Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Геометрия внутренних
остовных деревьев для плоских многоугольников, *Изв.
РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 2, 3–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/im6595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:43:52

УДК 514.77+512.816.4+517.924.8

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Геометрия внутренних остовных деревьев для плоских многоугольников

Для многоугольников на плоскости изучается геометрия минимальных внутренних остовных деревьев, т. е. таких остовных деревьев, ребра-отрезки которых лежат в этих многоугольниках. Построены аналоги диаграммы Вороного и триангуляции Делоне, доказано, что минимальное внутреннее остовное дерево является подграфом соответствующей триангуляции Делоне, а также описано возможное устройство ячеек такой триангуляции.

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: внутренние остовные деревья, плоские многоугольники, евклидовы остовные деревья, диаграмма Вороного, триангуляция Делоне, отношение Штейнера, характеристическая область.

Введение

Задача об оптимальном соединении является, несомненно, одной из наиболее интенсивно изучаемых и одной из наиболее востребованных в приложениях геометрических оптимизационных задач. К ее наиболее популярным вариантам относятся проблемы Штейнера и коммивояжера о поиске кратчайшей коммуникационной сети и, соответственно, кратчайшего циклического маршрута для данного набора точек-терминалов некоторого метрического пространства. Эти задачи имеют давнюю историю (см., например, [1]–[3]) и относятся к классу так называемых NP-трудных задач. Последнее, говоря неформально, означает, что по-видимому не существует эффективного алгоритма их решения. Поэтому приближенные решения этих задач играют важную роль в приложениях и интенсивно изучаются.

Наиболее простые и популярные приближенные алгоритмы решения проблем Штейнера и коммивояжера основаны на построении минимального остовного дерева для данного конечного множества точек M метрического пространства (X, ρ) . Если кратчайшая сеть, соединяющая множество M , ищется среди всех связных графов, множества вершин которых содержат M (другими словами, кратчайшая сеть может содержать дополнительные, т. е. нетерминальные,

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00748), Программ Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-3224.2010.1) и “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (госконтракт 02.740.11.5213) и Программы Правительства РФ по постановлению № 220 (договор № 11.G34.31.0053).

вершины-развилки), то минимальное остовное дерево на M ищется среди связанных графов, множества вершин которых в точности равны M . Например, кратчайшее дерево для множества вершин M правильного треугольника на евклидовой плоскости имеет дополнительную вершину – центр треугольника, а минимальное остовное дерево для M состоит из двух сторон этого треугольника. Отношение длин первого ко второму равно, как нетрудно сосчитать, $\sqrt{3}/2$; в частности, минимальное остовное дерево длиннее, чем кратчайшее. Однако для минимальных остовных деревьев давно известны эффективные алгоритмы построения, такие как алгоритмы Краскала [4] и Прима [5] (см. также [6]), сложность которых имеет порядок $n^2 \log n$, где n – количество терминальных вершин, что позволяет быстро найти минимальное остовное дерево.

В реальных практических задачах количество терминальных точек может составлять десятки и сотни тысяч, поэтому оптимизация алгоритмов построения минимальных остовных деревьев представляет интерес. Алгоритмы Краскала и Прима, упомянутые выше, носят чисто теоретико-графовый характер и никак не используют геометрию задачи. Оказывается, в случае, когда X – конечномерное евклидово пространство, в частности стандартная евклидова плоскость, геометрические соображения позволяют уменьшить сложность алгоритма до $n \log n$. А именно, как показал М. И. Шеймос [7], каждое минимальное остовное дерево для подмножества M евклидовой плоскости (евклидово минимальное остовное дерево) является подграфом специального плоского графа с множеством вершин M – так называемой *триангуляции Делоне множества M* . Отметим, что триангуляция Делоне возникла в работе Б. Н. Делоне [8] в 30-е годы прошлого века и с тех пор остается в центре внимания многих исследователей благодаря своим многочисленным экстремальным и геометрическим свойствам (см. обзор в [9] или [1]). Также хорошо известно, что триангуляция Делоне множества M тесно связана с так называемой *диаграммой Вороного множества M* , которая представляет собой специальное разбиение объемлющего пространства на выпуклые многогранные множества. Понятие диаграммы Вороного, впервые появившееся в [10], естественно возникает при решении геометрических задач, связанных с понятием взаимной близости, поэтому также активно изучается.

В приложениях часто возникают ситуации, когда не все отрезки, соединяющие точки из заданного терминального множества M , могут быть проведены. Последнее приводит к задачам поиска минимальных остовных деревьев с ограничениями (см. обзор в [9]). В настоящей работе рассматриваются так называемые *внутренние остовные деревья для плоского многоугольника W* . А именно, пусть W – плоский многоугольник с множеством вершин M , тогда плоское дерево с множеством вершин M называется *внутренним остовным*, если все его ребра лежат в W . Естественно возникает задача о поиске внутреннего остовного дерева наименьшей длины – *минимального внутреннего остовного дерева*, изучению геометрических аспектов которой и посвящена настоящая статья.

Цель настоящей работы состоит в изучении геометрии минимальных внутренних остовных деревьев плоских многоугольников. Оказалось, что на этот случай естественно обобщаются понятия диаграммы Вороного и триангуляции Делоне. Более того, остается верной основная теорема о том, что каждое минимальное внутреннее остовное дерево является подграфом соответствующей *внутренней триангуляции Делоне* (теорема 2.36). Кроме того, оказалось, что,

в отличие от классического случая, грани внутренней триангуляции Делоне не обязаны, вообще говоря, быть вписанными в окружность многоугольниками. Тем не менее, их геометрию также удалось описать (теорема 2.48).

Отметим, что настоящая работа допускает дальнейшее обобщение на случай так называемых погруженных многоугольников в смысле [11], т. е., неформально, многоугольников с самоналожениями. Определению понятия внутреннего остовного дерева для таких многоугольников и изучению их геометрии посвящена следующая наша статья, которая в настоящий момент готовится к печати. Оказывается, для погруженных многоугольников также можно определить внутреннюю триангуляцию Делоне и диаграмму Вороного и получить аналоги теорем 2.36, 2.48.

Интерес к внутренним остовным деревьям для погруженных многоугольников непосредственно связан со знаменитой гипотезой Гилберта–Поллака [12] об отношении Штейнера евклидовой плоскости. Напомним, что *отношением Штейнера* метрического пространства (X, ρ) называют инфимум отношений $s(M)$ длины кратчайшего дерева, соединяющего $M \subset X$, к длине минимального остовного дерева для M , где инфимум берется по всевозможным конечным подмножествам $M \subset X$, состоящим из двух и более точек. (Как отмечалось выше, для множества M вершин правильного треугольника на плоскости число $s(M)$ равно $\sqrt{3}/2$.) Эта величина является мерой относительной ошибки приближения кратчайшего дерева минимальным остовным в наихудшей возможной ситуации. Е. Н. Гилберт и Х. О. Поллак [12] высказали гипотезу, что для евклидовой плоскости указанный инфимум достигается на множестве вершин правильного треугольника. Эта гипотеза до сих пор не доказана несмотря на многочисленные попытки разных специалистов, из которых наиболее известна работа [13]. Среди блестящих идей, лежащих в основе работы [13], важную роль играет использование так называемой характеристической области (некоторый погруженный многоугольник) и соответствующих внутренних остовных деревьев. К сожалению, эти понятия так и не были формализованы авторами работы [13], а “очевидные” свойства этих объектов оказались несовместимыми: в каждом из возможных естественных определений характеристической области одно из требуемых свойств не выполняется. Пробелы в доказательстве Ду и Хванга известны давно [14], [2] и продолжают обсуждаться (см. [15], [16]). Отсутствие прогресса в доказательстве гипотезы Гилберта–Поллака также является причиной интереса к погруженным многоугольникам и внутренним остовным деревьям в них. Возможно, результаты такого типа позволят продвинуться в понимании этой сложной задачи.

Авторы, пользуясь случаем, выражают искреннюю благодарность академику А. Т. Фоменко за внимание к работе, всем участникам семинара “Минимальные сети”, проходящего на механико-математическом факультете МГУ под руководством авторов, за проявленный интерес и многочисленные содержательные дискуссии.

§ 1. Предварительные сведения

В настоящем параграфе собраны необходимые для дальнейшего определения и факты, касающиеся метрических пространств, а также кривых и графов в этих пространствах. Приведены классические результаты о связях

евклидовых минимальных остовных деревьев с диаграммами Вороного и триангуляциями Делоне.

1.1. Спрямяемые кривые и геодезические. Напомним, что кривая γ в метрическом пространстве называется *спрямяемой*, если существует предел длин вписанных в γ ломаных при стремлении к нулю длины максимального звена этих ломаных. Этот предел называется *длиной* спрямяемой кривой γ .

В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением метрических пространств со *строго внутренней метрикой* [17], а именно предположим, что расстояние между точками равно точной нижней грани длин всех спрямяемых кривых, соединяющих эти точки, и что эти точные нижние грани достигаются на некоторых спрямяемых вложенных кривых (называемых *кратчайшими геодезическими*). Понятие кратчайшей геодезической позволяет определить *геодезические* (уже не обязательно кратчайшие) как спрямяемые локально кратчайшие кривые. Последнее означает, что каждая точка такой кривой содержится в некотором фрагменте этой кривой, являющемся кратчайшей геодезической.

Подмножество U метрического пространства назовем *геодезически выпуклым*, если для любых двух точек p и q из U существует кратчайшая геодезическая, соединяющая p и q и целиком лежащая в U .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Если любые две точки метрического пространства соединяются единственной геодезической, то пересечение любого семейства геодезически выпуклых множеств геодезически выпукло.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ – пересечение геодезически выпуклых подмножеств A_{α} , а p и q – произвольные точки из A . Поскольку для каждого α точки p и q лежат в A_{α} , существует геодезическая γ_{α} , соединяющая их и лежащая в A_{α} . Из предположения о единственности геодезической, соединяющей любые две точки, вытекает, что все геодезические γ_{α} совпадают. Поэтому геодезическая $\gamma = \gamma_{\alpha}$ лежит во всех A_{α} , а значит, и в A . Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Требование единственности геодезической в утверждении 1.1 существенно, что видно из следующего простого примера. В качестве объемлющего метрического пространства со строго внутренней метрикой рассмотрим стандартную сферу, на которой введены обычные сферические координаты (θ, φ) , $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$, и пусть A_{α} состоит из северного и южного полюсов, к которым добавлено множество, заданное неравенством $0 < \varphi \leq \alpha$ (т. е. A_{α} – полуоткрытый сферический сектор величины α). Пусть $0 < \alpha \leq \pi/2$. Тогда каждое A_{α} геодезически выпукло, а $\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ состоит в точности из двух полюсов.

1.2. Минимальные остовные деревья в метрических пространствах.

Пусть M – конечное подмножество метрического пространства (X, ρ) . *Граф на M* – это произвольный граф $G = (V, E)$, у которого множество вершин V совпадает с M . *Длиной $\rho(e)$ ребра $e = vw$ графа G* называется расстояние между точками v и w , т. е. число $\rho(v, w)$. *Длина $\rho(G)$ графа G* – это сумма длин всех ребер из G . Кратчайшее дерево на M называется *минимальным остовным*.

Геометрической реализацией графа G в метрическом пространстве X называется сопоставление каждому ребру uv из G некоторой спрямяемой кривой

в X , соединяющей точки u и v . Такие кривые называются *геометрическими реализациями ребер графа G* или *ребрами геометрической реализации*. Отметим, что геометрическая реализация графа на плоскости, такая, что ее ребра являются вложенными кривыми и пересекаются только по общим вершинам, традиционно называется *плоским графом*. *Геодезической реализацией* называется геометрическая реализация графа, ребра которой – кратчайшие геодезические. Геодезическая реализация на евклидовой плоскости обычно называется *линейным графом*, поскольку все ребра такой реализации – прямолинейные отрезки.

Геометрическую реализацию графа G назовем *вложенной*, если ее ребра – вложенные кривые, пересекающиеся только по общим вершинам. Граф G , для которого фиксирована некоторая вложенная геодезическая реализация, также назовем *вложенным*.

Длиной геометрической реализации графа назовем сумму длин всех ее ребер. В сделанных выше предположениях о свойствах рассматриваемых метрических пространств длина графа G равна точной нижней грани длин всех его геометрических реализаций, а также равна длине произвольной его геодезической реализации.

Пусть $G = (V, E)$ – дерево на M и $e \in E$. Обозначим связные компоненты графа $G \setminus e$ через G_i , и пусть $M_i = M \cap G_i$. Разбиение $\{M_1, M_2\}$ множества M будем обозначать через $\mathcal{P}_G(e)$, а расстояние между M_1 и M_2 – через $d_G(e)$. Следующее утверждение является переформулировкой в наших обозначениях хорошо известных свойств минимальных остовных деревьев (см., например, [1]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. *Дерево G на M является минимальным остовным, если и только если для любого ребра e из G выполняется $\rho(e) = d_G(e)$.*

1.3. Диаграммы Вороного и триангуляции Делоне на плоскости.

Излагаемая в настоящем пункте теория диаграмм Вороного и триангуляций Делоне хорошо известна (см., например, [1]), однако мы приводим их здесь, чтобы отметить параллели между классическим случаем и случаем внутренних остовных деревьев, обсуждаемым в следующем параграфе.

Пусть X – плоскость $\mathbb{R}^2$ со стандартной функцией ρ евклидова расстояния и M – конечное подмножество в X . *Ячейкой Вороного $\text{Vor}_M(t)$ точки $t \in M$* называется множество всех точек из $\mathbb{R}^2$, находящихся от t не далее, чем от остальных точек из M ; при этом t называется *центром ячейки $\text{Vor}_M(t)$* . Таким образом, ячейка Вороного для t представляет собой пересечение полуплоскостей, содержащих t и ограниченных серединными перпендикулярами к отрезкам, соединяющим t с остальными точками из M . Последнее означает, что ячейка Вороного является выпуклым многоугольным множеством с непустой внутренностью, содержащей t , и если эта ячейка ограничена, то – выпуклым многоугольником. При этом внутренности ячеек Вороного не пересекаются. Множество всех ячеек Вороного называется *диаграммой Вороного*.

Пересечение ячеек Вороного $\text{Vor}_M(m_1)$ и $\text{Vor}_M(m_2)$ является связным замкнутым подмножеством серединного перпендикуляра ℓ к отрезку m_1m_2 . Таким образом, это пересечение является или пустым, или точкой, или отрезком, или лучом, или прямой ℓ . Далее, если p – общая точка для нескольких ячеек

Вороного, то все центры этих ячеек равноудалены от p , скажем, на расстояние r , и в круге с радиусом r и центром в p нет других точек из M . В частности, внутри этого круга вообще нет точек из M .

Пересекающиеся более чем по точке ячейки Вороного назовем *смежными*, а отрезки, соединяющие центры смежных ячеек Вороного, – *отрезками Делоне*. Легко проверить, что внутри отрезка Делоне не может быть точек из M . Более того, отрезки Делоне могут пересекаться только по общим концевым точкам. Таким образом, отрезки Делоне порождают плоский линейный граф, который называется *графом Делоне*.

Важным результатом теории евклидовых минимальных остовных деревьев, позволяющим существенно ускорить алгоритмы их построения, является следующая классическая теорема [7].

ТЕОРЕМА 1.4. *Каждое минимальное остовное дерево на M содержится в графе Делоне множества M .*

Из теоремы 1.4 вытекает, в частности, что граф Делоне связан. Ограниченные грани графа Делоне назовем *ячейками Делоне*. Можно показать, что ячейки Делоне являются выпуклыми многоугольниками, каждый из которых вписан в окружность. Каждое ребро границы выпуклой оболочки множества M является отрезком Делоне. Поэтому множество ячеек Делоне представляет собой разбиение выпуклой оболочки множества M на вписанные (выпуклые) многоугольники, причем для каждого из них в круге, ограниченном описанной окружностью, не существует других вершин из M , кроме вершин самого многоугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Если точки из M находятся в общем положении в том смысле, что они не содержатся ни в какой прямой, и никакие четыре из них не лежат на одной окружности, то все ячейки Делоне являются треугольниками. Тем самым, множество ячеек Делоне в этом случае является триангуляцией выпуклой оболочки множества M и называется *триангуляцией Делоне*. Для множеств M необщего положения, не лежащих ни на какой прямой, *триангуляцией Делоне* называется каждая триангуляция, полученная из графа Делоне добавлением диагоналей его нетреугольных граней.

§ 2. Внутренняя геометрия многоугольников

Настоящий параграф посвящен изучению внутренних минимальных остовных деревьев вложенных (обычных) плоских многоугольников. Продолжение данной статьи, над которым авторы работают сейчас, будет посвящено рассмотрению случая погруженных многоугольников.

2.1. Геодезические в плоских многоугольниках. Пусть W – произвольный плоский многоугольник с множеством вершин M . Определим на W функцию *внутреннего расстояния* $\rho_W(u, v)$, положив ее равной точной нижней грани длин всех спрямляемых кривых в W , соединяющих u и v . Поскольку многоугольник является линейно связным компактом, каждые две точки которого можно соединить спрямляемой кривой, то любые его две точки соединяет кратчайшая геодезическая (см. [18]). Таким образом, рассматриваемое

метрическое пространство (W, ρ_W) удовлетворяет предположениям, сделанным в начале работы.

Пусть t – вершина многоугольника W , а p и q – такие точки из W , что отрезки $[p, t]$ и $[q, t]$ лежат в W . Лучи $[t, p)$ и $[t, q)$ разбивают плоскость на два угла. Тот из них, который лежит внутри угла многоугольника W с вершиной в t , назовем *внутренним*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Кривая γ в W является геодезической в (W, ρ_W) тогда и только тогда, когда γ – конечная (вложенная) ломаная, внутренние вершины которой суть вершины многоугольника W , причем в каждой такой вершине внутренний угол ломаной (а значит, и внутренний угол многоугольника W) больше π .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала γ – геодезическая в (W, ρ_W) . Пусть x – точка из γ , или лежащая внутри многоугольника W либо внутри его стороны, или являющаяся его вершиной, внутренний угол в которой меньше или равен π . Тогда x имеет сколь угодно малую окрестность U в многоугольнике, выпуклую как подмножество плоскости. Поэтому если связная компонента $\gamma \cap U$, содержащая x , не является прямолинейной ни для какой U , то γ можно укоротить в каждой из таких U , что противоречит определению геодезической. Таким образом, кривая γ представляет собой объединение отрезков, концевые точки которых, внутренние для γ , суть вершины многоугольника W , причем внутренние углы многоугольника в таких вершинах больше π . Поэтому каждый прямолинейный отрезок кривой γ , за исключением, быть может, начального и конечного, соединяет разные вершины многоугольника W и, значит, длины всех таких отрезков отделены от нуля. Следовательно, так как кривая γ имеет конечную длину, она состоит из конечного числа отрезков. Покажем, что кривая γ является вложенной. Для этого заметим сначала, что γ не содержит точек возврата, поэтому если γ имеет самопересечения, то некоторый ее фрагмент ограничивает многоугольник, который мы обозначим через $\widehat{W}$. Этот многоугольник в силу односвязности W целиком содержится в W . Однако каждый многоугольник имеет не меньше двух вершин, внутренние углы в которых меньше π . Одна из таких вершин многоугольника $\widehat{W}$ не является точкой самопересечения кривой γ , и поэтому γ можно укоротить в сколь угодно малой окрестности этой точки внутри $\widehat{W}$.

Для доказательства обратного утверждения нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2.2. *Произвольные две точки многоугольника W соединяет единственная (вложенная) конечная ломаная, внутренние вершины которой суть вершины многоугольника W , причем в каждой такой вершине внутренний угол ломаной больше π .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x и y – произвольные точки из W , и пусть их соединяют две различные ломаные γ_1 и γ_2 с указанными свойствами. Тогда существуют такие точки a и b , общие для γ_1 и γ_2 , что фрагменты L_i ломаных γ_i между этими точками пересекаются только по a и b . Поскольку W односвязен, ломаные L_1 и L_2 ограничивают многоугольник $\widehat{W}$, содержащийся в W . Так как каждый многоугольник имеет не менее трех внутренних углов, меньших π , внутри одной из L_i найдется вершина v многоугольника $\widehat{W}$, в которой

угол этого многоугольника, а значит, и самой ломаной меньше π . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Вернемся к доказательству утверждения. Пусть γ – ломаная, удовлетворяющая всем перечисленным условиям и соединяющая точки x и y , и пусть $\hat{\gamma}$ – геодезическая в W , также соединяющая x и y . Однако из первой части утверждения вытекает, что $\hat{\gamma}$ – ломаная с теми же свойствами, откуда в силу леммы 2.2 имеем $\hat{\gamma} = \gamma$. Утверждение доказано.

Из утверждения 2.1 и леммы 2.2 вытекает также следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Пусть W – произвольный многоугольник на плоскости. Тогда любые две его точки соединяет единственная геодезическая.*

Подмногоугольником V многоугольника W назовем содержащийся в W многоугольник, все вершины которого являются вершинами многоугольника W .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. *Пусть V – произвольный подмногоугольник многоугольника W . Тогда каждая геодезическая в многоугольнике V является также геодезической в многоугольнике W . В частности, ограничение внутренней метрики ρ_W многоугольника W на его подмногоугольник V совпадает с внутренней метрикой ρ_V многоугольника V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удалим из многоугольника W подмногоугольник V и рассмотрим замыкания W_i связанных компонент полученного множества. Покажем, что каждое W_i является подмногоугольником, пересекается с V по отрезку, а различные W_i и W_j пересекаются не более чем по общей вершине. Действительно, каждая сторона многоугольника V – это или сторона, или диагональ многоугольника W . Поскольку W односвязен, каждая такая диагональ разрезает W на две части, из которых одна содержит V , а другая не содержит. Замыкание этой последней компоненты представляет собой один из подмногоугольников W_i , и все W_i получаются таким образом.

Пусть теперь x и y – точки многоугольника V , а γ – геодезическая в W , соединяющая эти точки. Достаточно показать, что $\gamma \subset V$. Предположим противное. Тогда γ содержит подломаную γ' , внутренность которой лежит в $W_i \setminus V$ для некоторого i , а концы ее x' и y' содержатся в $W_i \cap V$. Однако тогда отрезок $[x', y']$ лежит в W и не длиннее γ' . Так как по следствию 2.3 любые две точки из W соединяет единственная геодезическая, γ' совпадает с $[x', y']$ и поэтому лежит в V . Противоречие. Утверждение доказано.

2.2. Выпуклые подмножества плоскости и ломаные. Пусть H – произвольное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что точка $p \in H$ *лежит внутри* H , если p принадлежит внутренности H .

ЛЕММА 2.5. *Пусть H – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, точка a лежит внутри H , а точка b – на границе тела H . Тогда полуинтервал $[a, b)$ лежит внутри H . Далее, каждая точка луча $[a, b)$, расположенная за b , не лежит в H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – шаровая окрестность точки a , лежащая внутри H , и $C_b(U)$ – конус над U с вершиной в b . Из выпуклости H вытекает, что $C_b(U)$ находится в замыкании H , откуда $[a, b) \subset \text{Int } C_b(U)$ содержится внутри H . Далее, если существует точка $p \in H$, лежащая на луче $[a, b)$ за точкой b , то $C_p(U) \subset H$ содержит b как внутреннюю точку. Противоречие.

ЛЕММА 2.6. Пусть H – замкнутое выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ и $[a, b]$ – отрезок в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\partial H \cap [a, b]$ или связно, или состоит ровно из двух точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что если $\partial H \cap [a, b]$ содержит три различные точки x, y и z , то $\partial H \cap [a, b]$ линейно связно. Пусть для определенности точка y расположена на $[a, b]$ между x и z . Из выпуклости H вытекает, что $[x, z] \subset H$. Покажем, что (x, y) и (y, z) не могут содержать точки из $\text{Int } H$. Действительно, пусть, например, (x, y) содержит точку $p \in \text{Int } H$. Тогда по лемме 2.5, примененной к отрезку $[p, y]$, точка z не лежит в H . Противоречие. Поэтому $[x, z] \subset \partial H$, откуда $[a, b] \cap \partial H$ линейно связно. Лемма доказана.

Пусть X – произвольное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\text{conv}^1 X$ объединение отрезков, соединяющих всевозможные пары точек из X , и назовем полученное множество *1-выпуклой оболочкой* для X . По индукции определим *k-выпуклую оболочку* $\text{conv}^k X$ как объединение отрезков, соединяющих всевозможные точки из $\text{conv}^{k-1} X$ со всевозможными точками из X .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. Для произвольного подмножества X пространства $\mathbb{R}^n$ имеет место

$$\text{conv}^n X = \text{conv } X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что k -выпуклая оболочка множества X представляет собой объединение выпуклых оболочек всевозможных $(k+1)$ -элементных подмножеств множества X . С другой стороны, $\text{conv } X$ представляет собой объединение выпуклых оболочек всевозможных $(n+1)$ -элементных подмножеств X , откуда и вытекает требуемое равенство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. Пусть W – многоугольник на плоскости и H – выпуклое подмножество плоскости. Тогда каждая связная компонента пересечения $H \cap W$ геодезически выпукла в W . Другими словами, если точки a и b из W соединены кривой, лежащей в H , то кратчайшая геодезическая γ в W , соединяющая эти точки, также содержится в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{H}$ – связная компонента множества $H \cap W$. Мы должны показать, что для любых двух точек a и b из $\hat{H}$ кратчайшая геодезическая γ в W , соединяющая эти точки, содержится в $\hat{H}$. Последнее равносильно тому, что γ лежит в H .

Заметим, что каждая точка $x \in \hat{H}$ имеет как в многоугольнике W , так и в выпуклом множестве H звездные окрестности с общим центром в x , а пересечение таких звездных окрестностей звездно, поэтому линейно связно и, в частности, лежит в $\hat{H}$. С другой стороны, если каждая точка связного топологического пространства имеет линейно связную окрестность, то и само пространство линейно связно, что гарантирует линейную связность $\hat{H}$. Отсюда вытекает, что в $\hat{H}$ существует непрерывная кривая δ , соединяющая a и b .

Пусть x и y – произвольные точки на δ . Предположим, что отрезок $[x, y]$ лежит в W . В силу выпуклости H этот отрезок содержится в $W \cap H$ и, в частности, в $\hat{H}$. Точки x и y разбивают кривую на три компоненты, крайние из которых могут быть точечными. Заменяем среднюю из них на отрезок $[x, y]$. Полученную в результате непрерывную кривую в $\hat{H}$ назовем *срезкой кривой δ по точкам x и y* . Мы покажем, что конечной последовательностью срезов кривую δ можно перестроить в геодезическую γ , откуда и заключаем, что $\gamma \subset \hat{H}$.

По утверждению 2.1 геодезическая γ представляет собой ломаную. Пусть ax – первое звено ломаной γ . Если $x = b$, то ломаная γ – отрезок $[a, b]$, лежащий в H , что и требовалось показать. Иначе x – вершина многоугольника W , причем внутренние углы ломаной γ и многоугольника в x больше π . Продолжим отрезок ax за точку x . Поскольку в x выполнено описанное выше условие для углов, близкие к x точки этого продолжения расположены внутри W . Обозначим через y первую точку выхода рассматриваемого продолжения на границу многоугольника W . Отрезок xy делит многоугольник W на две части W_1 и W_2 , и пусть $a \in W_1$. Покажем, что $\gamma \setminus [a, x]$ лежит в W_2 . Действительно, так как внутренний угол ломаной γ в x больше π , следующее за $[a, x]$ звено из γ содержится в W_2 . Далее, ломаная γ пересекает отрезок $[x, y]$ только по точке x , так как в противном случае ее можно укоротить. Таким образом, зайдя в W_2 через точку x , ломаная γ остается в W_2 . Итак, точки a и b лежат в разных W_i . Поэтому кривая δ пересекает отрезок $[x, y]$ в некоторой точке z . Рассмотрим срезку δ' кривой δ по точкам a и z . Срезка δ' содержит первое звено ломаной γ .

Удалим из геодезической γ и срезки δ' полуинтервал $[a, x]$. Полученные геодезическая $\hat{\gamma}$ и кривая $\hat{\delta}$ соединяют точки x и b , причем $\hat{\delta}$ лежит в $\hat{H}$, а $\hat{\gamma}$ – кратчайшая геодезическая в W , имеющая на одно звено меньше, чем исходная геодезическая γ . Поэтому к $\hat{\gamma}$ и $\hat{\delta}$ можно применить описанную выше конструкцию. Повторяя эту операцию, мы за конечное число шагов перестроим исходную кривую δ в кратчайшую геодезическую γ , что и требовалось доказать. Утверждение доказано.

2.3. Видимость. Пусть W – произвольный плоский многоугольник с множеством вершин M и $w \in W$ – произвольная точка многоугольника. Рассмотрим все точки из W , которые видны из w , т.е. все такие точки $x \in W$, для каждой из которых отрезок $[x, w]$ лежит в W . Множество таких точек назовем *областью видимости с центром в w* и обозначим $\text{Vis}_W(w)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.9. *Область видимости $\text{Vis}_W(w)$ произвольной точки $w \in W$ является замкнутым подмножеством в W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\{x_n\} \subset W$ – сходящаяся к $x \in W$ последовательность точек, видимых из w . Тогда отрезки $[w, x_n]$ лежат в W и сходятся поточечно к отрезку $[w, x] \subset \mathbb{R}^2$. Однако многоугольник W является замкнутым подмножеством плоскости, поэтому и предельный отрезок $[w, x]$ лежит в W , т.е. $x \in \text{Vis}_W(w)$, что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.10. *Пусть w и w' – произвольные различные точки многоугольника W . Тогда пересечение областей видимости этих точек и серединного перпендикуляра к отрезку ww' является или пустым, или точкой, или отрезком.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через ℓ серединный перпендикуляр к отрезку $[w, w']$, а через I – изучаемое пересечение $\text{Vis}_W(w) \cap \text{Vis}_W(w') \cap \ell$. Пусть x и y – две произвольные точки из I . Покажем, что отрезок $[x, y]$ также лежит в I . Действительно, граница четырехугольника $Q = wxw'y$ содержится в W , поэтому согласно односвязности W весь этот четырехугольник содержится в W . Заметим, что Q составлен из двух треугольников wxy и $w'xy$, поэтому отрезок $[x, y]$ является внутренней диагональю четырехугольника Q и, значит,

также принадлежит W . Кроме того, для каждой точки $z \in [x, y]$ отрезки $[w, z]$ и $[w', z]$ лежат в четырехугольнике Q и, значит, также лежат в W . Отсюда вытекает, что все точки из $[x, y]$ видны одновременно из w и w' и, значит, весь отрезок $[x, y]$ попал в I . Таким образом, если I не пусто и не является точкой, то оно представляет собой связное подмножество серединного перпендикуляра ℓ . Оно также замкнуто и ограничено, так как сами области видимости являются замкнутыми по утверждению 2.9 и ограниченными в силу ограниченности W , а серединный перпендикуляр ℓ – замкнутое подмножество плоскости. Отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае I – отрезок серединного перпендикуляра ℓ , что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11 (геодезическая выпуклость области видимости). Пусть w – произвольная точка многоугольника W и $a \neq b$ – любые точки из $\text{Vis}_W(w)$, а γ – геодезическая в W , соединяющая a и b . Тогда $\gamma \subset \text{Vis}_W(w)$, т. е. любая точка геодезической γ видна из w . Иными словами, область видимости является геодезически выпуклой. Более того, если w – вершина из W , то геодезическая γ лежит во внутреннем угле awb .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если одна из точек a, b , скажем a , совпадает с w , то отрезок $[a, b]$ целиком лежит в $\text{Vis}_W(w)$ и поэтому является геодезической.

Пусть теперь a и b отличны от w . Покажем, что γ целиком видна из w . Предположим противное, т. е. γ содержит невидимые из w точки, и рассмотрим подмножество γ_h в γ , состоящее из всех таких точек. Каждая связная компонента этого подмножества гомеоморфна интервалу, а замыкание такой компоненты – кратчайшая геодезическая, соединяющая пару точек, скажем x и y , видимых из w , причем все внутренние точки этой геодезической из w не видны.

Если x, y и w лежат на одной прямой, то отрезок $[x, y]$ лежит в многоугольнике W , поэтому, заменив γ_h на $[x, y]$, мы получим кривую в W , соединяющую a и b , длина которой меньше, чем геодезической γ . Противоречие. Таким образом, отрезки $[x, w]$ и $[w, y]$ не лежат на одной прямой и, значит, пересекаются только по точке w . Поскольку внутренность кривой γ_h из w не видна, эти отрезки, вместе с γ_h , ограничивают область Ω , содержащую внутри себя точки из границы многоугольника W . Последнее противоречит односвязности W , что и завершает доказательство первой части утверждения.

Для доказательства второй части утверждения заметим, что если γ содержит точку x' , не попавшую в угол awb , то замыкание содержащей x' связной компоненты ломаной γ с выброшенным внутренним углом awb длиннее отрезка, соединяющего концы этой связной компоненты. Последнее позволяет укоротить γ . Противоречие. Утверждение полностью доказано.

В заключение настоящего пункта мы приведем несколько полезных технических результатов, вытекающих из предыдущих утверждений.

ЛЕММА 2.12. Пусть W – произвольный плоский многоугольник и $\hat{H}$ – связная компонента пересечения W с некоторым выпуклым подмножеством H . Тогда если $\hat{H}$ не выпукла, то $\hat{H}$ содержит по крайней мере одну вершину многоугольника W и из каждой точки $p \in \hat{H}$ видна некоторая вершина многоугольника W , лежащая в $\hat{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\hat{H}$ не выпукла, то существуют такие точки a и b из $\hat{H}$, что $[a, b]$ не содержится в $\hat{H}$. В силу утверждения 2.8 кратчайшая геодезическая γ в W , соединяющая a и b , содержится в $\hat{H}$. Поскольку $[a, b]$ не содержится в $\hat{H}$, эта геодезическая не является отрезком, а значит, она является ломаной, внутренние вершины которой по утверждению 2.1 суть вершины многоугольника W . Поэтому $\hat{H}$ содержит по крайней мере одну вершину t многоугольника W . Если p – произвольная точка из $\hat{H}$, то, рассмотрев кратчайшую в W геодезическую γ , соединяющую t и p , которая согласно утверждению 2.8 лежит в $\hat{H}$, возьмем на ней первую, считая от p , вершину ломаной γ . Эта вершина является видимой из p вершиной многоугольника W , лежащей в $\hat{H}$. Лемма доказана.

Следующая лемма является простым следствием леммы 2.12.

ЛЕММА 2.13. Пусть H – выпуклое подмножество плоскости, содержащее некоторую вершину t многоугольника W . Обозначим через $\hat{H}$ связную компоненту множества $H \cap W$, содержащую t . Тогда из каждой точки $p \in \hat{H}$ видна некоторая вершина многоугольника W , лежащая в $\hat{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если компонента $\hat{H}$ не выпукла, то требуемое непосредственно следует из леммы 2.12. Если $\hat{H}$ выпукла, то вершина $t \in \hat{H}$ видна из любой точки компоненты $\hat{H}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.14. Пусть p – точка многоугольника W , не являющаяся его вершиной, и пусть из нее видны все точки некоторого множества $X \subset W$. Обозначим через H выпуклую оболочку множества $\{p\} \cup X$. Предположим, что H – многоугольник (вообще говоря, вырожденный) и каждая вершина многоугольника W , лежащая в H и видимая из p , принадлежит X и является вершиной многоугольника H , а угол многоугольника H в ней меньше π . Тогда $H \subset W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{H}$ – связная компонента множества $W \cap H$, содержащая p . Поскольку все точки множества X видны из p , имеем $X \subset \hat{H}$.

Рассмотрим две произвольные точки x_1 и x_2 множества X . В силу утверждения 2.8 компонента $\hat{H}$ является геодезически выпуклой, поэтому единственная геодезическая γ в W , соединяющая x_1 и x_2 , лежит в $\hat{H}$. Далее, так как x_1 и x_2 видны из p , по утверждению 2.11 вся геодезическая γ видна из p . Заметим, что отрезок $[x_1, x_2]$ лежит в H . Применим утверждение 2.8 к выпуклому множеству – треугольнику px_1x_2 и многоугольнику W . Поскольку ломаная x_1px_2 лежит в W , точки x_1 и x_2 содержатся в одной компоненте связности пересечения треугольника px_1x_2 и W , поэтому по утверждению 2.8 геодезическая γ лежит в треугольнике px_1x_2 . Далее, по предположению ни внутри этого треугольника, ни внутри его сторон нет видимых из p вершин многоугольника W . Действительно, внутренность треугольника px_1x_2 содержится внутри H , а внутренность стороны треугольника – или внутри H , или в границе многоугольника H . В последнем случае, если внутри стороны треугольника оказалась вершина из W , угол многоугольника H в ней равен π , что невозможно по предположению. Таким образом, вершины ломаной γ могут располагаться только в вершинах треугольника px_1x_2 , и так как p не является вершиной многоугольника W , то геодезическая γ является отрезком.

Обозначим через X' объединение отрезков, соединяющих всевозможные точки из $\{p\} \cup X$. Отметим, что $X' = \text{conv}^1(\{p\} \cup X)$; все точки множества X' видны из p ; имеем $X \subset X' \subset H$, поэтому $H = \text{conv}(\{p\} \cup X')$; наконец, $X' \subset \hat{H}$. Следовательно, X' удовлетворяет тем же свойствам, что и X . Применяя к X' приведенные выше рассуждения, построим множество X'' , являющееся объединением отрезков, соединяющих всевозможные точки из $\{p\} \cup X'$. Отметим, что каждый такой отрезок целиком виден из p и

$$X'' \supset \text{conv}^2(\{p\} \cup X) = \text{conv}(\{p\} \cup X) = H,$$

где предпоследнее равенство имеет место в силу утверждения 2.7. Поскольку $X'' \subset \hat{H} \subset H$, из последнего соотношения следует, что $\hat{H} = H$, откуда заключаем, что $H \subset W$. Лемма доказана.

2.4. Внутренние ячейки Вороного плоского многоугольника. Пусть, как и выше, W – произвольный многоугольник на плоскости и ρ_W – функция расстояния на W . Определим *внутреннюю ячейку Вороного вершины t из W* как множество тех точек p из W , для которых $\rho_W(t, p) \leq \rho_W(p, t')$ для каждой вершины $t' \neq t$ многоугольника W . Внутреннюю ячейку Вороного вершины t обозначим через $\text{IVor}_W(t)$; вершину t назовем *центром ячейки* $\text{IVor}_W(t)$. Отметим, что в общем случае $\text{IVor}_W(t) \neq \text{Vor}_M(t) \cap W$. На рис. 1 пересечение одной из ячеек Вороного на $\mathbb{R}^2$ с многоугольником W не содержит точек из M , поэтому не может являться внутренней ячейкой Вороного.

Рис. 1

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.15. *Внутренняя ячейка Вороного с центром в вершине $t \in M$ является звездной относительно t , т.е. $\text{IVor}_W(t) \subset \text{Vis}_W(t)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. существует точка p из рассматриваемой ячейки, не видимая из t . Пусть γ – кратчайшая геодезическая, соединяющая t и p . Поскольку p не видна из t , то γ не является прямолинейным отрезком, поэтому первая на γ точка t' из M , считая от p , отлична от t . Однако тогда $\rho_W(p, t) > \rho_W(p, t')$ – противоречие с определением ячейки Вороного. Доказательство закончено.

Каждый максимальный по включению отрезок, лежащий в многоугольнике W , будем называть *внутренней прямой* в многоугольнике W . При этом там,

где это не вызовет недоразумений, не будем явно указывать, в каком именно многоугольнике рассматривается внутренняя прямая, а обычные прямые на плоскости будем называть просто прямыми.

Пусть $[x, y]$ – некоторая внутренняя прямая в W . Ясно, что x и y лежат на границе ∂W . Удалим из плоскости множество $[x, y] \cup \partial W$, и пусть $\{\Omega_i\}$ – ограниченные связные компоненты полученного множества. Каждая из Ω_i примыкает к отрезку $[x, y]$ с одной из двух сторон. Объединение внутренней прямой $[x, y]$ с замыканиями всех Ω_i , примыкающих к ней с одной и той же стороны, называется *внутренней полуплоскостью*, ограниченной внутренней прямой $[x, y]$. Поскольку две внутренние полуплоскости, ограниченные внутренней прямой, пересекаются в точности по этой прямой, имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.16. *Каждая внутренняя полуплоскость в W является геодезически выпуклым и, в частности, линейно связным подмножеством в W .*

Внутренней диагональю многоугольника W назовем отрезок, соединяющий его несоседние вершины и лежащий в W . Отметим, что середина s каждой внутренней диагонали или стороны $[m, m']$ многоугольника W лежит в W , поэтому корректно определена внутренняя прямая в W , проходящая через s и перпендикулярная $[m, m']$. Эта внутренняя прямая называется *внутренним серединным перпендикуляром* к $[m, m']$ в W . Внутренний серединный перпендикуляр к $[m, m']$ в W делит W на две ограниченные им внутренние полуплоскости, одна из которых содержит m , а другая – m' .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.17. *Пусть $[m, m']$ – внутренняя диагональ или сторона многоугольника W , ℓ – серединный перпендикуляр к отрезку $[m, m']$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ и $[a, b] \subset \ell$ – внутренний серединный перпендикуляр к $[m, m']$ в W . Далее, обозначим через $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ ограниченную прямой ℓ обычную полуплоскость, содержащую m , а через Π_W – внутреннюю полуплоскость в W , ограниченную $[a, b]$ и содержащую m . Тогда $\Pi \cap \text{Vis}_W(m) \subset \Pi_W$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \Pi \cap \text{Vis}_W(m)$. Поскольку отрезок $[m, x]$ лежит в $\Pi \cap W$, он не может выйти за пределы Π_W .

Рассмотрим семейство S_W внутренних серединных перпендикуляров ко всем внутренним диагоналям и сторонам многоугольника W . Будем говорить, что внутренняя прямая из S_W *инцидентна* точке $t \in M$, если эта прямая является внутренним серединным перпендикуляром к стороне или диагонали с концом в t . Рассмотрим пересечение содержащих t внутренних полуплоскостей, ограниченных всеми инцидентными t внутренними прямыми из S_W . Полученное множество назовем *внешней ячейкой Вороного вершины t* и обозначим через $\text{OVor}_W(m)$. Таким образом, $\text{OVor}_W(m)$ представляет собой пересечение всех содержащих t внутренних полуплоскостей, ограниченных внутренними серединными перпендикулярами к отрезкам, соединяющим t с видимыми из t вершинами многоугольника W .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.18. *Внешняя ячейка Вороного является геодезически выпуклой и потому линейно связной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Внешняя ячейка Вороного является пересечением внутренних полуплоскостей, поэтому ее геодезическая выпуклость вытекает из утверждений 2.16, 1.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.19. *Для каждой вершины t многоугольника W выполняется $\text{OVor}_W(m) \subset \text{Vis}_W(m)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим произвольную точку $x \in \text{OVor}_W(m)$ и предположим, что x не видна из t . Рассмотрим геодезическую γ в W , соединяющую x и t , которая по предположению является ломаной, и пусть m' – первая, считая от t , вершина на γ . Ясно, что m' видна из t . В силу утверждения 2.18 имеем $\gamma \subset \text{OVor}_W(m)$, поэтому $m' \in \text{OVor}_W(m)$. Однако по определению во внешней ячейке Вороного $\text{OVor}_W(m)$ нет видимых из t вершин многоугольника, отличных от t . Полученное противоречие и завершает доказательство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.20. *Пусть t – произвольная вершина многоугольника W . Тогда*

$$\text{IVor}_W(m) = \text{OVor}_W(m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим включение $\text{IVor}_W(m) \subset \text{OVor}_W(m)$. Выберем произвольную точку $x \in \text{IVor}_W(m)$. Напомним, что в силу утверждения 2.15 точка x видна из t . Необходимо показать, что для произвольной отличной от t вершины $m' \in M$, видимой из t , точка x лежит в содержащей t внутренней полуплоскости в W , ограниченной внутренним серединным перпендикуляром s к отрезку $[m, m']$.

Если m' видна из x , то $\rho(m, x) = \rho_W(m, x) \leq \rho_W(m', x) = \rho(m', x)$, поэтому x лежит в содержащей t обычной полуплоскости, ограниченной обычным серединным перпендикуляром к отрезку $[m, m']$. Следовательно, по утверждению 2.17 точка x лежит и в содержащей t внутренней полуплоскости, ограниченной s .

Пусть теперь m' не видна из x . Тогда геодезическая γ , соединяющая x и m' , является ломаной, внутренние вершины которой суть точки из M . Обозначим через m'' первую, считая от x , внутреннюю вершину ломаной γ . Предположим сначала, что $m'' = t$. Тогда отрезок $[x, m]$ лежит в содержащей точку t внутренней полуплоскости в W , ограниченной s . Действительно, в противном случае отрезок $[x, m]$ пересекает s и ограничивает вместе с s и $[m, m']$ прямоугольный треугольник, лежащий в W . Поэтому угол между $[m', m]$ и $[x, m]$ в вершине t многоугольника W острый, что невозможно.

Пусть теперь $m'' \neq t$. Заметим, что поскольку $x \in \text{IVor}_W(m)$, то

$$\rho(m, x) = \rho_W(m, x) \leq \rho_W(m'', x) = \rho(m'', x).$$

Отметим, что x и m' соединены ломаной $x t m'$, лежащей как в многоугольнике W , так и в треугольнике $x t m'$. Поэтому по утверждению 2.8, примененному к треугольнику $x t m'$, ломаная γ лежит в этом треугольнике. В частности, точка m'' лежит в треугольнике $x t m'$. По построению вершина m'' отлична от x и m' , а по предположению – от t .

ЛЕММА 2.21. *Пусть $x t m'$ – произвольный треугольник на плоскости, точка m'' лежит в треугольнике $x t m'$, причем m'' отлична от t и $\rho(m, x) \leq \rho(m'', x)$. Тогда $\rho(m, x) \leq \rho(m', x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если m'' совпадает с m' , то утверждение тривиально, а если $m'' = x$, то $m = x$ и утверждение леммы выполнено, так как $\rho(m, x) = 0$. Пусть теперь m'' отлична от вершин треугольника xmm' . Тогда $\widehat{xmm'} \geq \widehat{xmm''}$. Поскольку $\rho(m, x) \leq \rho(x, m'')$, то

$$\widehat{xmm''} \geq \widehat{xm''m} = \pi - \widehat{m''xm} - \widehat{xmm''} \geq \pi - \widehat{m'xm} - \widehat{xmm'} = \widehat{xm'm},$$

где последнее неравенство вытекает из того, что m'' лежит в треугольнике xmm' . Итак, $\widehat{xmm'} \geq \widehat{xm'm}$ и, значит, $\rho(x, m') \geq \rho(x, m)$. Лемма доказана.

В силу леммы 2.21 точка x лежит в содержащей m обычной полуплоскости, ограниченной обычным серединным перпендикуляром к отрезку mm' . Поэтому по утверждению 2.17 точка x лежит и во внутренней полуплоскости, ограниченной s и содержащей m . Итак, во всех случаях x лежит во внутренней полуплоскости, содержащей m , значит, $x \in \text{OVor}_W(m)$, что и завершает доказательство прямого включения.

Докажем теперь обратное включение $\text{IVor}_W(m) \supset \text{OVor}_W(m)$. Пусть $x \in \text{OVor}_W(m)$; тогда в силу утверждения 2.19 точка x видна из m . Далее, пусть m' — произвольная вершина многоугольника W и γ — геодезическая в W , соединяющая x и m' , а m'' — первая, считая от x , вершина на γ . Если $m'' = m$, то $\rho_W(x, m) \leq \rho_W(x, m')$.

Пусть теперь $m'' \neq m$. Вершина m'' видна из x , и геодезическая $\hat{\gamma}$, соединяющая m и m'' , лежит в треугольнике $H = xmm''$ в силу утверждения 2.8. Обозначим через $\hat{m}$ первую, считая от m , вершину на $\hat{\gamma}$. Поскольку концы геодезической $\hat{\gamma}$ видны из x , вершина $\hat{m}$ также видна из x по утверждению 2.11. Кроме того, $\hat{m}$ лежит в треугольнике xmm'' и отлична от m . Внутренний серединный перпендикуляр к отрезку $[m, \hat{m}]$ пересекает ломаную $m\hat{m}$, а так как $x \in \text{OVor}_W(m)$, то он пересекает отрезок $[x, \hat{m}]$. Поэтому выполнено неравенство $\rho(x, m) \leq \rho(x, \hat{m})$, откуда, применяя лемму 2.21 к треугольнику xmm'' и точке $\hat{m}$, заключаем, что $\rho(x, m) \leq \rho(x, m'')$. Таким образом, имеем

$$\rho_W(x, m) = \rho(x, m) \leq \rho(x, m'') = \rho_W(x, m'') \leq \rho_W(x, m').$$

Итак, $\rho_W(m, x) \leq \rho_W(m', x)$ для любой вершины из M , откуда $x \in \text{IVor}_W(m)$, что и завершает доказательство утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 2.22. *Внутренняя ячейка Вороного является геодезически выпуклой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, это вытекает из утверждений 2.18, 2.20.

СЛЕДСТВИЕ 2.23. *Если две внутренние ячейки Вороного с центрами m и m' пересекаются более чем по одной точке, то их пересечение представляет собой некоторый отрезок $[a, b]$ серединного перпендикуляра к отрезку $[m, m']$. Более того, внутренность четырехугольника $mat'b$ лежит внутри многоугольника W , поэтому интервал (a, b) лежит внутри W и для каждой точки s интервала (a, b) интервалы (m, s) и (m', s) также лежат внутри W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x и y — две различные точки пересечения двух внутренних ячеек Вороного с центрами в m и m' . По утверждению 2.15 все точки внутренней ячейки Вороного видны из ее центра, поэтому x и y видны из m и m' , а значит, они лежат на серединном перпендикуляре к отрезку

$[m, m']$. По утверждению 2.10 весь отрезок $[x, y]$ лежит в W и поэтому является геодезической, соединяющей x и y . Значит, по следствию 2.22 отрезок $[x, y]$ лежит одновременно во внутренних ячейках Вороного вершин t и m' , т. е. принадлежит их пересечению. Тем самым, пересечение внутренних ячеек Вороного вершин t и m' является связным замкнутым ограниченным подмножеством серединного перпендикуляра к отрезку $[m, m']$, состоящим более чем из одной точки, т. е. отрезком.

Для доказательства второй части следствия заметим, что замкнутая ломаная $tam'b$ содержится в многоугольнике W , поэтому в силу односвязности W в нем содержится и весь четырехугольник $tam'b$, причем $[a, b]$ – его внутренняя диагональ. Следствие доказано.

Приведенный ниже результат немедленно вытекает из следствия 2.23.

СЛЕДСТВИЕ 2.24. *Внутренние ячейки Вороного могут пересекаться только по своим граничным точкам, поэтому относительная внутренность отрезка пересечения двух таких ячеек состоит из внутренних точек объединения этих ячеек и не пересекается с другими внутренними ячейками Вороного. В частности, внутренность объединения двух любых внутренних ячеек Вороного не пересекается с другими внутренними ячейками Вороного. Поэтому если две внутренние ячейки Вороного с центрами в t и m' пересекаются более чем по точке, то существует непрерывная кривая, соединяющая t и m' , все внутренние точки которой лежат внутри объединения этих ячеек и не принадлежат другим внутренним ячейкам Вороного.*

Кривую из утверждения следствия 2.24 назовем *хордой*.

Нам также понадобится следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.25. *Пусть внутренние ячейки Вороного точек t и m' пересекаются более чем по точке, а также внутренние ячейки Вороного точек n и n' пересекаются более чем по точке, причем точки t, m', n и n' попарно различны. Тогда точки t и m' не могут перемежаться с точками n и n' на границе многоугольника W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если это не так, то хорда, соединяющая точки t и m' , пересекает хорду, соединяющую точки n и n' , и это пересечение состоит из точек, внутренних для каждой из хорд. Однако в силу следствия 2.24 каждая такая точка принадлежит только двум внутренним ячейкам Вороного. Противоречие.

Таким образом, пересечение любых двух внутренних ячеек Вороного не имеет внутренней точки, поэтому совокупность всех внутренних ячеек Вороного с центрами в вершинах многоугольника W порождает разбиение многоугольника W на звездные многоугольники с центрами в этих вершинах. Построенное разбиение назовем *диаграммой Вороного многоугольника W* .

Из утверждения 2.4 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.26. *Пусть V – произвольный подмногоугольник многоугольника W и t – некоторая вершина из V . Тогда $\text{IVor}_V(t) \supset \text{IVor}_W(t) \cap V$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \text{IVog}_W(m) \cap V$ и m' – произвольная вершина подмногоугольника V , отличная от m . Тогда $\rho_W(x, m) \leq \rho_W(x, m')$ по определению ячейки $\text{IVog}_W(m)$, и так как x, m и m' принадлежат V , то из утверждения 2.4 заключаем, что

$$\rho_V(x, m) = \rho_W(x, m) \leq \rho_W(x, m') = \rho_V(x, m').$$

Следствие доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.27. Пусть $p \in W$ и $\{W_1, \dots, W_k\}$ – все внутренние ячейки Вороного, содержащие p . Тогда все центры $m_i, i = 1, \dots, k$, этих ячеек равноудалены от p , скажем на расстояние r , и в круге $K \subset \mathbb{R}^2$ с радиусом r и центром в p нет других вершин многоугольника W , видимых из p . В частности, внутри круга K нет вершин, видимых из p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любых i, j имеем

$$\rho_W(m_i, p) \leq \rho_W(m_j, p) \leq \rho_W(m_i, p),$$

откуда все $\rho_W(m_i, p)$ равны между собой. Кроме того, $\rho_W(m_i, p) = \rho(m_i, p)$ в силу утверждения 2.15, откуда и вытекает первая часть утверждения. Для доказательства второй части достаточно заметить, что если вершина $m \notin \{m_1, \dots, m_k\}$, видимая из p , лежит в круге K , то расстояние от p до m не превосходит $\rho(m_i, p) = r$. Далее, так как $p \in \text{IVog}_W(m_i)$, то и для произвольной вершины $m' \in M$ выполнено

$$\rho_W(p, m') \geq \rho_W(p, m_i) = \rho(p, m_i) \geq \rho(p, m) = \rho_W(p, m),$$

поэтому p лежит во внутренней ячейке Вороного с центром в m . Противоречие. Доказательство закончено.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.28. Пусть $p \in W$ и $\{W_1, \dots, W_k\}, k \geq 2$, – все внутренние ячейки Вороного, содержащие p , а $m_i, i = 1, \dots, k$, – центры ячеек W_i . Пусть H – выпуклая оболочка множества $\{m_1, \dots, m_k, p\}$. Тогда $H \subset W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 2.27 оболочка H содержится в круге $K \subset \mathbb{R}^2$ с радиусом $r = \rho(p, m_1)$ и центром в p , причем в K нет других вершин многоугольника W , видимых из p . Кроме того, все вершины m_i лежат на границе круга K . Покажем, что к H применима лемма 2.14 при $X = \{m_1, \dots, m_k\}$. Действительно, так как $k \geq 2$, то p не является вершиной многоугольника W . Далее, каждая вершина m многоугольника W , лежащая в H и видимая из p , принадлежит X , так как лежит в K . Более того, m является вершиной многоугольника H , и угол многоугольника H в m меньше π , так как X лежит на окружности, ограничивающей K . Таким образом, лемма 2.14 применима, откуда имеем $H \subset W$. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 2.29. Пусть $p \in W$ и $\{W_1, \dots, W_k\}, k \geq 2$, – все внутренние ячейки Вороного, содержащие p , а $m_i, i = 1, \dots, k$, – центры ячеек W_i . Положим

$$\begin{aligned} X &= \{m_1, \dots, m_k\}, & D &= \text{conv } X, & H &= \text{conv}(X \cup \{p\}), \\ K &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(p, x) \leq \rho(p, m_1)\}. \end{aligned}$$

Тогда:

- 1) для любых i и j вершина t_i видна из t_j ; в частности, геодезическая, соединяющая центры пересекающихся внутренних ячеек Вороного, является отрезком;
- 2) в H нет вершин из M , отличных от t_i , таким образом, $H \cap M = X$;
- 3) D является выпуклым многоугольником, возможно, вырожденным, вписанным в окружность ∂K , причем в D нет вершин из M , отличных от t_i , таким образом, $D \cap M = X$ и множество вершин многоугольника D совпадает с X ;
- 4) как относительная внутренность D , так и относительная внутренность H не содержат точек из M (как видимых из p , так и не видимых из p).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 2.28 выпуклое множество H содержится в W , откуда $[t_i, t_j] \subset H \subset W$, что и доказывает утверждение 1). Если бы в H была вершина t из M , отличная от t_i , то по утверждению 2.27 вершина t была бы невидна из p . Однако по утверждению 2.28 все точки из H видны из p , откуда вытекает справедливость утверждения 2). Далее, многоугольник D вписан в окружность ∂K по утверждению 2.27. Оставшаяся часть утверждения 3) следует из утверждения 2), так как $D \subset H$. Для доказательства утверждения 4) достаточно заметить, что все вершины из M , принадлежащие D или H , являются вершинами этих многоугольников. Следствие доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.30. Пусть x – произвольная точка из $\text{IVog}_W(m)$. Тогда полуинтервал $[m, x)$ не пересекается с другими внутренними ячейками Вороного.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. существует точка $p \in [m, x)$ такая, что $p \in \text{IVog}_W(m')$ для некоторого $m' \neq m$. По утверждению 2.15 отрезок $[m, x]$ лежит в $\text{IVog}_W(m)$, в частности p видна из m . По тому же утверждению отрезок $[m', p]$ лежит в $\text{IVog}_W(m')$, а значит, m' видна из p . Поскольку p принадлежит ячейкам $\text{IVog}_W(m)$ и $\text{IVog}_W(m')$, точка p равноудалена от m и m' , и по утверждению 2.27 внутри круга K с радиусом $\rho(p, m) = \rho(p, m')$ и центром в p нет вершин из M , видимых из p . Пусть $p' \in (p, x)$ лежит внутри этого круга. Рассмотрим выпуклую оболочку H множества $\{m, m', p', p\}$ (которая совпадает с треугольником $mp'm'$) и покажем, что к H применима лемма 2.14 для $X = \{m, m', p'\}$ и p . Действительно, так как H лежит в круге K , причем H пересекается с границей круга по точкам m и m' , то каждая вершина многоугольника W , лежащая в H , принадлежит X , является вершиной многоугольника H (вообще говоря, вырожденного) и угол многоугольника H в ней меньше π . Поэтому по лемме 2.14 имеем $H \subset W$ и, в частности, p' видна из m' .

Осталось заметить, что если треугольник $mm'p'$ невырожден, то угол при вершине m меньше угла при вершине m' , поэтому $\rho_W(m, p') = \rho(m, p') > \rho(m', p') = \rho_W(m', p')$. В случае вырожденного треугольника p – середина отрезка $[m, m']$, а $p' \in (p, m']$, поэтому справедливо то же неравенство. Итак, $p' \notin \text{IVog}_W(m)$. Противоречие. Доказательство закончено.

Из утверждения 2.30 и следствия 2.24 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.31. Пусть внутренние ячейки Вороного с центрами в t и t' пересекаются по невырожденному отрезку $[a, b]$. Тогда для каждой точки $s \in (a, b)$ ломаная $ts t'$ лежит внутри объединения этих ячеек.

2.5. Геодезические Делоне и граф Делоне. Пересекающиеся более чем по точке внутренние ячейки Вороного назовем *смежными*. Геодезической Делоне назовем кратчайшую геодезическую, соединяющую центры смежных внутренних ячеек Вороного.

Приведенный ниже результат вытекает из следствия 2.25.

СЛЕДСТВИЕ 2.32. Концы геодезических Делоне не могут перемещаться на границе многоугольника W .

Приведем теперь несколько геометрических свойств геодезических Делоне.

СЛЕДСТВИЕ 2.33. Геодезическая Делоне является отрезком прямой и, значит, внутренней диагональю или стороной многоугольника W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть t_1 и t_2 – центры внутренних ячеек Вороного, соединенные рассматриваемой геодезической Делоне, и p – общая точка этих ячеек. Тогда из утверждения 2.28 вытекает, что выпуклая оболочка множества $\{t_1, t_2, p\}$ и, в частности, отрезок $[t_1, t_2]$ лежат в W . Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.34. Внутри геодезической Делоне не может быть вершин из M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что геодезическая Делоне соединяет t и t' , и пусть p является общей точкой внутренних ячеек Вороного с центрами в t и t' . Пусть $X = \{t_1, \dots, t_k\}$ – центры всех внутренних ячеек Вороного, содержащих p . Отметим, что $k \geq 2$, так как X содержит t и t' . Пусть D – выпуклая оболочка множества X . Тогда геодезическая Делоне tt' – это сторона или диагональ многоугольника D и в силу следствия 2.29 на интервале (t, t') нет вершин многоугольника W . Следствие доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.35. Геодезические Делоне могут пересекаться только по своим концевым точкам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т. е. что некоторые геодезические Делоне tt' и nn' пересекаются не по общей концевой точке. В силу следствия 2.34 достаточно рассмотреть случай, когда точка пересечения является внутренней для обоих отрезков. Поэтому отрезки $[t, t']$ и $[n, n']$ являются внутренними диагоналями многоугольника W . Однако тогда точки t и t' перемещаются с точками n и n' на границе многоугольника W , что противоречит следствию 2.32. Утверждение доказано.

Проведем все геодезические Делоне. Объединение построенных отрезков задает плоский граф, который назовем *графом Делоне*.

2.6. Минимальные внутренние остовные деревья и графы Делоне. Плоское дерево на M , лежащее в W , будем называть *внутренним для W* . Кратчайшее внутреннее дерево назовем *минимальным внутренним остовным деревом для W* . Отметим, что минимальное внутреннее остовное дерево для W является минимальным остовным деревом на M в метрическом пространстве (W, ρ_W) . Кроме того, у геодезической реализации минимального внутреннего

остовного дерева все ребра – прямолинейные отрезки, не содержащие внутри себя вершин из M .

ТЕОРЕМА 2.36. *Каждое минимальное внутреннее остовное дерево на M является подграфом графа Делоне множества M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e = v_1v_2$ – произвольное ребро минимального внутреннего остовного дерева G на M . Достаточно показать, что e – геодезическая Делоне. Как было отмечено выше, e является отрезком прямой. Положим $\{M_1, M_2\} = \mathcal{P}_G(e)$, и пусть $v_i \in M_i$. Обозначим через u середину отрезка v_1v_2 , и пусть m – произвольная точка из M , отличная от v_1 и v_2 . Без ограничения общности будем считать, что $m \in M_2$. Мы покажем, что u не принадлежит внутренней ячейке Вороного с центром в m . Предположим противное, т. е. $u \in \text{IVor}_W(m)$. По утверждению 2.15 точка u видна из m , поэтому $\rho_W(u, m) = \rho(u, m)$. Кроме того, так как $\rho_W(u, v_1) = \rho(u, v_1) = \rho(v_1, v_2)/2$, то выполнено $\rho(u, m) \leq \rho(u, v_1) = \rho(v_1, v_2)/2$. С другой стороны, по утверждению 1.3 имеем $\rho_W(v_1, m) \geq \rho_W(v_1, v_2) = \rho(v_1, v_2)$, поэтому

$$\begin{aligned} \rho(u, m) &= \rho_W(u, m) \geq \rho_W(v_1, m) - \rho_W(v_1, u) \\ &= \rho_W(v_1, m) - \rho(v_1, u) \geq \rho(v_1, v_2) - \rho(v_1, u) = \frac{\rho(v_1, v_2)}{2}, \end{aligned}$$

так что $\rho(u, m) = \rho(v_1, v_2)/2$ и оба нестрогих неравенства являются равенствами.

В силу первого равенства ломаная v_1um является кратчайшей геодезической. Поскольку m отлична от v_1 и v_2 , а $\rho(u, v_1) = \rho(u, v_2) = \rho(u, m)$, точка u является точкой излома этой ломаной, и поэтому u должна быть вершиной многоугольника W . Получили противоречие с тем, что e – ребро минимального внутреннего остовного дерева.

Итак, u может принадлежать лишь ячейкам Вороного с центрами в v_1 и v_2 , но точка u равноудалена от v_i , поэтому u является общей точкой этих ячеек и, следовательно, ρ_W -расстояние от u до оставшихся вершин из M строго больше $\rho(v_1, v_2)/2$. Поэтому существует круговая окрестность U точки u в многоугольнике W , лежащая в объединении внутренних ячеек Вороного вершин v_1 и v_2 . Поскольку u – граничная точка обеих ячеек Вороного (см. следствие 2.24), то $U \setminus \{u\}$ содержит точки w_i , принадлежащие внутренним ячейкам Вороного вершин v_i , $i = 1, 2$. Так как $U \setminus \{u\}$ линейно связно, то в этом множестве существует непрерывная кривая γ , соединяющая w_1 и w_2 . Из соображений непрерывности вытекает, что γ содержит точку, находящуюся от v_1 и v_2 на одном и том же ρ_W -расстоянии. Эта точка является общей для внутренних ячеек Вороного вершин v_1 и v_2 , поэтому эти ячейки пересекаются более чем по точке и, значит, v_1v_2 – геодезическая Делоне. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.37. *Граф Делоне связан.*

СЛЕДСТВИЕ 2.38. *Объединение внутренних минимальных остовных деревьев является подграфом графа Делоне; в частности, пара различных ребер минимальных внутренних остовных деревьев может пересекаться только по их общей вершине.*

2.7. Геодезические Делоне. Пусть AC – внутренняя диагональ или сторона многоугольника W и ℓ – серединный перпендикуляр к отрезку AC . Множество $\ell \cap \text{Vis}_W(A) \cap \text{Vis}_W(C)$ непусто и отлично от точки, так как середина отрезка AC вместе с некоторой ее окрестностью в многоугольнике W принадлежит этому множеству. Следовательно, по утверждению 2.10 множество $\ell \cap \text{Vis}_W(A) \cap \text{Vis}_W(C)$ является отрезком, скажем uv . Если AC – диагональ, то середина отрезка AC является внутренней точкой для uv , а если AC – сторона, то граничной. Отрезок uv назовем *видимым серединным перпендикуляром* к AC .

Рассмотрим замкнутые полуплоскости, ограниченные прямой AC . Поскольку $u \neq v$, по крайней мере одна из этих полуплоскостей содержит внутри себя один из концов отрезка uv . Обозначим эту полуплоскость через Π^- , если этот конец u , и через Π^+ , если этот конец v . Вторую полуплоскость обозначим соответственно через $\Pi^\mp$, выбрав противоположный знак. Для каждой точки $x \in uv$ обозначим соответственно через K_x круг, ограниченный окружностью с центром в x , проходящей через A и C , и положим $K_x^\pm = K_x \cap \text{Int}(\Pi^\pm)$, где Int обозначает операцию взятия внутренности.

Точки отрезка uv параметризуем в виде $x_t = (1-t)u + tv$, $t \in [0, 1]$, и положим $K_t = K_{x_t}$. Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 2.39. Пусть $0 \leq t' < t'' \leq 1$. Тогда $K_{t'}^+ \subset \text{Int}(K_{t''}^+)$ и $\text{Int}(K_{t'}^-) \supset K_{t''}^-$.

Из леммы 2.39 вытекает, что если вершина m многоугольника W лежит в $K_{t'}^+$, причем не обязательно внутри, то она лежит внутри $K_{t''}^+$ при $t'' > t'$. Аналогично, если вершина m многоугольника W лежит в $K_{t''}^-$, причем не обязательно внутри, то она лежит внутри $K_{t'}^-$ при $t' < t''$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.40. Пусть AC – сторона многоугольника W , как и выше, uv – видимый серединный перпендикуляр к ней, и пусть для определенности u – середина отрезка AC . Тогда AC не является геодезической Делоне, если и только если в K_u^+ существует вершина m многоугольника W , видимая из u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x – произвольная точка из uv . Тогда x является общей точкой ячеек Вороного с центрами в A и C , если и только если внутри круга K_x нет вершин многоугольника W , видимых из x . Таким образом, AC не является геодезической Делоне, если и только если имеется не более одной такой точки x .

Пусть сторона AC не геодезическая Делоне. Тогда для каждого $t \in [0, 1]$, кроме, быть может, одного, скажем t_0 , внутри круга K_t имеется вершина m_t многоугольника W , видимая из x_t . Из соображений непрерывности и в круге K_{t_0} (не обязательно внутри него) имеется вершина многоугольника W , видимая из x_{t_0} и отличная от A и C . Эту вершину мы обозначим через m_{t_0} . Отметим, что сторона AC пересекает любой отрезок, идущий из $x_t \in K_t^+$ в точку из K_t^- . Поэтому в сделанных предположениях вершина m_t , видимая из x_t , лежит в K_t^+ . В частности, в K_u^+ содержится вершина $m = m_0$, видимая из $x_0 = u$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть в K_u^+ имеется вершина m из W , видимая из u . В силу леммы 2.39 точка m является внутренней для

всех K_t^+ , $t > 0$. Рассмотрим точку x_t и выпуклое множество $H = \text{Int } K_t^+$. Поскольку $x_t u \subset uv \subset W$ и t видна из u , точки x_t , u и t лежат в одной компоненте связности H_1 множества $H \cap W$. Поэтому в силу леммы 2.13 в множестве $H_1 \subset \text{Int } K_t^+$ содержится вершина многоугольника W , видимая из x_t . Тем самым, все точки из $(u, v]$ не являются общими для $\text{IVor}_W(A)$ и $\text{IVor}_W(C)$, что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.41. *Диагональ AC многоугольника W не является геодезической Делоне, если и только если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

- 1) K_u^+ содержит вершину t многоугольника W , видимую из u ;
- 2) K_v^- содержит вершину t многоугольника W , видимую из v ;
- 3) существуют вершины B и D из W такие, что:
 - а) B и D лежат в разных открытых полуплоскостях относительно прямой AC ;
 - б) B и D видны одновременно из A и C ;
 - с) сумма углов B и D четырехугольника $ABCD$ больше или равна π ; в частности, четырехугольник $ABCD$ выпуклый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть диагональ AC не является геодезической Делоне. Тогда, как и в доказательстве утверждения 2.40, для каждого $t \in [0, 1]$, кроме, быть может, одного, внутри круга K_t имеется вершина m_t многоугольника W , видимая из x_t .

Положим

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1] \mid \exists m_t \in \Pi^-\}, \quad t_1 = \inf\{t \in [0, 1] \mid \exists m_t \in \Pi^+\}$$

(если одно из множеств в правой части равенств пусто, то положим соответствующее t_i равным ∞).

Заметим, что оба t_i не могут быть равны ∞ , так как иначе весь отрезок uv является общим для ячеек Вороного с центрами в A и C , а значит, отрезок AC является геодезической Делоне.

Пусть одно из t_i , скажем t_0 , равно ∞ . Это означает, что в Π^- нет вершин m_t , поэтому внутри каждого круга K_t , кроме, быть может, одного, имеется вершина m_t , лежащая внутри Π^+ . Следовательно, $t_1 = 0$. Из соображений непрерывности круг K_u должен содержать отличные от A и C вершины из W , видимые из u , т. е. выполнено условие 1). Аналогично разбирается случай $t_1 = \infty$.

Пусть оба t_i отличны от ∞ . Из соображений непрерывности вытекает, что $t_0 > 0$ и $t_1 < 1$.

Если $t_1 = 0$, то рассмотрим убывающую последовательность $s_k \rightarrow 0$ такую, что $m_{s_k} \in K_{s_k}^+$, которая существует в силу определения точной нижней грани. Поскольку число вершин конечно, из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, для которой все m_{s_k} совпадают с некоторой вершиной t многоугольника W . Поэтому множество $K_{t_1}^+ = K_u^+$ содержит вершину t многоугольника W , видимую из u , т. е. выполнено условие 1). Аналогично разбирается случай $t_0 = 1$.

Предположим теперь, что $t_0, t_1 \in (0, 1)$. Заметим, что $t_0 \geq t_1$, иначе для всех t из непустого интервала (t_0, t_1) внутренности кругов K_t не содержат вершин многоугольника W , видимых из x_t и отличных от A и C ; последнее противоречит тому, что AC не является геодезической Делоне. Далее, по аналогии

с проделанным выше заключаем, что $K_{t_0}^-$ и $K_{t_1}^+$ содержат отличные от A и C вершины из W , скажем B и D , видимые соответственно из x_{t_0} и x_{t_1} .

Положим $s = (t_0 + t_1)/2$ и рассмотрим круг K_s . Из леммы 2.39 вытекает, что $B \in K_{t_0}^- \subset K_s^-$ и $D \in K_{t_1}^+ \subset K_s^+$. Если из таких точек B и D можно выбрать видимые одновременно из A и C , то четырехугольник $ABCD$, построенный на выбранных точках, является искомым из п. 3). Пусть по крайней мере одну из точек, скажем B , не удастся выбрать видимой одновременно из A и C .

Пусть $\{B_\alpha\}$ – множество всех возможных точек B . Для каждой точки B_α рассмотрим выпуклую оболочку H_α точек A, C, B_α и x_{t_0} . Введем на множестве многоугольников H_α порядок по включению и выберем в нем минимальный элемент, который обозначим через H . Пусть B – соответствующая H точка из $\{B_\alpha\}$. По построению ни внутри многоугольника H , ни внутри его сторон нет вершин многоугольника W , лежащих в Π^- .

Заметим, что все точки выпуклого четырехугольника AuC видны одновременно из A и C , поэтому внутри него нет точек из ∂W . В частности, x_{t_0} – внутренняя точка многоугольника W . Далее, заметим, что многоугольник H является объединением множества $H \cap \Pi^-$ и треугольника $Ax_{t_0}C$. Поэтому, так как треугольник $Ax_{t_0}C$ лежит в AuC , ни внутри многоугольника H , ни внутри его сторон нет вершин из W . Таким образом, единственные вершины из W , попавшие в H , – это точки A, B и C . Поскольку B не лежит на диагонали AC , угол многоугольника H в B меньше π . Так как H лежит в круге K_s , в котором AC является хордой, то углы многоугольника H в вершинах A и C меньше π . Наконец заметим, что точки A, B и C видны из внутренней точки x_{t_0} многоугольника W . Поэтому мы находимся в условиях леммы 2.14, из которой следует, что $H \subset W$ и, в частности, B видна из A и C . Противоречие. Тем самым, прямое утверждение полностью доказано.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть выполнено условие 1), т. е. в K_u^+ имеется вершина m из W , видимая из u . Рассмотрим произвольную точку x_t , $t > 0$, и выберем такое $s \in (0, t)$, чтобы $x_t \in K_s^+$. Обозначим через H выпуклое множество, являющееся объединением K_s^+ и треугольника AuC , из которого удалены точки A и C . Точки x_t, u и m лежат в одной компоненте связности H_1 множества $H \cap W$. Тогда по лемме 2.13 из точки x_t видна некоторая вершина многоугольника W , лежащая в H . Эта вершина не может лежать в треугольнике AuC , поэтому она лежит в K_s^+ и в силу леммы 2.39 является внутренней для K_t^+ . Следовательно, точка x_t не является общей для ячеек $\text{IVor}_W(A)$ и $\text{IVor}_W(C)$, а значит, эти ячейки Вороного не смежны, что и требовалось показать.

Случай, когда имеет место условие 2), разбирается аналогично.

Пусть теперь выполняется условие 3). Тогда существует круг с хордой AC и центром O , содержащий B и D . Ясно, что для каждой точки $x_t \neq O$ или B , или D лежит внутри K_t , поэтому, проводя рассуждения, аналогичные проделанным выше, заключаем, что для всех таких t точки x_t не являются общими для $\text{IVor}_W(A)$ и $\text{IVor}_W(C)$. Доказательство закончено.

2.8. Геометрия графов Делоне и Вороного. Граф Делоне вместе со сторонами многоугольника W определяет разбиение многоугольника W его диагоналями на многоугольники, которые мы назовем *ячейками Делоне*. Совокупность ячеек Делоне назовем *разбиением Делоне*. На объединении отрезков,

принадлежащих границам ячеек Делоне, естественным образом задается структура плоского графа, ребрами которого являются указанные отрезки. Этот плоский граф будем называть *расширенным графом Делоне многоугольника W* .

Аналогично, рассмотрим диаграмму Вороного многоугольника W и на объединении отрезков, принадлежащих границам внутренних ячеек Вороного, зададим структуру плоского графа, ребра которого – указанные отрезки. Этот плоский граф будем называть *расширенным графом Вороного многоугольника W* . Кратностью $c(x)$ точки x многоугольника W назовем количество внутренних ячеек Вороного, которым принадлежит точка x . Ясно, что $|M| \geq c(x) \geq 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.42. Пусть x – точка расширенного графа Вороного G многоугольника W . Если $c(x) = 1$, то $x \in \partial W$. Если $c(x) = 2$, то или x – внутренняя точка ребра графа G , причем в этом случае x лежит внутри W , или x – вершина этого графа, лежащая на ∂W . Наконец, если $c(x) > 2$, то x – вершина графа G , причем если x – внутренняя точка многоугольника, то $c(x) = \deg x$, а если $x \in \partial W$, то $c(x) = \deg x - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $c(x) = 1$, то x принадлежит ровно одной внутренней ячейке Вороного и лежит на ее границе, откуда $x \in \partial W$, так как иначе x является общей точкой нескольких внутренних ячеек Вороного.

Далее, если $c(x) = 2$, то x лежит ровно в двух внутренних ячейках Вороного W_1 и W_2 с центрами в m_1 и m_2 , т. е. на разделяющем их отрезке I видимого серединного перпендикуляра. Внутренние точки этого отрезка являются внутренними точками ребра графа G , а концевые – вершинами графа G . Пусть x – концевая точка отрезка I . Покажем, что x не может быть внутренней точкой многоугольника W .

Предположим противное. Так как x лежит ровно в двух внутренних ячейках Вороного, то существует такая окрестность U точки x , являющаяся обычным кругом на плоскости, что расстояние от точек этой окрестности до точек m_1 и m_2 меньше, чем до остальных вершин многоугольника. Поэтому U целиком лежит в $W_1 \cup W_2$ и не пересекается с другими внутренними ячейками Вороного. Отметим, что $r = W_1 \cap W_2 \cap U = I \cap U$ представляет собой радиус круга U , поэтому для любых двух точек p и q из $U \setminus r$ найдется соединяющая их кривая, целиком лежащая в $U \setminus r$, а значит, целиком лежащая в одной из двух внутренних ячеек Вороного, скажем в W_1 , и не лежащая в другой. По утверждению 2.30 полуинтервал $[m_2, x)$ целиком лежит в W_2 . С другой стороны, так как x лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $[m_1, m_2]$, этот полуинтервал не пересекается с r , откуда множество $[m_2, x) \cap (U \setminus r)$ не пусто и лежит в W_1 . Противоречие.

Пусть теперь x – внутренняя точка ребра e графа G . Покажем, что в этом случае она также является внутренней точкой многоугольника W . Действительно, в противном случае ребро e пересекается с границей ∂W по своей внутренней точке, поэтому некоторая окрестность точки x в ребре e лежит на ∂W . С другой стороны, ячейки Вороного примыкают к ребру e по обе стороны, поэтому одна из них пересекается с внешностью многоугольника W . Противоречие.

Пусть теперь $c(x) > 2$. Если x не является вершиной графа G , то x лежит внутри ребра, а значит, лежит или внутри стороны многоугольника и $c(x) = 1$, или внутри многоугольника и $c(x) = 2$. Поэтому x – вершина графа G .

ЛЕММА 2.43. Пусть x – вершина графа G , являющаяся внутренней точкой многоугольника W , и $W_1, \dots, W_k$, $k = c(x)$, – все внутренние ячейки Вороного, содержащие x . Тогда $k > 2$ и существует такая круговая окрестность U точки x , что $S_i = U \cap W_i$ – сектор круга U , причем $\bigcup S_i = U$ и секторы S_i пересекаются или по x , или по радиусу круга U . При этом $\deg x = c(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $c(x) > 2$ вытекает из вышеизложенного.

Поскольку x принадлежит в точности ячейкам W_i , $i = 1, \dots, k$, расстояние от x до центров остальных ячеек Вороного больше, чем до центров m_i ячеек W_i . Пусть $e_1, \dots, e_m$ – инцидентные x ребра графа G . В качестве U выберем такую круговую окрестность U точки x , что, во-первых, расстояние от точек этой окрестности до m_i , $i = 1, \dots, k$, меньше, чем до остальных вершин многоугольника, и, во-вторых, радиус круга U настолько мал, что $U \cap G$ состоит из фрагментов отрезков e_i , являющихся радиусами этого круга. Поэтому U целиком лежит в $\bigcup W_i$ и не пересекается с другими внутренними ячейками Вороного. С другой стороны, ребра e_i разбивают круг U на m секторов, в каждой внутренней точке y которых выполнено $c(y) = 1$. Поэтому каждый сектор содержится ровно в одной внутренней ячейке Вороного, которая содержит точку x , поэтому совпадает с одной из W_i . Кроме того, каждое W_i пересекает U ровно по одному сектору, так как иначе существует пара точек ячейки W_i , лежащих в круге и соединенных отрезком, не лежащим целиком в W_i . Последнее противоречит геодезической выпуклости W_i . Таким образом, $W_i \cap U = S_i$ – это сектор круга U . Поскольку каждый сектор S_i лежит в своей ячейке Вороного и эти ячейки пересекаются только по граничным точкам, то секторы пересекаются таким же образом. Поэтому секторы могут пересекаться или по вершине, или по радиусу.

Поскольку количество секторов равно k , а количество разделяющих их радиусов равно m , то $m = k = c(x)$, что и завершает доказательство леммы.

Случай граничной вершины разбирается аналогично. Отличие состоит в том, что в качестве U приходится выбирать круговой сектор с центром в x , причем ограничивающие этот сектор радиусы являются фрагментами сторон многоугольника W . В этом случае m радиусов разбивают U на $m - 1$ секторов, каждый из которых, как и выше, соответствует ровно одной содержащей x внутренней ячейке Вороного. В этом случае $c(x) = m - 1$, что и завершает доказательство утверждения.

Подграф P_W расширенного графа Вороного, состоящий из всех его точек кратности 2 и выше, назовем просто *графом Вороного* многоугольника W . Другими словами, по утверждению 2.42 граф Вороного получается из расширенного графа Вороного удалением сторон многоугольника W и последующим замыканием.

Напомним, что цикл плоского графа G называется *фундаментальным*, если внутри плоской области, ограниченной этим циклом, нет других циклов графа G .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.44. Пусть x – произвольная вершина графа Вороного P_W , лежащая внутри многоугольника W . Тогда степень k вершины x не меньше трех, в точке x пересекается ровно k внутренних ячеек Вороного W_i и подграф графа Делоне, порожденный центрами m_i ячеек W_i , $i = 1, \dots, k$, является фундаментальным циклом длины k графа Делоне. Обратно, пусть C – фундаментальный цикл длины k графа Делоне многоугольника W . Тогда все внутренние ячейки Вороного с центрами в вершинах этого цикла имеют общую точку, являющуюся вершиной степени k графа Вороного P_W и лежащую внутри многоугольника W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку x – внутренняя точка многоугольника W , являющаяся вершиной графа Вороного, из утверждения 2.42 вытекает, что $c(x) > 2$ и степень k вершины x равна $c(x)$, т. е. в точке x пересекается ровно k внутренних ячеек Вороного.

Далее, по лемме 2.43 последовательные при обходе вокруг точки x ячейки W_i являются смежными, так как (в обозначениях леммы 2.43) соответствующие секторы S_i пересекаются по радиусу круговой окрестности точки x . С другой стороны, по следствию 2.23 пересечение внешних ячеек Вороного связно, поэтому смежными являются только последовательные ячейки W_i , а значит, подграф в графе Делоне, порожденный вершинами m_i , является циклом, который мы обозначим через C_x .

Наконец, в силу следствия 2.29 выпуклый многоугольник D , натянутый на точки m_i , пересекается с M только по $\{m_i\}$. Цикл C_x составлен из сторон этого многоугольника, поэтому он является фундаментальным циклом в графе Делоне.

Для доказательства обратного утверждения, нам понадобится аналог формулы Эйлера для графа Вороного.

ЛЕММА 2.45. Пусть Ω – замкнутый двумерный диск и Γ – вложенный граф в Ω , пересекающийся с $\partial\Omega$ только по некоторым своим вершинам, причем все его вершины степени 1 лежат на $\partial\Omega$. Пусть V – количество вершин графа Γ , лежащих внутри Ω , а E – количество его ребер. Связные компоненты множества $\Omega \setminus \Gamma$ назовем гранями графа Γ по отношению к Ω и обозначим их количество через F . Тогда $F - E + V = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложим диск Ω в сферу S^2 в виде полусферы, фиксируем точку $P \in S^2 \setminus \Omega$ и рассмотрим вложенный граф $\hat{\Gamma}$, полученный из Γ добавлением ребер, соединяющих точку P с вершинами графа Γ , лежащими на $\partial\Omega$. Ясно, что количество $\hat{V}$ вершин графа $\hat{\Gamma}$ равно $V + 1 + k$, где k – количество вершин графа Γ , лежащих на $\partial\Omega$. Далее, пусть $\hat{E}$ и $\hat{F}$ – количества ребер и граней графа $\hat{\Gamma}$. Тогда $\hat{E} = E + k$ и $\hat{F} = F$. По формуле Эйлера для сферического графа имеем $\hat{F} - \hat{E} + \hat{V} = 2$, откуда и вытекает требуемое.

Применим теперь лемму 2.45 к графу Вороного P_W . А именно, обозначим через V_p количество вершин графа Вороного, лежащих внутри W , через E_p – количество ребер из P_W и через F_p – количество граней графа P_W относительно W , равное, очевидно, количеству внутренних ячеек Вороного. Тогда по лемме 2.45 имеем $F_p - E_p + V_p = 1$. С другой стороны, для графа Делоне, рассматриваемого как плоский граф, имеет место стандартная формула Эйлера: если V_d , E_d и F_d – количества вершин, ребер и ограниченных граней графа

Делоне соответственно, то $F_d - E_d + V_d = 1$. Поскольку внутри каждой ячейки Вороного лежит ровно одна точка из M , то $F_p = V_d = |M|$. Кроме того, по определению геодезической Делоне имеется взаимно однозначное соответствие между ребрами графов Вороного и Делоне, поэтому $E_p = E_d$, откуда из приведенных выше формул Эйлера заключаем, что $V_p = F_d$. Поэтому все фундаментальные циклы графа Делоне имеют вид C_x , где x – некоторая вершина графа Вороного, лежащая внутри W . Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.46. Графы Делоне и Вороного, вообще говоря, не являются взаимно двойственными. Каждой вершине графа Вороного, лежащей внутри многоугольника W , соответствует фундаментальный цикл, а значит, грань графа Делоне. Однако вершине графа Вороного, попавшей на границу многоугольника, грань графа Делоне не соответствует.

ЛЕММА 2.47. *Фундаментальные циклы расширенного графа Делоне не могут иметь двух общих последовательных ребер.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Области, ограниченные фундаментальными циклами плоского графа, не пересекаются. Поэтому если два фундаментальных цикла расширенного графа Делоне имеют два последовательных общих ребра, то общая вершина этих ребер лежит внутри объединения ячеек Делоне, ограниченных этими циклами, в частности внутри многоугольника W . Однако вершины расширенного графа Делоне – это вершины многоугольника W , поэтому последнее невозможно. Лемма доказана.

Следующая теорема полностью описывает возможную геометрию ячеек Делоне.

ТЕОРЕМА 2.48. *Каждая ячейка Делоне относится к одному из двух типов:*

- 1) многоугольник Δ , вписанный в окружность;
- 2) многоугольник Δ , у которого существует такая сторона e , что внутренние серединные перпендикуляры в Δ к сторонам этого многоугольника, отличным от e , не пересекаются внутри Δ , заканчиваются внутри стороны e и пересекаются с $\partial\Delta$ только по своим концевым точкам; в частности, ломаная, составленная из всех сторон многоугольника Δ , отличных от e , однозначно ортогонально проецируется на e .

Обратно, каждый многоугольник Δ , удовлетворяющий одному из указанных свойств, является ячейкой Делоне для некоторого многоугольника W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что рассматриваемая ячейка Делоне не относится к типу 1), и покажем, что тогда она относится к типу 2).

Вся граница ячейки Δ не может содержаться в графе Делоне, так как иначе эта граница представляет собой фундаментальный цикл графа Делоне и вписана в окружность по утверждениям 2.44, 2.27. Поэтому некоторые стороны многоугольника Δ не являются геодезическими Делоне. Из определения разбиения Делоне вытекает, что эти стороны ячейки Δ суть стороны многоугольника W . Покажем, что такая сторона единственна. Предположим противное, и пусть s и s' – стороны многоугольника Δ , не являющиеся геодезическими Делоне. Соединим их середины непрерывной кривой δ , внутренность которой

лежит внутри Δ . Эта кривая не пересекает граф Делоне и разбивает многоугольник W на две компоненты, каждая из которых содержит вершины многоугольника и, значит, вершины графа Делоне. Таким образом, мы построили разбиение графа Делоне на два непересекающихся подграфа, что противоречит связности графа Делоне (см. следствие 2.37).

Итак, граф Делоне, пересеченный с ячейкой Δ , – это ее граница без некоторой стороны e . Пусть $m_1, \dots, m_k$ – последовательные вершины ячейки Δ , причем $e = [m_1, m_k]$, и пусть W_i – ячейка Вороного, соответствующая m_i . Каждые две последовательные ячейки W_i, W_{i+1} , $i = 1, \dots, k-1$, являются смежными, поэтому их пересечение представляет собой отрезок I_i видимого серединного перпендикуляра к отрезку $[m_i, m_{i+1}]$ по следствию 2.23. Пусть a_i – внутренняя точка отрезка I_i . Из следствия 2.24 вытекает, что точки a_i попарно различны и не могут совпадать с вершинами многоугольника W . Кроме того, из следствия 2.23 заключаем, что a_i видна из обеих вершин m_i и m_{i+1} . Рассмотрим замкнутую ломаную L , последовательные вершины которой суть $m_1, a_1, m_2, a_2, \dots, a_{k-1}, m_k$. Согласно изложенному выше ломаная L лежит в W и все ее вершины различны.

ЛЕММА 2.49. *Звенья ломаной L могут пересекаться только по своим концам, тем самым, согласно сделанным выше замечаниям ломаная L вложена. Более того, внутренности звеньев ломаной L , отличных от $m_1 m_k = e$, лежат внутри многоугольника W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу утверждения 2.30 полуинтервалы $[m_i, a_i]$ и $(a_{i-1}, m_i]$ лежат внутри ячейки Вороного W_i , поэтому отличные от e ребра ломаной L , лежащие в разных ячейках Вороного, могут пересекаться только по своим концевым точкам; кроме того, отсюда же вытекает, что ребра, попавшие в одну ячейку Вороного W_i , пересекаются только по общему для них центру m_i этой ячейки Вороного (точка a_{i-1} не может лежать на $[m_i, a_i]$, так как отлична от a_i и принадлежит ячейке Вороного с центром в m_{i-1}). Наконец, ребро e , являющееся стороной многоугольника W , также может пересекаться с остальными ребрами только по общим концевым вершинам. Действительно, внутри ребра e не могут содержаться ни точки m_i (вершины многоугольника W), ни точки a_i (внутренние точки видимых серединных перпендикуляров). Осталось заметить, что внутренняя точка ребра e не может быть внутренней точкой для другого ребра ломаной L , так как иначе это ребро или выйдет из многоугольника W , или будет содержать внутри себя вершину m_1 или m_k многоугольника W , что невозможно. Второе утверждение леммы вытекает из следствия 2.23. Лемма доказана.

Итак, ломаная L вложена и лежит в многоугольнике W , поэтому ограничивает некоторый многоугольник $\widehat{W} \subset W$, причем $\widehat{W} \cap M = \{m_i\}_{i=1}^k$. Действительно, в ячейке Делоне Δ нет вершин многоугольника, не попавших в M . Кроме того, из вышеизложенного вытекает, что все стороны треугольника $m_{i-1} a_i m_i$, а значит, и сам этот треугольник лежат в W , поэтому внутри него также нет вершин многоугольника W .

Ориентируем серединный перпендикуляр к отрезку $[m_i, m_{i+1}]$ так, чтобы движение по нему в положительном направлении от середины s_i отрезка $[m_i, m_{i+1}]$ происходило внутрь ячейки Δ . Эта ориентация индуцирует ориентацию на каждом отрезке I_i . Обозначим через $[a_i, b_i]$ ограниченную точкой a_i

часть отрезка I_i такую, что движение от a_i к b_i происходит в положительном направлении в смысле только что определенной ориентации.

ЛЕММА 2.50. *В сделанных обозначениях точка b_i лежит внутри некоторой стороны многоугольника W . Поэтому, так как отрезок $[a_i, b_i]$ выходит из a_i внутрь многоугольника $\widehat{W}$, он пересекает границу этого многоугольника по крайней мере еще один раз. Обозначим через c_i ближайшую к a_i и отличную от a_i точку из $[a_i, b_i] \cap \partial\widehat{W}$. Тогда $c_i \in (m_1, m_k)$, и поэтому $c_i = b_i$ и (a_i, b_i) лежит внутри $\widehat{W}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что b_i – граничная точка многоугольника W . Предположим противное, т.е. точка b_i лежит внутри многоугольника W . Тогда b_i – вершина графа Вороного, которой по утверждению 2.44 соответствует фундаментальный цикл C графа Делоне, вершинами которого являются те вершины многоугольника W , чьи внутренние ячейки Вороного пересекаются по точке b_i . Мы покажем, что цикл C примыкает к отрезку $[m_i, m_{i+1}]$ с той же стороны, что и ячейка Δ , а значит, $C = \Delta$. Последнее невозможно, так как сторона e ячейки Δ не является геодезической Делоне, а все стороны цикла C являются.

По утверждению 2.27 центры внутренних ячеек Вороного, пересекающихся в точке b_i , это в точности все вершины многоугольника W , видимые из b_i и лежащие на границе круга K с центром в b_i и радиусом $\rho(b_i, m_i)$. Более того, по утверждению 2.27 внутри круга K нет других вершин многоугольника W , видимых из b_i . Обозначим через K^+ пересечение круга K с той открытой полуплоскостью, ограниченной прямой $m_i m_{i+1}$, в которую уходит положительный луч серединного перпендикуляра к отрезку $[m_i, m_{i+1}]$ в выбранной ориентации. Через K^- обозначим пересечение круга K с дополнительной открытой полуплоскостью.

Покажем, что сегмент K^- не содержит вершин многоугольника W , видимых из b_i . Для этого выберем произвольную точку x из интервала (a_i, b_i) и рассмотрим круг K_x с центром в x и радиусом $\rho(x, m_i)$. Отметим, что K^- лежит внутри круга K_x . Поскольку x – внутренняя точка отрезка I_i , внутри круга K_x нет вершин многоугольника W , видимых из x . Покажем, что внутри K_x также нет вершин, видимых из b_i . Воспользуемся леммой 2.13. Пусть такая вершина t существует; тогда возьмем в качестве H треугольник $xb_i t$. Поскольку ломаная $xb_i t$ содержится в W , все вершины этого треугольника лежат в одной связной компоненте $\hat{H}$ пересечения H с W . Поэтому по лемме 2.13 из точки x видна некоторая вершина многоугольника W , лежащая в $\hat{H}$, а значит, и внутри круга K_x . Противоречие.

Таким образом, все вершины фундаментального цикла C лежат в замыкании сегмента K^+ , откуда и вытекает, что C и Δ примыкают к отрезку $[m_i, m_{i+1}]$ с одной и той же стороны.

Итак, мы показали, что точка b_i не может быть внутренней точкой многоугольника W . Поскольку на отрезке $[a_i, b_i]$ лежат точки, ρ_W -расстояния от которых до вершин m_i и m_{i+1} не превосходят ρ_W -расстояний до всех остальных вершин многоугольника W , и эти расстояния отделены от нуля, то на отрезке $[a_i, b_i]$ не может быть вершин многоугольника W , в частности b_i не является вершиной из W . Таким образом, b_i – внутренняя точка некоторой стороны многоугольника W .

Предположим, что $c_i \neq b_i$ для некоторого i . В силу изложенного выше c_i не может быть вершиной многоугольника W . Далее, $c_i \neq a_i$ по определению и, более того, c_i не может лежать на ломаной $m_i a_i m_{i+1}$ из тривиальных геометрических соображений. Если же c_i попадает на ломаную $m_j a_j m_{j+1}$, $j \neq i$, то c_i принадлежит внутренности объединения внутренних ячеек Вороного с центрами в m_j и m_{j+1} по следствию 2.31 и не может одновременно принадлежать внутренним ячейкам Вороного с центрами в m_i и m_{i+1} по следствию 2.24. Таким образом, $c_i \in (m_1, m_k)$, и поэтому $c_i = b_i$. Поскольку c_i – первая, считая от a_i , точка пересечения отрезка $[a_i, b_i]$ с $\partial \widehat{W}$, то (a_i, b_i) лежит внутри $\widehat{W}$. Лемма доказана.

Из следствия 2.24 вытекает, что внутренности отрезков I_i и I_j , $i \neq j$, не пересекаются, поэтому не пересекаются и полуинтервалы $[a_i, b_i)$ и $[a_j, b_j)$. Таким образом, $b_1, \dots, b_{k-1}$ – последовательные точки интервала (m_1, m_k) (некоторые из них могут совпадать).

Будем теперь двигаться по прямой $a_i b_i$ от точки b_i в отрицательном направлении, и пусть x_i – первая, считая от b_i , отличная от b_i точка пересечения этой прямой с границей ячейки Делоне Δ .

ЛЕММА 2.51. *В сделанных обозначениях точка x_i совпадает с серединой s_i отрезка $[m_i, m_{i+1}]$ и интервал (b_i, s_i) лежит внутри Δ . Поэтому отрезок $[s_i, b_i]$ является внутренним серединным перпендикуляром в Δ к отрезку $[m_i, m_{i+1}]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что на отрезке $[s_i, b_i]$ нет вершин многоугольника W . Из леммы 2.50 и определения точки a_i вытекает, что на отрезке $[a_i, b_i]$ нет вершин многоугольника W . Поскольку s_i – внутренняя точка внутренней диагонали многоугольника W , точка s_i также не является его вершиной. Остается показать, что интервал (a_i, s_i) не содержит вершин многоугольника W . Последнее вытекает из того, что стороны треугольника $m_i m_{i+1} a_i$, а значит, и весь этот треугольник лежат в W , а интервал (a_i, s_i) лежит внутри этого треугольника.

Покажем теперь, что отрезок $[s_i, b_i]$ пересекает границу $\partial \Delta$ ячейки Δ только по своим концам. Поскольку точка b_i лежит внутри стороны e ячейки Δ , многоугольники Δ и $\widehat{W}$ примыкают к e с одной и той же стороны, а интервал (a_i, b_i) лежит внутри многоугольника $\widehat{W}$ по лемме 2.50, то движение от b_i по прямой $a_i b_i$ в отрицательном направлении идет внутрь ячейки Δ . Кроме того, двигаясь по прямой $a_i b_i$ в отрицательном направлении, мы подойдем к точке s_i , лежащей на стороне $[m_i, m_{i+1}]$ ячейки Δ , также изнутри, что вытекает из определения ориентации прямой $a_i b_i$. Таким образом, остается показать, что интервал (b_i, s_i) не пересекает $\partial \Delta$.

Предположим противное. Поскольку на отрезке $[s_i, b_i]$ нет вершин многоугольника Δ , то $\partial \Delta \cap [s_i, b_i]$ состоит из конечного числа точек, которых по предположению больше двух. Эти точки разбивают отрезок $[s_i, b_i]$ на последовательные невырожденные отрезки, первый из которых лежит в Δ , второй – снаружи Δ и т. д. Рассмотрим фрагменты ломаной $\partial \Delta$, ограниченные концами второго отрезка $[u, v]$, и обозначим через γ тот из них, который вместе с отрезком $[u, v]$ ограничивает меньшую по включению область U . Согласно изложенному выше $\gamma \neq [u, v]$, поэтому γ содержит внутренние вершины, каждая из

которых – вершина многоугольника W . В силу односвязности многоугольника W область U лежит в W . Так как $[u, v]$ не лежит в Δ , ячейка Δ и область U примыкают к ломаной γ с разных сторон. Поэтому внутренние точки ломаной γ являются внутренними для многоугольника W . Последнее противоречит тому, что все внутренние вершины ломаной γ суть вершины многоугольника W . Лемма доказана.

Далее, заметим, что так как перпендикуляр $[s_i, b_i]$ к отрезку $[m_i, m_{i+1}]$ приходит на сторону $e = [m_1, m_k]$, причем m_i лежит в той же полуплоскости относительно прямой $s_i b_i$, что и начальная точка m_1 ребра e , то угол между векторами $m_i m_{i+1}$ и $e = m_1 m_k$ меньше $\pi/2$. Поэтому ломаная $m_1 \dots m_k$ однозначно проецируется на сторону e . Тем самым, прямое утверждение теоремы полностью доказано.

Для доказательства обратного утверждения теоремы в качестве W выберем сам многоугольник Δ . Если многоугольник W вписан в окружность S^1 с центром в точке O , то все серединные перпендикуляры к сторонам и диагоналям многоугольника W пересекаются в точке O . Поэтому граф Вороного многоугольника W или имеет единственную вершину степени больше единицы (а именно точку O , если $O \in W$), или не имеет таких вершин и представляет собой объединение несмежных ребер (если $O \notin W$). Поэтому граф Делоне многоугольника W представляет собой или цикл, совпадающий с ∂W , или путь. В обоих случаях W – единственная ячейка Делоне многоугольника W .

Пусть теперь многоугольник $W = \Delta$ не вписан в окружность и удовлетворяет условию 2) теоремы. Сохраним введенные в первой части доказательства обозначения: $m_1, \dots, m_k$ – последовательные вершины многоугольника W , причем $[m_1, m_k] = e$, и $\ell_i = [s_i, b_i]$ – внутренний серединный перпендикуляр в Δ к отрезку $[m_i, m_{i+1}]$, $i = 1, \dots, k-1$, где s_i – середина этого отрезка, а $b_i \in e$. Так же, как и в первой части доказательства, точки b_i пересечения ℓ_i со стороной e расположены на e последовательно. Покажем, что внутренняя ячейка Вороного вершины m_i , $i = 2, \dots, k-1$, совпадает с многоугольником $P_i = b_{i-1} s_{i-1} m_i s_i b_i$, высекаемым из W соседними перпендикулярами ℓ_{i-1} и ℓ_i , а внутренние ячейки Вороного вершин m_1 и m_k – с треугольниками $P_1 = m_1 s_1 b_1$ и $P_k = b_{k-1} s_{k-1} m_k$, отсекаемыми от W перпендикулярами ℓ_1 и ℓ_{k-1} соответственно. Для этого достаточно показать, что точки многоугольника P_i расположены в W ближе к m_i , чем к остальным точкам из M . Отметим, что весь многоугольник P_i виден из m_i . Далее, пусть $i \neq 1$. Точки из P_i расположены от m_i не дальше, чем от m_{i-1} . Если $m_{i-1} \neq m_1$, то проверим справедливость аналогичного соотношения для m_{i-2} . Для этого рассмотрим серединный перпендикуляр ℓ к отрезку $[m_{i-2}, m_i]$. Он или параллелен прямым ℓ_{i-2} и ℓ_{i-1} , или пересекается с ними в общей точке – центре описанной вокруг треугольника $m_{i-2} m_{i-1} m_i$ окружности.

Покажем, что ℓ пересекает сторону e в некоторой точке b , которая лежит между b_{i-2} и b_{i-1} . Если прямая ℓ параллельна прямым ℓ_{i-2} и ℓ_{i-1} , то она лежит в полосе между этими прямыми, откуда ℓ пересекает e по некоторой точке b , которая лежит между b_{i-2} и b_{i-1} , что и требовалось показать. Пусть теперь эти три прямые не параллельны и O – их общая точка. Если $O \in e$, то $b_{i-2} = b_{i-1} = b = O$ и доказательство завершено. Пусть $O \notin e$. Поскольку ломаная $m_{i-2} m_{i-1} m_i$ однозначно ортогонально проецируется на $m_1 m_k$ и прямые

ℓ_{i-2} и ℓ_{i-1} пересекают прямую $m_1 m_k$, центральная проекция из точки O на прямую $m_1 m_k$ определена, однозначна и непрерывна на ломаной $s_{i-2} m_{i-1} s_{i-1}$. Прямая ℓ лежит в том вертикальном угле, образованном прямыми ℓ_{i-2} и ℓ_{i-1} , который содержит точку m_{i-1} . Осталось заметить, что образ этого угла при центральной проекции представляет собой отрезок $[b_{i-2}, b_{i-1}]$, а множество $\ell \setminus \{O\}$ проецируется в некоторую точку b из этого отрезка, являющуюся, тем самым, точкой пересечения прямой ℓ и отрезка e .

Поскольку перпендикуляры ℓ , ℓ_{i-2} и ℓ_{i-1} не пересекаются внутри многоугольника Δ , точки многоугольника P_i расположены ближе к m_i , чем к m_{i-2} .

Далее, если $m_{i-2} \neq m_1$, то рассмотрим серединный перпендикуляр ℓ' к отрезку $[m_{i-3}, m_i]$. Рассмотрим многоугольник Δ' , который получается из Δ удалением вершины m_{i-1} и заменой смежных с ней сторон отрезком $[m_{i-2}, m_i]$. Поскольку перпендикуляр ℓ пересекает сторону e между точками b_{i-2} и b_{i-1} , а вектор $m_{i-2} m_i$ равен сумме векторов $m_{i-2} m_{i-1}$ и $m_{i-1} m_i$, многоугольник Δ' удовлетворяет тем же условиям, что и Δ . Применяя к Δ' предыдущие рассуждения, мы покажем, что ℓ' пересекает e в точке b' , лежащей между b_{i-3} и b , а значит, и между b_{i-3} и b_{i-1} . Поэтому точки многоугольника P_i расположены ближе к m_i , чем к m_{i-3} . Продолжим этот процесс, пока не доберемся до точки m_1 . Затем, если $i < k$, аналогично рассмотрим последовательные точки $m_{i+1}, \dots, m_k$. Таким образом, для каждого $i \neq 1$ многоугольник P_i содержится в $\text{IVog}_W(m_i)$. Та же процедура применима и к $i = 1$, поэтому $P_1 \subset \text{IVog}_W(m_1)$. Следовательно, $P_i = \text{IVog}_W(m_i)$ для всех i , и граф Делоне многоугольника W совпадает с ломаной $m_1 \dots m_k$ и порождает единственную ячейку Делоне, совпадающую с W . Теорема доказана.

Задача 2.52. Пусть дано разбиение W на многоугольники типов 1) и 2) теоремы 2.48, причем круги, описанные вокруг многоугольников типа 1), не содержат других вершин из W . Какие еще условия необходимо наложить на это разбиение, чтобы оно оказалось разбиением Делоне для W ?

Список литературы

1. Ф. Препарата, М. Шеймос, *Вычислительная геометрия. Введение*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: F. P. Preparata, M. I. Shamos, *Computational geometry. An introduction*, Texts Monogr. Comput. Sci., Springer-Verlag, New York, 1985.
2. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Ин-т компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2003.
3. A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, *Branching solutions to one-dimensional variational problems*, World Scientific, River Edge, NJ, 2001.
4. J. B. Kruskal, "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 48–50.
5. R. C. Prim, "Shortest connecting networks and some generalizations", *Bell System Tech. J.*, **36** (1957), 1389–1401.
6. В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тушкевич, *Лекции по теории графов*, Наука, М., 1990; англ. пер.: O. Melnikov, R. I. Tyshkevich, V. A. Yemelichev, V. I. Sarvanov, *Lectures on graph theory*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.
7. M. I. Shamos, *Computational geometry*, Ph. D. Thesis, Yale University, 1978.
8. Б. Н. Делоне, "О пустом шаре", *Изв. АН СССР*, **6** (1934), 793–800.

9. А. В. Скворцов, *Триангуляция Делоне и ее применение*, Изд-во Томского ун-та, Томск, 2002.
10. G. Voronoi, “Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs”, *J. Reine Angew. Math.*, **134** (1908), 198–287.
11. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Погруженные многоугольники и их диагональные триангуляции”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:1 (2008), 67–98; англ. пер.: А. О. Ivanov, A. A. Tuzhilin, “Immersed polygons and their diagonal triangulations”, *Izv. Math.*, **72**:1 (2008), 63–90.
12. E. N. Gilbert, H. O. Pollak, “Steiner minimal trees”, *SIAM J. Appl. Math.*, **16**:1 (1968), 1–29.
13. D.-Z. Du, F. K. Hwang, “A proof of the Gilbert–Pollak conjecture on the Steiner ratio”, *Algorithmica*, **7**:2–3 (1992), 121–135.
14. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Отношение Штейнера: современное состояние”, *Матем. вопросы киберн.*, **11** (2002), 27–48.
15. P. de Wet, “The Euclidean Steiner ratio: some recent results”, *Proceedings of the 5th Asian mathematical conference* (Kuala Lumpur, Malaysia, 2009), Universiti Sains Malaysia, Penang, 2009, 442–446.
16. N. Innami, B. H. Kim, Y. Mashiko, K. Shiohama, “The Steiner ratio conjecture of Gilbert–Pollak may still be open”, *Algorithmica*, **57**:4 (2010), 869–872.
17. Д. Ю. Бурого, Ю. Д. Бурого, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2004; пер. с англ.: D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Grad. Stud. Math., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
18. Г. Буземан, *Геометрия геодезических*, ГИТТЛ, М., 1962; пер. с англ.: H. Busemann, *The geometry of geodesics*, Academic Press, New York, 1955.

А. О. ИВАНОВ (A. O. IVANOV)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова;
 Ярославский государственный университет
 им. П. Г. Демидова
E-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
 28.12.2010
 08.08.2011

А. А. ТУЖИЛИН (A. A. TUZHILIN)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова;
 Ярославский государственный университет
 им. П. Г. Демидова
E-mail: tuz@mech.math.msu.su