Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. П. Лукашенко, Системы разложения на пространствах с мерой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 1, 165–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/im66>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:26:26

УДК 517.518.3+517.986.6

Т. П. Лукашенко

Системы разложения на пространствах с мерой

Предложена общая конструкция различных систем разложения интегрируемых с квадратом функций, частными реализациями которой являются континуальные разложения по всплескам. Приведены аналог равенства Парсеваля–Планшереля и формула восстановления. Дан ряд примеров систем разложения.

Библиография: 10 наименований.

§ 1. Общая конструкция

Пусть M и N – пространства со счетно аддитивными мерами μ и ν соответственно, $L^2(M)$ – пространство измеримых интегрируемых в квадрате по Лебегу действительнозначных или комплекснозначных функций на M , H – гильбертово пространство. Пусть U – унитарный оператор из $L^2(M)$ в H , а $S(h)$ – такое измеримое отображение почти всего N в $L^2(M)$, что

$$0 < K = \int_N |S(h)|^2 d\nu(h) < +\infty \quad (1)$$

почти всюду на M .

Пусть U_h – операторы из $L^2(M)$ в H , определенные почти для всех $h \in N$ формулой

$$U_h[f] = U[f \cdot \overline{S(h)}]$$

(где черта означает комплексное сопряжение).

ТЕОРЕМА. Для любой функции $f \in L^2(M)$ верны аналог равенства Парсеваля–Планшереля

$$\frac{1}{K} \int_N \|U_h[f]\|_H^2 d\nu(h) = \|f\|_{L^2(M)}^2 \quad (2)$$

и формула восстановления

$$f = \frac{1}{K} \int_N U^{-1}[U_h[f]] \cdot S(h) d\nu(h), \quad (3)$$

где интеграл может пониматься или как интеграл Лебега по N от функции со значениями в банаховом пространстве $L^2(M)$ (см. [1, с. 524]), или как интеграл Лебега по N от комплекснозначной функции с параметром из M , и в этом случае равенство (3) верно на M почти всюду.

Работа поддержана проектом РФФИ (№ 94-01-00417).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу унитарности оператора U

$$\|U_h[f]\|_H^2 = \|f \cdot \overline{S}(h)\|_{L^2(M)}^2 = \int_M |f|^2 \cdot |S(h)|^2 d\mu.$$

Используя теорему Фубини (см. [1, с. 664]) и равенство (1), получаем

$$\int_N \|U_h[f]\|_H^2 d\nu(h) = K \int_M |f|^2 d\mu,$$

что и доказывает (2).

Так как $U^{-1}[U_h[f]] = f \cdot \overline{S}(h)$, то из равенства (1) получаем

$$\int_N U^{-1}[U_h[f]] \cdot S(h) d\nu(h) = \int_N f \cdot |S(h)|^2 d\nu(h) = Kf$$

в любом из двух указанных смыслов интегрирования. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть V – непрерывный линейный оператор из $L^2(M)$ в банахово пространство B . Тогда для любой функции $f \in L^2(M)$ верна формула

$$Vf = \frac{1}{K} \int_N V[U^{-1}[U_h[f]] \cdot S(h)] d\nu(h), \quad (4)$$

где интеграл понимается как интеграл Лебега по N от функции со значениями в банаховом пространстве B .

Действительно, в силу линейности и непрерывности V

$$V \left[\int_N U^{-1}[U_h[f]] \cdot S(h) d\nu(h) \right] = \int_N V[U^{-1}[U_h[f]] \cdot S(h)] d\nu(h),$$

значит, из (3) следует (4).

§ 2. Примеры применений теоремы и следствия

ПРИМЕР 1. *Всплески Габора* (см. [2] или [3, с. 317, 318]). Пусть $M = N = \mathbb{R}$, $\mu = \nu$ – обычная мера Лебега на $\mathbb{R}$, $H = L^2(\mathbb{R})$,

$$U[f](y) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y x} f(x) dx$$

– преобразование Фурье функции f , $S(h) = w(x - h)$, где $w \in L^2(\mathbb{R})$, $0 < K = \|w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < +\infty$. Пусть

$$\begin{aligned} W_{y,h}(f) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{e^{2\pi i y x} w(x - h)} dx = U_h[f](y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i y x} \overline{w}(x - h) dx \end{aligned}$$

– коэффициенты разложения определенной на $\mathbb{R}$ функции f по всплескам Габора $e^{2\pi i y x} w(x - h)$. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |W_{y,h}(f)|^2 dy dh = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

и

$$f(x) = \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{y,h}(f) \cdot e^{2\pi i y x} w(x - h) dy dh = \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} U^{-1}[W_{y,h}(f)] w(x - h) dh,$$

где при повторном интегрировании внутренний интеграл понимается как обратное преобразование Фурье.

ПРИМЕР 2. *Обобщенные всплески Габора* (см. также [4], [5]). Пусть M – локально компактная абелева группа с операцией сложения $+$ и μ – мера Хаара на M , X – группа характеров на M и η – мера Хаара на X ; меры μ и η согласованы – равенство Планшереля имеет вид

$$\int_M f_1 \cdot \bar{f}_2 d\mu = \int_X \hat{f}_1 \cdot \widehat{\bar{f}_2} d\eta$$

для функций $f_1, f_2 \in L^2(M)$, где $\hat{f}$ – функция на X – преобразование Фурье функции $f \in L^2(M)$, которое будет в дальнейшем также обозначаться как $\mathcal{F}[f]$. Если $f \in L^1 \cap L^2(M)$, то

$$\mathcal{F}[f](\chi) \equiv \hat{f}(\chi) = \int_M f(a) \bar{\chi}(a) d\mu(a).$$

Если $f \in L^2(X)$, то $\mathcal{F}^{-1}[f] \equiv \check{f}$ – функция на M – обратное преобразование Фурье. Если $f \in L^1 \cap L^2(X)$, то

$$\mathcal{F}^{-1}[f](a) \equiv \check{f}(a) = \int_X f(\chi) \chi(a) d\eta(\chi).$$

(Для более детальных сведений см. [6], [7].)

Пусть $H = L^2(X)$. Пусть N – локально компактная группа с операцией сложения $\oplus$ и ν – левая мера Хаара на N . И пусть существует взаимно однозначное отображение λ почти всей (относительно ν) группы N на почти всю группу M (случай $N \equiv M$ не исключается), для которого как образом, так и прообразом множества меры нуль может быть только множество меры нуль (относительно мер μ и ν соответственно). Тогда, как обычно, отождествляя совпадающие почти всюду функции, мы можем любую функцию g на M рассматривать как функцию на N (это будет $g \circ \lambda^{-1}$) и, наоборот, можем считать, что для почти всех a из M или из N и для почти всех b из M или из N определены обе операции $+$ и $\oplus$ и т.д. В частности, можем считать, что для почти всех $a \in M$ и почти всех (по мере ν) $b \in N$ определена сумма $a \oplus b$, совпадающая с $\lambda(\lambda^{-1}(a) \oplus b)$ на M и с $\lambda^{-1}(a) \oplus b$ на N .

Пусть $U[f] \equiv \mathcal{F}[f] \equiv \widehat{f}$, $S(h) = w(x \oplus h)$, где $w \in L^2(M) \cap L^2_\nu(N)$, $w(x \oplus h) \in L^2(M)$ для почти всех (по ν) $h \in N$, $0 < K = \|w\|_{L^2_\nu(N)}^2 < +\infty$, $w_{\theta,h}(x) = \theta(x)w(x \oplus h)$, где $\theta \in X$, $h \in N$, $x \in M$,

$$\begin{aligned} W_{\theta,h}(f) &= \int_M f(x) \overline{w}_{\theta,h}(x) d\mu(x) = U_h[f](\theta) \\ &= \int_M f(x) \overline{w}(x \oplus h) \overline{\theta}(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

– коэффициенты разложения определенной на M функции f по обобщенным всплескам Габора $w_{\theta,h}(x)$. Тогда для любой функции $f \in L^2(M)$

$$\frac{1}{K} \int_N \int_X |W_{\theta,h}(f)|^2 d\eta(\theta) d\nu(h) = \|f\|_{L^2(M)}^2 \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{K} \int_N \int_X W_{\theta,h}(f) w_{\theta,h}(x) d\eta(\theta) d\nu(h) \\ &= \frac{1}{K} \int_N U^{-1}[W_{\theta,h}(f)](x) w(x \oplus h) d\nu(h), \end{aligned} \quad (6)$$

где при повторном интегрировании внутренний интеграл понимается как обратное преобразование Фурье.

ЗАМЕЧАНИЕ. Возможны и другие варианты определения обобщенных всплесков Габора. Так в качестве аргумента функции w можно брать не только $x \oplus h$, но и $-x \oplus h$, или $\ominus x \oplus h$, или $\ominus(-x) \oplus h$, или $-(\ominus x) \oplus h$. Можно также брать $h \oplus x$, или $h \ominus x$, или $h \oplus (-x)$, или $h \ominus (-x)$, только в этих случаях мерой ν должна быть правая мера Хаара. Если в качестве аргумента брать $x \ominus h$, или $-x \ominus h$, или $\ominus x \ominus h$, или $\ominus(-x) \ominus h$, то в формуле $0 < K = \|w\|_{L^2_\nu(N)}^2 < +\infty$ в качестве меры ν надо брать правую меру Хаара, а в формулах (5) и (6) – левую меру Хаара. А если в качестве аргумента брать $\ominus h \oplus x$, или $\ominus h \ominus x$, или $\ominus h \oplus (-x)$, или $\ominus h \ominus (-x)$, то в формуле $0 < K = \|w\|_{L^2_\nu(N)}^2 < +\infty$ в качестве меры ν надо брать левую меру Хаара, а в формулах (5) и (6) – правую меру Хаара (т.е. интегралы по мере ν – соответствующие мере интегралы Хаара). Для унимодулярных групп (когда левая и правая меры Хаара совпадают) вышеуказанных сложностей выбора меры Хаара в вариантах определения обобщенных всплесков Габора нет. Отметим также, что в определении $w_{\theta,h}$ вместо $\theta(x)$ можно брать $\theta(\pm x + \rho(h)) = \theta(\pm x) \cdot \theta(\rho(h))$ при любом выборе знака у x и любой $\rho(h) \in M$; формулы (5) и (6) при этом не меняются.

ПРИМЕР 3. Пусть $M = N = \mathbb{R}$, $\mu = \nu$ – обычная мера Лебега на $\mathbb{R}$, $H = L^2(\mathbb{R})$,

$$U[f](y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{y - x} dx,$$

где интеграл рассматривается в смысле главного значения (предела интегралов по $\mathbb{R} \setminus (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$), $-$ преобразование Гильберта функции f (см. [8, с. 149, 211, 243] или [9, с. 37, 68]), $S(h) = \vartheta(x - h)$, где $\vartheta \in L^2(\mathbb{R})$, $0 < K = \|\vartheta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < +\infty$. Пусть

$$\Upsilon_{y,h}(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\vartheta}(x - h) \frac{1}{y - x} dx = U_h[f](y) \quad (7)$$

$-$ коэффициенты разложения определенной на $\mathbb{R}$ функции f по системе $\frac{\vartheta(x-h)}{y-x}$. Тогда в силу равенства $U^{-1} = -U$ для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\Upsilon_{y,h}(f)|^2 dy dh = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

и

$$f(x) = \frac{1}{\pi K} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Upsilon_{y,h}(f) \frac{\vartheta(x-h)}{y-x} dy dh = \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} U^{-1}[\Upsilon_{y,h}(f)](x) \vartheta(x-h) dh. \quad (8)$$

ПРИМЕР 4. Пусть $M = \mathbb{R}$, μ – обычная мера Лебега на $\mathbb{R}$, $H = L^2(\mathbb{R})$,

$$U[f](y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{y-x} dx,$$

где интеграл рассматривается в смысле главного значения, $-$ преобразование Гильберта функции f (как и в предыдущем примере), $N = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ν – мера Хаара на топологической группе $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ с операцией умножения и обычной топологией,

$$\nu(E) = \int_E \frac{dx}{|x|}, \quad S(h) = \varphi(hx),$$

где φ измерима, и

$$0 < K = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(hx)|^2 \frac{dh}{|h|} = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 \frac{dt}{|t|} < +\infty.$$

Пусть

$$\Phi_{y,h}(f) = U_h[f](y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi}(hx) \frac{1}{y-x} dx \quad (9)$$

$-$ коэффициенты разложения определенной на $\mathbb{R}$ функции f по системе $\frac{\varphi(hx)}{y-x}$. Тогда в силу равенства $U^{-1} = -U$ для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\Phi_{y,h}(f)|^2 dy \frac{dh}{|h|} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

и

$$f(x) = \frac{1}{\pi K} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi_{y,h}(f) \frac{\varphi(hx)}{y-x} dy \frac{dh}{|h|} = \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} U^{-1}[\Phi_{y,h}(f)](x) \varphi(hx) \frac{dh}{|h|}. \quad (10)$$

ПРИМЕР 5. *Всплески Морле* (см. [10] или [3, с. 323–329]). Пусть $M = \mathbb{R}$, μ – обычная мера Лебега на $\mathbb{R}$, $H = L^2(\mathbb{R})$,

$$U[f](y) \equiv \mathcal{F}[f](y) \equiv \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y x} f(x) dx$$

– преобразование Фурье функции f ,

$$U^{-1}[f](x) \equiv \mathcal{F}^{-1}[f](x) \equiv \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y} f(y) dy$$

– обратное преобразование Фурье функции f , $N = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ν – мера Хаара на топологической группе $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ с операцией умножения и обычной топологией,

$$\nu(E) = \int_E \frac{dx}{|x|}, \quad S(h) = \check{\psi}(hx),$$

$$0 < K = \int_{\mathbb{R}} |\check{\psi}(hx)|^2 \frac{dh}{|h|} = \int_{\mathbb{R}} |\check{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(t)|^2 \frac{dt}{|t|} < +\infty.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Psi_{y,h}(f) &= U_h[\check{f}](y) = \int_{\mathbb{R}} \check{f}(x) e^{-2\pi i y x} \overline{\check{\psi}}(hx) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \check{f}(x) \overline{e^{2\pi i y x} \check{\psi}(hx)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{|h|} \overline{\psi}\left(\frac{x-y}{h}\right) dx \end{aligned}$$

– коэффициенты разложения определенной на $\mathbb{R}$ функции f по всплескам Морле $\psi_{y,h}(x) = \frac{1}{|h|} \psi\left(\frac{x-y}{h}\right)$ (используется нормирующий в $L^1(\mathbb{R})$ множитель $\frac{1}{|h|}$ вместо часто встречающегося нормирующего в $L^2(\mathbb{R})$ множителя $\frac{1}{\sqrt{|h|}}$). Тогда по теореме для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\Psi_{y,h}(f)|^2 dy \frac{dh}{|h|} = \|\check{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

и согласно следствию с $B = L^2(\mathbb{R})$ и $V = \mathcal{F}$ имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= V[\check{f}](x) = \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} V[U^{-1}[U_h[\check{f}]] \cdot S(h)] \frac{dh}{|h|} \\ &= \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} V[U^{-1}[\Psi_{y,h}(f)] \cdot \check{\psi}(hx)] \frac{dh}{|h|} \\ &= \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Psi_{y,h}(f) \cdot \mathcal{F}[\check{\psi}(hx)](x-y) dy \frac{dh}{|h|} \\ &= \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Psi_{y,h}(f) \cdot \frac{1}{|h|} \psi\left(\frac{x-y}{h}\right) dy \frac{dh}{|h|} \\ &= \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Psi_{y,h}(f) \psi_{y,h}(x) dy \frac{dh}{|h|} \end{aligned}$$

(использовались унитарность преобразований Фурье – сохранение скалярных произведений, преобразования Фурье сдвигов и сжатий функций, преобразование Фурье произведения функций – свёртка преобразований Фурье – см. [8, с. 7–10] или [2, с. 134, 158, 169]), где внешний интеграл понимается как интеграл Лебега по $\mathbb{R}$ от функции со значениями в банаховом пространстве $L^2(\mathbb{R})$. В [10] и в [2, с. 326–328] указан конкретный способ интегрирования как предел по норме в $L^2(\mathbb{R})$ интегралов по областям $\{h \in \mathbb{R} : |h| \geq \varepsilon\} \times \mathbb{R}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Несложно проверить (см. [10] или [2, с. 326–328]), что подынтегральное выражение интегрируемо по Лебегу на таких областях при всех x . Там же отмечено, что если $\check{f}(x) = \hat{f}(-x) \in L(\mathbb{R})$, то подынтегральное выражение при всех x интегрируемо по Лебегу на $\mathbb{R}^2$ и

$$f(x) = \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Psi_{y,h}(f) \psi_{y,h}(x) dy \frac{dh}{|h|}$$

почти всюду на $\mathbb{R}$.

ПРИМЕР 6. *Обобщенные всплески Морле* (см. [3], [4]). Пусть, как в примере 2, M – локально компактная абелева группа с операцией сложения $+$ и μ – мера Хаара на M , X – группа характеров на M и η – мера Хаара на X ; меры μ и η согласованы. Пусть $\mathcal{F}[f] \equiv \hat{f}$ – преобразование Фурье функции $f \in L^2(M)$, $\hat{f} \in L^2(X)$, а $\mathcal{F}^{-1}[f] \equiv \check{f}$ – обратное преобразование Фурье функции $f \in L^2(X)$, $\check{f} \in L^2(M)$. Пусть $H = L^2(X)$. Пусть N – локально компактная группа с операцией сложения $\oplus$ и ν – левая мера Хаара на N . И пусть существует взаимно однозначное отображение λ почти всей (относительно ν) группы N на почти всю группу M (случай $N \equiv M$ не исключается), для которого как образом, так и прообразом множества меры нуль может быть только множество меры нуль. Считаем, что для почти всех $a \in M$ и почти всех $b \in N$ определена сумма $a \oplus b$, совпадающая с $\lambda(\lambda^{-1}(a) \oplus b)$ на M и с $\lambda^{-1}(a) \oplus b$ на N .

Пусть $U[f] \equiv \mathcal{F}[f] \equiv \hat{f}$, $S(h) = \omega(x \oplus h)$, где $\omega \in L^2(M) \cap L^2(N)$, $\omega(x \oplus h) \in L^2(M)$ для почти всех (по ν) $h \in N$, $0 < K = \|\omega\|_{L^2_\nu(N)}^2 < +\infty$, $\omega_{\theta,h}(x) = \theta(x)\omega(x \oplus h)$, где $\theta \in X$, $h \in N$, $x \in M$,

$$\psi_{\theta,h}(\chi) = \mathcal{F}[\omega_{\theta,h}](\chi),$$

$\chi \in X$,

$$\begin{aligned} \Psi_{\theta,h}(f) &= \int_X f(\chi) \overline{\psi_{\theta,h}(\chi)} d\eta(\chi) = \int_M \check{f}(x) \overline{\omega_{\theta,h}} d\mu(x) \\ &= \int_M \check{f}(x) \overline{\omega(x \oplus h)} \overline{\theta(x)} d\mu(x) = U[\check{f}(x) \overline{\omega(x \oplus h)}](\theta) = U_h[\check{f}](\theta) \end{aligned}$$

– коэффициенты разложения определенной на X функции f по обобщенным всплескам Морле $\psi_{\theta,h}(\chi)$. Тогда по теореме для любой функции $f \in L^2(X)$

$$\frac{1}{K} \int_N \int_X |\Psi_{\theta,h}(f)|^2 d\eta(\theta) d\nu(h) = \|\check{f}\|_{L^2(M)}^2 = \|f\|_{L^2(X)}^2,$$

и согласно следствию с $B = L^2(X)$ и $V = \mathcal{F}$ имеем

$$\begin{aligned}
 f(x) &= V[\check{f}](x) = \frac{1}{K} \int_{\mathbb{N}} V[U^{-1}[U_h[\check{f}]] \cdot S(h)] d\nu(h) \\
 &= \frac{1}{K} \int_{\mathbb{N}} V[U^{-1}[\Psi_{\theta,h}(f)] \cdot \omega(x \oplus h)] d\nu(h) \\
 &= \frac{1}{K} \int_{\mathbb{N}} \int_X \Psi_{\theta,h}(f) \cdot \mathcal{F}[\omega(x \oplus h)](\chi \bar{\theta}) d\eta(\theta) d\nu(h) \\
 &= \frac{1}{K} \int_{\mathbb{N}} \int_X \Psi_{\theta,h}(f) \cdot \mathcal{F}[\theta(x)\omega(x \oplus h)](\chi) d\eta(\theta) d\nu(h) \\
 &= \frac{1}{K} \int_{\mathbb{N}} \int_X \Psi_{\theta,h}(f) \psi_{\theta,h}(\chi) d\eta(\theta) d\nu(h)
 \end{aligned}$$

(использовались унитарность преобразований Фурье – сохранение скалярных произведений, преобразование Фурье произведения функции на характер, преобразование Фурье произведения функций – свертка преобразований Фурье – см. [7, с. 253, 267, 268, 273]), где внешний интеграл понимается как интеграл Лебега по $\mathbb{N}$ от функции со значениями в банаховом пространстве $L^2(X)$. В [3], [4] указаны конкретные способы интегрирования как пределы по норме в $L^2(X)$ интегралов по некоторым областям. При этом имеющееся там дополнительное требование абелевости (а точнее, унимодулярности) упрощает ситуацию, но не является обязательным. Там же отмечено, что если $\check{f}(x) \in L(M)$, то для почти всех $\chi \in X$

$$f(\chi) = \frac{1}{K} \int_{\mathbb{N}} \int_X \Psi_{\theta,h}(f) \psi_{\theta,h}(\chi) d\eta(\theta) d\nu(h).$$

Примеры 3 и 4, связанные с преобразованием Гильберта, могут быть развиты в одномерном случае (путем рассмотрения $\mathbb{R}$ как топологической группы с некоторой отличной от обычных сложения и умножения операцией; при этом возможны изменения $\mathbb{R}$ на множество нулевой меры Хаара), могут быть распространены и на многомерные случаи. При этом естественным аналогом преобразования Гильберта могут быть как многомерные преобразования Гильберта, так и преобразования Рисса. Приведем связанный с ними пример.

ПРИМЕР 7. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, μ – обычная мера Лебега на $\mathbb{R}^n$; H – пространство отображений $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ или функций со значениями в $\mathbb{R}^n$, определенных на $\mathbb{R}^n$ и таких, что $f_j(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, n$, со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}) g_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$U[\mathbf{f}](\mathbf{y}) = (R^1[\mathbf{f}](\mathbf{y}), \dots, R^n[\mathbf{f}](\mathbf{y})),$$

где

$$R^j[f](\mathbf{y}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j}{|\mathbf{x}|^{n+1}} f(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где интеграл рассматривается как предел интегралов по областям $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \geq \varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, — преобразования Рисса функции f (см. [9, с. 68–74] или [8, с. 250–251]), $N = \mathbb{R}^n$, ν — обычная мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $S(\mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{h})$, где $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $0 < K = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty$. Пусть

$$\Phi_{\mathbf{y}, \mathbf{h}}(f) = (\Phi_{\mathbf{y}, \mathbf{h}}^1(f), \dots, \Phi_{\mathbf{y}, \mathbf{h}}^n(f)),$$

$$\Phi_{\mathbf{y}, \mathbf{h}}^j(f) = R_{\mathbf{h}}^j[f](\mathbf{y}) = R^j[f(\mathbf{x})\bar{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{h})](\mathbf{y})$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j - x_j}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+1}} \bar{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{h}) \cdot f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где интеграл рассматривается как предел интегралов по областям $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq \varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, — коэффициенты разложения определенной на $\mathbb{R}^n$ функции f по системе $\frac{y_j - x_j}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n+1}} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{h})$. Тогда в силу равенства

$$U^{-1}[\mathbf{f}(\mathbf{x})] = - \sum_{j=1}^n R^j[f_j(\mathbf{x})]$$

для любой $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$, $f_j(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, имеем по теореме для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |\Phi_{\mathbf{y}, \mathbf{h}}^j(f)|^2 d\mathbf{y} d\mathbf{h} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

и

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= - \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2} K} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \Phi_{\mathbf{y}, \mathbf{h}}^j(f) \frac{x_j - y_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+1}} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{h}) d\mathbf{y} d\mathbf{h} \\ &= \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}^n} U^{-1}[\Phi_{\mathbf{y}, \mathbf{h}}(f)](\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{h}) d\mathbf{h}, \end{aligned}$$

где в повторном интеграле внутренний интеграл рассматривается как предел интегралов по областям $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Существует еще много других различных систем разложения, которые строятся при помощи приведенной теоремы и следствия из нее (в частности, см. [5]) и которые могут представлять определенный интерес.

Список литературы

1. *Шварц Л.* Анализ. В 2-х т. Т. 1. М.: Мир, 1972.
2. *Gabor D.* Theory of communication // J. Inst. Elec. Eng. (London). 1946. V. 93 III. P. 429–457.
3. *Gasquet C., Witomski P.* Analyse de Fourier et applications. Paris: Masson, 1990.
4. *Лукашенко Т.П.* Всплески на топологических группах // ДАН. 1993. Т. 332. № 1. С. 15–17.
5. *Лукашенко Т.П.* Всплески на топологических группах // Изв. АН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 88–102.
6. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. В 2-х т. Т. 1. М.: Наука, 1975.
7. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. В 2-х т. Т. 2. М.: Мир, 1975.
8. *Стейн И., Вайс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
9. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
10. *Grossmann A., Morlet J.* Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. P. 723–736.

Поступило в редакцию
10.I.1995