Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Богатый, В. В. Редкозубов, О почти периодических точках топологической цепи Маркова, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 4, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/im6596>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:32:44

УДК 517.939.5+519.142.1

С. А. Богатый, В. В. Редкозубов

О почти периодических точках топологической цепи Маркова

Доказано, что транзитивная топологическая цепь Маркова имеет почти периодические точки всех D -периодов. Более того, всякий D -период реализуется континуумом различных минимальных множеств. Дано простое конструктивное доказательство результата о том, что транзитивная топологическая цепь Маркова имеет периодические точки почти всех периодов. Изучается структура конечного множества натуральных чисел, не являющихся периодами.

Библиография: 9 наименований.

Ключевые слова: транзитивная топологическая цепь Маркова, периодическая точка, почти периодическая точка, минимальное множество.

§ 1. Введение

Для натурального $N \geq 2$ рассмотрим множество $\mathcal{A} = \{0, \dots, N-1\}$, которое в дальнейшем будем называть *алфавитом*, а его элементы – *символами*. Через Ω_N^+ обозначим множество всех последовательностей $x = (a_1, a_2, \dots)$, где $a_k \in \mathcal{A}$. Определим на Ω_N^+ метрику, положив $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) = 2^{-k}$, если $x \neq y$ и k – наименьший номер такой, что $a_k \neq b_k$. Относительно данной метрики множество Ω_N^+ образует компактное метрическое пространство. Оператор сдвига Бернулли $\sigma: \Omega_N^+ \rightarrow \Omega_N^+$ определяется по формуле

$$\sigma((a_1, a_2, \dots)) = (a_2, a_3, \dots).$$

Оператор σ непрерывен, так как $\rho(\sigma(x), \sigma(y)) \leq 2\rho(x, y)$, если $\rho(x, y) < 1/2$. Ограничение сдвига σ на любое замкнутое инвариантное подмножество называется *символической динамической системой*.

Нас будет интересовать следующий (важнейший) класс символических динамических систем. Пусть $M = (m_{ij})_{i,j=1}^N$ – квадратная матрица порядка N , элементы m_{ij} которой являются нулями или единицами ((0, 1)-матрица). Положим

$$\Omega_M^+ = \{x \in \Omega_N^+ \mid m_{a_i a_{i+1}} = 1, i \in \mathbb{N}\},$$

т. е. матрица M осуществляет разрешение и запрет на символ алфавита, который может встретиться в последовательности x после символа a_i . Ограничение

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 09-01-00741-а) и Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант № НШ-1562.2008.1).

$\sigma|_{\Omega_M^+}$ называется *топологической цепью Маркова* (ТЦМ), определяемой матрицей M , и обозначается далее через σ_M . ТЦМ впервые появились в работе [1]. Их систематическое изучение началось после работ В. М. Алексеева, Д. В. Аносова, Я. Г. Синая, Р. Боуэна, где ТЦМ возникли при кодировании систем на гиперболических множествах (см., например, [2]).

При изучении динамики системы особую роль играют *периодические точки*. Орбиты этих точек суть конечные подмножества, на которых отображение действует как перестановка. Мощность этого множества называется *периодом* периодической точки. В одномерной динамике широко известна теорема Шарковского, которая дает окончательный ответ на вопрос о том, какие периоды влекут за собой появление других периодов (для непрерывного отображения отрезка в себя). При попытке понять, как сосуществуют динамически более сложные орбиты, возникает необходимость в инварианте, аналогичном периоду для периодических точек. В начале 1990-х годов Сяндун Е ввел [3] такой инвариант (D -период) для почти периодических точек – точек, итерации которых попадают в окрестность начальной точки с частотой, зависящей от окрестности. Он обобщил теорему Шарковского в случае таких точек. А. И. Дёмин в 1996 г. получил [4] аналогичный результат для рекуррентных точек.

Цель настоящей работы – описать все обязательно имеющиеся в транзитивной ТЦМ D -периоды почти периодических точек. Для случая ТЦМ, порожденной штефановской периодической орбитой нечетного периода, задача решена Сяндунем Е [3]. В случае общей транзитивной ТЦМ второй автор настоящей статьи доказал [5] реализуемость всех достаточно больших D -периодов. Основным результатом статьи (теорема 6.11) показывает, что транзитивная ТЦМ имеет почти периодические точки всех D -периодов и, более того, всякий D -период реализуется несчетным семейством (континуумом) попарно различных минимальных множеств (замыканий орбит почти периодических точек). Построение искомых почти периодических точек ТЦМ проводится модификацией подходящих последовательностей сдвига Бернулли.

Хорошо известно [2], что всякая транзитивная ТЦМ обладает свойством спецификации и, как следствие, всякая транзитивная ТЦМ обладает периодическими точками всех достаточно больших периодов. В настоящей работе также даны точные оценки на обязательно имеющиеся периоды периодических точек (следствие 2.11).

Со всякой ТЦМ связана неотрицательная целочисленная матрица A . Известно, что неотрицательная матрица транзитивна тогда и только тогда, когда для некоторого натурального γ (индекса примитивности матрицы) матрица A^γ положительна. Теория индекса примитивности имеет долгую и богатую историю. Известно, что для транзитивной матрицы A порядка N справедливо неравенство $\gamma \leq N^2 - 2N + 2$ и это неравенство неулучшаемо. Однако для изучения динамики ТЦМ важное значение имеет положительность не всех элементов некоторой степени матрицы A , а только ее диагональных элементов. Именно, количество неподвижных точек q -й итерации ТЦМ равно следу матрицы A^q . Все эти точки являются периодическими, однако не все имеют

период, равный q . Период каждой из них является делителем q , но может случиться так, что ни одна из них не имеет период q . Число P_q точек периода q задается формулой

$$P_q = \sum_{d|q} \mu(d) \operatorname{Tr}(A^{q/d}),$$

где $\mu(\cdot)$ – функция Мёбиуса. (Обзор результатов, полученных по этой теме, можно найти в работе [6].) Поэтому для неотрицательной транзитивной целочисленной матрицы A важное значение имеет такое наименьшее число $p = p(A)$ (индекс периода матрицы), что $P_q > 0$ для всех $q \geq p$. Мы доказываем (следствие 2.11), что для транзитивной матрицы A порядка N справедливо неравенство $p \leq N^2 - N + 1$ и это неравенство не улучшаемо (предложение 2.14). Найдена “вторая по глубине” точная оценка индекса периода (следствие 2.16 и теорема 2.13).

§ 2. Периодические точки ТЦМ

В этом параграфе описываются обязательно имеющиеся в транзитивной ТЦМ периоды периодических точек в терминах длин базисных циклов соответствующего ей графа Маркова.

Конечную последовательность символов будем называть *словом*. Далее будем считать, что даны $n \geq 2$ попарно различных слова

$$A_1 = a_1 a_{i_{12}} \dots a_{i_{1l_1}}, \quad \dots, \quad A_n = a_1 a_{i_{n2}} \dots a_{i_{nl_n}},$$

которые начинаются с первой буквы некоторого N -буквенного алфавита и больше не содержат этой буквы. Эти слова впредь называются *базисными*. Понятно, что длина слова A_j равна l_j . *Конкатенацией* слов A и B называется слово AB .

ЛЕММА 2.1. *Если два слова $B = A_{s_1} \dots A_{s_r}$ и $B' = A_{s'_1} \dots A_{s'_l}$ равны, то $r = l$ и $s_1 = s'_1, \dots, s_r = s'_l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из базисности слов A_j (все слова начинаются с буквы a_1 , и более нигде она не встречается) следует, что $r = l$.

Проведем индукцию по числу r . При $r = 1$ получаем $A_{s_1} = A_{s'_1}$. Поскольку слова попарно различны, то $s_1 = s'_1$.

Пусть $r \geq 2$. Из условия, налагаемого на букву a_1 , следует, что слова A_{s_1} и $A_{s'_1}$ имеют одинаковую длину. Тогда $A_{s_1} = A_{s'_1}$. Поэтому $s_1 = s'_1$. Согласно индуктивному предположению из равенства $A_{s_2} \dots A_{s_r} = A_{s'_2} \dots A_{s'_r}$ следуют равенства $s_2 = s'_2, \dots, s_r = s'_r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Для всякого непериодического слова из индексов $S = s_1 \dots s_r$, $1 \leq s_1, \dots, s_r \leq n$, слово $B = A_{s_1} \dots A_{s_r}$ из букв алфавита также не является периодическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует такое слово C , что слово B получается k -кратным повторением слова C , т.е. $B = C^k$, $k \geq 2$. Поскольку слово B начинается с буквы a_1 , то и слово C начинается с буквы a_1 .

Разложим последнее в конкатенацию базисных слов: $C = A_{s_1} \dots A_{s_q}$. При этом в разложении могут возникнуть базисные слова, которые заранее не были фиксированы. Однако для доказательства предложения это не принципиально, так как к заданному набору n базисных слов можно добавить эти новые слова. Равенство $B = C^k$ преобразуется в разложение $B = A_{s_1} \dots A_{s_q} \dots A_{s_1} \dots A_{s_q}$. Из единственности представления слова в виде конкатенации базисных слов (лемма 2.1) получается равенство $S = s_1 \dots s_q \dots s_1 \dots s_q$, противоречащее условию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Квадратная матрица A называется *неотрицательной*, если она состоит из действительных неотрицательных чисел.

По неотрицательной матрице A построим $(0, 1)$ -матрицу M_A :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{ij} > 0, \\ 0, & \text{если } a_{ij} = 0. \end{cases}$$

По квадратной $(0, 1)$ -матрице M порядка N построим ориентированный граф Γ_M на N вершинах. Именно, из вершины с номером i идет ребро в вершину с номером j тогда и только тогда, когда $m_{ij} = 1$. Матрица M является матрицей смежности ориентированного графа Γ_M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Квадратная матрица A называется *положительной*, если она состоит из действительных положительных чисел.

Рассмотрим функцию $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$\gamma(n) = n^2 - 2n + 2.$$

Следующая теорема хорошо известна и фактически нами не используется, но мы сочли полезным включить ее в работу для удобства восприятия материала.

ТЕОРЕМА 2.5. Для неотрицательной матрицы A порядка N следующие условия эквивалентны:

- 1) существует такое натуральное k , что матрица A^k положительна;
- 2) матрица $A^{\gamma(N)}$ положительна;
- 3) в некоторой вершине v графа Γ_M имеются замкнутые проходящие через все вершины пути длин $l_1, \dots, l_n$, взаимно простых в совокупности;
- 4) в каждой вершине v графа Γ_M имеются замкнутые проходящие через все вершины пути длин, взаимно простых в совокупности;
- 5) матрица M_A удовлетворяет одному из условий 1)–4).

Неотрицательная матрица, удовлетворяющая одному из условий 1)–5) теоремы 2.5, называется *транзитивной*.

Рассмотрим транзитивную ТЦМ σ_M , т.е. такую ТЦМ, для которой матрица M транзитивна. Утверждения из теории графов можно переформулировать в терминах слов с алфавитом, составленным из обозначений вершин графа.

Таким образом, пути графа соответствуют допустимым словам. *Циклом* называется такое слово, которое при добавлении справа его первого символа дает допустимое слово.

Пусть

$$A_1 = a_1 a_{i_{12}} \dots a_{i_{1l_1}}, \quad \dots, \quad A_n = a_1 a_{i_{n2}} \dots a_{i_{nl_n}}$$

– базисные циклы, длины которых $l_1, \dots, l_n$ взаимно просты в совокупности. Согласно теореме 2.5 для всякого символа a_1 такие циклы существуют. Известно (см., например, [7]), что найдется такое число $G(l_1, \dots, l_n)$, что для всякого натурального $q \geq G(l_1, \dots, l_n)$ имеется представление

$$q = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n, \quad (2.1)$$

где все α_i , $i = 1, \dots, n$, неотрицательны и по крайней мере два этих коэффициента положительны.

Для двух взаимно простых чисел l_1, l_2 имеет место равенство (см., например, [7])

$$G(l_1, l_2) = l_1 l_2 + 1.$$

ТЕОРЕМА 2.6. *Транзитивная ТЦМ обладает периодической точкой любого периода $q \geq G(l_1, \dots, l_n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное число $q \geq G(l_1, \dots, l_n)$. Тогда $q = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n$ для некоторых неотрицательных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, по крайней мере два из которых положительны. Рассмотрим последовательность

$$x = (\underbrace{A_1 \dots A_1}_{\alpha_1} \dots \underbrace{A_n \dots A_n}_{\alpha_n} \underbrace{A_1 \dots A_1}_{\alpha_1} \dots \underbrace{A_n \dots A_n}_{\alpha_n} \dots).$$

Согласно предложению 2.2 и лемме 2.1 точка x является периодической точкой периода q .

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Если транзитивная ТЦМ на $N \geq 2$ символах обладает неподвижной точкой, то она обладает периодическими точками всех периодов $q \geq N$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.8. *Если ТЦМ имеет два начинающихся с одного символа цикла с взаимно простыми длинами s и p , то она имеет периодические точки любого периода $q \geq G(s, p) = sp + 1$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. *Всякая транзитивная ТЦМ на $N \geq 2$ символах обладает периодической точкой периода $s \leq N - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в графе заданной ТЦМ вершину i , в которую входят по крайней мере два ребра, например из вершин j и k . Рассмотрим также самый короткий путь из вершины i в вершину j . Если этот путь не проходит через вершину k , то его длина не превосходит $N - 2$. Если этот путь проходит через вершину k , то длина куска пути до вершины k не превосходит $N - 2$. Дополняя соответствующий путь ребром (j, i) (или (k, i)), получаем цикл длины $s \leq N - 1$. Поскольку построенный замкнутый путь является простым, получаем периодическую точку периода $s \leq N - 1$.

ТЕОРЕМА 2.10. *Если транзитивная ТЦМ на $N \geq 2$ символах обладает периодической точкой периода s , то она обладает периодическими точками всех периодов $q \geq sN + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.9 без ограничения общности можно считать, что $s \leq N - 1$. Также без ограничения общности можно считать, что заданная ТЦМ не имеет периодических точек периода $\leq s - 1$. Возьмем вершину i из цикла длины s , в которую входят по крайней мере два ребра: из вершины j , принадлежащей взятому циклу, и вершины k , не принадлежащей циклу. Согласно [8, доказательство теоремы 1] из вершины i в любую вершину идет путь любой длины $r \geq s(N - 1)$. Для заданного числа $r \geq s(N - 1)$ возьмем путь из вершины i в вершину k длины r . Добавим ребро (k, i) и получим цикл длины $r + 1 \geq s(N - 1) + 1$. Полученный цикл не может быть кратен первоначальному циклу длины s , так как он содержит вершину k вне первоначального цикла. Добавим к построенному циклу первоначальный цикл на вершине i длины s . Получается цикл заданной длины $r + 1 + s \geq sN + 1$, являющийся комбинацией различных простых циклов на вершине i . Если полученный цикл является периодическим, то переставим простые циклы таким образом, чтобы все составляющие, являющиеся первоначальным циклом, записывались последними. Таким образом, для всякого числа $q = r + 1 + s \geq sN + 1$ на вершине i построен замкнутый непериодический путь длины q . Построенный путь соответствует периодической точке периода q . Теорема доказана.

Рассмотрим функцию $p_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$p_1(n) = (n - 1)n + 1 = n^2 - n + 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.11. *Всякая транзитивная ТЦМ на $N \geq 2$ символах обладает периодическими точками всех периодов $\geq p_1(N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.10 и предложению 2.9 данная ТЦМ имеет периодические точки всех периодов $\geq (N - 1)N + 1 \geq sN + 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. *Если транзитивная ТЦМ на $N \geq 4$ символах не обладает периодическими точками периода $\leq N - 2$, то ее матрица эквивалентна одной из следующих двух:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию в графе заданной ТЦМ нет циклов длины $\leq N - 2$. Если бы в графе не было цикла длины N , то все циклы имели бы длину $N - 1$, что противоречит транзитивности заданной ТЦМ.

Рассмотрим цикл длины N . Если бы этот цикл содержал некоторую вершину дважды, то он бы распался на два цикла. Один из этих циклов имел бы длину $\leq [N/2] \leq N - 2$, что противоречит условию. Итак, перенумеровав, если необходимо, вершины, можно считать, что N -цикл составлен из ребер, идущих из вершины i в вершину $i + 1$. Здесь, как всегда, номера вершин берутся по модулю числа N , т. е. номер $N + 1$ считается равным номеру 1.

Из транзитивности вытекает, что в графе имеются еще ребра. Из отсутствия циклов длины $\leq N - 2$ следует, что оставшиеся ребра могут идти только из вершины с номером i в вершину с номером $i + 2$. Перенумеровав, если необходимо, вершины, будем считать, что имеется ребро из вершины с номером $n - 1$ в вершину с номером 1.

Если в графе больше нет ребер, то получается первая матрица.

Пусть имеется еще ребро $(i, i + 2)$. Если $i \neq N - 2, N$, то возникает цикл длины $N - 2$. Если $i = N - 2$, то получается вторая матрица. Если $i = N$, то, сделав перенумерацию $i \rightarrow i - 1$, получаем также вторую матрицу.

ТЕОРЕМА 2.13. *Если транзитивная ТЦМ на $N \geq 4$ символах не обладает периодическими точками периода $\leq N - 2$, то множество $\mathcal{P}$ ее периодов является одним из следующих:*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \{ & N - 1, N, 2N - 1, \dots, kN - (k - 1), \dots \\ & \dots, kN - 1, \dots, (N - 1)N - 1, (N - 1)N + 1, \dots \}, \\ \mathcal{P} = \{ & N - 1, N, 2N - 2, 2N - 1, \dots, kN - k, \dots, kN - 1, \dots \\ & \dots, (N - 2)N - 1, (N - 2)N + 1, \dots \}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.12 матрица заданной ТЦМ имеет один из двух видов. Для первой матрицы получается первое множество периодов, а для второй – второе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14. *Имеется транзитивная ТЦМ, которая не обладает периодической точкой периода $q = p_1(N) - 1 = (N - 1)N$.*

Рассмотрим функцию $p_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$p_2(n) = (n - 2)n + 1 = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.15. *Если транзитивная ТЦМ на $N \geq 3$ символах обладает периодической точкой периода $\leq N - 2$, то она обладает периодическими точками всех периодов $\geq p_2(N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из теоремы 2.10.

СЛЕДСТВИЕ 2.16. *Если транзитивная ТЦМ на $N \geq 4$ символах обладает периодической точкой периода $p_1(N) - 1$, то она обладает периодическими точками всех периодов $\geq p_2(N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если заданная транзитивная ТЦМ обладает точкой периода $\leq N - 2$, то утверждение вытекает из следствия 2.15. Если заданная

транзитивная ТЦМ не обладает точкой периода $\leq N - 2$, то утверждение вытекает из теоремы 2.13.

Рассмотрим функцию $p_3: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$p_3(n) = p_1(n - 1) = (n - 2)(n - 1) + 1 = n^2 - 3n + 3.$$

ТЕОРЕМА 2.17. *Если для четного $N \geq 6$ транзитивная ТЦМ на N символах обладает периодической точкой периода $\leq N - 2$, то она имеет периодические точки всех периодов $\geq p_3(N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если заданная ТЦМ не обладает простым циклом длины $N - 1$, то ее простые циклы имеют длины $N - 2$ и N . Четность последних чисел противоречит транзитивности заданной цепи Маркова. Следовательно, в сформулированных предположениях имеются простые циклы длин $N - 2$ и $N - 1$.

Рассмотрим цикл длины $N - 1$.

Если из некоторой вершины данного цикла идет дополнительное ребро в вершину этого же цикла, то ребро имеет вид $(i \mapsto i + 2 \bmod (N - 1))$. Таким образом, на этих $N - 1$ вершинах возникает транзитивная ТЦМ, к которой применимы все ранее полученные результаты. В частности, согласно следствию 2.11 имеются точки всех периодов $\geq p_1(N - 1)$.

Пусть теперь ни из какой вершины данного цикла не идет дополнительное ребро в вершину этого же цикла. По условию существует цикл длины $N - 2$. Он имеет общие вершины с рассматриваемым циклом длины $N - 1$ и включает в себя оставшуюся вершину N . Опишем подробнее те части этих циклов, которые не совпадают. Пусть в $(N - 2)$ -цикле в вершину N идет ребро из вершины i . Тогда в этом цикле ребро из вершины N идет в вершину $i + 3 \bmod (N - 1)$. Без ограничения общности можно считать, что $i = N - 3$. Таким образом, в соответствующем графе имеются простые циклы длин $N - 2$ и $N - 1$ с общей вершиной. Согласно следствию 2.8 в первоначальной цепи Маркова имеются точки всех периодов $\geq (N - 2)(N - 1) + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.18. Ясно, что оценки в следствии 2.15 и теореме 2.17 являются точными для нечетного и четного N соответственно.

§ 3. D -период

В этом параграфе дается определение D -периода почти периодической точки и изучаются его основные свойства.

Пусть $f: X \rightarrow X$ – непрерывное отображение компакта X . Рассмотрим минимальное для f множество A , т. е. непустое, замкнутое, f -инвариантное ($f(A) \subset A$) и не содержащее подмножеств, обладающих первыми тремя свойствами. При n -й итерации f^n множество A не обязано оставаться минимальным, но оно замкнуто и f^n -инвариантно, следовательно, в A существует подмножество A_0 , минимальное относительно итерации f^n . Положим $A_i = f^i(A_0)$, $i = 1, 2, \dots$. Если множество $B_i \subset A_i$ непусто, замкнуто и f^n -инвариантно, то

в силу f^n -минимальности множества A_0 получаем следующую цепочку включений:

$$A_i \supset B_i \supset f^n(B_i) = f^i(f^{n-i}(B_i)) = f^i(A_0) = A_i,$$

из которой вытекает, что множество B_i совпадает с A_i . Это доказывает минимальность множества A_i при итерации f^n . Обозначим через k наименьший из номеров i , $i = 1, 2, \dots$, таких, что выполнено $A_i = A_0$. Поскольку минимальные множества либо не пересекаются, либо совпадают, то $k \leq n$ и $A_i \neq A_j$ при $0 \leq i < j < k$. Множество $\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$ замкнуто и f -инвариантно, тогда в силу f -минимальности множества A имеем разложение на f^n -минимальные подмножества

$$A = A_0 \cup \dots \cup A_{k-1}$$

и такое разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых.

Таким образом, каждому минимальному множеству A можно сопоставить функцию $D(A, f): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ по правилу $D(A, f)(n) = k$. Этот инвариант Сяндун Е назвал *декомпозиционной функцией*, или *D-периодом*, минимального множества A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Точка $x \in X$ называется *почти периодической точкой* отображения f , если для любой ее окрестности U существует номер n такой, что среди n подряд идущих итераций $f^{i+1}(x), \dots, f^{i+n}(x)$ хотя бы одна содержится в U .

Множество всех почти периодических точек отображения f обозначим через $AP(f)$. Через $P(f)$ обозначим множество всех периодических точек отображения f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. ω -предельным множеством $\omega(x, f)$ точки $x \in X$ называется множество точек прикосновения ее орбиты.

Связь между почти периодическими точками и минимальными множествами устанавливает следующий (классический) результат, принадлежащий Д. Биркгофу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если множество A минимально и $x \in A$, то $x \in AP(f)$. Обратно, если $x \in AP(f)$, то ее ω -предельное множество $\omega(x, f)$ является минимальным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. D -периодом $D(x, f)$ почти периодической точки x назовем D -период ее ω -предельного множества $\omega(x, f)$.

Пусть E – множество всех (теоретико-числовых) функций $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, удовлетворяющих условиям:

- 1) для любого натурального n значение $s(n)$ делит n ;
- 2) для натуральных l и n если l делит n , то $s(l) = \text{НОД}(l, s(n))$.

В дальнейшем будем пользоваться следующим критерием принадлежности функции множеству E .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5 [3]. *Функция $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ принадлежит множеству E тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *если m, n взаимно просты, то $s(mn) = s(m)s(n)$, т. е. функция s мультипликативна;*

2) *для любого простого p найдется такое $l_0 \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, что $s(p^l) = \text{НОД}(p^l, p^{l_0})$ для любого натурального l .*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Из предложения 3.5 вытекает, что если функция $s \in E$ ограничена, то существует такое m , что $s(n) = \text{НОД}(m, n)$ для любого натурального n .

ТЕОРЕМА 3.7 [3]. *Если $x \in AP(f)$, то $D(x, f) \in E$.*

Для периодической точки x периода k значение ее D -периода $D(x, f)(n)$ равно $\text{НОД}(k, n)$, т. е. период и D -период вполне определяют друг друга. Поэтому D -период можно рассматривать как обобщение периода на случай почти периодических точек. Точку $x \in AP(f) \setminus P(f)$ с D -периодом $D(x, f)(n) = \text{НОД}(k, n)$ назовем *псевдопериодической*. В этом случае будем записывать $D(x, f) = k'$.

ЛЕММА 3.8 [3]. *Для любых натуральных m и n справедливо равенство*

$$D(x, f)(mn) = D(x, f^n)(m)D(x, f)(n).$$

Для D -периода $D(x, f)$ почти периодической точки x введем *умножение* на натуральное число k : значение $k \cdot D(x, f)(n)$ равно $dD(x, f)(n/d)$, где $d = \text{НОД}(k, n)$.

ЛЕММА 3.9. *Для точек $x, y \in X$ и k натурального D -периоды $D(y, f)$ и $k \cdot D(x, f)$ совпадают тогда и только тогда, когда $D(y, f)(k) = k$ и $D(y, f^k) = D(x, f)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость условий. Предположим, что $D(y, f) = k \cdot D(x, f)$, тогда по определению функции $k \cdot D(x, f)$ выполнено равенство $D(y, f)(k) = k$. Выберем произвольное натуральное n , тогда, с одной стороны, по лемме 3.8 имеем $D(y, f)(kn) = kD(y, f^k)(n)$, с другой – по определению функции $k \cdot D(x, f)$ выполнено $D(y, f)(kn) = kD(x, f)(n)$. Сравнивая полученные выражения в правых частях, заключаем, что $D(y, f^k)(n) = D(x, f)(n)$.

Покажем достаточность условий. Выберем произвольное натуральное n . Введем обозначения $d = \text{НОД}(k, n)$, $n = n_1 d$, $k = k_1 d$. С одной стороны, по лемме 3.8 имеем

$$D(y, f)(k_1 n_1 d) = D(y, f^k)(n_1)D(y, f)(k),$$

откуда, учитывая $D(y, f)(k) = k$ и $D(y, f^k) = D(x, f)$, получаем, что

$$D(y, f)(k_1 n_1 d) = kD(x, f)(n_1). \quad (3.1)$$

С другой стороны, по лемме 3.8

$$D(y, f)(k_1 n_1 d) = D(y, f^d)(k_1 n_1)D(y, f)(d).$$

Поскольку числа k_1 и n_1 взаимно просты, то выполнено равенство $D(y, f^d)(k_1 n_1) = D(y, f^d)(k_1) D(y, f^d)(n_1)$. Тогда снова по лемме 3.8 получаем

$$D(y, f)(k_1 n_1 d) = D(y, f^d)(k_1) D(y, f)(n).$$

По условию имеем $D(y, f)(k) = k$, и тогда

$$k = D(y, f^d)(k_1) D(y, f)(d) = d D(y, f^d)(k_1),$$

следовательно, $D(y, f^d)(k_1) = k_1$, а значит,

$$D(y, f)(k_1 n_1 d) = k_1 D(y, f)(n). \quad (3.2)$$

В силу (3.1) и (3.2) имеем $D(y, f)(n) = d D(x, f)(n/d)$, что завершает доказательство.

Следующая лемма фактически используется в [3].

ЛЕММА 3.10. *Для точки $x \in AP(f)$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) $D(x, f)(k) = k$;
- 2) $\forall \{n_i\} (f^{n_i}(x) \rightarrow x) \Rightarrow (k \text{ делит } n_i \text{ при всех } i \geq i_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.11. *Точка $x \in AP(f)$ является псевдонеподвижной тогда и только тогда, когда x не является неподвижной точкой и для любого простого p найдется последовательность $\{n_i\}$, $n_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ такая, что $f^{n_i}(x) \rightarrow x$.*

ЛЕММА 3.12. *Пусть $f: X \rightarrow X$ и $g: Y \rightarrow Y$ – непрерывные отображения метрических компактов X и Y соответственно, и пусть для точек $x \in X$, $y \in Y$ и последовательности номеров $\{n_i\}$ условие $f^{n_i}(x) \rightarrow x$ выполняется, если и только если $g^{n_i}(y) \rightarrow y$. Тогда $x \in AP(f)$ в том и только в том случае, если $y \in AP(g)$. При этом*

$$D(x, f) = D(y, g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для первого утверждения достаточно показать, что если точка x является почти периодической для отображения f , то точка y является почти периодической для отображения g . Предположим, что это не так. Тогда:

(*) существует такая окрестность V точки y , что для любого N найдется такой номер $n = n(N)$, что ни одна из точек $g^{n+1}(y), \dots, g^{n+N}(y)$ не лежит в V .

Для натурального k через U_k обозначим открытый шар с центром в точке x и радиусом $1/k$. Поскольку $x \in AP(f)$, то:

(**) найдется такой номер $n_k = n(U_k)$, что для любого номера i среди итераций $f^{i+1}(x), \dots, f^{i+n_k}(x)$ хотя бы одна попадает в U_k .

Положим $N = n_k$ в (*) и обозначим через m_k номер $n(N)$. Теперь положим $i = m_k$ в (**). Тогда существует номер j_k , $m_k + 1 \leq j_k \leq m_k + n_k$, такой, что $f^{j_k}(x) \in U_k$, а $g^{j_k}(y) \notin V$. Рассмотрим последовательность номеров $\{j_k\}$, тогда по построению имеем $f^{j_k}(x) \rightarrow x$, но $g^{j_k}(y) \not\rightarrow y$, что противоречит условию.

Покажем теперь, что $D(x, f) = D(y, g)$. Функции $D(x, f)$ и $D(y, g)$ принадлежат множеству E , и условия, налагаемые на точки x и y , симметричны, поэтому достаточно установить, что если p простое, а l – неотрицательное целое число, то имеет место импликация $D(x, f)(p^l) = p^l \Rightarrow D(y, g)(p^l) = p^l$.

Пусть $g^{m_i}(y) \rightarrow y$ для некоторой последовательности $\{m_i\}$. Тогда по условию имеем $f^{m_i}(x) \rightarrow x$. Согласно лемме 3.10 посылка в импликации означает, что все m_i при $i \geq i_0$ делятся на p^l , а значит, также по лемме 3.10 выполнено заключение в импликации.

§ 4. Построение почти периодических точек полного сдвига с заданными свойствами

Используя модификацию конструкции Хедлунда [9] минимального множества Штурма, построим почти периодическую точку с D -периодом $1'$.

Пусть α – иррациональное число, $0 < \alpha < 1$. Введем обозначение $q = [1/\alpha]$, тогда выполнено $q\alpha < 1 < (q+1)\alpha$. Возьмем число θ , $0 < \theta < 1 - q\alpha$, не являющееся дробной частью ни одного из чисел $n\alpha$, и определим последовательность $y(\alpha) \in \Omega_2^+$, $y(\alpha) = (a_1, a_2, \dots)$, положив $a_n = 0$, если $n\alpha \in (\theta + k(n), q\alpha + \theta + k(n))$, и $a_n = 1$, если $n\alpha \in (q\alpha + \theta + k(n), \theta + 1 + k(n))$, где $k(n) \in \mathbb{N}_0$.

Отметим, что:

- 1) если $n\alpha \in (\theta + k, \alpha + \theta + k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$, то $(n+i)\alpha \in (i\alpha + \theta + k, (i+1)\alpha + \theta + k) \subset (\theta + k, q\alpha + \theta + k)$ для всех i , $1 \leq i \leq q-1$;
- 2) если $n\alpha \in ((q-1)\alpha + \theta + k, q\alpha + \theta + k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$, то возможны два случая:

- а) $n\alpha \in ((q-1)\alpha + \theta + k, 1 - \alpha + \theta + k)$, тогда $(n+1)\alpha \in (q\alpha + \theta + k, 1 + \theta + k)$ и $(n+2)\alpha \in (\theta + k + 1, \alpha + \theta + k + 1)$;
- б) $n\alpha \in (1 - \alpha + \theta + k, q\alpha + \theta + k)$, тогда $(n+1)\alpha \in (\theta + k + 1, \alpha + \theta + k + 1)$.

Из этих наблюдений вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Последовательность $y(\alpha)$ представляется в виде конкатенации двух специальных слов C_0 и C_1 :*

$$y(\alpha) = (C_{j_1} \dots C_{j_n} \dots), \quad \text{где } C_0 = \underbrace{0 \dots 0}_q, C_1 = \underbrace{0 \dots 01}_{q+1}, j_n \in \{0, 1\}, n = 1, 2, \dots$$

Дадим эквивалентное определение точки $y(\alpha)$. Рассмотрим окружность S^1 как факторпространство $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с метрикой $d[\cdot, \cdot]$, индуцированной из $\mathbb{R}$. Введем обозначения $O = \pi(0)$, $(AB) = \pi((\theta, q\alpha + \theta))$, где $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ – каноническая проекция. Через (BA) обозначим $\pi((q\alpha + \theta, 1 + \theta))$. Будем дугу (BA) называть *дополнительной* к (AB) . На S^1 рассмотрим поворот R_α на угол α . По определению $a_n = 0$, если n -я итерация $R_\alpha^n(O)$ принадлежит (AB) , и $a_n = 1$, если $R_\alpha^n(O)$ принадлежит (BA) .

ЛЕММА 4.2. *Для всякого натурального числа T существует такое число $\delta > 0$, что если $d[R_\alpha^n(O), O] < \delta$, то $\rho(\sigma^n(y), y) < 2^{-T}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$\delta_i = \min\{d[R_\alpha^i(O), A], d[R_\alpha^i(O), B]\}, \quad i = 0, \dots, T, \quad \delta = \min\{\delta_0, \dots, \delta_T\}.$$

Если $d[X, O] < \delta$, то для любого i , $0 \leq i \leq T$, точки $R_\alpha^i(X)$ и $R_\alpha^i(O)$ одновременно попадают либо в дугу (AB) , либо в дополнительную дугу (BA) . Следовательно, если точки $R_\alpha^n(O)$ и O δ -близки на окружности, то итерации $R_\alpha^{n+i}(O)$ и $R_\alpha^i(O)$ для любого i , $1 \leq i \leq T$, попадают в одну дугу, а значит, по определению $\rho(\sigma^n(y), y) < 2^{-T}$.

ЛЕММА 4.3. Для всякого δ , $0 < \delta \leq 1/2$, существуют такая точка $X \in S^1$ и положительное число $\varrho > 0$, что окрестность $U(X, \varrho)$ лежит в одной дуге, а ее образ $R_\delta(U(X, \varrho)) = U(R_\delta(X), \varrho)$ лежит в дополнительной дуге.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве X достаточно взять любую точку непустого множества $V = (AB) \cap R_{-\delta}((BA))$. Из открытости множества V вытекает возможность выбора подходящего числа $\varrho > 0$.

ЛЕММА 4.4. Для всякого δ , $0 < \delta \leq 1/2$, существуют такие натуральное число T и число ε , $0 < \varepsilon < \delta$, что точки $R_\alpha^T(O)$ и $R_{\tilde{\delta}} \circ R_\alpha^T(O)$ лежат в разных дугах для всякого $\tilde{\delta} \in (\delta - \varepsilon, \delta + \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку орбита $\{R_\alpha^n(O)\}_{n=0}^\infty$ точки O плотна на окружности, существует такое T , что $R_\alpha^T(O) \in U(X, \varrho)$, где X и ϱ определяются леммой 4.3. Теперь число $\varepsilon > 0$ находится из того, что множество $U(X, \varrho)$ открыто.

Из компактности отрезка $[\delta, 1/2]$ вытекает

ЛЕММА 4.5. Для всякого δ , $0 < \delta \leq 1/2$, существует такое натуральное число T , что для всякого $\tilde{\delta} \in [\delta, 1/2]$ точки $R_\alpha^k(O)$ и $R_{\tilde{\delta}} \circ R_\alpha^k(O)$ лежат в разных дугах для некоторого натурального $k \leq T$.

Ясно, что аналогичные утверждения справедливы и для поворотов $R_{-\tilde{\delta}}$.

ЛЕММА 4.6. Для всякого δ , $0 < \delta \leq 1/2$, существует такое натуральное число T , что из $d[R_\alpha^n(O), O] \geq \delta$ следует, что точки $R_\alpha^k(O)$ и $R_\alpha^k \circ R_\alpha^n(O)$ лежат в разных дугах для некоторого натурального $k \leq T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется такое $\tilde{\delta} \in [\delta, 1/2]$, что либо $R_\alpha^n(O) = R_{\tilde{\delta}}(O)$, либо $R_\alpha^n(O) = R_{-\tilde{\delta}}(O)$. Осталось применить лемму 4.5 для случая $R_{\tilde{\delta}}$ и $R_{-\tilde{\delta}}$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Точка $y = y(\alpha)$ является псевдонеподвижной точкой оператора сдвига.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Орбита любой точки относительно произвольной итерации R_α^k плотна на окружности, поэтому точка O является псевдонеподвижной точкой R_α .

Из лемм 4.2, 4.6 вытекает, что для последовательности номеров $\{n_i\}$ условие $R_\alpha^{n_i}(O) \rightarrow O$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sigma^{n_i}(y) \rightarrow y$. По лемме 3.12 заключаем, что y является псевдонеподвижной точкой сдвига.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Если 1 и иррациональные числа α и β , $0 < \alpha, \beta < 1$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то ω -предельные множества точек $y(\alpha)$ и $y(\beta)$ различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем иррациональные числа α и β , $0 < \alpha, \beta < 1$, такие, что 1, α и β линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Пусть $q_1 = [1/\alpha]$, $q_2 = [1/\beta]$, и пусть θ_1 , $0 < \theta_1 < 1 - q_1\alpha$, не является дробной частью ни одного из чисел $n\alpha$, а θ_2 , $0 < \theta_2 < 1 - q_2\beta$, не является дробной частью ни одного из чисел $n\beta$. Возьмем два экземпляра окружности и отметим на одной точку $O_1 = \pi(0)$, дугу $(A_1B_1) = \pi((\theta_1, q_1\alpha + \theta_1))$ и (B_1A_1) – дополнительную к (A_1B_1) дугу, на другой – точку $O_2 = \pi(0)$, дугу $(A_2B_2) = \pi((\theta_2, q_2\beta + \theta_2))$ и (B_2A_2) – дополнительную к (A_2B_2) дугу. По определению $y(\alpha) = (a_1, a_2, \dots)$, где $a_n = 0$, если n -я итерация $R_\alpha^n(O_1)$ принадлежит (A_1B_1) , и $a_n = 1$, если $R_\alpha^n(O_1)$ принадлежит (B_1A_1) . Аналогично определяется последовательность $y(\beta) = (b_1, b_2, \dots)$.

Достаточно показать, что $y(\beta) \notin \omega(y(\alpha), \sigma)$. Это равносильно существованию такого натурального N , что для любого номера m слова $b_1b_2 \dots b_N$ и $a_{m+1}a_{m+2} \dots a_{m+N}$ различны, а это, в свою очередь, равносильно тому, что найдется такой номер $n = n(m)$, $1 \leq n \leq N$, что точки $R_\beta^n(O_2)$ и $R_\alpha^{n+m}(O_1)$ не лежат одновременно в дугах (A_2B_2) и (A_1B_1) или в дополнительных к ним дугах.

На торе $T^2 = S^1 \times S^1$ рассмотрим отображение

$$F(X, Y) = (R_\alpha(X), R_\beta(Y)).$$

Линейная независимость над $\mathbb{Q}$ чисел 1, α и β влечет минимальность отображения F (см. [2, с. 44]). Поэтому орбита любой точки из T^2 всюду плотна относительно отображения F . Значит, для любой точки $X \in S^1$ найдется номер $n = n(X)$ такой, что n -я итерация $F^n(X, O_2)$ попадает в область $(A_1B_1) \times (B_2A_2)$. Следовательно, итерация $R_\alpha^n(X)$ лежит в дуге (A_1B_1) , а итерация $R_\beta^n(O_2)$ – в дуге (B_2A_2) . В силу того, что поворот является изометрией, найдется окрестность $U = U(X)$ такая, что любая точка $Z \in U$ обладает тем же самым свойством. Поскольку окружность компактна, существует конечное покрытие S^1 окрестностями $U(X_1), \dots, U(X_k)$. Возьмем $N = \max\{n(X_1), \dots, n(X_k)\}$. Тогда для заданного m имеем $R_\alpha^m(O_1) \in U(X_i)$ для некоторого $i \leq k$, поэтому

$$b_1b_2 \dots b_N \neq a_{m+1}a_{m+2} \dots a_{m+N}.$$

Предложение доказано.

Поскольку линейное пространство $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$ имеет континуум линейно независимых элементов, то справедливо

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Для оператора сдвига $\sigma: \Omega_2^+ \rightarrow \Omega_2^+$ существует континуум различных минимальных множеств с D -периодом $1'$.

В своей диссертации Сяндун Е для данной неограниченной функции $s \in E$ и числа γ , $0 \leq \gamma < \log 2$, построил минимальное множество относительно сдвига

$\sigma: \Omega_2^+ \rightarrow \Omega_2^+$ с D -периодом s и топологической энтропией γ . В частности, из этого вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. *Для любой неограниченной функции $s \in E$ существует континуальное подмножество $J_s \subset AP(\sigma)$ такое, что любая последовательность из J_s имеет D -период s и для любой пары $j, j' \in J_s, j \neq j'$, минимальные множества $\omega(j, \sigma)$ и $\omega(j', \sigma)$ различны.*

§ 5. Построение псевдонеподвижной точки в транзитивной ТЦМ

В этом параграфе для произвольной транзитивной ТЦМ строится почти периодическая точка с D -периодом $1'$.

Слово $B = A_{s_1} \dots A_{s_k}$, составленное из базисных слов, будем называть *элементарным*. Если при этом хотя бы одно из слов $A_{s_i}, i = 1, \dots, k$, является неоднобуквенным, то слово B будем называть *нетривиальным*.

Пусть даны два элементарных слова D_0 и D_1 длин q и $q+1$ соответственно, по крайней мере одно из которых нетривиально. По последовательностям индексов

$$j = (j_1, \dots, j_n, \dots), \quad j' = (j'_1, \dots, j'_n, \dots), \quad j_n \in \{0, 1\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

построим новые последовательности $y, y' \in \Omega_2^+$, формально заменяя в j и j' символ 0 на слово $C_0 = \underbrace{0 \dots 0}_q$, символ 1 на слово $C_1 = \underbrace{0 \dots 01}_{q+1}$,

$$y = (C_{j_1} \dots C_{j_n} \dots), \quad y' = (C_{j'_1} \dots C_{j'_n} \dots),$$

и буквенные последовательности $x, x' \in \Omega_N^+$, формально заменяя в j и j' символ 0 на слово D_0 , символ 1 на слово D_1 ,

$$x = (D_{j_1} \dots D_{j_n} \dots), \quad x' = (D_{j'_1} \dots D_{j'_n} \dots).$$

Поскольку символ 1 встречается в словах C_0 и C_1 один раз в совокупности, то справедлива

ЛЕММА 5.1. *Если для заданного $t \geq 1$ в словах $B = C_{j_1} \dots C_{j_n} \dots$ и $B' = C_{j'_1} \dots C_{j'_n} \dots$ первые $p = tq + j_1 + \dots + j_t + 1$ букв совпадают, то $j_1 = j'_1, \dots, j_t = j'_t$.*

Для удобства обозначений положим $j_0 = j'_0 = 0$.

ЛЕММА 5.2. *Если для заданного $t \geq 0$ в словах $B = D_{j_1} \dots D_{j_n} \dots$ и $B' = D_{j'_1} \dots D_{j'_n} \dots$ первые $p = tq + \min\{j_0 + \dots + j_t, j'_0 + \dots + j'_t\} + q$ букв совпадают, то $j_1 = j'_1, \dots, j_t = j'_t$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по числу t . При $t = 0$ в лемме ничего не утверждается, поэтому база индукции имеет место.

Пусть $t \geq 1$. Если $j_1 = j'_1$, то к окончаниям слов B и B' применимо индуктивное предположение. Если $j_1 \neq j'_1$, то без ограничения общности можно

считать, что $j_1 = 0$ и $j'_1 = 1$. Тогда из равенства первых $q + 1$ букв и элементарности слова D_{j_2} вытекает

$$D_1 = D_{j'_1} = D_{j_1} a_1 = D_0 a_1. \quad (5.1)$$

Отсюда следует, что слова D_0 и D_1 нетривиальны и начинаются с одинакового количества ($\leq q - 1$) буквы a_1 .

После сокращения равенства $D_0 D_{j_2} \dots D_{j_n} \dots = D_0 a_1 D_{j'_2} \dots D_{j'_n} \dots$ начальных слов B и B' длины p на D_0 получаем

$$D_{j_2} \dots D_{j_n} \dots = a_1 D_{j'_2} \dots D_{j'_n} \dots. \quad (5.2)$$

Из равенства (5.2) и нетривиальности слов D_{j_2} и $D_{j'_2}$ следует, что в начале слова D_{j_2} стоит на одну букву a_1 больше, чем в слове $D_{j'_2}$, что противоречит утверждению, полученному выше из равенства (5.1).

Элементарное слово $B = A_{s_1} \dots A_{s_r}$, в котором $s_1 \leq \dots \leq s_r$ и $s_1 < s_r$, будем называть *стандартным*.

ЛЕММА 5.3. *Если стандартное слово D представимо в виде конкатенации элементарных слов B_0 и B_1 , т. е. $D = B_0 B_1$, то не существует такого слова B_2 , что $D = B_1 B_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_0 = A_{s_1} \dots A_{s_r}$ и $B_1 = A_{s'_1} \dots A_{s'_l}$. Поскольку слово $D = B_0 B_1$ стандартное, то $s_1 \leq \dots \leq s_r \leq s'_1 \leq \dots \leq s'_l$ и $s_1 < s'_l$. Предположим, что представление $D = B_1 B_2$ существует. Отсюда следует $s_1 = s'_1$, поэтому $s_1 = \dots = s_r = s'_1$. Пусть $s'_1 = \dots = s'_t < s'_{t+1} \leq \dots \leq s'_l$. Тогда слово $B_0 B_1$ начинается с $r + t$ слов A_{s_1} , а $B_1 B_2$ начинается с t слов A_{s_1} . Поэтому слова $B_0 B_1$ и $B_1 B_2$ различны. Лемма доказана.

Пусть m – натуральное число. Найдется такое целое неотрицательное число t , что имеет место представление

$$m = tq + (j_0 + \dots + j_t) + p$$

для некоторого $0 \leq p < |C_{j_{t+1}}|$.

ЛЕММА 5.4. *Пусть $p > 0$ и $T = \min\{n: j'_n = 1\}$. Тогда*

$$\rho(y', \sigma^m(y)) \geq 2^{-qT-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что начальные слова y'_{qT+1} и $\sigma^m(y)_{qT+1}$ длины $qT + 1$ последовательностей y' и $\sigma^m(y)$ совпадают. Поскольку имеет место равенство

$$y'_{qT+1} = \underbrace{C_0 \dots C_0}_{T-1} C_1,$$

первая единица стоит в слове $\sigma^m(y)_{qT+1}$ после блока нулей длины, кратной q . Это противоречит тому, что “остаток” p больше нуля.

ЛЕММА 5.5. Пусть слова D_0 и D_1 стандартны, $D_1 \neq a_1 D_0$, и пусть $p > 0$. Тогда

$$\rho(x', \sigma^m(x)) \geq 2^{-q-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\sigma^m(x)$ начинается с буквы, стоящей в слове $D_{j_{t+1}}$ на месте $p+1$. Если эта буква не является первой буквой алфавита, то $\rho(x', \sigma^m(x)) = 2^{-1} \geq 2^{-q-2}$. Пусть эта буква является первой буквой алфавита. В этом случае возникает разложение $D_{j_{t+1}} = B_0 B_1$ на элементарные слова B_0 и B_1 длины p и $|C_{j_{t+1}}| - p$ соответственно.

Обозначим длину слова $D_{j'_1}$ через k . Покажем, что начальные слова x'_{k+1} и $\sigma^m(x)_{k+1}$ длины $k+1$ последовательностей x' и $\sigma^m(x)$ не совпадают. Предположим, что они совпадают. Поскольку слово x'_{k+1} заканчивается на первую букву алфавита, то и слово $\sigma^m(x)_{k+1}$ заканчивается на первую букву алфавита. Следовательно, слова x'_k и $\sigma^m(x)_k$ являются элементарными. Так как длины слов D_0 и D_1 отличаются на 1, то существует такое (возможно, пустое) элементарное слово B_2 , что $D_{j'_1} = B_1 B_2$.

Если предположить, что $D_{j'_1} = B_1$, то $j'_1 = 0$, $j_{t+1} = 1$, и, следовательно, имеем $B_0 = a_1$, $D_1 = D_{j_{t+1}} = a_1 B_1 = a_1 D_0$, что противоречит условию. Из равенства $x'_k = \sigma^m(x)_k$ следует, что для некоторого слова B_3 имеет место разложение $D_{j_{t+2}} = B_2 B_3$.

Ни одно из равенств $D_{j'_1} = D_{j_{t+1}}$ или $D_{j'_1} = D_{j_{t+2}}$ невозможно. В противном случае слово $D_{j'_1}$ будет иметь представления $B_1 B_2 = B_0 B_1$ или $B_1 B_2 = B_2 B_3$, что противоречит лемме 5.3.

Следовательно, $D_{j_{t+2}} = D_{j_{t+1}}$, т.е. $B_2 B_3 = B_0 B_1$. Поскольку слова $D_{j'_1} = B_1 B_2$ и $D_{j_{t+1}} = B_0 B_1$ разной длины, то слова B_2 и B_0 также разной длины. Если длина слова B_2 больше длины B_0 , то длина $D_{j'_1}$ больше длины слова $D_{j_{t+1}}$. Следовательно, $j'_1 = 1$ и $j_{t+1} = j_{t+2} = 0$, откуда получаем, что $B_2 = B_0 a_1$, т.е. $D_{j_{t+1}} = B_0 B_1$ и $D_{j'_1} = B_1 B_0 a_1$. Если длина слова B_2 меньше длины B_0 , то длина $D_{j'_1}$ меньше длины слова $D_{j_{t+1}}$. Следовательно, $j'_1 = 0$ и $j_{t+1} = j_{t+2} = 1$, откуда получаем, что $B_0 = B_2 a_1$, т.е. $D_{j_{t+1}} = B_2 a_1 B_1$ и $D_{j'_1} = B_1 B_2$. В любом случае одно из слов $D_{j_{t+1}}$ и $D_{j'_1}$ не является стандартным.

Итак, начальные слова x'_{k+1} и $\sigma^m(x)_{k+1}$ длины $k+1$ последовательностей x' и $\sigma^m(x)$ не совпадают. Следовательно, $\rho(x', \sigma^m(x)) \geq 2^{-k-1} \geq 2^{-q-2}$.

ЛЕММА 5.6. Пусть слова D_0 и D_1 стандартны и $D_1 \neq a_1 D_0$.

1) Если $d \geq 2q+2$ и $\rho(x', \sigma^m(x)) = 2^{-d}$, то $\rho(y', \sigma^m(y)) \leq 2^{2q-d}$.

2) Если $d \geq qT+2$, где $T = \min\{n: j'_n = 1\}$, и $\rho(y', \sigma^m(y)) = 2^{-d}$, то $\rho(x', \sigma^m(x)) \leq 2^{q-d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку $d > q+2$, по лемме 5.5 имеем $m = tq + (j_1 + \dots + j_t)$ для некоторого $t \geq 1$. Следовательно,

$$\sigma^m(x) = (D_{j_{t+1}} D_{j_{t+2}} D_{j_{t+3}} \dots).$$

Найдется натуральное r такое, что имеет место представление $d = q + rq + \min\{j'_1 + \dots + j'_r, j_{t+1} + \dots + j_{t+r}\} + s$ для некоторого $0 \leq s \leq q+1$. Так как

расстояние

$$\rho(x', \sigma^m(x)) = 2^{-d} \leq 2^{-q-rq-\min\{j'_1+\dots+j'_r, j_{t+1}+\dots+j_{t+r}\}},$$

по лемме 5.2 имеем $j'_1 = j_{t+1}, \dots, j'_r = j_{t+r}$. Очевидно, что первые $rq + \min\{j'_1 + \dots + j'_r, j_{t+1} + \dots + j_{t+r}\} \geq d - 2q - 1$ букв последовательностей y' и $\sigma^m(y)$ совпадают.

2) Поскольку $d > qT + 1$, по лемме 5.4 имеем $m = tq + (j_1 + \dots + j_t)$ для некоторого $t \geq 1$. Следовательно,

$$\sigma^m(y) = (C_{j_{t+1}} C_{j_{t+2}} C_{j_{t+3}} \dots).$$

Найдется натуральное r такое, что имеет место представление $d = rq + (j'_1 + \dots + j'_r) + 1 + s$ для некоторого $0 \leq s \leq q$. Так как расстояние

$$\rho(y', \sigma^m(y)) = 2^{-d} \leq 2^{-rq-j'_1-\dots-j'_r-1},$$

по лемме 5.1 имеем $j'_1 = j_{t+1}, \dots, j'_r = j_{t+r}$. Очевидно, что первые $rq + j'_1 + \dots + j'_r \geq d - q - 1$ букв последовательностей x' и $\sigma^m(x)$ совпадают.

ТЕОРЕМА 5.7. *Последовательность x является почти периодической тогда и только тогда, когда последовательность y является почти периодической. В этом случае справедливо равенство*

$$D(x, \sigma) = D(y, \sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5.6 имеем $\sigma^{m_i}(y) \rightarrow y$ для некоторой последовательности $\{m_i\}$ тогда и только тогда, когда $\sigma^{m_i}(x) \rightarrow x$. Теперь результат вытекает из леммы 3.12.

Пусть σ_M – транзитивная ТЦМ, и пусть $A_1, \dots, A_n$ – базисные циклы, начинающиеся с некоторого символа a_1 , длины которых $l_1, \dots, l_n$ взаимно просты в совокупности. Возьмем иррациональное число α , $0 < \alpha < 1$, такое, что $q = [1/\alpha] \geq G(l_1, \dots, l_n) + l_1 + \dots + l_n$. Возьмем число θ , $0 < \theta < 1 - q\alpha$, не являющееся дробной частью ни одного из чисел $n\alpha$. Определим последовательность $y(\alpha) = (a_1, a_2, \dots)$, положив $a_n = 0$, если $n\alpha \in (\theta + k(n), q\alpha + \theta + k(n))$, и $a_n = 1$, если $n\alpha \in (q\alpha + \theta + k(n), \theta + 1 + k(n))$, где $k(n) \in \mathbb{N}_0$.

По предположению 4.1 имеет место представление

$$y(\alpha) = (C_{j_1} \dots C_{j_n} \dots),$$

$$C_0 = \underbrace{0 \dots 0}_q, \quad C_1 = \underbrace{0 \dots 01}_{q+1}, \quad j_n \in \{0, 1\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поскольку $q \geq G(l_1, \dots, l_n) + l_1 + \dots + l_n$, в ТЦМ можно выбрать два таких стандартных слова D_0 и D_1 длин q и $q + 1$ соответственно, что $D_1 \neq a_1 D_0$.

Рассмотрим последовательность $x(\alpha) \in \Omega_M^+$, полученную заменой в $y(\alpha)$ слова C_{j_n} на слово D_{j_n} :

$$x(\alpha) = (D_{j_1} \dots D_{j_n} \dots).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. *Последовательность $x(\alpha)$ является псевдонеподвижной. Таким образом, любая транзитивная ТЦМ σ_M имеет псевдонеподвижную точку. Более того, если 1 и иррациональные числа α и β , $0 < \alpha, \beta < 1$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то ω -предельные множества точек $x(\alpha)$ и $x(\beta)$ различны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 4.7 последовательность $y(\alpha)$ является псевдонеподвижной. Следовательно, по теореме 5.7 последовательность $x(\alpha)$ является псевдонеподвижной для σ_M .

Покажем, что минимальные множества $\omega(x(\alpha), \sigma)$ и $\omega(x(\beta), \sigma)$ различны. Предположим, что это не так. Тогда должно выполняться $x(\beta) \in \omega(x(\alpha), \sigma)$, т.е. $\sigma^{m_i}(x(\alpha)) \rightarrow x(\beta)$ для некоторой последовательности номеров $\{m_i\}$. Согласно утверждению 1) леммы 5.6 имеем $\sigma^{m_i}(y(\alpha)) \rightarrow y(\beta)$. Следовательно, минимальные множества $\omega(y(\alpha), \sigma)$ и $\omega(y(\beta), \sigma)$ совпадают, что противоречит предложению 4.8.

§ 6. Почти периодические точки ТЦМ

В этом параграфе предложена процедура, позволяющая по заданной почти периодической точке сдвига Бернулли строить точку в транзитивной ТЦМ с сохранением D -периода. Это позволит получить теорему о структуре множества D -периодов транзитивной ТЦМ.

Пусть даны разложения последовательностей $x, y \in \Omega_N^+$ на базисные слова (начинающиеся с первого символа и больше не содержащие этот символ)

$$x = (A_1 \dots A_n \dots), \quad y = (A'_1 \dots A'_n \dots).$$

Предполагаем, что в каждом разложении задействовано по крайней мере два различных базисных слова.

Для заданного натурального $k > 1$ рассмотрим новые последовательности, которые получаются повторением каждого базисного слова k раз,

$$x^k = (\underbrace{A_1 \dots A_1}_k \dots \underbrace{A_n \dots A_n}_k \dots), \quad y^k = (\underbrace{A'_1 \dots A'_1}_k \dots \underbrace{A'_n \dots A'_n}_k \dots).$$

Теперь найдем связь D -периодов последовательностей x и x^k . Формулировке и доказательству основных результатов предпошлем несколько вспомогательных лемм, в которых описывается соотношение между расстояниями $\rho(y, \sigma^m(x))$ и $\rho(y^k, \sigma^{km}(x^k))$.

Напомним, что длина слова A_i обозначается через l_i . Дополнительно введем число $l_0 = 0$ – длину пустого слова. Через l'_i обозначим длину слова A'_i .

До конца параграфа m обозначает некоторое фиксированное натуральное число. Рассмотрим его представление

$$m = l_0 + \dots + l_t + s, \quad 0 \leq s < l_{t+1}. \quad (6.1)$$

Рассмотрим такой номер r , что в последовательности y слова $A'_1, \dots, A'_r$ равны между собой и отличаются от слова A'_{r+1} .

ЛЕММА 6.1. Пусть $\rho(y, \sigma^m(x)) = 2^{-1}$. Тогда $\rho(y^k, \sigma^{km}(x^k)) = 2^{-1}$, если ks не делится на l_{t+1} , и $\rho(y^k, \sigma^{km}(x^k)) \geq 2^{-1-(kr+1)l'_1}$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\rho(y, \sigma^m(x)) = 2^{-1}$, в разложении $m = l_0 + \dots + l_t + s$ остаток s не меньше единицы. Тогда $km = kl_0 + \dots + kl_t + ks$. Следовательно, первой буквой последовательности $\sigma^{km}(x^k)$ является буква слова A_{t+1} , номер которой на единицу больше остатка от деления ks на l_{t+1} .

Если этот остаток не равен нулю, то эта буква отлична от первой буквы алфавита, поэтому слова y^k и $\sigma^{km}(x^k)$ начинаются с разных букв.

Если этот остаток равен нулю, то для некоторого натурального $h < k$ последовательность $\sigma^{km}(x^k)$ имеет вид

$$\sigma^{km}(x^k) = (\underbrace{A_{t+1} \dots A_{t+1}}_h \underbrace{A_{t+2} \dots A_{t+2}}_k \dots).$$

Покажем, что последовательности y^k и $\sigma^{km}(x^k)$ отличаются символом, стоящим на месте с номером $\leq (kr+1)l'_1 + 1$.

Рассмотрим слова последовательностей y^k и $\sigma^{km}(x^k)$, образованные первыми $(kr+1)l'_1 + 1$ буквами. Если выделенные начала последовательностей совпадают, то согласно лемме 2.1 имеют место совпадения слов $A_{t+1} = A'_1 = A_{t+2} = A'_2 = \dots = A_{t+r} = A'_r = A_{t+r+1} = A'_{r+1}$, что противоречит выбору r .

ЛЕММА 6.2. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\rho(y, \sigma^m(x)) = 2^{-d}$, где $d \geq 2$, то $\rho(y^k, \sigma^{km}(x^k)) \leq 2^{-d}$;
- 2) если $\rho(y^k, \sigma^{km}(x^k)) = 2^{-d}$, где $d \geq (kr+1)l'_1 + 2$, то $\rho(y, \sigma^m(x)) \leq 2^{-[d/k]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Согласно условию разложение (6.1) имеет вид $m = l_1 + \dots + l_t$. Тогда $km = kl_1 + \dots + kl_t$. Следовательно, последовательности $\sigma^m(x)$ и $\sigma^{km}(x^k)$ имеют вид

$$\sigma^m(x) = (A_{t+1}A_{t+2} \dots), \quad \sigma^{km}(x^k) = (\underbrace{A_{t+1} \dots A_{t+1}}_k \underbrace{A_{t+2} \dots A_{t+2}}_k \dots).$$

Начальные слова последовательностей $\sigma^m(x)$ и y длины $d-1$ совпадают, а длины d — не совпадают. Рассмотрим разложение $d-1 = l'_0 + \dots + l'_p + s$, где $1 \leq s < l'_{p+1}$. Несложно проверить, что слова y^k и $\sigma^{km}(x^k)$ отличаются символом, стоящим на месте с номером

$$d \leq k(l'_0 + \dots + l'_p) + s + 1 < kd. \quad (6.2)$$

По левому неравенству в (6.2) утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Предположим противное, т.е. $\rho(y, \sigma^m(x)) = 2^{-d_1} > 2^{-[d/k]}$. Если $d_1 \geq 2$, то по правому неравенству в (6.2) имеем $\rho(y^k, \sigma^{km}(x^k)) > 2^{-kd_1}$. Поскольку $kd_1 \leq d$, то $\rho(y^k, \sigma^{km}(x^k)) > 2^{-d}$, что противоречит условию. Если $d_1 = 1$, то согласно лемме 6.1 либо $\rho(y^k, \sigma^{km}(x^k)) = 2^{-1}$, либо $\rho(y^k, \sigma^{km}(x^k)) \geq 2^{-1-(kr+1)l'_1}$. В любом случае оно больше 2^{-d} , что противоречит условию.

ЛЕММА 6.3. Пусть число m не делится на k . Тогда

$$\rho(y^k, \sigma^m(x^k)) = 2^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В слове y^k первая буква алфавита стоит только на местах, номера которых равны 1 по модулю числа k . Поэтому слова y^k и $\sigma^m(x^k)$ начинаются с разных букв.

ТЕОРЕМА 6.4. Последовательность x^k является почти периодической тогда и только тогда, когда последовательность x является почти периодической. В этом случае справедливо равенство

$$D(x^k, \sigma) = k \cdot D(x, \sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma^{m_i}(x) \rightarrow x$ для некоторой последовательности $\{m_i\}$. Тогда согласно утверждению 1) леммы 6.2 имеем $(\sigma^k)^{m_i}(x^k) \rightarrow x^k$.

Пусть теперь $(\sigma^k)^{m_i}(x^k) \rightarrow x^k$ для некоторой последовательности $\{m_i\}$. Тогда согласно утверждению 2) леммы 6.2 имеем $\sigma^{m_i}(x) \rightarrow x$. По лемме 3.12 заключаем, что $x \in AP(\sigma)$ тогда и только тогда, когда $x^k \in AP(\sigma^k)$. При этом $D(x^k, \sigma^k) = D(x, \sigma)$. Поскольку множества $AP(\sigma^k)$ и $AP(\sigma)$ совпадают, условие $x^k \in AP(\sigma^k)$ равносильно условию $x^k \in AP(\sigma)$. Также из леммы 6.3 вытекает, что если $\sigma^{m_i}(x^k) \rightarrow x^k$ для некоторой последовательности $\{m_i\}$, то все m_i при $i \geq i_0$ делятся на k . По лемме 3.10 заключаем, что $D(x^k, \sigma)(k) = k$. Согласно лемме 3.9 доказательство завершено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. Для любой транзитивной ТЦМ σ_M и любого натурального k найдется континуум различных минимальных множеств с D -периодом k' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим натуральное число k и транзитивную ТЦМ σ_M . Пусть $A_1, \dots, A_n$ – базисные циклы, начинающиеся с некоторого символа a_1 , длины которых $l_1, \dots, l_n$ взаимно просты в совокупности. Возьмем такие иррациональные числа α и β , $0 < \alpha, \beta < 1$, что 1, α и β линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и $[1/\alpha], [1/\beta] \geq G(l_1, \dots, l_n) + l_1 + \dots + l_n$.

Рассмотрим в Ω_M^+ последовательности $x(\alpha)$ и $x(\beta)$, построенные по числам α и β (см. предложение 5.8). Данные последовательности являются псевдо-неподвижными, и при этом минимальные множества $\omega(x(\alpha), \sigma)$ и $\omega(x(\beta), \sigma)$ различны.

Теперь рассмотрим последовательности $x^k(\alpha)$ и $x^k(\beta)$, которые получают-ся повторением в $x(\alpha)$ и $x(\beta)$ каждого базисного слова k раз. По теореме 6.4 последовательности $x^k(\alpha)$ и $x^k(\beta)$ являются почти периодическими. Поскольку последовательности $x(\alpha)$ и $x(\beta)$ не являются периодическими, последовательности $x^k(\alpha)$ и $x^k(\beta)$ также не являются периодическими. По теореме 6.4 и определению умножения D -функции на число заключаем, что D -периоды $x^k(\alpha)$ и $x^k(\beta)$ равны k' .

Покажем, что минимальные множества $\omega(x^k(\alpha), \sigma)$ и $\omega(x^k(\beta), \sigma)$ различны. Предположим, что это не так. Тогда должно выполняться $x^k(\beta) \in \omega(x^k(\alpha), \sigma)$,

т. е. $\sigma^{m_i}(x^k(\alpha)) \rightarrow x^k(\beta)$ для некоторой последовательности номеров $\{m_i\}$. Из леммы 6.3 вытекает, что m_i при $i \geq i_0$ делятся на k . Поэтому можно считать, что $m_i = kn_i$ для всех i . Тогда согласно утверждению 2) леммы 6.2 имеем $\sigma^{n_i}(x(\alpha)) \rightarrow x(\beta)$, следовательно, минимальные множества $\omega(x(\alpha), \sigma)$ и $\omega(x(\beta), \sigma)$ совпадают. Противоречие.

Поскольку линейное пространство $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$ имеет континуум линейно независимых элементов, то ТЦМ σ_M имеет континуум различных минимальных множеств с D -периодом k' .

Пусть даны два различных элементарных слова E_0 и E_1 одной длины k . Пусть первое место, на котором они отличаются, имеет номер s . Тогда имеем $2 \leq s \leq k$.

По последовательностям индексов

$$j = (j_1 \dots j_n \dots), \quad j' = (j'_1 \dots j'_n \dots)$$

построим новые буквенные последовательности $z, z' \in \Omega_N^+$, формально заменяя в j и j' символ 0 на слово E_0 , символ 1 – на E_1 ,

$$z = (E_{j_1} \dots E_{j_n} \dots), \quad z' = (E_{j'_1} \dots E_{j'_n} \dots).$$

Аналогично лемме 5.2 доказывается

ЛЕММА 6.6. *Если два слова $B = E_{j_1} \dots E_{j_r}$ и $B' = E_{j'_1} \dots E_{j'_l}$ равны, то $r = l$ и $j_1 = j'_1, \dots, j_r = j'_l$.*

ЛЕММА 6.7. *Расстояние $\rho(j', \sigma^m(j))$ равно 2^{-d} в том и только в том случае, если $\rho(z', \sigma^{km}(z)) = 2^{-k(d-1)-s}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что имеют место представления

$$z' = (E_{j'_1} \dots E_{j'_{d-1}} E_{j'_d} \dots), \quad \sigma^{km}(z) = (E_{j_{m+1}} \dots E_{j_{m+d-1}} E_{j_{m+d}} \dots).$$

Пусть $\rho(j', \sigma^m(j)) = 2^{-d}$; тогда справедливы соотношения $j'_1 = j_{m+1}, \dots, j'_{d-1} = j_{m+d-1}, j'_d \neq j_{m+d}$. Очевидно, что впервые слова z' и $\sigma^{km}(z)$ отличаются на месте $k(d-1) + s$. Пусть теперь $\rho(z', \sigma^{km}(z)) = 2^{-k(d-1)-s}$. По лемме 6.6 справедливы соотношения $j'_1 = j_{m+1}, \dots, j'_{d-1} = j_{m+d-1}, j'_d \neq j_{m+d}$, из которых вытекает, что $\rho(j', \sigma^m(j)) = 2^{-d}$.

Аналогично лемме 5.5 (с учетом того, что теперь E_0 и E_1 имеют одну длину) доказывается

ЛЕММА 6.8. *Пусть слова E_0 и E_1 стандартны и m не делится на k . Тогда*

$$\rho(z', \sigma^m(z)) \geq 2^{-k-1}.$$

Аналогично теореме 6.4 доказывается

ТЕОРЕМА 6.9. *Последовательность z является почти периодической тогда и только тогда, когда последовательность j является почти периодической. В этом случае справедливо равенство*

$$D(z, \sigma) = k \cdot D(j, \sigma).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.10. Для любой транзитивной ТЦМ σ_M и любой неограниченной функции $s \in E$ найдется континуум различных минимальных множеств с D -периодом s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим транзитивную ТЦМ σ_M и неограниченную функцию $s \in E$. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – базисные циклы, начинающиеся с некоторого символа a_1 , длины которых $l_1, \dots, l_n$ взаимно просты в совокупности. Тогда найдутся такие простое p и натуральное l_0 , что $s(p^{l_0}) = p^{l_0}$ и $p^{l_0} \geq G(l_1, \dots, l_n)$ имеет два различных представления в виде (2.1). В E существует единственная функция s' , удовлетворяющая условию

$$s'(p^l) = \frac{s(p^{l+l_0})}{p^{l_0}}, \quad s'(m) = s(m), \quad \text{если} \quad \text{НОД}(m, p^l) = 1.$$

Отметим, что s' является неограниченной. Введем обозначение $k = p^{l_0}$. Поскольку для числа k имеются два различных представления в виде (2.1), для σ_M можно выбрать два различных стандартных слова E_0 и E_1 длины k .

Из предложения 4.10 вытекает, что существует континуальное подмножество $J_{s'} \subset AP(\sigma)$ такое, что любая последовательность из $J_{s'}$ имеет D -период s' и для любой пары $j, j' \in J_{s'}$, $j \neq j'$, минимальные множества $\omega(j, \sigma)$ и $\omega(j', \sigma)$ различны. Зафиксируем две различные последовательности $j, j' \in J_{s'}$. По j и j' построим буквенные последовательности $z, z' \in \Omega_M^+$, формально заменяя в последовательностях j и j' нуль на слово E_0 , единицу – на слово E_1 . По теореме 6.9 последовательности z и z' являются почти периодическими для ТЦМ σ_M . Покажем, что их D -периоды в точности равны s .

По теореме 6.9 имеем $D(z, \sigma) = k \cdot D(j, \sigma)$. Возьмем произвольное натуральное число n ; тогда имеет место представление $n = p^l m$, где $m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ и $\text{НОД}(m, p^l) = 1$. Введем обозначение $d = \text{НОД}(p^l, k)$; тогда по определению умножения D -функции на число имеем $D(z, \sigma)(n) = dD(j, \sigma)(n/d)$.

Если $d = p^l$, то

$$D(z, \sigma)(n) = p^l s' \left(p^l \cdot \frac{m}{p^l} \right) = s(p^l) s(m) = s(n).$$

Если $d = p^{l_0}$, то

$$D(z, \sigma)(n) = p^{l_0} s'(p^{l-l_0} m) = p^{l_0} s'(p^{l-l_0}) s(m) = p^{l_0} \cdot \frac{s(p^l)}{p^{l_0}} \cdot s(m) = s(n).$$

Следовательно, $D(z, \sigma) = s$. Аналогично доказывается, что $D(z', \sigma) = s$.

Покажем, что минимальные множества $\omega(z, \sigma)$ и $\omega(z', \sigma)$ различны. Предположим, что это не так. Тогда должно выполняться $z' \in \omega(z, \sigma)$, т. е. $\sigma^{m_i}(z) \rightarrow z'$ для некоторой последовательности номеров $\{m_i\}$. Из леммы 6.8 вытекает, что m_i при $i \geq i_0$ делятся на k . Поэтому можно считать, что $m_i = kn_i$ для всех i . Тогда согласно достаточному условию леммы 6.7 имеем $\sigma^{n_i}(j) \rightarrow j'$, следовательно, минимальные множества $\omega(j, \sigma)$ и $\omega(j', \sigma)$ совпадают. Противоречие.

Из предложений 6.5, 6.10 вытекает основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 6.11. Множество E реализуется как множество D -периодов почти периодических непериодических точек транзитивной цепи Маркова, причем каждая функция из E реализуется континуумом различных минимальных множеств.

Список литературы

1. W. Parry, "Intrinsic Markov chains", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **112** (1964), 55–66.
2. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999; пер. с англ.: A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia Math. Appl., **54**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
3. X. D. Ye, "D-function of a minimal set and an extension of Sharkovskii's theorem to minimal sets", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **12**:2 (1992), 365–376.
4. А. И. Демин, "Сосуществование рекуррентных точек непрерывных отображений n -ода в себя", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996, № 3, 84–87; англ. пер.: A. I. Demin, "Coexistence of periodic, almost periodic and recurrent points for transformations of n -od", *Moscow Univ. Math. Bull.*, **51**:3 (1996), 46–48.
5. В. В. Редкозубов, *О предельных множествах отображений графов*, Дис. . . канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2005.
6. И. К. Бабенко, С. А. Богатый, "Поведение индекса периодических точек при итерациях отображения", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:1 (1991), 3–31; англ. пер.: I. K. Babenko, S. A. Bogatyĭ, "The behavior of the index of periodic points under iterations of a mapping", *Math. USSR-Izv.*, **38**:1 (1992), 1–26.
7. J. L. Ramirez Alfonsin, *The Diophantine Frobenius problem*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **30**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2005.
8. A. L. Dulmage, N. S. Mendelsohn, "Gaps in the exponent set of primitive matrices", *Illinois J. Math.*, **8** (1964), 642–656.
9. G. A. Hedlund, "Sturmian minimal sets", *Amer. J. Math.*, **66** (1944), 605–620.

С. А. БОГАТЫЙ (S. A. BOGATYĬ)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
E-mail: bogatyĭ@inbox.ru

Поступило в редакцию
 30.12.2010
 21.11.2011

В. В. РЕДКОЗУБОВ (V. V. REDKOZUBOV)
 Московский физико-технический институт
 (государственный университет),
 кафедра высшей математики
E-mail: vadim_redkozubov@mail.ru