Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Моменты отрицательной степени для L^p -функционалов от винеровских процессов: точные асимптотики, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 3, 203–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im6594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:26:05

УДК 519.2

В. Р. Фаталов

Моменты отрицательной степени для L^p -функционалов от винеровских процессов: точные асимптотики

Доказаны теоремы о точных асимптотиках при $T \rightarrow \infty$ интегралов $E\left[\frac{1}{T} \int_0^T |\eta(t)|^p dt\right]^{-T}$, $p > 0$, для двух случайных процессов $\xi(t)$: винеровского процесса и броуновского моста, – а также для условных версий. Получен ряд иных близких результатов. Методом исследования является метод Лапласа для времени пребывания однородных марковских процессов. Константы в формулах для точных асимптотик записаны в явном виде посредством минимального собственного числа и соответствующей собственной функции оператора Шрёдингера со степенным потенциалом.

Библиография: 43 наименования.

Ключевые слова: большие отклонения, время пребывания марковских процессов, оператор Шрёдингера, функционал действия, дифференцирование по Фреше.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Одной из самых распространенных характеристик нелинейных функционалов от гауссовских и марковских случайных процессов является последовательность моментов их распределения (см. [1]–[4], [5, § 18], [6], [7, § 4, теорема 2], [8, гл. 4, п. 5], [9], [10]). Точные вычисления указанных моментов – это, как правило, чрезвычайно сложная задача, поэтому значительный теоретический и практический интерес представляют приближенные и асимптотические формулы. Так, в случае интегральных L^p -функционалов большое теоретическое и прикладное значение имеют следующие четыре типа асимптотических задач. Далее $[\Omega, \mathcal{F}, P]$ – основное вероятностное пространство, E – оператор математического ожидания, взятый относительно вероятности P , $\eta(t)$, $t \in [0, S]$, – гауссовский или марковский случайный процесс с нулевым средним и п. н. непрерывными траекториями (см. [4], [11]), $S > 0$.

1. *Задачи для моментов большой положительной степени*, т. е. вычисление асимптотик следующих интегралов:

$$E\left[\int_0^S |\eta(t)|^p dt\right]^T, \quad E\left[\int_0^S (\eta(t))^{(2k-1)/(2l-1)} dt\right]^{2m} \quad (1.1)$$

при $T \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$; здесь $S > 0$, $p > 0$, $T > 0$ – непрерывные параметры, $k, l, m = 1, 2, \dots$ – дискретные параметры.

2. *Задачи для моментов большой отрицательной степени*, т. е. вычисление асимптотик интегралов следующего вида:

$$E\left[\int_0^S |\eta(t)|^p dt\right]^{-T}, \quad T \rightarrow \infty, \quad S > 0, \quad p > 0. \quad (1.2)$$

Здесь предполагается, что процесс $\eta(t)$, $t \in [0, S]$, принадлежит широкому классу гауссовских или марковских процессов, для которых интеграл (1.2) конечен при всех $p > 0$, $T > 0$. Иначе говоря, предполагается, что распределение случайной величины $\int_0^S |\eta(t)|^p dt$ имеет экспоненциальное убывание в нуле, т. е. экспоненциальное убывание вероятностей малых отклонений (см. [12, § 3], [13], [14]).

3. *Задачи для моментов эргодических средних с большим положительным показателем*, т. е. вычисление асимптотик интегралов следующего вида:

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{T} \int_0^T |\eta(t)|^p dt \right]^T, \quad T \rightarrow \infty, \quad p > 0. \quad (1.3)$$

4. *Задачи для моментов эргодических средних с большим отрицательным показателем*, т. е. вычисление асимптотик интегралов следующего вида:

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{T} \int_0^T |\eta(t)|^p dt \right]^{-T}, \quad T \rightarrow \infty, \quad p > 0, \quad (1.4)$$

при условии, что последний интеграл конечен.

Естественно, задачи 1–4 представляют интерес и в случае однородных марковских процессов с траекториями, интегрируемыми в p -й степени п. н. В настоящее время наиболее эффективным методом решения задач типа 1 (в случае гауссовских процессов) и типа 4 (в случае однородных марковских процессов) является метод Лапласа для функциональных интегралов, развитый в работах [9], [10], [15]–[19]. Этот метод представляет собой бесконечномерный аналог обычного одномерного метода Лапласа. Отметим, что для *автомодельного* гауссовского процесса решение задачи 1 влечет за собой решение задачи 3, а для *автомодельного* однородного марковского процесса решение задачи 2 влечет за собой решение задачи 4.

Задачи 1, 3 решены в [9] для винеровского процесса и броуновского моста, задача 1 решена в [10] для так называемого гауссовского процесса Боголюбова, имеющего важное значение в статистической физике (см. [7]). В настоящей статье мы представим решение задач 2, 4 для винеровского процесса и броуновского моста, а также для условных версий винеровского марковского процесса. Отметим, что метод Лапласа применяется для вычисления асимптотик интегралов вида (1.2) впервые в данной работе.

Сформулируем полученные утверждения.

Пусть $\kappa_0 \equiv \kappa_0(p) > 0$ – минимальное собственное число самосопряженного оператора Шрёдингера $\mathcal{B}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, имеющего вид

$$\mathcal{B}y(t) := -\frac{1}{2}y''(t) + |t|^p y(t),$$

и $y_0(t)$ – соответствующая нормированная *положительная* собственная функция (см. [20, гл. 4, § 7, п. 4], [20, гл. 9, § 2, п. 2], а также лемму 3.1 ниже в § 3). Несложно убедиться в том, что $y_0(t)$ является симметричной функцией, т. е. $y_0(t) = y_0(-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Отметим, что в силу приближения Лиувилля–Грина (см. [21, гл. 6, § 2, теорема 2.1]) выполнено соотношение

$$\log y_0(t) = -\frac{2\sqrt{2}}{p+2} |t|^{(p+2)/2} (1 + o(1)), \quad |t| \rightarrow \infty,$$

поэтому $\int_{-\infty}^{+\infty} y_0(x) dx < \infty$. Пара (κ_0, y_0) характеризует точные асимптотики распределений L^p -функционалов от винеровского процесса в двух важных случаях: в случае малых уклонений (см. [13], [14]) и в случае интегралов типа Лапласа с большим отрицательным показателем экспоненты (см. [19]). Как показано в настоящей работе, указанная пара характеризует для винеровского процесса точные асимптотики также и в задачах 2, 4. Для $p > 0$ положим

$$q \equiv q(p) := \frac{p+2}{2} \log \frac{2\kappa_0}{p+2} + \frac{p}{2}. \quad (1.5)$$

На протяжении всей статьи через $w(t)$, $t \geq 0$, обозначен стандартный винеровский процесс, рассматриваемый как марковский процесс. Справедлив следующий результат, относящийся к асимптотикам интегралов вида (1.4).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть фиксированы числа $p > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T |w(t)|^p dt \right)^{-T} \middle| w(0) = a \right\} \\ &= e^{-qT} \sqrt{\frac{p+2}{2}} y_0 \left(a \sqrt{\frac{p+2}{2\kappa_0}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(x) dx (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T |w(t)|^p dt \right)^{-T} \middle| w(0) = a, w(T) = b \right\} \\ &= e^{-qT} \sqrt{\frac{T\pi}{2\kappa_0}} (p+2) y_0 \left(a \sqrt{\frac{p+2}{2\kappa_0}} \right) y_0 \left(b \sqrt{\frac{p+2}{2\kappa_0}} \right) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Довольно легко подсчитать постоянные из формул (1.5)–(1.7) при $p = 1$ и $p = 2$. Приведем соответствующие результаты. Пусть $\text{Ai}(x)$ – функция Эйри (см. [21, гл. 11], [22, § 10.4]), $\text{Ai}'(x)$ – ее производная, $a'_1 \approx 1.0188$ – первый нуль функции $\text{Ai}'(-x)$ (см. [22, табл. 10.13]). Положим

$$M = \frac{1}{3a'_1 \text{Ai}(-a'_1)} \left(1 + 3 \int_0^{a'_1} \text{Ai}(-x) dx \right) \approx 1.48257. \quad (1.8)$$

Численное значение постоянной M найдено в работе [3, с. 189].

Несложные вычисления, проведенные в статье [13, п. 4.1], показывают, что величины из формул (1.5), (1.6) при $p = 1$ имеют следующий вид:

$$\kappa_0(1) = \frac{a'_1}{2^{1/3}}, \quad y_0(t) = \frac{\text{Ai}(2^{1/3}t - a'_1)}{2^{1/3} \sqrt{a'_1} \text{Ai}(-a'_1)}, \quad t \geq 0, \quad y_0(-t) = y_0(t), \quad t \leq 0. \quad (1.9)$$

Используя формулы (1.5)–(1.9), получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1.1 (случай $p = 1$). Пусть фиксированы числа $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T |w(t)| dt \right)^{-T} \middle| w(0) = a \right\} \\ &= e^{-q_1 T} \frac{\sqrt{3} M}{\sqrt{2} \text{Ai}(-a'_1)} \text{Ai} \left(\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a'_1}} - a'_1 \right) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T |w(t)| dt \right)^{-T} \middle| w(0) = a, w(T) = b \right\} \\ &= e^{-q_1 T} \frac{3\sqrt{T}\pi}{2(a'_1)^{3/2} \text{Ai}^2(-a'_1)} \text{Ai} \left(\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a'_1}} - a'_1 \right) \text{Ai} \left(\frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{a'_1}} - a'_1 \right) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$q_1 = \frac{3}{2} \log \frac{2^{2/3} a'_1}{3} + \frac{1}{2}. \quad (1.12)$$

Вычисления, проведенные в статье [13, п. 4.2], показывают, что величины из формул (1.5), (1.6) при $p = 2$ имеют следующий вид:

$$\kappa_0(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q(2) = 1 - \log 8, \quad y_0(x) = \frac{2^{1/8}}{\pi^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{\sqrt{2}} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

Используя формулы (1.6), (1.7), (1.13), получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1.2 (случай $p = 2$). Пусть фиксированы числа $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$\mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T w^2(t) dt \right)^{-T} \middle| w(0) = a \right\} = 2 \left(\frac{8}{e} \right)^T \exp \{-2a^2\} (1 + o(1)), \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T w^2(t) dt \right)^{-T} \middle| w(0) = a, w(T) = b \right\} \\ &= 4 \left(\frac{8}{e} \right)^T \sqrt{T} \exp \{-2(a^2 + b^2)\} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Покажем теперь, как вычисляются асимптотики интегралов вида (1.2) при помощи теоремы 1.1 в случае винеровского процесса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (автомодельность винеровского процесса, выходящего из нуля). Для любого фиксированного $T > 0$ справедливы утверждения:

- (i) процессы $\{[w(Ts) \mid w(0) = 0], s \geq 0\}$ и $\{[T^{1/2}w(s) \mid w(0) = 0], s \geq 0\}$ имеют одинаковые распределения;
- (ii) процессы $\{[w(Ts) \mid w(0) = 0, w(T) = 0], 0 \leq s \leq 1\}$ и $\{[T^{1/2}w(s) \mid w(0) = 0, w(1) = 0], 0 \leq s \leq 1\}$ имеют одинаковые распределения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения несложно получить, используя известное свойство стандартного винеровского процесса (см., например, [23, § 2.1, предложение 2.1, п. В])).

Пусть $w_0(t) := \{w(t) \mid w(0) = 0, w(1) = 0\}$, $t \in [0, 1]$, – стандартный броуновский мост (см. [23, § 2.6, п. 3]). Ниже, ради краткости, мы используем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_a\{w \in (\cdot)\} &:= \mathbb{P}\{w \in (\cdot) \mid w(0) = a\}, \\ \mathbb{P}_{a,b}\{w \in (\cdot)\} &:= \mathbb{P}\{w \in (\cdot) \mid w(0) = a, w(T) = b\}, \end{aligned}$$

кроме того, $\mathbb{E}_a$, $\mathbb{E}_{a,b}$ обозначают усреднение по соответствующей вероятности.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть фиксированы числа $p > 0$, $S > 0$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$\mathbb{E}_0 \left[\int_0^S |w(t)|^p dt \right]^{-T} = \frac{T^{Tp/2} e^{-qT}}{S^{T(p+2)/2}} \sqrt{\frac{p+2}{2}} y_0(0) \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(x) dx (1 + o(1)), \quad (1.16)$$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 |w_0(t)|^p dt \right]^{-T} = T^{Tp/2} e^{-qT} \sqrt{\frac{T\pi}{2\kappa_0}} (p+2) y_0^2(0) (1 + o(1)), \quad (1.17)$$

где $q = q(p)$ и $y_0(t)$ – те же, что и в теореме 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения теоремы вытекают непосредственно из предложения 1.1 и теоремы 1.1 при $a = b = 0$. В самом деле, в силу п. (i) предложения 1.1 для фиксированных $p > 0$, $S > 0$, $T > 0$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left[\int_0^S |w(t)|^p dt \right]^{-T} &= S^{-T(p+2)/2} \mathbb{E}_0 \left[\int_0^1 |w(t)|^p dt \right]^{-T} \\ &= T^{Tp/2} S^{-T(p+2)/2} \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T |w(t)|^p dt \right)^{-T} \middle| w(0) = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Аналогично, в силу п. (ii) предложения 1.1 для фиксированных $p > 0$, $T > 0$ выполнено равенство

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 |w_0(t)|^p dt \right]^{-T} = T^{Tp/2} \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T |w(t)|^p dt \right)^{-T} \middle| w(0) = 0, w(T) = 0 \right\}. \quad (1.19)$$

Используя равенства (1.18), (1.19), можно легко записать аналоги следствий 1.1, 1.2 для средних из левых частей соотношений (1.16), (1.17) при $p = 1$ и $p = 2$. Так, например, справедливо утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.3 (случай $p = 2$). Для фиксированного числа $S > 0$ выполнены при $T \rightarrow \infty$ соотношения

$$\mathbb{E}_0 \left[\int_0^S w^2(t) dt \right]^{-T} = 2 \frac{(8T)^T}{e^T S^{2T}} (1 + o(1)), \quad (1.20)$$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 w_0^2(t) dt \right]^{-T} = 4 \frac{(8T)^T}{e^T} \sqrt{T} (1 + o(1)). \quad (1.21)$$

По-видимому, формул (1.20) и (1.21) ранее в литературе не было. Получить эти соотношения, используя известные точные формулы (см. [24, ч. 2, пп. 1.9.4, 1.9.8]), непросто.

§ 2. Метод Лапласа для времени пребывания

2.1. Связь задачи 4 с теорией больших уклонений для времени пребывания. Доказательство утверждений типа теоремы 1.1 основано на использовании содержательной и эффективной теории больших уклонений, построенной для функционала времени пребывания однородных марковских

процессов (см. [13], [14], [16], [17, § 5.1], [18], [25]). Приведем соответствующие определения и результаты, которые будем применять к рассматриваемому случаю винеровского процесса, траектории которого, как известно, непрерывны п. н.

Пусть $C[0, \infty)$ – множество непрерывных функций, определенных на $[0, \infty)$ со значениями в $\mathbb{R}$. Для любых $t > 0$, $z \in C[0, \infty)$ и борелевского множества B из $\mathbb{R}$ обозначим через

$$L_t(z, B) = \frac{1}{T} \int_0^t I_B(z(s)) ds$$

часть времени из $[0, t]$, которую фиксированная траектория $z = z(\cdot)$ проводит в множестве B ; здесь $I_B(\cdot)$ – индикатор множества B . Функционал $L_t(z, B)$ кратко называют (нормированным) *временем пребывания*. Как функция от B этот функционал представляет собой вероятностную меру на $\mathbb{R}$. Имеет место следующее важное свойство (см. [4, гл. 6], [26, гл. 1, формула (4.1)]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть действительная функция g измерима по Борелю и интегрируема на любом компактном множестве из $\mathbb{R}$. Тогда для каждого $T > 0$ и всех $\omega \in \Omega$ выполнено равенство

$$\frac{1}{T} \int_0^T g(w(s)) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) L_T(w, dx). \quad (2.1)$$

Заметим, что в равенстве (2.1) слева стоит *нелинейный* функционал от процесса w , в то время как справа присутствует *линейный* функционал от времени пребывания этого процесса. Отмеченное свойство линейности будет использовано далее.

2.2. Производящий оператор, форма Дирихле и другие вспомогательные сведения. Будем далее обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в $L^2 \equiv L^2(\mathbb{R})$, $\langle h, v \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)v(x) dx$, $h, v \in L^2$. Как известно, переходная плотность винеровского процесса относительно меры Лебега имеет вид

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\}, \quad t \in [0, \infty), \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

(см., например, [4], [23], [24]). Несложно подсчитать, что

$$p(T, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}(1 + o(1)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Как видим, переходная плотность является симметричной функцией по переменным x, y , т. е. $p(t, x, y) = p(t, y, x)$. Напомним, что это общее свойство одномерных диффузий (см. [24, с. 29]). Таким образом, винеровский процесс принадлежит классу так называемых *m-симметричных марковских процессов* (см. [16], [27, с. 311], [28], [29]), т. е. для него выполнено определяющее соотношение $\langle P_t g, h \rangle = \langle g, P_t h \rangle$, $g, h \in C_0(\mathbb{R})$; здесь

$$P_t h(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, x, y) h(y) dy$$

– полугрупповой оператор и $C_0(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных действительных функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Для m -симметричных марковских процессов развита эффективная теория больших уклонений (см. [16], [17, § 5.1], [27]).

ЛЕММА 2.1. *Для любого фиксированного $t > 0$ полугрупповой оператор $P_t: L^2 \rightarrow L^2$ является ядерным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно общей теории для любой постоянной $c > 0$ функция

$$R_c(x) := \exp\{-cx^2\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

является ковариационной функцией гауссовского стационарного процесса с нулевым средним и п. н. непрерывными траекториями (см. [30, § 5.1, 7.2], а также [12, пример 4.1]). Известно, что ковариационный оператор $A_c: L^2 \rightarrow L^2$ такого процесса можно задать в следующем интегральном виде:

$$(A_c v)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_c(x-y)v(y) dy, \quad v \in L^2$$

(см. [31, § 2.2, с. 51], [32, формула (3.1)]). Ковариационный оператор гауссовского распределения в гильбертовом пространстве является ядерным (см. [33, гл. 1]), следовательно, оператор A_c является ядерным. Поскольку в силу (2.2)

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} R_{1/(2t)}(x-y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

оператор $P_t: L^2 \rightarrow L^2$ совпадает с оператором $A_{1/(2t)}$ и также является ядерным. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{D}_A$ множество ограниченных на $\mathbb{R}$ функций h таких, что h, h' абсолютно непрерывны и функция h'' ограничена. Напомним, что производящий оператор A винеровского процесса определен на множестве $\mathcal{D}_A$ и действует по правилу

$$(Ah)(x) = \frac{1}{2}h''(x), \quad h \in \mathcal{D}_A \tag{2.4}$$

(см. [23, теорема 2.14], [24, с. 66]). Определим множество $\tilde{\mathcal{D}}_A := \{h \in \mathcal{D}_A \cap L^2: h'' \in L^2\}$, оно всюду плотно в L^2 . Как известно, производящий оператор $A: \tilde{\mathcal{D}}_A \rightarrow L^2$ винеровского процесса является симметричным и отрицательным. Следуя [28], определим билинейную форму Дирихле:

$$\mathcal{E}(h, v) := \langle \sqrt{-A}h, \sqrt{-A}v \rangle, \quad h, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \equiv \text{Dom}(\sqrt{-A}),$$

где $\sqrt{-A}$ – квадратный корень из симметричного положительного оператора $-A$, $\text{Dom}(C)$ – область определения оператора C . Имеет место равенство (см. [28, § 1.3])

$$\mathcal{E}(h, v) = -\langle Ah, v \rangle, \quad h \in \tilde{\mathcal{D}}_A, \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}). \tag{2.5}$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ метрическое пространство вероятностных мер на $\mathbb{R}$, снабженное метрикой Прохорова ρ и борелевской σ -алгеброй. Полное метрическое пространство $(\mathcal{M}, \rho)$ не обладает линейной структурой. Учитывая, что производные по Фреше определяются, как правило, для линейных нормированных пространств (см. [34, § 2.2]), мы, следуя работе [16, с. 534], введем еще одно пространство мер.

Пусть $C_b(\mathbb{R})$ – банахово пространство ограниченных непрерывных действительных функций на $\mathbb{R}$ с нормой супремума $\|h\|_{C_b(\mathbb{R})} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$. Выберем последовательность элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_b(\mathbb{R})$ и последовательность чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$ такие, что выполняются следующие условия:

- 1) $\varphi_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $\|\varphi_n\|_{C_b(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\{\|\varphi_n\|_{L^2}^{-1} \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – полный ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|\varphi_n\|_{L^2}^{-2} < \infty$.

Обозначим через $\mathcal{M}_A$ линейное нормированное пространство знакопеременных мер μ на $\mathbb{R}$ с конечной полной вариацией и нормой

$$\|\mu\|_A := \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|\varphi_n\|_{L^2}^{-2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n d\mu \right)^2 \right]^{1/2}$$

(см. [16, с. 534]). Для фиксированного $p > 0$ введем функционалы, посредством которых можно записать средние из формул (1.6) и (1.7):

$$\begin{aligned} F(\nu) &:= \log \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p \nu(dx), & \nu \in \mathcal{M}_A, \\ U(v) &:= \log \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p v^2(x) dx, & v \in L^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $F: \mathcal{M}_A \rightarrow \mathbb{C}$ и берется главное значение логарифма. Как легко видеть, выполнено равенство

$$F(\nu) = U(v), \quad \text{если } \nu(dx) = v^2(x) dx \in \mathcal{M}. \quad (2.7)$$

Используя п. н. непрерывность траекторий винеровского процесса, равенство (2.1) при $g(x) = |x|^p$ и формулу (2.6), получаем для фиксированного $T > 0$ соотношения

$$F(L_T(w, \cdot)) = \log \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p L_T(w, dx) = \log \left(\frac{1}{T} \int_0^T |w(t)|^p dt \right) < \infty \quad \text{п. н.} \quad (2.8)$$

Теперь, учитывая соотношение (2.8), получаем следующие равенства для левых частей формул (1.6) и (1.7):

$$\mathbb{E}_a \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T |w(t)|^p dt \right)^{-T} \right\} = \mathbb{E}_a \exp \{ -TF(L_T(w, \cdot)) \}, \quad (2.9)$$

$$\mathbb{E}_{a,b} \left\{ \left(\frac{1}{T} \int_0^T |w(t)|^p dt \right)^{-T} \right\} = \mathbb{E}_{a,b} \exp \{ -TF(L_T(w, \cdot)) \}. \quad (2.10)$$

Ради краткости будем использовать следующую общепринятую запись интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \nu(dx) = \langle g, \nu \rangle, \quad \nu \in \mathcal{M}_A. \quad (2.11)$$

ЛЕММА 2.2. *Функционал F , заданный в (2.6), трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $\nu \in \mathcal{M}$, при этом первые две производные имеют вид*

$$F'(\nu)[m] = \frac{\langle |x|^p, m \rangle}{\langle |x|^p, \nu \rangle}, \quad m \in \mathcal{M}_A, \quad (2.12)$$

$$F''(\nu)[m, \mu] = -\frac{\langle |x|^p, m \rangle \langle |x|^p, \mu \rangle}{\langle |x|^p, \nu \rangle^2}, \quad m, \mu \in \mathcal{M}_A. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получаем, применяя теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений [34, п. 2.2.2] и известную формулу для производной линейного функционала [34, п. 2.2.1].

2.3. Точные асимптотики типа Лапласа. Приведем некоторые результаты о больших отклонениях из работы [16] для нашего случая винеровского процесса и функционала $F(\nu)$ из формулы (2.6) (см. также [17, § 5.1]). Положим

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) : \langle z, z \rangle = 1\}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим следующее условие, налагаемое на нелинейный функционал F :
(A1) *минимум $\Lambda := \inf\{\mathcal{E}(z, z) + F(z^2 dx) : z \in \mathcal{H}, z > 0\}$ достигается в единственной точке z_0 .*

Ниже будет показано, что условие (A1) выполнено для функционала F из соотношений (2.6), а также охарактеризованы число Λ и функция z_0 . Обозначим

$$F^{(1)}(m, x) := F'[m](\delta_x), \quad (m, x) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

где δ_x – вероятностная дельта-мера, сосредоточенная в точке x . Обозначим также

$$d\nu_0 := z_0^2 dx. \quad (2.16)$$

Справедливо следующее утверждение, которое представляет собой переформулировку предложения 2.1 из [16].

ЛЕММА 2.3. *Точка минимума z_0 принадлежит $\text{Dom}(\mathcal{A})$, и существует число $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$\mathcal{A}z_0 = F^{(1)}(d\nu_0, \cdot)z_0 + \alpha z_0. \quad (2.17)$$

Введем функцию

$$V(x) = -[F^{(1)}(d\nu_0, x) + \alpha], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

В силу (2.17) справедливо равенство

$$[\mathcal{A} + V(x)]z_0(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Обозначим через $L^2(d\nu_0)$ гильбертово пространство функций, заданных на $\mathbb{R}$, со скалярным произведением

$$\langle v, y \rangle_{L^2(d\nu_0)} := \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)y(x)z_0^2(x) dx.$$

Следуя статье [16, с. 545], введем линейный оператор $\mathcal{G}$, отображающий гильбертово пространство $L^2(d\nu_0)$ в себя по правилу

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}y](x) = 2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{z_0(x)} \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [z_0y](x) \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} z_0(s) \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [z_0y](s) ds \right] dt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Несложно видеть, что в силу (2.19) выполнено равенство

$$[\mathcal{G}y](x) = [\mathcal{G}(y + k_0)](x), \quad y \in L^2(d\nu_0), \quad k_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

В [16, лемма 12] показано, что оператору (2.20) отвечает гауссовская случайная мера γ с нулевым средним, ковариационным оператором $\mathcal{G}$ и характеристической функцией, имеющей вид

$$\mathbb{E} \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{+\infty} z(x) \gamma(dx) \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle \mathcal{G}z, z \rangle_{L^2(d\nu_0)} \right\}, \quad z \in C_b(\mathbb{R}). \quad (2.22)$$

Сведения о случайных мерах можно найти в книгах [35], [36].

ТЕОРЕМА 2.1 (точные асимптотики винеровских интегралов типа Лапласа).

Справедливы следующие утверждения:

- (i) для функционала F из (2.6) выполнено условие (A1);
- (ii) при $T \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a \exp \{ -TF(L_T(w, \cdot)) \} = \exp \{ -T\Lambda \} \mathbb{E} \exp \left\{ -\frac{1}{2} F''(\nu_0)[\gamma, \gamma] \right\} \\ \times z_0(a) \int_{-\infty}^{+\infty} z_0(x) dx (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a,b} \exp \{ -TF(L_T(w, \cdot)) \} = \exp \{ -T\Lambda \} \sqrt{2\pi T} \mathbb{E} \exp \left\{ -\frac{1}{2} F''(\nu_0)[\gamma, \gamma] \right\} \\ \times z_0(a) z_0(b) (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (2.24)$$

при условии, что $\mathbb{E} \exp \{ -\frac{1}{2} F''(\nu_0)[\gamma, \gamma] \} < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) доказано ниже, в лемме 3.2. При выполнении утверждения (i) точные асимптотики интегралов из формул (2.23), (2.24) можно получить, используя лемму 2.1 и теоремы 2.19, 2.20, п. (1), из [16], а также учитывая метод их доказательств. В [16] рассмотрен случай m -симметричных марковских процессов, для которых переходные вероятности имеют плотность относительно некоторой вероятностной референтной меры на $\mathbb{R}$

(так называемой меры скорости). Внимательный анализ доказательств результатов из [16] показывает, что данные результаты справедливы и в случае винеровского процесса, для которого мерой скорости является мера Лебега. Формула (2.24) получается на основе утверждения, аналогичного [16, теорема 2.19], с учетом того, что переходная плотность (2.2) винеровского процесса удовлетворяет соотношению (2.3).

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Доказательство соотношений (1.6), (1.7) теоремы 1.1 проведем при помощи формул (2.9), (2.10) и соотношений (2.23), (2.24).

3.1. Доказательство утверждения (i) теоремы 2.1. Нам понадобится следующая

ЛЕММА 3.1. (i) *Оператор Шрёдингера $\mathcal{B}$, определенный в § 1, является самосопряженным, положительным и имеет чисто дискретный простой спектр. Следовательно, уравнение $\mathcal{B}y = \kappa y$ обладает счетным числом решений (y_n, κ_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, где $0 < \kappa_0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_n < \dots$ – собственные значения, $\{y_n\}$ – соответствующие им нормированные собственные функции, $\|y_n\|_{L^2} = 1$. Основная собственная функция $y_0(t)$ является строго положительной.*

(ii) *Справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p y_n^2(t) dt = \frac{2\kappa_n}{2+p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положительность оператора $\mathcal{B}$ доказывается при помощи интегрирования по частям интеграла, представляющего квадратичную форму $\langle \mathcal{B}y, y \rangle$. Утверждения о самосопряженности и спектре оператора $\mathcal{B}$ вытекают из общих известных результатов (см., например, [20, с. 240, 431], [37, с. 387, 398], [38, теорема XIII.16]) в силу доказанной положительности оператора $\mathcal{B}$. Строгая положительность функции y_0 следует из [38, теорема XIII.47]. Утверждение (i) леммы доказано. Равенство (3.1) доказано в [13, п. 3.2], оно вытекает из формул (3.22) и (3.32) указанной работы. Лемма доказана.

Опишем решение экстремальной задачи, сформулированной в условии (A1), записывая ее с учетом равенства (2.7) в следующем виде:

$$U(z) + \mathcal{E}(z, z) \rightarrow \inf, \quad z \in \mathcal{H}, \quad z > 0. \quad (3.2)$$

Используя (2.6), применяя теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений [34, п. 2.2.2] и известную формулу для производной квадратичного функционала [34, п. 2.2.1], получаем вид первой производной по Фреше функции $U(z)$:

$$U'(z) = \frac{2|x|^p z(x)}{\langle |x|^p z, z \rangle}, \quad z \in L^2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Положим $\mathcal{D} := \{h \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}} : |x|^p h \in L^2(\mathbb{R})\}$,

$$c_0 = \left(\frac{p+2}{2\kappa_0} \right)^{(p+2)/2}. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3.2. Экстремальная задача (3.2) имеет единственное решение – нормированную симметричную функцию z_0 , $\|z_0\|_{L^2} = 1$, где

$$z_0(x) := c_0^{1/(2(p+2))} y_0(c_0^{1/(p+2)} x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

при этом минимальное значение задачи (3.2) имеет следующий вид:

$$U(z_0) + \mathcal{E}(z_0, z_0) = U(z_0) - \langle \mathcal{A}z_0, z_0 \rangle = q,$$

где число q задано формулой (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно первой теореме Вейерштрасса (см. [39, с. 114]) минимум в задаче (3.2) достигается. Из леммы 2.3 вытекает, что точки, доставляющие минимум в задаче (3.2), принадлежат области определения $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ производящего оператора $\mathcal{A}$. Поэтому в силу формулы (2.5) задача (3.2) эквивалентна задаче

$$U(z) - \langle \mathcal{A}z, z \rangle \rightarrow \inf, \quad z \in \mathcal{D}, \quad \langle z, z \rangle = 1, \quad z > 0. \quad (3.6)$$

Применяя метод множителей Лагранжа [34, п. 3.2.1], найдем все локальные экстремумы задачи (3.6), затем выделим из них тот, который доставляет глобальный минимум в данной задаче. Функция Лагранжа задается формулой

$$\mathcal{L}(z) = \lambda_1 [U(z) - \langle \mathcal{A}z, z \rangle] + \lambda_2 [\langle z, z \rangle - 1], \quad z \in \mathcal{D}, \quad (3.7)$$

где $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, – множители Лагранжа. Дифференцируя функционалы в (3.7) и учитывая (3.3), заключаем, что для того, чтобы точка z доставляла минимум в задаче (3.6), необходимо выполнение условия стационарности

$$\mathcal{L}'(z) \equiv 2\lambda_1 \left[\frac{|x|^p z}{\langle |x|^p z, z \rangle} - \mathcal{A}z \right] + 2\lambda_2 z = 0, \quad z \in \mathcal{D}, \quad (3.8)$$

и условия дополняющей нежесткости $\lambda_2 [\langle z, z \rangle - 1] = 0$. Легко проверить, что в нашей задаче $\lambda_1 > 0$; обозначим $\beta = -\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Исследуя соотношение (3.8), несложно убедиться в том, что для функции z , доставляющей локальный экстремум в задаче (3.6), найдется число $\beta = \beta(z)$ такое, что пара (z, β) будет удовлетворять следующей граничной задаче:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}z''(x) + c|x|^p z(x) &= \beta z(x), & x \in \mathbb{R}, \\ z(-\infty) = z(+\infty) &= 0, & \int_{-\infty}^{+\infty} z^2(x) dx = 1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$c = c(z) := \frac{1}{\langle |x|^p z, z \rangle} \equiv \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p z^2(x) dx}. \quad (3.10)$$

Сделаем в задаче (3.9) замену переменных

$$t = c^{1/(2+p)}x, \quad y(t) = c^{-1/(2(2+p))}z(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

и введем новый параметр

$$\kappa = \frac{\beta}{c^{2/(2+p)}}. \quad (3.12)$$

Легко проверить, что в результате замены переменных (3.11), (3.12) граничная задача (3.9) принимает следующий стандартный вид:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}y''(t) + |t|^p y(t) &= \kappa y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(-\infty) &= y(+\infty) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Согласно утверждению (i) леммы 3.1 задача (3.13) имеет счетное число решений (y_n, κ_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, в силу (3.10)–(3.12) задача (3.9) имеет также счетное число решений (z_n, β_n, c_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, где

$$\begin{aligned} z_n(x) &= c_n^{1/(2(p+2))} y_n(c_n^{1/(p+2)} x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \beta_n = c_n^{2/(p+2)} \kappa_n, \\ c_n &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p z_n^2(x) dx}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из формул (3.1), (3.14) вытекает следующее уравнение для постоянных c_n :

$$c_n = \frac{c_n^{p/(p+2)}}{\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p y_n^2(t) dt} = \frac{(2+p)c_n^{p/(p+2)}}{2\kappa_n}.$$

Отсюда находим

$$c_n = \left(\frac{p+2}{2\kappa_n} \right)^{(p+2)/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Заметим, что формула (3.15) согласуется с формулой (3.4) при $n = 0$. Из формул (3.14), (3.15) следуют соотношения

$$\beta_n = c_n^{2/(p+2)} \kappa_n = \frac{2+p}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Учитывая (2.4), (3.16) и тот факт, что тройка (z_n, β_n, c_n) удовлетворяет задаче (3.9), получаем следующие равенства для $n \geq 0$:

$$\langle \mathcal{A}z_n, z_n \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} z_n(x) z_n''(x) dx = 1 - \beta_n = -\frac{p}{2}. \quad (3.17)$$

Используя (2.4), (3.15), (3.17), для левой части формулы (3.6) при $n \geq 0$ получаем равенства

$$U(z_n) - \langle \mathcal{A}z_n, z_n \rangle = \log \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p z_n^2(x) dx + \frac{p}{2} = \log \frac{1}{c_n} + \frac{p}{2} = \frac{p+2}{2} \log \frac{2\kappa_n}{p+2} + \frac{p}{2}.$$

Отсюда и из утверждения (i) леммы 3.1 вытекает равенство

$$\min_{n \geq 0} [U(z_n) - \langle \mathcal{A}z_n, z_n \rangle] = \frac{p+2}{2} \log \frac{2\kappa_0}{p+2} + \frac{p}{2} = q, \quad (3.18)$$

при этом минимум слева в (3.18) достигается при $n = 0$. Учитывая вышеизложенное, в частности формулы (3.14), (3.18), заключаем, что экстремальная задача (3.2) имеет единственное решение – функцию z_0 , где $z_0(x)$ задано формулой (3.5), а значение минимума равно q . Лемма доказана.

Как легко видеть, из леммы 3.2 вытекает утверждение (i) теоремы 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из доказательства леммы 3.2 следует, что постоянная α в этой лемме имеет вид $\alpha = \beta_0 = \frac{2+p}{2}$, а функция $V(x)$, заданная в (2.18), – вид

$$V(x) = \beta_0 - c_0|x|^p = \frac{2+p}{2} - c_0|x|^p, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.19)$$

где c_0 определена формулой (3.4). Равенство (2.19) для функции (3.19) выполнено вследствие того, что тройка (z_0, β_0, c_0) удовлетворяет дифференциальному уравнению из задачи (3.9).

Итак, учитывая вышеизложенное, заключаем, что в наших условиях к средним из правых частей формул (2.9), (2.10) применимо утверждение (ii) теоремы 2.1. Подсчитаем константы из правых частей соотношений (2.23), (2.24). Напомним, что экстремальная мера ν_0 определена в формуле (2.16), а гауссовская случайная мера γ – в (2.22).

3.2. Вычисление постоянной $\mathbb{E} \exp\{-\frac{1}{2}F''(\nu_0)[\gamma, \gamma]\}$. Обозначим

$$D = D(p) := \mathbb{E} \exp\left\{-\frac{1}{2}F''(\nu_0)[\gamma, \gamma]\right\}. \quad (3.20)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Для любого фиксированного $p > 0$ справедливо равенство

$$D = \sqrt{\frac{p+2}{2}}. \quad (3.21)$$

Доказательство предложения 3.1 достаточно длинное и будет получено после того, как мы докажем ряд вспомогательных лемм. Учитывая обозначение (2.11), введем следующую случайную величину:

$$\xi = \xi_p := \langle |x|^p, \gamma \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p \gamma(dx), \quad p > 0. \quad (3.22)$$

Случайная величина ξ представляет собой линейный функционал от гауссовской случайной меры с нулевым средним, поэтому ξ имеет одномерное гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma^2 = \mathbb{E} \langle |x|^p, \gamma \rangle^2. \quad (3.23)$$

ЛЕММА 3.3. *Имеют место равенства*

$$D = \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{c_0^2 \xi^2}{2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma^2} - c_0^2 \right) \right\} dt, \quad (3.24)$$

где c_0 задана в формуле (3.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (2.16) и (3.14) при $n = 0$, получаем равенства

$$\langle |x|^p, \nu_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p z_0^2(x) dx = \frac{1}{c_0}. \quad (3.25)$$

Учитывая соотношения (2.13) и (3.25), приходим к равенствам

$$F''(\nu_0)[\gamma, \gamma] = -\frac{\langle |x|^p, \gamma \rangle^2}{\langle |x|^p, \nu_0 \rangle^2} = -c_0^2 \langle |x|^p, \gamma \rangle^2. \quad (3.26)$$

Из формул (3.20), (3.22), (3.23) и (3.26) вытекают равенства (3.24). Лемма доказана.

Таким образом, для доказательства предложения 3.1 нам надо вычислить постоянную σ^2 из формулы (3.23). Это вычисление проводится аналогично вычислению постоянной σ^2 в работах [13, с. 138; 151], [14, § 4]. Изложим некоторые необходимые нам факты.

Напомним, что функция $V(x)$ определена в (3.19), мы будем обозначать через V также оператор умножения на эту функцию. На всюду плотном в L^2 множестве $\mathcal{D}$ определен оператор $\mathcal{A} + V: L^2 \rightarrow L^2$. Используя (2.19) (см. замечание 3.1), несложно показать, что ядро E_0 оператора $\mathcal{A} + V$ представляет собой одномерное подпространство пространства L^2 , натянутое на вектор z_0 :

$$E_0 := \text{Ker}(\mathcal{A} + V) = \{k_0 z_0(x), k_0 \in \mathbb{R}\}. \quad (3.27)$$

Имеет место разложение гильбертова пространства L^2 в прямую сумму:

$$L^2 = E_0 \oplus E_1,$$

где

$$E_1 := E_0^\perp = \left\{ z \in L^2: \int_{-\infty}^{+\infty} z(x) z_0(x) dx = 0 \right\}$$

– ортогональное дополнение подпространства E_0 (см. [20, гл. 4, § 1, п. 3]). Поскольку оператор $\mathcal{A} + V$ является самосопряженным, его сужение на подпространство E_1 (которое вновь обозначается через $\mathcal{A} + V$) отображает E_1 в E_1 взаимно однозначно (ср. [40, гл. 9, п. 4.5]). Поэтому определен обратный оператор $(\mathcal{A} + V)^{-1}y \in E_1$ для $y \in E_1$. Положим

$$\psi(x) := c_0 |x|^p - 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.28)$$

Поскольку $\|z_0\|_{L^2} = 1$, в силу (3.25) выполнено включение $z_0 \psi \in E_1$ и определен обратный элемент $(\mathcal{A} + V)^{-1}[z_0 \psi] \in E_1$ такой, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{A} + V)^{-1}[z_0 \psi](x) z_0(x) dx = 0. \quad (3.29)$$

Для фиксированного $p > 0$ обозначим

$$g(x) := |x|^p, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.30)$$

ЛЕММА 3.4. *Справедливы равенства*

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathcal{G}g](x) g(x) z_0^2(x) dx = -\frac{2}{c_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{A} + V)^{-1} [z_0\psi](x) |x|^p z_0(x) dx. \quad (3.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая формулы (3.23), (3.30) и определение ковариационного оператора, получаем соотношение

$$\sigma^2 = \langle \mathcal{G}g, g \rangle_{L^2(d\nu_0)}. \quad (3.32)$$

Отсюда, очевидно, следует первое равенство в (3.31). Докажем второе равенство в (3.31). Используя формулы (2.21), (3.28), (3.30), получаем равенство

$$[\mathcal{G}g](x) = \frac{1}{c_0} [\mathcal{G}\psi](x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.33)$$

В силу определения (2.20) выполнено равенство

$$[\mathcal{G}\psi](x) = 2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{z_0(x)} \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [z_0\psi](x) - \int_{-\infty}^{+\infty} z_0(s) \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [z_0\psi](s) ds \right] dt. \quad (3.34)$$

Поскольку $-V(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, то самосопряженный оператор Шрёдингера $-(\mathcal{A} + V)|_{E_1} : E_1 \rightarrow E_1$ имеет дискретный однократный действительный спектр (см. [20, гл. 9, § 2, п. 2])

$$\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots,$$

кроме того, из доказательства леммы 3.2 следует, что $\rho_1 > 0$. Таким образом, с учетом того, что полугруппа винеровского процесса является феллеровской (см. [4, гл. 3, § 2; гл. 7, § 1], [41, с. 348], [42, гл. 8; 10]) с C_0 -условием, приходим к выводу, что в наших условиях применима известная формула теории полугрупп (см. [20, гл. 3, § 3, п. 5]), согласно которой из (3.29) и (3.34) получаем равенство

$$[\mathcal{G}\psi](x) = -\frac{2}{z_0(x)} (\mathcal{A} + V)^{-1} [z_0\psi](x). \quad (3.35)$$

Используя первое равенство в (3.31) и формулы (3.33), (3.35), приходим ко второму равенству в (3.31). Лемма доказана.

Нам понадобится один результат из статьи [14]. Положим

$$\lambda_0 := \left(\frac{2\kappa_0}{2+p} \right)^{(2+p)/p} \equiv \frac{1}{c_0^{2/p}}, \quad \tilde{\beta}_0 := \frac{2+p}{2} \lambda_0 \equiv \frac{\beta_0}{c_0^{2/p}}; \quad (3.36)$$

здесь тождественные равенства справедливы в силу формул (3.4) и (3.16).

ЛЕММА 3.5. Пусть v_0 – положительная дважды дифференцируемая на всей оси симметричная функция, т.е.

$$v_0(t) = v_0(-t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.37)$$

и такая, что для нее выполнены равенства

$$\frac{1}{2}v_0''(t) - \lambda_0|t|^p v_0(t) = -\tilde{\beta}_0 v_0(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.38)$$

$$v_0(-\infty) = v_0(+\infty) = 0, \quad v_0'(\infty) = 0, \quad v_0'(0) = 0, \quad (3.39)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_0^2(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p v_0^2(t) dt = 1. \quad (3.40)$$

Тогда справедливо соотношение

$$\int_0^x \frac{1}{v_0^2(t)} \left[\int_0^t v_0^2(s)(s^p - 1) ds \right] dt = \frac{xv_0'(x)}{4\tilde{\beta}_0 v_0(x)}, \quad x \geq 0. \quad (3.41)$$

Существование и единственность функции v_0 доказаны в работе [13]. Доказательство леммы 3.5 имеется в [14, лемма 3].

ЛЕММА 3.6. Имеет место равенство

$$z_0(x) = c_0^{1/(2p)} v_0(c_0^{1/p} x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве леммы 3.2 мы показали, что тройка (z_0, β_0, c_0) удовлетворяет задаче (3.9) и равенствам (3.4), (3.14), (3.16). Следовательно, выполнены равенства

$$z_0(x) = z_0(-x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.43)$$

$$\frac{1}{2}z_0''(x) - c_0|x|^p z_0(x) = -\beta_0 z_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$z_0(-\infty) = z_0(+\infty) = 0, \quad z_0'(\infty) = 0, \quad z_0'(0) = 0, \quad (3.44)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z_0^2(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p z_0^2(x) dx = \frac{1}{c_0}.$$

Сделаем в равенствах из формулы (3.44) замену переменных

$$t = c_0^{1/p} x, \quad z_0(x) = c_0^{1/(2p)} v(t), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.45)$$

Учитывая (3.36) и (3.43), легко убедиться в том, что функция $v(t)$ из соотношения в (3.45) тождественно совпадает с функцией $v_0(t)$ из леммы 3.5. Лемма доказана.

Используя леммы 3.5, 3.6 и формулу (3.29), найдем функцию

$$h_0(x) := (\mathcal{A} + V)^{-1}[z_0\psi](x) \in L^2 \quad (3.46)$$

такую, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_0(x) z_0(x) dx = 0. \quad (3.47)$$

ЛЕММА 3.7. Функция $h_0(x)$ задается формулой

$$\begin{aligned} h_0(x) &= \frac{1}{4\beta_0} z_0(x) + \frac{1}{2\beta_0} x z'_0(x), & x \geq 0, \\ h_0(-x) &= h_0(x), & x \leq 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения (3.46) функция h_0 удовлетворяет уравнению $(A + V)g = z_0\psi$ или

$$h''(x) + (2\beta_0 - 2c_0|x|^p)h(x) = 2z_0(x)(c_0|x|^p - 1), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.49)$$

С учетом (3.37) легко видеть, что дифференциальное уравнение (3.49) имеет четное решение $h(x) = h(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Поэтому решим сначала следующее дифференциальное уравнение:

$$h''(x) + (2\beta_0 - 2c_0x^p)h(x) = 2z_0(x)(c_0x^p - 1), \quad x \in [0, \infty). \quad (3.50)$$

Сделаем в уравнении (3.50) замену переменных

$$t = c_0^{1/p}x, \quad h(x) = c_0^{1/(2p)}u(t), \quad x \geq 0. \quad (3.51)$$

Учитывая равенство (3.42), несложно убедиться в том, что в результате замены переменных (3.51), уравнение (3.50) примет вид

$$u''(t) + (2\tilde{\beta}_0 - 2\lambda_0 t^p)u(t) = 2c_0^{-3/(2p)}v_0(t)(t^p - 1), \quad t \geq 0. \quad (3.52)$$

Дифференциальное уравнение (3.52) является неоднородным по отношению к однородному уравнению из (3.38), записанному для $t \geq 0$, т. е. по отношению к уравнению

$$v''(t) + 2\tilde{\beta}_0 v(t) - 2\lambda_0 t^p v(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.53)$$

Зная одно нетривиальное решение v_0 однородного уравнения (3.53), найдем, применяя известный метод (см. [43, ч. 1, § 24.2, п. (б), с. 144]), нужное нам решение уравнения (3.52), удовлетворяющее условию (3.47). Учитывая, что мы ищем решение $u \in L^2(\mathbb{R})$, убеждаемся в том, что нужное нам решение уравнения (3.52) имеет следующий вид:

$$u_0(t) = C_1 v_0(t) + 2c_0^{-3/(2p)} v_0(t) \int \frac{1}{v_0^2(t)} \left(\int v_0^2(t)(t^p - 1) dt \right) dt, \quad t \geq 0, \quad (3.54)$$

где C_1 – действительная постоянная. Используя соотношения (3.41), (3.54) заключаем, что выполнено равенство

$$u_0(t) = C_1 v_0(t) + \frac{1}{2\tilde{\beta}c_0^{3/(2p)}} t v'_0(t), \quad t \geq 0. \quad (3.55)$$

Учитывая формулы (3.36), (3.42), (3.51), (3.55), получаем, что нужное нам решение уравнения (3.50) имеет вид

$$h_0(x) = C_2 z_0(x) + \frac{1}{2\beta_0} x z'_0(x), \quad x \geq 0, \quad (3.56)$$

где C_2 – действительная постоянная. Найдем постоянную C_2 . Поскольку $h_0(x) = h_0(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, то равенство (3.47) принимает следующий вид:

$$\int_0^\infty h_0(x) z_0(x) dx = 0. \quad (3.57)$$

Умножим равенство (3.56) на функцию $z_0(x)$ и проинтегрируем почленно полученное равенство по x от 0 до ∞ , в результате в силу (3.40) и (3.57) получим формулу

$$C_2 + \frac{1}{\beta_0} \int_0^\infty x z_0(x) z_0'(x) dx = 0. \quad (3.58)$$

Интегрируя в формуле (3.58) по частям и используя (3.39), (3.40), легко находим

$$\int_0^\infty x z_0(x) z_0'(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty x dz_0^2(x) = -\frac{1}{4}. \quad (3.59)$$

Из формул (3.58), (3.59) следует, что $C_2 = \frac{1}{4\beta_0}$. Отсюда и из (3.56) вытекает формула (3.48), поскольку $h_0(x) = h_0(-x)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.8. *Для фиксированного $p > 0$ справедливо равенство*

$$\sigma^2 = \frac{p}{(2+p)c_0^2}. \quad (3.60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношения (3.46)–(3.48), убеждаемся в том, что для величины σ^2 , записанной в (3.31), выполнены равенства

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= -\frac{2}{c_0} \int_0^\infty h_0(x) |x|^p z_0(x) dx = -\frac{4}{c_0} \int_0^\infty h_0(x) x^p z_0(x) dx \\ &= -\frac{1}{\beta_0 c_0} \left[\int_0^\infty x^p z_0^2(x) dx + 2 \int_0^\infty x^{p+1} z_0(x) z_0'(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Учитывая (3.14), находим

$$\int_0^\infty x^p z_0^2(x) dx = \frac{1}{2c_0}. \quad (3.62)$$

Интегрируя в (3.62) по частям и используя (3.44), легко находим

$$2 \int_0^\infty x^{p+1} z_0(x) z_0'(x) dx = \int_0^\infty x^{p+1} dz_0^2(x) = -(p+1) \int_0^\infty x^p z_0^2(x) dx = -\frac{p+1}{2c_0}. \quad (3.63)$$

Используя теперь (3.16), (3.61)–(3.63), получаем равенства

$$\sigma^2 = \frac{p}{2\beta_0 c_0^2} = \frac{p}{(2+p)c_0^2}.$$

Формула (3.60), а вместе с ней и лемма доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Согласно (3.60) выполнено неравенство $\sigma^2 < \frac{1}{c_0^2}$, поэтому интеграл в (3.24) конечен. Учитывая формулы (3.4), (3.24) и (3.60), легко находим

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} - c_0^2\right)\right\} dt = \frac{\sqrt{p}}{\sigma c_0 \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{p+2}{2}}.$$

Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Применим утверждение (ii) теоремы 2.1 к правым частям формул (2.9), (2.10). В силу леммы 3.2 выполнено равенство $\Lambda = q$. Учитывая этот факт, а также формулы (2.9), (2.10), (3.4), (3.5), (3.20), (3.21), мы получаем соотношения (1.6) и (1.7). Теорема доказана.

Список литературы

1. L. A. Shepp, "On the integral of the absolute value of the pinned Wiener process", *Ann. Probab.*, **10**:1 (1982), 234–239; **19**:3 (1991), 1397.
2. S. O. Rice, "The integral of the absolute value of the pinned Wiener process – calculation of its probability density by numerical integration", *Ann. Probab.*, **10**:1 (1982), 240–243.
3. L. Takács, "On the distribution of the integral of the absolute value of the Brownian motion", *Ann. Appl. Probab.*, **3**:1 (1993), 186–197.
4. D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Grundlehren Math. Wiss., **293**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
5. B. Simon, *Functional integration and quantum physics*, Pure Appl. Math., **86**, Academic Press, New York–London, 1979.
6. E. Brézin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, "Perturbation theory at large order. I. The φ^{2n} interaction", *Phys. Rev. D*, **15**:6 (1977), 1544–1557.
7. Д. П. Санкович, "Функциональный интеграл Боголюбова", *Нелинейная динамика*, Тр. МИАН, **251**, Наука, М., 2005, 223–256; англ. пер.: D. P. Sankovich, "The Bogolyubov functional integral", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **251** (2005), 213–245.
8. М. Кац, *Вероятность и смежные вопросы в физике*, Мир, М., 1965; пер. с англ.: М. Кас, *Probability and related topics in physical sciences*, Interscience Publ., New York, 1959.
9. В. Р. Фаталов, "Моменты L^p -функционалов от гауссовских процессов: точные асимптотики", *Проблемы передачи информации* (в печати).
10. В. Р. Фаталов, "Точные асимптотики типа Лапласа для гауссовской меры Боголюбова", *ТМФ*, **168**:2 (2011), 299–340; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Laplace-type exact asymptotic formulas for the Bogoliubov Gaussian measure", *Theoret. and Math. Phys.*, **168**:2 (2011), 1112–1149.
11. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, ТВиМС, Киев, 1995; англ. пер.: М. А. Lifshits, *Gaussian random functions*, Math. Appl., **322**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
12. В. Р. Фаталов, "Константы в асимптотиках вероятностей малых отклонений для гауссовских процессов и полей", *УМН*, **58**:4 (2003), 89–134; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Constants in the asymptotics of small deviation probabilities for Gaussian processes and fields", *Russian Math. Surveys*, **58**:4 (2003), 725–772.

13. В. Р. Фаталов, “Метод Лапласа для малых отклонений гауссовских процессов типа винеровского”, *Матем. сб.*, **196**:4 (2005), 135–160; англ. пер.: V. R. Fatalov, “The Laplace method for small deviations of Gaussian processes of Wiener type”, *Sb. Math.*, **196**:4 (2005), 595–620.
14. В. Р. Фаталов, “Малые отклонения для двух классов гауссовских стационарных процессов и L^p -функционалов, $0 < p \leq \infty$ ”, *Пробл. передачи информ.*, **46**:1 (2010), 68–93; англ. пер.: V. R. Fatalov, “Small deviations for two classes of Gaussian stationary processes and L^p -functionals, $0 < p \leq \infty$ ”, *Problems Inform. Transmission*, **46**:1 (2010), 62–85.
15. R. S. Ellis, J. S. Rosen, “Asymptotic analysis of Gaussian integrals. I. Isolated minimum points”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273**:2 (1982), 447–481; “II: Manifold of minimum points”, *Comm. Math. Phys.*, **82**:2 (1981), 153–181.
16. Sh. Kusuoka, Y. Tamura, “Precise estimate for large deviation of Donsker–Varadhan type”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **38**:3 (1991), 533–565.
17. В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, “Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах”, *УМН*, **50**:6 (1995), 57–150; англ. пер.: V. I. Piterbarg, V. R. Fatalov, “The Laplace method for probability measures in Banach spaces”, *Russian Math. Surveys*, **50**:6 (1995), 1151–1239.
18. S. Albeverio, V. Fatalov, V. Piterbarg, “Asymptotic behavior of the sample mean of a function of the Wiener process and the Macdonald function”, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **16**:1 (2009), 55–93.
19. В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики вероятностей больших отклонений для цепей Маркова: метод Лапласа”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:4 (2011), 189–223; англ. пер.: V. R. Fatalov, “Exact asymptotics of probabilities of large deviations for Markov chains: the Laplace method”, *Izv. Math.*, **75**:4 (2011), 837–868.
20. *Функциональный анализ*, 2-е изд., ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972; англ. пер. 1-го изд.: G. F. Votruba, L. F. Boron (eds.), *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972.
21. Ф. Олвер, *Асимптотики и специальные функции*, Наука, М., 1990; пер. с англ.: F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York–London, 1974.
22. М. Абрамовиц, М. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, U.S. Government Printing Office, Washington, 1964.
23. Т. Хидэ, *Броуновское движение*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: T. Hida, *Brownian motion*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1980.
24. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению*, Лань, СПб., 2000.
25. M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan, “Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **29**:4 (1976), 389–461.
26. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий*, Тр. МИАН СССР, **195**, Наука, С-Пб., 1994; англ. пер.: A. N. Borodin, I. A. Ibragimov, *Limit theorems for functionals of random walks*, Proc. Steklov Inst. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
27. M. Fukushima, M. Takeda, “A transformation of a symmetric Markov process and the Donsker–Varadhan theory”, *Osaka J. Math.*, **21**:2 (1984), 311–326.
28. M. Fukushima, *Dirichlet forms and Markov processes*, North-Holland Math. Library, **23**, North-Holland, Amsterdam–Oxford–New York, 1980.
29. M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, de Gruyter, **19**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

30. Г. Крамер, М. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: Н. Cramer, M. R. Leadbetter, *Stationary and related stochastic processes*, Wiley, New York–London–Sydney, 1967.
31. В. И. Богачёв, *Гауссовские меры*, Наука, М., 1997; англ. пер.: V. I. Bogachev, *Gaussian measures*, Math. Surveys Monogr., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
32. R. S. Ellis, J. S. Rosen, “Laplace’s method for Gaussian integrals with an application to statistical mechanics”, *Ann. Probab.*, **10**:1 (1982), 47–66; **11**:2 (1983), 456.
33. Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: Н. Н. Кuo, *Gaussian measures in Banach spaces*, Lecture Notes in Math., **463**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975.
34. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1987.
35. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, *Безгранично делимые точечные процессы*, Наука, М., 1982; пер. с нем.: J. Kerstan, K. Matthes, J. Mecke, *Unbegrenzt teilbare Punktprozesse*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
36. Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971.
37. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, 2-е изд., Наука, М., 1969; нем. пер. 1-го изд.: M. A. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*, Akademie-Verlag, Berlin, 1960.
38. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977; т. 2: *Гармонический анализ. Самосопряженность*, 1978; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York–London, 1972; II. *Fourier analysis, self-adjointness*, 1975.
39. М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, М., 1972; англ. пер.: M. M. Vainberg, *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*, Halsted Press, New York–Toronto, 1973.
40. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977; англ. пер.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
41. А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2003.
42. А. Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов*, Наука, М., 1996.
43. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Лань, С-Пб., 2003; пер. с нем.: E. Kamke, *Differentialgleichungen*, Stuttgart, Teubner, 1977.

В. Р. ФАТАЛОВ (V. R. FATALOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: vrfatalov@yandex.ru

Поступило в редакцию
28.12.2010