathbf{h}, \mathbf{t} + \mathbf{h}])}{||[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]||}$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [5, с. 53, 59, 60]) непрерывна на $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)^n$. Произведение этих функций $\frac{F_{\mathbf{h}}(\mathbf{t})}{||[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]||} \cdot \frac{\mathcal{G}_{\mathbf{h}}(\mathbf{t})}{||[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]||}$ является функцией, измеримой по Борелю по совокупности переменных $\mathbf{t}$ и $\mathbf{h}$ на $B \times \{\mathbf{h} > 0: \mathbf{t} \pm \mathbf{h} \in B, h_j > 0, 1 \leq j \leq n\}$. В этом случае согласно работе [13] (или [7, с. 529]) верна теорема Д. Ф. Егорова и для $\delta > 0$ существует измеримое множество $E \subset B$, $|E| < \delta$, такое, что $\frac{F_{\mathbf{h}}(\mathbf{t})}{||[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]||} \cdot \frac{\mathcal{G}_{\mathbf{h}}(\mathbf{t})}{||[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]||}$ равномерно сходится на $B \setminus E$

при $h_j \rightarrow +0$, $j = 1, \dots, n$, регулярно к $f(t)g(t)$, где $g(t)$ – производная функции $\mathcal{G}$ (см. [5, с. 176–177]). Значит,

$$\int_{B \setminus E} \dots \int \left| \frac{F_{\mathbf{h}}(t)}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \cdot \frac{\overline{G_{\mathbf{h}}(t)}}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} - f(t)g(t) \right| dt \xrightarrow[h_j \rightarrow +0, \substack{1 \leq j \leq n \\ \text{регулярно}}]{} 0. \quad (9)$$

Пусть выполнена первая оценка из (8). По определению неабсолютной максимальной функции Харди–Литтлвуда при $h_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, для $x \in [t - \mathbf{h}, t + \mathbf{h}]$ верна оценка $\left| \frac{F_{\mathbf{h}}(t)}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \right| \leq \mathfrak{M}f(x)$, и поэтому

$$\left| \frac{F_{\mathbf{h}}(t)}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \cdot \frac{\overline{G_{\mathbf{h}}(t)}}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \right| \leq \frac{1}{\prod_{j=1}^n 2h_j} \int_{-h_n}^{h_n} \dots \int_{-h_1}^{h_1} \mathfrak{M}f(t+v) d\mathcal{G}(t+v).$$

Отсюда для $h_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, и множества $D = (T^n \setminus B) \cup E$, отличающегося от множества E на множество меры нуль по Лебегу, используя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned} & \int_D \dots \int \left| \frac{F_{\mathbf{h}}(t)}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \cdot \frac{\overline{G_{\mathbf{h}}(t)}}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \right| dt \\ & \leq \int_D \dots \int \frac{1}{\prod_{j=1}^n 2h_j} \int_{-h_n}^{h_n} \dots \int_{-h_1}^{h_1} \mathfrak{M}f(t+v) d\mathcal{G}(t+v) dt \\ & = \frac{1}{\prod_{j=1}^n 2h_j} \int_{-h_n}^{h_n} \dots \int_{-h_1}^{h_1} \int_D \dots \int \mathfrak{M}f(t+v) d\mathcal{G}(t+v) dv \\ & < \frac{1}{\prod_{j=1}^n 2h_j} \int_{-h_n}^{h_n} \dots \int_{-h_1}^{h_1} \varepsilon dv = \varepsilon. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу первого неравенства из (8) по теореме из работы [5, с. 182] имеем

$$\int_D \dots \int |f(t)g(t)| t \leq \int_D \dots \int |\mathfrak{M}f(t)| d\mathcal{G}(t) < \varepsilon. \quad (11)$$

Из соотношений (9)–(11) следует, что для достаточно малых h

$$\left| \int_{T^n} \dots \int \frac{F_{\mathbf{h}}(t)}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \cdot \frac{\overline{G_{\mathbf{h}}(t)}}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} dt - \int_{T^n} \dots \int f(t) d\mathcal{G}(t) \right| < 3\varepsilon,$$

значит,

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{h_j \xrightarrow[\neq]{+0} \\ 1 \leq j \leq n \\ \text{регулярно}}} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} \dots \int \frac{F([t - \mathbf{h}, t + \mathbf{h}])}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \cdot \frac{\overline{G([t - \mathbf{h}, t + \mathbf{h}])}}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} dt \\ & = \int_{T^n} \dots \int f(t) d\mathcal{G}(t). \end{aligned}$$

Отсюда согласно теореме 3 получаем справедливость теоремы 5.

Пусть выполнена вторая оценка из (8). По определению максимальной функции Харди–Литтлвуда функции бруса при $h_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, для $\mathbf{x} \in [\mathbf{t} - \mathbf{h}, \mathbf{t} + \mathbf{h}]$ верна оценка $\frac{\mathcal{G}_{\mathbf{h}}(\mathbf{t})}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \leq M_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})$, и поэтому

$$\left| \frac{F_{\mathbf{h}}(\mathbf{t})}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \cdot \frac{\mathcal{G}_{\mathbf{h}}(\mathbf{t})}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \right| \leq \frac{1}{\prod_{j=1}^n 2h_j} \int_{-h_n}^{h_n} \cdots \int_{-h_1}^{h_1} |f(\mathbf{t} + \mathbf{v})| M_{\mathcal{G}}(\mathbf{t} + \mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

Отсюда для $h_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, и множества $D = (T^n \setminus B) \cup E$, отличающегося от множества E на множество меры нуль по Лебегу, используя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned} & \int_D \cdots \int \left| \frac{F_{\mathbf{h}}(\mathbf{t})}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \cdot \frac{\mathcal{G}_{\mathbf{h}}(\mathbf{t})}{|[-\mathbf{h}, \mathbf{h}]|} \right| d\mathbf{t} \\ & \leq \int_D \cdots \int \frac{1}{\prod_{j=1}^n 2h_j} \int_{-h_n}^{h_n} \cdots \int_{-h_1}^{h_1} |f(\mathbf{t} + \mathbf{v})| M_{\mathcal{G}}(\mathbf{t} + \mathbf{v}) d\mathbf{v} d\mathbf{t} \\ & = \frac{1}{\prod_{j=1}^n 2h_j} \int_{-h_n}^{h_n} \cdots \int_{-h_1}^{h_1} \int_D \cdots \int |f(\mathbf{t} + \mathbf{v})| M_{\mathcal{G}}(\mathbf{t} + \mathbf{v}) d\mathbf{t} d\mathbf{v} \\ & < \frac{1}{\prod_{j=1}^n 2h_j} \int_{-h_n}^{h_n} \cdots \int_{-h_1}^{h_1} \varepsilon d\mathbf{v} = \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу второго неравенства из (8) верно неравенство

$$\int_D \cdots \int |f(\mathbf{t})| d\mathcal{G}(\mathbf{t}) < \varepsilon. \quad (12)$$

Для любого бруса Π выполняется неравенство

$$\mathcal{G}(\Pi) = \int_{\Pi} \cdots \int \frac{\mathcal{G}(\Pi)}{|\Pi|} d\mathbf{t} \leq \int_{\Pi} \cdots \int M_{\mathcal{G}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Значит, мера любого борелевского множества $E \subset T^n$ допускает оценку

$$\mathcal{G}(E) \leq \int_E \cdots \int M_{\mathcal{G}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Тогда для любого борелевского множества $E \subset T^n$ и любой неотрицательной измеримой (по Лебегу) функции f выполняется неравенство

$$\int_E \cdots \int f(\mathbf{t}) d\mathcal{G}(\mathbf{t}) \leq \int_E \cdots \int f(\mathbf{t}) M_{\mathcal{G}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

В самом деле, согласно предыдущему неравенству это верно для f – характеристических функций борелевских множеств, верно это и для их линейных комбинаций. Поскольку последние всюду плотны в пространстве интегрируемых функций,

то неравенство выполняется для всех них, а значит, и для всех неотрицательных измеримых функций. Поэтому из условия (8) имеем

$$\int_D \cdots \int_D |f(t)| d\mathcal{G}(t) \leq \int_D \cdots \int_D |f(t)| M_{\mathcal{G}}(t) dt < \varepsilon. \quad (13)$$

Из соотношений (10), (12) и (13) согласно теореме 3 следует справедливость теоремы 5 в рассматриваемом случае.

Из теоремы 5 и жорданова разложения аддитивной функции ограниченной вариации (такая функция является суммой своих относительных вариаций [5, с. 97]) получается следствие 2. Частным случаем следствия 2 является следствие 3 (для $\mathcal{G}(\Pi) = \int_{\Pi} \cdots \int g(t) dt$).

Список литературы

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
2. *Горячева В. С.* О равенстве Парсеваля для рядов Фурье–Стилтьеса // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2002. №2. С. 32–36.
3. *Лукашенко Т. П.* Об интеграле Римана–Стилтьеса и равенстве Парсеваля // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2002. №4. С. 18–23.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.
5. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Факториал Пресс, 2004.
6. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. М.: Мир, 1985.
7. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
8. *Henstock R.* Definitions of Riemann type of the variational integrals // Proc. London Math. Soc. 1961. V. 11(43). P. 402–418.
9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
10. *Жижишвили Л. В.* Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1983.
11. *Голубов Б. И.* Кратные ряды и интегралы Фурье // Итоги науки и техники. Серия матем. анализ. Т. 19. М.: ВИНТИ, 1982. С. 3–54.
12. *Толстов Г. П.* Мера и интеграл. М.: Наука, 1976.
13. *Толстов Г. П.* Замечание к теореме Д.Ф. Егорова // ДАН СССР. 1939. Т. 22. С. 309–311.

Поступило в редакцию
28.10.2004