Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Сандраков, Осреднение вариационных неравенств для задач нелинейной диффузии в перфорированных областях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 5, 179–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/im660>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:27:09

УДК 517.95

Г. В. Сандраков

Осреднение вариационных неравенств для задач нелинейной диффузии в перфорированных областях

Рассмотрено осреднение задач нелинейной диффузии в периодически перфорированных областях с различными граничными условиями. Такие задачи формулируются в виде вариационных неравенств, определяемых нелинейным строго монотонным оператором второго порядка с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами. Доказаны утверждения о соответствующей сходимости решений этих задач к решениям двухмасштабных и макромасштабных предельных вариационных неравенств. Представлены методы вывода таких предельных вариационных неравенств. Для потенциальных операторов доказаны утверждения о связи полученных предельных вариационных неравенств с двухмасштабными и макромасштабными задачами минимизации.

Библиография: 28 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются вопросы осреднения вариационных неравенств для задач с условием Синьорини на внутренней границе периодически перфорированных областей, моделирующих пористые среды, и однородными условиями Дирихле на внешней границе. Рассмотрены также вариационные неравенства для задач с препятствием в перфорированных областях. Такие вариационные неравенства являются естественным обобщением задач минимизации с односторонними ограничениями на решения (см., например, [1]).

Пусть $n \geq 2$ – целое число. Периодически перфорированную область Ω_ε , зависящую от малого положительного параметра ε , принято определять как пересечение ограниченной области Ω (с липшицевой границей $\partial\Omega$) из $\mathbb{R}^n$ и открытого множества F_ε , имеющего период ε . Таким образом, если F_1 является открытым 1-периодическим подмножеством $\mathbb{R}^n$, то

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \cap F_\varepsilon, \quad (1.1)$$

где $F_\varepsilon \equiv \varepsilon F_1 = \{\varepsilon x : x = (x_1, \dots, x_n) \in F_1\}$. Здесь и далее 1-периодичность множества (функции) означает периодичность характеристической функции этого множества (этой функции) с периодом 1 по каждому x_i , $i = 1, \dots, n$. Таким образом, $Y \equiv [0, 1]^n$ является ячейкой периодичности, и множество F_1 вполне определяется множеством $F \equiv Y \cap F_1$.

Предполагается, что множества F и $Y \setminus F$ имеют положительные меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ и что множество F_1 является связным. Кроме того, отождествляя противоположные грани ячейки периодичности Y и используя 1-периодичность, множество F можно рассматривать как подмножество n -мерного тора. Предполагается, что такое подмножество F является подмногообразием тора с липшицевой границей $S \equiv \partial F$. При этом из связности F_1 следует связность F , а из определения

многообразия с границей (как множества, допускающего конечное число систем локальных координат, удовлетворяющих предположениям, приведенным, например, в [2, гл. 1, § 1.6]) следует компактность многообразия F и границы S .

Граница $\partial\Omega_\varepsilon$ перфорированной области Ω_ε допускает разбиение на “внутреннюю” часть $S_\varepsilon \equiv \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega$ и “внешнюю” часть $\partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega$. Следуя, например, в работе [3], определим для области Ω_ε пространство (функций, удовлетворяющих однородным условиям Дирихле на внешней границе)

$$H_D^1(\Omega_\varepsilon) \equiv \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon) : v = 0 \text{ на } \partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega\}, \quad (1.2)$$

которому будут принадлежать решения рассматриваемых вариационных неравенств. Отметим, что для фиксированного ε множество $\partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega$ является замкнутым, и поэтому для $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ определено понятие однородных условий Дирихле на каждой компоненте этого множества (см., например, [4]).

Рассмотрим $v \in H_D^1(\Omega_\varepsilon)$ и обозначим через $\tilde{v}$ продолжение этой функции нулем на $F_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon$. Как отмечено в [3] (доказательство леммы 3.3), продолжение $\tilde{v}$ принадлежит $H^1(F_\varepsilon)$. Последнее утверждение из [3] имеет некоторые полезные следствия, используемые далее.

Фиксируем ε . Учитывая ограниченность области Ω , можно считать, что найдется такое положительное $b = \varepsilon z$ с целочисленным z , для которого $\Omega \subset [0, b]^n$. Отождествляя противоположные грани куба $[0, b]^n$ и используя ε -периодичность множества F_ε , можно рассматривать $F_\varepsilon^b = F_\varepsilon \cap [0, b]^n$ как подмногообразие (соответствующего) тора с липшицевой границей $S_\varepsilon^b = \partial F_\varepsilon^b$ в силу предположений. Тогда $\tilde{v} \in H^1(F_\varepsilon^b)$ для $v \in H_D^1(\Omega_\varepsilon)$, поскольку $\tilde{v} = 0$ в $F_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon$ и определен след $\tilde{v}|_{S_\varepsilon^b}$ как элемент пространства $H^{1/2}(S_\varepsilon^b)$ (см., например, [5], [6]). Также известно [6], что оператор вычисления такого следа является непрерывным оператором из $H^1(F_\varepsilon^b)$ в $H^{1/2}(S_\varepsilon^b)$. Точнее, для липшицевых областей последнее утверждение доказано, например, в [7], а для подмногообразий с липшицевыми границами это утверждение проверяется с помощью подходящей локализации (см., например, в [5]).

Следовательно, для $v \in H_D^1(\Omega_\varepsilon)$ определен след $v|_{S_\varepsilon}$ как элемент пространства $H^{1/2}(S_\varepsilon)$, поскольку $\tilde{v}|_{S_\varepsilon^b \setminus S_\varepsilon} = 0$ в силу определений, а непрерывность соответствующего оператора (вычисления) следа подразумевает замкнутость в $H_D^1(\Omega_\varepsilon)$ множества

$$K \equiv \{v \in H_D^1(\Omega_\varepsilon) : v \geq 0 \text{ п.в. на } S_\varepsilon\}. \quad (1.3)$$

Отметим, что в силу (локально конечной) липшицевости множества F_ε для фиксированного ε на S_ε (точнее, на S_ε^b) определена естественная мера, и поэтому определено понятие п.в. (почти всюду относительно этой меры) на S_ε , например, в соответствии с [2, гл. 1, § 1.6]. Фактически из липшицевости множества F_ε следует также неравенство Пуанкаре:

$$\|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} \text{ для } v \in H_D^1(\Omega_\varepsilon). \quad (1.4)$$

В работе [3] доказано, что постоянную C в этом неравенстве можно выбрать не зависящей от положительного параметра ε (при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для некоторого положительного ε_0).

Пусть заданы функция $f \in L^2(\Omega)$ и последовательность функций $\{\psi_\varepsilon\} \subset H_D^1(\Omega_\varepsilon)$, зависящая от малого положительного параметра ε и равномерно ограниченная относительно этого параметра ($\|\psi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, где постоянная C не

зависит от ε). Рассмотрим следующую задачу, зависящую от ε и формулируемую в виде вариационного неравенства для $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right) (\nabla \hat{v} - \nabla \hat{u}_\varepsilon) dx &\geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(\hat{v} - \hat{u}_\varepsilon) dx, \\ \forall \hat{v} \in K_\varepsilon &\equiv \{\hat{v} \in H_D^1(\Omega_\varepsilon) : \hat{v} \geq \psi_\varepsilon \text{ п.в. на } S_\varepsilon\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где вектор-функция $a(y, \xi)$ определена на F_1 и является 1-периодической по $y \in F_1$ для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, $a(y, \xi)$ для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ вполне определяется своим ограничением на F . Предполагается, что $a(y, \xi)$ для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ является измеримой на F , $a(y, 0) = 0$ и

$$\begin{aligned} 0 &< (a(y, \xi) - a(y, \zeta))(\xi - \zeta), \quad \xi \neq \zeta, \\ \alpha|\xi|^2 &\leq a(y, \xi)\xi, \quad |a(y, \xi) - a(y, \zeta)| \leq \beta|\xi - \zeta| \\ &\text{п.в. в } F \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где α и β – заданные положительные постоянные.

Таким образом, для фиксированного ε вектор-функция $a(y, \xi)$ определяет строго монотонный, непрерывный и коэрцитивный оператор в неравенстве (1.5) (см., например, [1, гл. 2, §8]). Известно [1], что существует единственное (для фиксированного ε) решение вариационного неравенства (1.5) и посредством замены $u_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon - \psi_\varepsilon$, $v = \hat{v} - \psi_\varepsilon$ это неравенство эквивалентно вариационному неравенству для $u_\varepsilon \in K$:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(v - u_\varepsilon) dx \quad \forall v \in K, \quad (1.7)$$

где множество K определено в (1.3) и является замкнутым (в силу свойств оператора следа на S_ε) выпуклым конусом с вершиной в нуле.

Также известно [1], что вариационное неравенство (1.7) эквивалентно следующему вариационному неравенству $u_\varepsilon \in K$:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla v\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(v - u_\varepsilon) dx \quad \forall v \in K. \quad (1.8)$$

Эти эквивалентности означают (для фиксированного ε), что $u_\varepsilon \in K$ является решением задачи (1.7), если и только если $u_\varepsilon \in K$ является решением задачи (1.8) и если и только если $\hat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon + \psi_\varepsilon \in K_\varepsilon$ является решением задачи (1.5).

В соответствии с [1] решение $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ вариационного неравенства (1.5) характеризуется также следующими условиями (возможно, при дополнительных условиях регулярности на исходные данные):

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right)\right) &= f \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ \hat{u}_\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega, \\ (\hat{u}_\varepsilon - \psi_\varepsilon)\left(\nu_\varepsilon \cdot a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right)\right) &= 0 \quad \text{на } S_\varepsilon, \\ \hat{u}_\varepsilon &\geq \psi_\varepsilon \quad \text{и} \quad \left(\nu_\varepsilon \cdot a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right)\right) \geq 0 \quad \text{на } S_\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\nu_\varepsilon \cdot$ обозначает скалярное умножение на вектор внешней нормали к границе S_ε .

Задачу (1.9) принято называть *задачей с односторонними ограничениями на границе* S_ε или *задачей с условиями Синьорини на* S_ε . В соответствии с условиями этой задачи граница S_ε допускает разбиение на две части:

$$S_\varepsilon^0 = \{(\hat{u}_\varepsilon - \psi_\varepsilon)|_{S_\varepsilon} = 0\} \text{ и } S_\varepsilon^+ = \{(\hat{u}_\varepsilon - \psi_\varepsilon)|_{S_\varepsilon} > 0\},$$

и это разбиение является одним из неизвестных задачи (см., например, [1]). Таким образом, задача (1.9) может быть интерпретирована как модель для установившейся нелинейной диффузии (или теплопроводности) в пористой среде, на одной части границы которой заданы условия Дирихле ($\hat{u}_\varepsilon = \psi_\varepsilon$), а на другой части – условия Неймана

$$\left(\nu_\varepsilon \cdot a \left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon \right) \right) = 0 \text{ на } S_\varepsilon^+.$$

Соответственно, вариационное неравенство (1.5) является “обобщенной” постановкой задачи (1.9).

Основные результаты работы составляют утверждения о предельном поведении решений вариационного неравенства (1.5) (и, соответственно, решений эквивалентных вариационных задач (1.7) и (1.8)). Будет получено осредненное (предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$) вариационное неравенство и доказана теорема о соответствующей сходимости последовательности решений к решению осредненной вариационной задачи. В формулировке этой теоремы используется понятие двухмасштабной сходимости (подробности о такой сходимости можно найти в [8], [9]).

Последовательность $\{v_\varepsilon(x)\} \subset L^2(\Omega)$ называется *двухмасштабно сходящейся* к $v_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ (обозначение $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$) при $\varepsilon \rightarrow 0$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_\varepsilon(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx \quad (1.10)$$

для каждого $\varphi(x, y) \in L_P^2(Y; C(\bar{\Omega}))$. Здесь и далее индекс P означает 1-периодичность по $y \in \mathbb{R}^n$. Покомпонентно такая сходимость определяется и для вектор-функций. Известно [8], [9], что каждая равномерно ограниченная последовательность $\{v_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ имеет подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому элементу $v_0(x, y)$ из $L^2(\Omega \times Y)$.

Рассмотрим некоторую функцию v_ε , определенную на Ω_ε , например, из $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Обозначим через $\chi_\varepsilon v_\varepsilon$ продолжение этой функции нулем на $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Тогда $\chi_\varepsilon = \chi_\varepsilon 1$ можно рассматривать как характеристическую функцию множества Ω_ε , и последовательность $\{\chi_\varepsilon v_\varepsilon\}$ равномерно ограничена в $L^2(\Omega)$, если последовательность $\{v_\varepsilon\}$ равномерно ограничена в $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Аналогично, для $\varphi \in L_P^2(F)$ через $\chi \varphi$ обозначим продолжение этой функции нулем на $Y \setminus F$ и через χ – характеристическую функцию множества F .

Из соотношений (1.4), (1.6) и предположений на исходные данные следует, что последовательности $\{u_\varepsilon\}$ и $\{\nabla u_\varepsilon\}$ решений вариационного неравенства (1.7) и градиентов этих решений равномерно ограничены в $L^2(\Omega_\varepsilon)$ и $L^2(\Omega_\varepsilon)^n$ соответственно, и поэтому выполнено следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть $u_\varepsilon(x) \in H_D^1(\Omega_\varepsilon)$ является решением вариационного неравенства (1.7). Тогда найдутся такие $\psi_0(x)$, $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$

и $\psi_1(x, y), u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_P^1(F)/\mathbb{R})$, что (возможно, после выделения подпоследовательностей при $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon \psi_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \psi_0, & \chi_\varepsilon u_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi u_0, \\ \chi_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \nabla \psi_0 + \chi \nabla_y \psi_1, & \chi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \nabla u_0 + \chi \nabla_y u_1 \end{aligned}$$

и $u_0 \geq 0$ п.в. в Ω .

Доказательства сформулированных здесь утверждений будут приведены в §2, где имеются и соответствующие ссылки.

Далее предполагается, что ψ_0 и ψ_1 из утверждения 1.1 определены однозначно и выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} = \|\nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1\|_{L^2(\Omega \times F)^n}. \quad (1.11)$$

Эти предположения означают, что последовательность $\{\chi_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon\}$ имеет (однозначно определенный) сильный двухмасштабный предел в $L^2(\Omega)^n$ (см. [9, теорема 1.8]). В частности, равенство (1.11) выполнено при $\psi_1 = 0$, если $\psi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ и $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$ сильно в $H_0^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Будем обозначать через $C_0^\infty(\Omega; C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R})$ множество конечных линейных комбинаций функций вида $\psi_1 = \psi_0^1(x)\psi_P^1(y)$, где $\psi_0^1 \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\psi_P^1 \in C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R}$. Здесь по определению $C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R}$ рассматривается как множество гладких функций $\varphi \in C_P^\infty(Y)$, удовлетворяющих равенству $\int_F \varphi dy = 0$, которое подразумевает, что $\varphi \in H_P^1(F)/\mathbb{R}$ с точностью до изоморфизма (см., например, [10, гл. 1, замечание 1.4]). Пусть сначала $\psi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\psi_1 \in C_0^\infty(\Omega; C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R})$. Тогда из равенства (1.11) следует (в соответствии с [9]), что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \nabla \psi_\varepsilon(x) - \nabla \psi_0(x) - (\nabla_y \psi_1) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} = 0. \quad (1.12)$$

Введем обозначение $H_2 = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_P^1(F)/\mathbb{R})$. Как отмечено в [9] (доказательство теоремы 2.9), для $(v_0, v_1) \in H_2$ равенство

$$\|(v_0, v_1)\|_2 = \|\nabla v_0 + \nabla_y v_1\|_{L^2(\Omega \times F)^n} \quad (1.13)$$

определяет норму, эквивалентную естественной норме (произведения) на пространстве H_2 . В соответствии с утверждением 1.1 полезно определить множество

$$K_2 \equiv \{(v_0, v_1) \in H_2 : v_0 \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega\},$$

содержащее двухмасштабные пределы решений задачи (1.7).

Фиксируем $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ и $v_1 \in C_0^\infty(\Omega; C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R})$, $v_0 \geq 0$ в Ω . Тогда $(v_0, v_1) \in K_2$ в силу определений и найдется такая постоянная δ , что $|v_1| \leq \delta$ в $\Omega \times Y$, поскольку гладкие функции ограничены на компактных множествах.

Выберем для каждого ε неотрицательную функцию $e_\varepsilon \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, равную нулю при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon$ и единице при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon$, где $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ – расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$. Для достаточно малых ε ($\leq \varepsilon_0$ для некоторого положительного ε_0) такие функции существуют, $|\varepsilon \nabla e_\varepsilon| \leq C$ п.в. в Ω (с постоянной C , не зависящей от ε), и носитель функции ∇e_ε содержится

в приграничной полосе $\Omega_{2\varepsilon} \subset \Omega$ ширины 2ε (см., например, [11]). Следовательно, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla e_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} = 0$, и можно считать, что $e_\varepsilon = 1$ на носителе функции $v_1(x, x/\varepsilon)$, поскольку этот носитель компактен в Ω . Тогда $v_1(x, x/\varepsilon) + \delta e_\varepsilon \geq 0$ в Ω , и поэтому выполнены неравенства

$$\left(v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \delta e_\varepsilon \right) \Big|_{S_\varepsilon} \geq 0, \quad v_0(x)|_{S_\varepsilon} \geq 0.$$

Таким образом, в задаче (1.8) можно выбрать тестовую функцию $v = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon \delta e_\varepsilon$. Учитывая этот выбор и соотношения (1.6) и (1.12), неравенство из (1.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1^\varepsilon + \nabla v_0 + \nabla_y v_1^\varepsilon\right) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1^\varepsilon - \nabla u_\varepsilon) dx \\ \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(v_0 - u_\varepsilon) dx + \sigma_\varepsilon, \end{aligned}$$

где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon = 0$ и, например, $\nabla_y \psi_1^\varepsilon = (\nabla_y \psi_1)(x, x/\varepsilon)$. Следовательно, используя (1.6) и очевидное равенство $\chi_\varepsilon = \chi_\varepsilon^2$, последнее неравенство можно переписать в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi_\varepsilon a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1^\varepsilon + \nabla v_0 + \nabla_y v_1^\varepsilon\right) (\chi_\varepsilon \nabla v_0 + \chi_\varepsilon \nabla_y v_1^\varepsilon - \chi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) dx \\ \geq \int_{\Omega} f(\chi_\varepsilon v_0 - \chi_\varepsilon u_\varepsilon) dx + \sigma_\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Неравенство (1.14) примечательно тем, что в нем можно перейти непосредственно к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ (возможно, по подпоследовательности из утверждения 1.1), используя только определение (1.10), поскольку $\chi a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) \in L_P^2(Y; C(\bar{\Omega})^n)$ в силу (1.6) и известно [9], что $\chi_\varepsilon v_0 \xrightarrow{2} \chi v_0$ и $\chi_\varepsilon \nabla v_0 + \chi_\varepsilon \nabla_y v_1^\varepsilon \xrightarrow{2} \chi \nabla v_0 + \chi \nabla_y v_1$.

Таким образом, u_0 и u_1 , определенные в утверждении 1.1, удовлетворяют неравенству для $(u_0, u_1) \in K_2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_F a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \\ \geq \int_{\Omega} \int_F f(v_0 - u_0) dy dx, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $(v_0, v_1) \in K_2$ и учтено, например, равенство $\chi \nabla v_0 = 0$ на $\Omega \times (Y \setminus F)$. Проверяется, что неравенство (1.15) выполнено не только для гладких и финитных v_0 и v_1 , но и для всех $(v_0, v_1) \in K_2$. Проверяется также, что неравенство (1.15) выполнено и для произвольных ψ_0 и ψ_1 , определенных в утверждении 1.1 и удовлетворяющих предположению (1.11).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. *Существует единственное решение $(u_0, u_1) \in K_2$ вариационного неравенства (1.15) для всех $(v_0, v_1) \in K_2$, и это неравенство эквивалентно вариационному неравенству для $(u_0, u_1) \in K_2$:*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_F a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_F f(v_0 - u_0) dy dx \quad \forall (v_0, v_1) \in K_2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Таким образом, вариационное неравенство (1.16) определяет предельную двухмасштабную задачу для вариационного неравенства (1.7). Однако цель автора этой работы – получить макромасштабное предельное вариационное неравенство (не зависящее от микромасштабной переменной $y \in F$) для задачи (1.7) (и поэтому для эквивалентной задачи (1.5)).

Для этого выберем $v_0 = u_0$ в (1.16) и предположим, что $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$ и $U = \psi_1 + u_1$ (здесь фактически “замораживается” макромасштабная переменная $x \in \Omega$ в (1.16)). Тогда получаем (формально) вариационное неравенство для $U \in H_P^1(F)/\mathbb{R}$:

$$\int_F a(y, \xi + \nabla_y U) (\nabla_y V - \nabla_y U) dy \geq 0 \quad \forall V \in H_P^1(F)/\mathbb{R}. \quad (1.17)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. *Для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $U \in H_P^1(F)/\mathbb{R}$ вариационного неравенства (1.17), и это неравенство эквивалентно вариационному уравнению для $U \in H_P^1(F)/\mathbb{R}$:*

$$\int_F a(y, \xi + \nabla_y U) \nabla_y V dy = 0 \quad \forall V \in H_P^1(F)/\mathbb{R}. \quad (1.18)$$

Кроме того, функция $U = U(\xi)$ является слабо непрерывной как функция на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $H_P^1(F)/\mathbb{R}$.

Для решений задачи (1.18) из (1.6) имеем $\|\nabla_y U(\xi)\|_{L^2(F)^n}^2 \leq C|\xi|^2$ с постоянной C , не зависящей от $\xi \in \mathbb{R}^n$. Из непрерывности функции $U(\xi)$ и сепарабельности пространства $H_P^1(F)/\mathbb{R}$ следует сильная измеримость этой функции, и поэтому $U(y, \nabla v_0(x)) \in L^2(\Omega; H_P^1(F)/\mathbb{R})$, если $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Таким образом, имеет смысл следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. *Пусть $(u_0, u_1) \in K_2$ является единственным решением вариационного неравенства (1.16). Тогда*

$$u_1 = U(y, \nabla \psi_0(x) + \nabla u_0(x)) - \psi_1(x, y),$$

где $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением вариационного уравнения (1.18).

Используя это утверждение и выбирая $v_1 = u_1$ в (1.16), получаем следующее макромасштабное осредненное (предельное для задачи (1.7)) вариационное неравенство для $u_0 \in K_0$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) (\nabla v_0 - \nabla u_0) dx \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \\ & \forall v_0 \in K_0 \equiv \{v_0 \in H_0^1(\Omega) : v_0 \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega\}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где

$$A(\xi) = \frac{1}{\theta} \int_F a(y, \xi + \nabla_y U(y, \xi)) dy, \quad \theta = \int_F 1 dy. \quad (1.20)$$

Посредством замены $\hat{u}_0 = \psi_0 + u_0$, $\hat{v}_0 = \psi_0 + v_0$ неравенство (1.19) эквивалентно следующему осредненному (предельному для задачи (1.5)) вариационному неравенству для $\hat{u}_0 \in \hat{K}_0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(\nabla \hat{u}_0)(\nabla \hat{v}_0 - \nabla \hat{u}_0) dx &\geq \int_{\Omega} f(\hat{v}_0 - \hat{u}_0) dx \\ \forall \hat{v}_0 \in \hat{K}_0 &\equiv \{\hat{v}_0 \in H_0^1(\Omega) : \hat{v}_0 \geq \psi_0 \text{ п.в. в } \Omega\}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Отметим, что существование решения задачи (1.19) (и поэтому задачи (1.21)) вытекает из утверждения 1.2, а единственность – из строгой монотонности вектор-функции $A(\xi)$, которая следует из (1.6). Непосредственным следствием приведенных утверждений и леммы о компактности из [3, лемма 3.3] является следующий результат о сходимости.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$ является решением вариационного неравенства (1.5) и выполнено предположение (1.11). Тогда

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \hat{u}_0, \quad \chi_\varepsilon \nabla \hat{u}_\varepsilon \xrightarrow{2} \chi \nabla \hat{u}_0 + \chi \nabla_y U(\nabla \hat{u}_0), \\ \|\hat{u}_\varepsilon - \hat{u}_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $\hat{u}_0 \in \hat{K}_0$ является единственным решением осредненного вариационного неравенства (1.21) и $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением вариационного уравнения (1.18).

Вариационное неравенство (1.7) можно рассмотреть и в случае, когда множество K заменено всем пространством $H_D^1(\Omega_\varepsilon)$. В этом случае известно [1], что такое вариационное неравенство эквивалентно вариационному уравнению для $u_\varepsilon \in H_D^1(\Omega_\varepsilon)$:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon\right) \nabla v dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f v dx \quad \forall v \in H_D^1(\Omega_\varepsilon). \quad (1.22)$$

Также известно [1], что существует единственное (для фиксированного ε) решение вариационного уравнения (1.22) и что вариационное неравенство (1.19), в котором K_0 заменено на $H_0^1(\Omega)$, эквивалентно следующему вариационному уравнению для $u_0 \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} A(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) \nabla v_0 dx = \int_{\Omega} f v_0 dx \quad \forall v_0 \in H_0^1(\Omega). \quad (1.23)$$

Как следствие этих эквивалентностей и приведенных утверждений, где просто не учитывается неотрицательность рассматриваемых функций, получаем следующий результат о сходимости решений задачи (1.22).

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть $u_\varepsilon \in H_D^1(\Omega_\varepsilon)$ является решением вариационного уравнения (1.22) и выполнено предположение (1.11). Тогда

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon u_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi u_0, & \chi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \nabla u_0 + \chi \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \chi \nabla_y \psi_1, \\ \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\rightarrow 0, & \varepsilon &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ является единственным решением осредненной задачи (1.23), $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением задачи (1.18), а ψ_0 и ψ_1 определены в утверждении 1.1.

Вариационное уравнение (1.22) можно рассмотреть и в более общем случае. Пусть задана равномерно ограниченная последовательность функций $\{\widehat{\psi}_\varepsilon\} \subset H^1(\Omega_\varepsilon)$. Тогда в соответствии с [12, теорема 4.6] найдутся такие $\widehat{\psi}_0(x) \in H^1(\Omega)$ и $\widehat{\psi}_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_P^1(F)/\mathbb{R})$, что (возможно, после выделения подпоследовательности при $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\chi_\varepsilon \widehat{\psi}_\varepsilon \xrightarrow{2} \chi \widehat{\psi}_0, \quad \chi_\varepsilon \nabla \widehat{\psi}_\varepsilon \xrightarrow{2} \chi \nabla \widehat{\psi}_0 + \chi \nabla_y \widehat{\psi}_1. \quad (1.24)$$

Пусть $\widehat{\psi}_0$ и $\widehat{\psi}_1$ определены однозначно (в этом случае соотношения (1.24) верны без выделения подпоследовательности) и выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \widehat{\psi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} = \|\nabla \widehat{\psi}_0 + \nabla_y \widehat{\psi}_1\|_{L^2(\Omega \times F)^n}. \quad (1.25)$$

Рассмотрим вариационное уравнение (1.22), в котором ψ_ε заменено $\widehat{\psi}_\varepsilon$. Известно [1], что посредством замены $\hat{u}_\varepsilon = \widehat{\psi}_\varepsilon + u_\varepsilon$ такой вариант вариационной задачи (1.22) является “обобщенной” постановкой задачи Дирихле–Неймана для $\hat{u}_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon \right) \right) &= f \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, & \hat{u}_\varepsilon &= \widehat{\psi}_\varepsilon \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega, \\ \left(\nu_\varepsilon \cdot a \left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon \right) \right) &= 0 \quad \text{на } S_\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Также известно [1], что существует единственное (для фиксированного ε) решение задачи (1.26) (в обобщенной постановке (1.22), где ψ_ε заменено $\widehat{\psi}_\varepsilon$ и $u_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon - \widehat{\psi}_\varepsilon$). Из соотношений (1.4), (1.6) и предположений для исходных данных следует, что последовательности $\{\hat{u}_\varepsilon\}$ и $\{\nabla \hat{u}_\varepsilon\}$ решений задачи (1.26) и градиентов этих решений равномерно ограничены в $L^2(\Omega_\varepsilon)$ и $L^2(\Omega_\varepsilon)^n$ соответственно. Следствием приведенных утверждений является следующая теорема о сходимости решений задачи (1.26).

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть $\hat{u}_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ является решением задачи (1.26) и выполнены соотношения (1.24) и равенство (1.25). Тогда

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \hat{u}_0, & \chi_\varepsilon \nabla \hat{u}_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \nabla \hat{u}_0 + \chi \nabla_y U(\nabla \hat{u}_0), \\ \|\hat{u}_\varepsilon - \widehat{\psi}_\varepsilon - \hat{u}_0 + \widehat{\psi}_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\rightarrow 0, & \varepsilon &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением задачи (1.18) и $\hat{u}_0 \in H^1(\Omega)$ является единственным решением следующей задачи Дирихле для осредненного уравнения:

$$-\operatorname{div}(A(\nabla \hat{u}_0)) = f \quad \text{в } \Omega, \quad \hat{u}_0 = \hat{\psi}_0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (1.27)$$

В случае, когда соответствующий строго монотонный эллиптический оператор в вариационном неравенстве (1.5) является потенциальным, это вариационное неравенство эквивалентно задаче минимизации на множестве K_ε . Поэтому естественно установить связь приведенных результатов с соответствующими результатами для задач минимизации. Таким образом, выберем $a(y, \xi)$ в задаче (1.5) в следующем специальном виде:

$$a(y, \xi) = \nabla_\xi b(y, \xi), \quad (1.28)$$

где функция $b(y, \xi)$ является измеримой на F для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ и непрерывной относительно $\xi \in \mathbb{R}^n$ п.в. в F . Кроме того, предполагается, что для $a(y, \xi)$ выполнены неравенства (1.6). В этом случае известно [13], что функция $b(y, \xi)$ является строго выпуклой относительно $\xi \in \mathbb{R}^n$ п.в. в F и вариационное неравенство (1.7) эквивалентно (для фиксированного ε) задаче минимизации для $u_\varepsilon \in K$:

$$I_\varepsilon(u_\varepsilon) = \min_{v \in K} I_\varepsilon(v), \quad I_\varepsilon(v) = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla v\right) - f v \right) dx. \quad (1.29)$$

Также известно [13], что вариационное уравнение (1.18) эквивалентно (для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}^n$), если выполнено предположение (1.28), задаче минимизации для $U \in H_P^1(F)/\mathbb{R}$:

$$I_\xi(U) = \min_{V \in H_P^1(F)/\mathbb{R}} I_\xi(V), \quad I_\xi(V) = \int_F b(y, \xi + \nabla_y V) dy. \quad (1.30)$$

Рассмотрим также осредненную задачу минимизации для $u_0 \in K_0$:

$$I_0(u_0) = \min_{v_0 \in K_0} I_0(v_0), \quad I_0(v_0) = \int_\Omega (B(\nabla \psi_0 + \nabla v_0) - f v_0) dx, \quad (1.31)$$

где

$$B(\xi) = (\theta^{-1}) \int_F b(y, \xi + \nabla_y U(y, \xi)) dy$$

и $U(y, \xi)$ является решением задачи минимизации (1.30) для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8. *Существует единственное решение $u_0 \in K_0$ задачи минимизации (1.31), и эта задача эквивалентна осредненному вариационному неравенству (1.19), если выполнено равенство (1.28).*

Отметим, что

$$\nabla_\xi B(\xi) = \theta^{-1} \int_F \nabla_\xi b(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) (E + \nabla_\xi \nabla_y U(\xi)) dy$$

по крайней мере формально, и поэтому утверждение 1.8 не является прямым следствием из известных утверждений, поскольку равенство $A(\xi) = \nabla_\xi B(\xi)$ не следует непосредственно из (1.20) и (1.28).

Рассмотрим, кроме того, следующую двухмасштабную задачу минимизации для $(u_0, u_1) \in K_2$:

$$I_2(u_0, u_1) = \min_{(v_0, v_1) \in K_2} I_2(v_0, v_1), \quad (1.32)$$

$$I_2(v_0, v_1) = \int_{\Omega} \int_F (b(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) - f v_0) dy dx.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.9. *Существует единственное решение $(u_0, u_1) \in K_2$ задачи минимизации (1.32), и эта задача эквивалентна двухмасштабному вариационному неравенству (1.16), если выполнено равенство (1.28).*

Таким образом, эквивалентность (при $a(y, \xi) = \nabla_{\xi} b(y, \xi)$) задачи минимизации (1.29) и рассмотренного в настоящей работе вариационного неравенства (1.7) (эквивалентного вариационному неравенству (1.5)) сохраняется при макромасштабном осреднении и двухмасштабном осреднении, а утверждение о сходимости решений задачи минимизации (1.29) следует из теоремы 1.5. Аналогично, задача минимизации (1.29), в которой K заменено на $H_D^1(\Omega_{\varepsilon})$, и задача минимизации (1.31), в которой K_0 заменено на $H_0^1(\Omega)$, эквивалентны вариационным уравнениям (1.22) и (1.23) соответственно, и утверждение о сходимости решений в этом случае следует из теоремы 1.6 (и теоремы 1.7, соответственно, при более общих предположениях (1.24) и (1.25)).

Проверяется, что предположение (1.11) выполнено, если

$$\psi_{\varepsilon} = \psi_{\varepsilon}^0 + \varepsilon \psi_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (1.33)$$

где $\psi_1(x, y) \in L^2(\Omega; L_P^{\infty}(F))$, $\nabla_y \psi_1(x, y), \nabla_x \psi_1(x, y) \in L^2(\Omega; L_P^{\infty}(F)^n)$, $\psi_{\varepsilon}^0 \in H_0^1(\Omega)$ и $\psi_{\varepsilon}^0 \rightarrow \psi_0$ сильно в $H_0^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В таком смысле равенство (1.11) является условием регулярности на (равномерно ограниченную) последовательность $\{\psi_{\varepsilon}\} \subset H_D^1(\Omega_{\varepsilon})$ в задаче (1.5). Появление пространства $L^2(\Omega; L_P^{\infty}(F))$ связано с выполнением равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right)^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y)^2 dy dx, \quad (1.34)$$

доказанного для $\varphi \in L_P^2(Y; C(\bar{\Omega}))$ и для $\varphi \in L^2(\Omega; C_P(Y))$ в [9], а для $\varphi \in L^2(\Omega; L_P^{\infty}(Y))$ – в [16]. Известны примеры функций $\varphi \in C(\bar{\Omega}; L_P^2(Y))$, для которых не выполнено равенство (1.34) (см. [9, утверждение 5.8]). Более того, для $\varphi \in C(\bar{\Omega}; L_P^2(Y))$ выражение $\varphi(x, x/\varepsilon)$ может не иметь корректного смысла, поскольку это выражение является “следом” на n -плоскости $x = x, y = \varepsilon^{-1}x$ (зависящей от ε) в пространстве переменных x, y и необходима некоторая регулярность по y для определения такого “следа”. Условие $\varphi(x, y) \in L^2(\Omega; L_P^{\infty}(Y))$ является в некотором смысле минимальным (из известных условий), при выполнении которого выражение $\varphi(x, x/\varepsilon)$ определено и выполнено (1.34) в соответствии с [16].

Непосредственно из определений следует, что для $\varphi \in L^2(\Omega; L_P^{\infty}(F))$ (или $\varphi \in L_P^2(F; C(\bar{\Omega}))$) продолжение $\chi \varphi$ принадлежит $L^2(\Omega; L_P^{\infty}(Y))$ ($\chi \varphi$ принадлежит $L_P^2(Y; C(\bar{\Omega}))$). Таким образом, для перфорированной области Ω_{ε} и, например, $\varphi \in L^2(\Omega; L_P^{\infty}(F))$ равенство (1.34) можно записать в виде

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\varepsilon}} \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right)^2 dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\varepsilon} \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right)^2 dx = \int_{\Omega} \int_F \varphi(x, y)^2 dy dx. \quad (1.35)$$

В работе [9] было отмечено также, что равенство (1.34) в определенном смысле характеризует тестовые функции $\varphi(x, y)$, которые допустимо выбирать в определении (1.10) с сохранением компактности двухмасштабной сходимости (из этой компактности для равномерно ограниченных последовательностей из $L^2(\Omega)$ и следует утверждение 1.1). В оригинальном определении двухмасштабной сходимости из [8] тестовые функции выбирались из $C_c(\Omega; C_P(Y))$ и компактность доказана в этом случае. Однако при переходе к пределу в неравенстве (1.14) с использованием только теоремы компактности из [8] необходимы дополнительные предположения о непрерывности вектор-функции $a(y, \xi)$ по y . Таким образом, использование теоремы компактности из [9] приводит к некоторому ослаблению условий регулярности на исходные данные.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Задача (1.22) с линейной по ξ вектор-функцией $a(y, \xi)$ и $\psi_\varepsilon = 0$ рассмотрена в работе [3], где использовались метод компактности и энергетический метод для доказательства теоремы о сходимости, и в работе [9], где использовался метод двухмасштабной сходимости. Задачи минимизации без ограничений в перфорированных областях рассматривались также методами Γ -сходимости, например, в [14]. В этих работах можно найти и более подробную библиографию.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Задача минимизации (1.29) с квадратичной по ξ функцией $b(y, \xi)$ и $\psi_\varepsilon = 0$ рассматривалась в статье [15] при значительно более общих предположениях о регулярности границы перфорированной области Ω_ε . Впрочем, корректность такой задачи минимизации и корректность определения следа $u_\varepsilon|_{S_\varepsilon}$ не ясны и не доказаны в [15], поскольку в предположениях этой статьи граница S_ε может не быть даже непрерывной и компактной (при фиксированном ε). Кроме того, теорема о сходимости [15, теорема 2.2] доказана в этой статье фактически только в предположении, что решения рассматриваемой задачи минимизации [15, (1.1)] являются гладкими, что не верно в общем случае даже для регулярных границ и фиксированного ε . Аналогичные предположения (о регулярности границы перфорированной области Ω_ε) и методы (доказательства теорем сходимости для гладких решений) использовались в статьях [17] и [18] для рассмотрения задач минимизации без ограничений и вариационных задач с монотонными операторами в перфорированных областях.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.12. Используемые здесь методы применимы к вариационным неравенствам для задач с препятствием в ограниченных областях [19]. Кроме того, эти методы применимы и к вариационным неравенствам для задач с препятствием в перфорированных областях. Используя обозначения и предположения для задачи (1.5), приведем точные утверждения для таких задач с препятствием в периодически перфорированных областях, определяемых равенством (1.1).

Рассмотрим следующее вариационное неравенство для $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon^o$:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right) (\nabla \hat{v} - \nabla \hat{u}_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(\hat{v} - \hat{u}_\varepsilon) dx \quad (1.36)$$

$$\forall \hat{v} \in K_\varepsilon^o \equiv \{\hat{v} \in H_D^1(\Omega_\varepsilon) : \hat{v} \geq \psi_\varepsilon \text{ п.в. в } \Omega_\varepsilon\},$$

где $f \in L^2(\Omega)$ и последовательность $\{\psi_\varepsilon\} \subset H_D^1(\Omega_\varepsilon)$ является равномерно ограниченной относительно ε . Известно [1], что существует единственное (для фиксированного ε) решение вариационного неравенства (1.36) и посредством замены

$u_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon - \psi_\varepsilon$, $v = \hat{v} - \psi_\varepsilon$ это неравенство эквивалентно вариационному неравенству для $u_\varepsilon \in K^o$:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(v - u_\varepsilon) dx \quad (1.37)$$

$$\forall v \in K^o \equiv \{v \in H_D^1(\Omega_\varepsilon) : v \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega_\varepsilon\},$$

где множество K^o является замкнутым выпуклым конусом с вершиной в нуле (подробности можно найти, например, в [1] и [20]).

Также известно [1], [20], что вариационное неравенство (1.37) эквивалентно следующему вариационному неравенству для $u_\varepsilon \in K^o$:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla v\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(v - u_\varepsilon) dx \quad \forall v \in K^o. \quad (1.38)$$

Как и для задачи (1.7), из соотношений (1.4), (1.6) и предположений для исходных данных вытекает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.13. Пусть $u_\varepsilon(x) \in H_D^1(\Omega_\varepsilon)$ является решением вариационного неравенства (1.37). Тогда найдутся такие $\psi_0(x)$, $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ и $\psi_1(x, y)$, $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_P^1(F)/\mathbb{R})$, что (возможно, после выделения подпоследовательностей при $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon \psi_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \psi_0, & \chi_\varepsilon u_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi u_0, \\ \chi_\varepsilon \nabla \psi_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \nabla \psi_0 + \chi \nabla_y \psi_1, & \chi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \nabla u_0 + \chi \nabla_y u_1 \end{aligned}$$

и $u_0 \geq 0$ п.в. в Ω .

Далее предполагается, что ψ_0 и ψ_1 из утверждения 1.13 определены однозначно и выполнено равенство (1.11). Кроме того, в соответствии с утверждением 1.13 множество K_2 содержит всевозможные двухмасштабные пределы решений задачи (1.37).

Предположим, что $v_0, \psi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ и $v_1, \psi_1 \in C_0^\infty(\Omega; C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R})$ при $v_0 \geq 0$ в Ω . Тогда $(v_0, v_1) \in K_2$ и можно выбрать тестовую функцию $v = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon \delta e_\varepsilon$ в неравенстве из (1.38) (см. (1.14)). Следовательно, переходя к пределу в этом неравенстве, заключаем, что u_0 и u_1 , определенные в утверждении 1.13, удовлетворяют неравенству (1.15) для всех $(v_0, v_1) \in K_2$. Проверяется также, что неравенство (1.15) выполнено и для произвольных ψ_0 и ψ_1 , определенных в утверждении 1.13 и удовлетворяющих предположению (1.11).

Кроме того, выполняются и утверждения, аналогичные утверждениям 1.2–1.4. Таким образом, осредненное вариационное неравенство (1.19) является предельной задачей и для вариационного неравенства (1.37), а осредненное вариационное неравенство (1.21) является предельной задачей и для вариационного неравенства (1.36). Непосредственным следствием приведенных утверждений и леммы о компактности из [3] является следующий результат о сходимости решений задачи (1.36).

ТЕОРЕМА 1.14. Пусть $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon^o$ является решением вариационного неравенства (1.36) и выполнено предположение (1.11). Тогда

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \hat{u}_0, & \chi_\varepsilon \nabla \hat{u}_\varepsilon &\xrightarrow{2} \chi \nabla \hat{u}_0 + \chi \nabla_y U(\nabla \hat{u}_0), \\ \|\hat{u}_\varepsilon - \hat{u}_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\rightarrow 0, & \varepsilon &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $\hat{u}_0 \in \hat{K}_0$ является единственным решением осредненного вариационного неравенства (1.21) и $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением вариационного уравнения (1.18).

В случае выполнения равенства (1.28) также известно [13], что вариационное неравенство (1.37) эквивалентно (для фиксированного ε) задаче минимизации для $u_\varepsilon \in K^o$:

$$I_\varepsilon(u_\varepsilon) = \min_{v \in K^o} I_\varepsilon(v), \quad I_\varepsilon(v) = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla v\right) - f v \right) dx,$$

поэтому утверждение о сходимости решений этой задачи минимизации к решению задачи минимизации (1.31) является следствием из теоремы 1.14 (и утверждения 1.8).

Таким образом, решения вариационного неравенства (1.5) (для задачи с условием Синьорини) “достаточно близки” к решениям вариационного неравенства (1.36) (для задачи с препятствием), поскольку эти задачи при совпадающих исходных данных имеют один и тот же предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, определяемый решением осредненного вариационного неравенства (1.21) (для задачи с препятствием). Такое свойство решений задачи (1.5) достаточно естественно, поскольку условия Синьорини задаются на достаточно “массивном” множестве S_ε , что вполне иллюстрируется следующим примером. Используя обозначения и предположения для задачи (1.5), рассмотрим вариационное уравнение для $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) \nabla v \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f v \, dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \equiv \{v \in H_D^1(\Omega_\varepsilon) : v = 0 \text{ на } S_\varepsilon\}.$$

Известно [1], что существует единственное (для фиксированного ε) решение этого уравнения. Кроме того, из (1.6) и неравенства Фридрихса [21, прилож., лемма 1] следует, что $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^2$ и $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon$, где постоянная C не зависит от ε . Таким образом, равенство $u_\varepsilon|_{S_\varepsilon} = 0$ “достаточно близко” к равенству $u_\varepsilon = 0$ для решений вариационных уравнений с монотонным оператором в перфорированной области Ω_ε .

В соответствии с [1], [20] решение $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon^o$ вариационного неравенства (1.36) характеризуется также следующими условиями (возможно, при дополнительных условиях регулярности на исходные данные):

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right) \right) &= f \quad \text{в } \Omega_\varepsilon^+ \equiv \{x \in \Omega_\varepsilon : \hat{u}_\varepsilon(x) > \psi_\varepsilon(x)\}, \\ \hat{u}_\varepsilon &= \psi_\varepsilon \quad \text{в } \Omega_\varepsilon^0 \equiv \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon^+, \\ \hat{u}_\varepsilon &= \psi_\varepsilon \quad \text{и} \quad \left(\nu_\varepsilon \cdot a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right) \right) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon^+, \\ \hat{u}_\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega, \\ \left(\nu_\varepsilon \cdot a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right) \right) &= 0 \quad \text{на } S_\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.39}$$

В силу условий этой задачи область Ω_ε допускает разбиение на две части: $\Omega_\varepsilon^0 = \{\hat{u}_\varepsilon = \psi_\varepsilon\}$ и $\Omega_\varepsilon^+ = \{\hat{u}_\varepsilon > \psi_\varepsilon\}$, и это разбиение (определяемое “свободной”

границей) является одним из неизвестных задачи (см., например, [1], [20]). Таким образом, задача (1.39) может быть интерпретирована как модель для установившейся нелинейной диффузии (или теплопроводности) в пористой среде, часть которой является “застойной” (или имеет предписанное распределение температуры), а часть “активна”, на этой части собственно и моделируется процесс нелинейной диффузии (или процесс распространения тепла).

Соответственно, решение $\hat{u}_\varepsilon \in \hat{K}_0$ осредненного (предельного для вариационных неравенств (1.5) и (1.36)) вариационного неравенства (1.21) характеризуется также следующими условиями:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A(\nabla \hat{u}_0)) &= f \quad \text{в } \Omega^+ \equiv \{x \in \Omega: \hat{u}_0(x) > \psi_0(x)\}, \\ \hat{u}_0 &= \psi_0 \quad \text{в } \Omega^0 \equiv \Omega \setminus \Omega^+, \\ \hat{u}_0 &= \psi_0 \quad \text{и} \quad (\nu \cdot A(\nabla \hat{u}_0)) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega^+, \\ \hat{u}_0 &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

где ν – вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega^+$. Таким образом, решения задач (1.9) и (1.39) “достаточно близки” к решениям этой задачи, имеющей “застойную” Ω^0 и “активную” Ω^+ зоны диффузии (или теплопроводности).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.15. Задача об осреднении вариационных неравенств в ограниченных (не перфорированных) областях ставилась в книге [22], где методом “штрафа” было рассмотрено нестационарное вариационное неравенство для задачи с препятствием для линейного оператора с быстроосциллирующими коэффициентами в ограниченной области. Двухмасштабные предельные задачи для уравнений со строго монотонными операторами в ограниченных областях и задач минимизации без ограничений получены в [9]. Однако утверждения о связи этих двухмасштабных задач с ранее полученными макромасштабными задачами установлены в [9] только для линейного случая. Отметим также, что двухмасштабные предельные задачи впервые получили Ж.-Л. Лионс и Е. Санчес-Паленсия на основе равенств, аналогичных (1.34), например, в [23], но без доказательства соответствующих утверждений о сходимости решений. Общие вопросы сходимости решений задач минимизации с препятствием, зависящих от параметра, рассматривались методами Γ -сходимости во многих работах (см., например, [24] и [25]).

§ 2. Доказательства

Далее через C обозначены (возможно, различные) постоянные, не зависящие от положительного параметра ε . Кроме того, для заданной 1-периодической на Y функции $w(y)$ (возможно, зависящей и от других переменных) через $w^\varepsilon = w(x/\varepsilon)$ обозначено ε -периодическое продолжение этой функции на Ω . Более точно, $w(y)$ продолжается как 1-периодическая функция на $\mathbb{R}^n$, и выбирается ограничение полученной функции при $y = x/\varepsilon$ на Ω , которое и обозначается w^ε .

Известно, что множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в сепарабельных пространствах $L^2(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ (см., например, [26, гл. 2, § 2]). Проверим, что множество $C_0^\infty(\Omega; C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R})$ плотно в $L^2(\Omega; H_P^1(F)/\mathbb{R})$. С точностью до изоморфизма (см. [10, гл. 1, замечание 1.4]) пространство $H_P^1(F)/\mathbb{R}$ можно рассматривать как подпространство в $H_P^1(F)$, состоящее из функций $\varphi \in H_P^1(F)$, удовлетворяющих равен-

ству $\int_F \varphi dy = 0$ (из которого следует замкнутость $H_P^1(F)/\mathbb{R}$ в $H_P^1(F)$). Из (локальной) липшицевости F следует, что множество $C_P^\infty(Y)$, ограниченное на F , плотно в сепарабельном пространстве $H_P^1(F)$ (см., например, [26]). Точнее, это утверждение известно для липшицевых областей, а для подмногообразий с липшицевыми границами это проверяется с помощью подходящей локализации. Следовательно, множество $C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R}$ плотно в $H_P^1(F)/\mathbb{R}$, поскольку $H_P^1(F)/\mathbb{R}$ замкнуто в $H_P^1(F)$. В соответствии с [27, теорема II.10] пространство $L^2(\Omega; H_P^1(F)/\mathbb{R})$ изоморфно $L^2(\Omega) \otimes (H_P^1(F)/\mathbb{R})$ и конечные линейные комбинации произведений $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ для $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$, $\varphi_2 \in H_P^1(F)/\mathbb{R}$ плотны в этом пространстве, что доказывает плотность $C_0^\infty(\Omega; C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R})$ в $L^2(\Omega; H_P^1(F)/\mathbb{R})$.

Из последнего утверждения и неравенства треугольника следует, что для $(v_0, v_1) \in H_2$ можно найти такие последовательности $\{v_0^i\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ и $\{v_1^i\} \subset C_0^\infty(\Omega; C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R})$, что

$$\|(v_0 - v_0^i, v_1 - v_1^i)\|_2 \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Отметим также, что соотношение (2.1) при $\{v_0^i\} \subset C_0^\infty(\Omega) \cap K_0$ выполняется и в случае, когда $(v_0, v_1) \in K_2$, поскольку множество $C_0^\infty(\Omega) \cap K_0$ (см. (1.19)) плотно в K_0 в соответствии с [4, §3].

Из липшицевости F следует также неравенство Пуанкаре

$$\|\varphi\|_{L^2(F)}^2 \leq C \|\nabla_y \varphi\|_{L^2(F)^n}^2, \quad \varphi \in H_P^1(F)/\mathbb{R} \quad (2.2)$$

(см., например, [10, гл. 1, предложение 1.2]). Тогда непосредственно из определенных заключаем, что также выполнено неравенство

$$\|v_1\|_{L^2(\Omega; L^2(F))}^2 \leq C \|\nabla_y v_1\|_{L^2(\Omega; L^2(F)^n)}^2, \quad v_1 \in L^2(\Omega; H_P^1(F)/\mathbb{R}). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.1. Выбирая $v = 0$ в неравенстве из (1.7) и добавляя соответствующие интегралы, имеем

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n}^2 &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} \\ &\quad + \beta \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n}, \end{aligned}$$

где учтены неравенства Гёльдера и соотношения (1.4), (1.6). В этом случае для получения оценки

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n}^2 \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n}^2) \quad (2.4)$$

достаточно воспользоваться неравенством Юнга $ab \leq (\sigma/2)a^2 + b^2/(2\sigma)$ и неравенством треугольника $\|\nabla u_\varepsilon\| - \|\nabla \psi_\varepsilon\| \leq \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|$.

Таким образом, последовательности $\{u_\varepsilon\}$ и $\{\nabla u_\varepsilon\}$ решений задачи (1.7) и градиентов этих решений равномерно ограничены в $L^2(\Omega_\varepsilon)$ и $L^2(\Omega_\varepsilon)^n$ соответственно. Тогда утверждения о сходимости из утверждения 1.1 следуют из результатов работы [9, доказательство теоремы 2.9], а утверждение о неотрицательности u_0 доказано фактически в [15, лемма 4.2], что завершает доказательство утверждения 1.1.

Отметим, что лемма 4.2 из [15] сформулирована при значительно более общих предположениях о регулярности границы S_ε , но в доказательстве этой леммы используется разрешимость неоднородной 1-периодической задачи Неймана [15, (4.9)]. Однако разрешимость такой задачи известна при условии липшицевости границы S (см., например, [6]). При этом условии регулярности определено

и понятие граничного интеграла по S (например, в соответствии с [2, гл. 1, § 1.6]), также используемое в доказательстве лемма 4.2 из [15].

ЛЕММА 2.1. Пусть $\psi_0, u_0 \in H_0^1(\Omega)$ и $\psi_1, u_1 \in L^2(\Omega; H_P^1(F)/\mathbb{R})$ определены в утверждении 1.1. Тогда $(u_0, u_1) \in K_2$ удовлетворяет вариационному неравенству (1.15) для каждого $(v_0, v_1) \in K_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w(x, y) \in C_0^\infty(\Omega; C_P^\infty(Y))$. Непосредственно из определения (1.10) следует, что

$$w\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{2} w(x, y), \quad \chi_\varepsilon w\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{2} \chi w(x, y) \quad (2.5)$$

(см. [8], [9]). Хорошо известна также следующая формула дифференцирования быстроосциллирующих функций:

$$\nabla\left(w\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = (\varepsilon^{-1} \nabla_y w(x, y) + \nabla_x w(x, y)), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Выберем в неравенстве из (1.8) тестовую функцию

$$v_\varepsilon = v_0(x) + \varepsilon v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \delta e_\varepsilon, \quad (2.7)$$

где $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, $v_0 \geq 0$ в Ω , $v_1 \in C_0^\infty(\Omega; C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R})$ и подходящее e_ε построено в [11, гл. 4, § 1], где для липшицевой границы $\partial\Omega$ следует также учесть теорему Радемахера (см., например, [20]). Тогда, учитывая (1.6), неравенство из (1.8) можно представить в виде

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\psi_\varepsilon + \nabla v_0 + \nabla_y v_1^\varepsilon\right) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1^\varepsilon - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(v_0 - u_\varepsilon) dx + \sigma_\varepsilon, \quad (2.8)$$

где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon = 0$, поскольку $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla v_\varepsilon - \nabla v_0 - \nabla_y v_1^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} = 0$ в силу (2.6) и (2.7).

В соответствии с (2.1) найдутся такие последовательности $\{\psi_0^i\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ и $\{\psi_1^i\} \subset C_0^\infty(\Omega; C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R})$, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla\psi_0 + \nabla_y\psi_1 - \nabla\psi_0^i - \nabla_y\psi_1^i\|_{L^2(\Omega \times F)^n} = 0. \quad (2.9)$$

Кроме того, из (1.11) следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \nabla\psi_\varepsilon(x) - \nabla\psi_0^i(x) - (\nabla_y\psi_1^i)\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} = 0 \quad (2.10)$$

в соответствии с [9, доказательство теоремы 1.8].

Следовательно, неравенство (2.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \chi_\varepsilon a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\psi_0^i + (\nabla_y\psi_1^i)^\varepsilon + \nabla v_0 + \nabla_y v_1^\varepsilon\right) (\chi_\varepsilon \nabla v_0 + \chi_\varepsilon \nabla_y v_1^\varepsilon - \chi_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) dx + \sigma_\varepsilon^i \\ & \geq \int_{\Omega} f(\chi_\varepsilon v_0 - \chi_\varepsilon u_\varepsilon) dx + \sigma_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon^i = 0$ в силу (1.6) и (2.10). Используя определение (1.10), соотношения (2.5) и утверждение 1.1, перейдем в неравенстве (2.11) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку из (1.6) следует, что

$$\begin{aligned} & |\chi a(y, \nabla \psi_0^i + \nabla_y \psi_1^i + \nabla v_0 + \nabla_y v_1)| \\ & \leq C |\chi (\nabla \psi_0^i + \nabla_y \psi_1^i + \nabla v_0 + \nabla_y v_1)| \quad \text{п.в. в } \Omega \times Y, \end{aligned}$$

и поэтому вектор-функцию $\chi a(y, \nabla \psi_0^i + \nabla_y \psi_1^i + \nabla v_0 + \nabla_y v_1)$ (после непосредственной проверки, что эта вектор-функция непрерывна по $x \in \overline{\Omega}$ для п.в. $y \in Y$) можно рассматривать как тестовую вектор-функцию $\varphi(x, y)$ из определения (1.10). Следовательно, переходя в неравенстве (2.11) к пределу (по подпоследовательности из утверждения 1.1), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y \chi a(y, \nabla \psi_0^i + \nabla_y \psi_1^i + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) (\chi \nabla v_0 + \chi \nabla_y v_1 - \chi \nabla u_0 - \chi \nabla_y u_1) dy dx \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon^i \geq \int_{\Omega} \int_Y f(\chi v_0 - \chi u_0) dy dx \end{aligned}$$

(для фиксированного i), где учтено также, что в определении (1.10) можно выбрать тестовую функцию $\varphi(=f(x))$ из $L^2(\Omega)$ (см. [8], [9]).

Переходя в последнем неравенстве к пределу по i и используя (1.6) и (2.9), получаем, что u_0 и u_1 из утверждения 1.1 удовлетворяют неравенству (1.15) для гладких и финитных функций v_0 и v_1 , $v_0 \in K_0$. Пусть $(w_0, w_1) \in K_2$. В соответствии с (2.1) найдутся такие последовательности $\{v_0^i\} \subset C_0^\infty(\Omega) \cap K_0$ и $\{v_1^i\} \subset C_0^\infty(\Omega; C_P^\infty(Y)/\chi\mathbb{R})$, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla w_0 + \nabla_y w_1 - \nabla v_0^i - \nabla_y v_1^i\|_{L^2(\Omega \times F)^n} = 0.$$

Таким образом, учитывая данное соотношение и (1.6), заключаем, что неравенство (1.15) выполнено и для каждого $(w_0, w_1) \in K_2$, поскольку это неравенство выполнено для $v_0 = v_0^i$ и $v_1 = v_1^i$ при каждом i и можно перейти к пределу по i , что завершает доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.2. В соответствии с леммой 2.1 существует некоторое решение $(u_0, u_1) \in K_2$ вариационного неравенства (1.15) для всех $(v_0, v_1) \in K_2$. Фиксируем $(w_0, w_1) \in K_2$ и выберем

$$(v_0, v_1) = (u_0 + \sigma(w_0 - u_0), u_1 + \sigma(w_1 - u_1)), \quad 0 < \sigma \leq 1,$$

в неравенстве из (1.15). В этом случае имеем $(v_0, v_1) \in K_2$ (поскольку множество K_0 выпукло) и неравенство из (1.15) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_F a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \sigma \nabla(w_0 - u_0) + \nabla_y u_1 + \sigma \nabla_y(w_1 - u_1)) \\ & \times (\nabla w_0 + \nabla_y w_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \geq \int_{\Omega} \int_F f(w_0 - u_0) dy dx, \end{aligned}$$

где $(w_0, w_1) \in K_2$. Используя (1.6), в этом неравенстве можно перейти к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ и заключить, что $(u_0, u_1) \in K_2$ является решением вариационного неравенства (1.16).

Пусть $(u_0, u_1) \in K_2$ – некоторое решение задачи (1.16). Из соотношения (1.6) следует, что $a(y, \xi)(\xi - \zeta) \geq a(y, \zeta)(\xi - \zeta)$ п.в. в F для всех $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$. Выберем в этом неравенстве $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla_y\psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1$ и $\zeta = \nabla\psi_0 + \nabla_y\psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1$ для п.в. $x \in \Omega$ и п.в. $y \in F$ и проинтегрируем результат по $\Omega \times F$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_F a(y, \nabla\psi_0 + \nabla_y\psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) \\ & \quad \times (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_F a(y, \nabla\psi_0 + \nabla_y\psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) \\ & \quad \times (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \geq \int_{\Omega} \int_F f(v_0 - u_0) dy dx \end{aligned}$$

для $(v_0, v_1) \in K_2$, поскольку $(u_0, u_1) \in K_2$ является решением задачи (1.16). Таким образом, вариационное неравенство (1.15) для всех $(v_0, v_1) \in K_2$ эквивалентно вариационному неравенству (1.16). Это утверждение является аналогом леммы Минти (см. [20, лемма III.1.5]) для двухмасштабного вариационного неравенства (1.16).

Предположим, что $(u_0^1, u_1^1) \in K_2$ и $(u_0^2, u_1^2) \in K_2$ являются решениями вариационного неравенства (1.16). Рассмотрим это неравенство для (u_0^1, u_1^1) и выберем $(v_0, v_1) = (u_0^2, u_1^2)$. Аналогично, рассмотрим это неравенство для (u_0^2, u_1^2) и выберем $(v_0, v_1) = (u_0^1, u_1^1)$. Суммируя эти неравенства, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_F (a(y, \nabla\psi_0 + \nabla_y\psi_1 + \nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1) \\ & \quad - a(y, \nabla\psi_0 + \nabla_y\psi_1 + \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2)) (\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 - \nabla u_0^2 - \nabla_y u_1^2) dy dx \leq 0. \end{aligned}$$

В силу условия строгой монотонности из (1.6) это неравенство является фактически равенством, которое подразумевает, что

$$\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 = \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2 \text{ п.в. в } \Omega \times F.$$

Следовательно, выполнено равенство $\|(u_0^1 - u_0^2, u_1^1 - u_1^2)\|_2 = 0$, и поэтому $u_0^1 = u_0^2$ и $u_1^1 = u_1^2$, поскольку равенство (1.13) определяет норму на H_2 (в соответствии с [9]), что доказывает единственность решения задачи (1.16). Утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.3. Известно [1, гл. 2, § 8.1], что для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение вариационного неравенства (1.17) и это неравенство эквивалентно задаче (1.18).

Фиксируем $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда для завершения доказательства утверждения достаточно проверить, что $\nabla_y U(\xi_i) \rightharpoonup \nabla_y U(\xi)$ слабо в $L_P^2(F)^n$ при $i \rightarrow \infty$, если $|\xi_i - \xi| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, где $U(\xi_i) \in H_P^1(F)/\mathbb{R}$ является единственным решением задачи (1.18) для $\xi_i \in \mathbb{R}^n$ и $U(\xi)$ – единственное решение задачи (1.18) для $\xi \in \mathbb{R}^n$. Из соотношений (1.6) и (1.18) для $V = U(\xi)$ следует, что

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla_y U(\xi)\|_{L_P^2(F)^n}^2 & \leq \int_F (a(y, \nabla_y U) - a(y, \xi + \nabla_y U)) \nabla_y U dy \\ & \leq \|a(y, \nabla_y U) - a(y, \xi + \nabla_y U)\|_{L_P^2(F)^n} \|\nabla_y U(\xi)\|_{L_P^2(F)^n}, \end{aligned}$$

и поэтому $\|\nabla_y U(\xi)\|_{L_P^2(F)^n} \leq (\beta\sqrt{\theta}/\alpha)|\xi|$ (см. (1.20)). Таким образом, можно считать, что последовательность $\{\nabla_y U(\xi_i)\} \subset L_P^2(F)^n$ является равномерно (по i) ограниченной и найдется такое $W \in H_P^1(F)/\mathbb{R}$, что (после выделения подпоследовательности) при $i \rightarrow \infty$

$$\nabla_y U(\xi_i) \rightharpoonup \nabla_y W \text{ слабо в } L_P^2(F)^n. \quad (2.12)$$

Рассмотрим задачу (1.18) для $\xi_i \in \mathbb{R}^n$. Известно [1], [20], что эта задача эквивалентна вариационному неравенству для $U(\xi_i) \in H_P^1(F)/\mathbb{R}$:

$$\int_F a(y, \xi_i + \nabla_y V) (\nabla_y V - \nabla_y U(\xi_i)) dy \geq 0 \quad \forall V \in H_P^1(F)/\mathbb{R}.$$

Для фиксированного $V \in H_P^1(F)/\mathbb{R}$ в этом неравенстве можно перейти к пределу по i (используя только (2.12), поскольку $a(y, \xi_i + \nabla_y V) \rightarrow a(y, \xi + \nabla_y V)$ сильно в $L_P^2(F)^n$) и заключить, что $W = U(\xi)$ в силу единственности решения задачи (1.18). Утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.4. Из слабой непрерывности функции $U(\xi)$ и сепарабельности пространства $H_P^1(F)/\mathbb{R}$ (поскольку F является компактным многообразием) следует сильная измеримость этой функции по теореме Петтиса (см., например, [28]).

Из (1.6) следует, что $0 \leq a(y, \xi)(\xi - \zeta) - a(y, \zeta)(\xi - \zeta)$ п.в. в F для каждого $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$. Выберем в этом неравенстве $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)$ и $\zeta = \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1$ для п.в. $x \in \Omega$ и п.в. $y \in F$ и проинтегрируем результат по $\Omega \times F$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \int_F a(y, \eta + \nabla_y U(\eta)) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \int_F a(y, \eta + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где введено обозначение $\eta = \nabla\psi_0 + \nabla u_0$.

Выбирая $v_0 = u_0$ и $v_1 = U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1$ в неравенстве из (1.16), получаем

$$\int_{\Omega} \int_F a(y, \eta + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx \geq 0. \quad (2.14)$$

Выбирая $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla u_0$ и $V = U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1 - u_1$ (для п.в. $x \in \Omega$) в (1.18) и интегрируя результат по Ω , имеем равенство

$$\int_{\Omega} \int_F a(y, \eta + \nabla_y U(\eta)) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx = 0.$$

Используя это равенство и соотношение (2.14), заключаем, что в (2.13) выполнено равенство, и поэтому

$$\nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) = \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1 \text{ п.в. в } \Omega \times F$$

в силу условия строгой монотонности из (1.6), что с учетом (2.3) завершает доказательство утверждения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Используя утверждение 1.4 и выбирая $v_1 = u_1$ в (1.16), заключаем, что u_0 (определенное в утверждении 1.1) является решением осредненной задачи (1.19), а $\hat{u}_0 = \psi_0 + u_0$ является решением осредненной задачи (1.21).

Из (1.6) следует, что $0 \leq (a(y, \xi) - a(y, \zeta))(\xi - \zeta)$ п.в. в F для каждого $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$. Выберем в этом неравенстве $\xi = \eta + \nabla_y U(\eta)$ и $\zeta = \tau + \nabla_y U(\tau)$ для п.в. $y \in F$ и $\eta, \tau \in \mathbb{R}^n$ (где $U(\eta)$ и $U(\tau)$ – решения задачи (1.18)) и проинтегрируем результат по F . В этом случае имеем

$$0 \leq \int_F (a(y, \eta + \nabla_y U(\eta)) - a(y, \tau + \nabla_y U(\tau))) \times (\eta + \nabla_y U(\eta) - \tau - \nabla_y U(\tau)) dy. \quad (2.15)$$

Учитывая (1.18) и определение (1.20) в этом неравенстве, получаем для $\eta, \tau \in \mathbb{R}^n$ неравенство $0 \leq (A(\eta) - A(\tau))(\eta - \tau)$, что доказывает монотонность вектор-функции $A(\eta)$.

Предположим, что в (2.15) выполнено равенство. Тогда из (1.6) имеем $\eta - \tau + \nabla_y U(\eta) - \nabla_y U(\tau) = 0$ п.в. в F . Используя 1-периодичность, продолжим это равенство на F_1 . Тогда $\nabla_y ((\eta - \tau)y + U(\eta) - U(\tau)) = 0$, и поэтому $(\eta - \tau)y + U(\eta) - U(\tau) = C$, поскольку F_1 связно. Функция $U(\eta) - U(\tau)$ определена с точностью до постоянной, и можно считать, что $C = 0$. Таким образом, выполнено равенство $(\tau - \eta)y = U(\eta) - U(\tau)$, и поэтому $\eta = \tau$, поскольку функция $U(\eta) - U(\tau)$ является 1-периодической, что доказывает строгую монотонность вектор-функции $A(\eta)$.

Таким образом, решение u_0 осредненной задачи (1.19) (определенное в утверждении 1.1) является единственным. Тогда непосредственно из утверждений 1.1–1.4 следует, что

$$\chi_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon \xrightarrow{2} \chi \hat{u}_0, \quad \chi_\varepsilon \nabla \hat{u}_\varepsilon \xrightarrow{2} \chi \nabla \hat{u}_0 + \chi \nabla_y U(\nabla \hat{u}_0)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ без выделения подпоследовательностей, поскольку предельные функции определены однозначно.

Кроме того, $\chi_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \theta \hat{u}_0$ слабо в $L^2(\Omega)$, поскольку в определении (1.10) можно выбрать тестовую функцию φ из $L^2(\Omega)$ (см. [8], [9]). Тогда, используя лемму о компактности [3, лемма 3.3], получаем

$$\|\hat{u}_\varepsilon - \hat{u}_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

что завершает доказательство теоремы.

Отметим, что доказано также и следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть $(u_0, u_1) \in K_2$ является решением вариационного неравенства (1.16). Тогда $(u_0, u_1) = (u_0, U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1)$, где $u_0 \in K_0$ является единственным решением вариационного неравенства (1.19), $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением задачи (1.18), а ψ_0 и ψ_1 определены в утверждении 1.1.

На самом деле верно и обратное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Пусть $u_0 \in K_0$ является единственным решением вариационного неравенства (1.19), $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением задачи (1.18), а ψ_0 и ψ_1 определены в утверждении 1.1. Тогда $(u_0, u_1) = (u_0, U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1)$ является единственным решением вариационного неравенства (1.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что ψ_0 и ψ_1 определены однозначно в соответствии с предположениями. Пусть $(v_0, v_1) \in K_2$ и $u_1 = U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1$. Выберем $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla u_0$ и $V = v_1 - u_1$ (для п.в. $x \in \Omega$) в задаче (1.18) и проинтегрируем результат по Ω . Тогда, добавляя полученное соотношение к неравенству из (1.19), получим в точности вариационное неравенство (1.16), которое имеет единственное решение в соответствии с доказательством утверждения 1.2, что завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6. Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 1.5, в котором просто не учитывается неотрицательность рассматриваемых функций. Здесь полезно еще раз напомнить, что вариационное уравнение (1.22) эквивалентно вариационному неравенству (1.7), в котором K заменено на $H_D^1(\Omega_\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.7. Доказательство этой теоремы также повторяет доказательство теоремы 1.5. Следует только отметить, что $u_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon - \hat{\psi}_\varepsilon \in H_D^1(\Omega_\varepsilon)$ в соответствии с (1.22), но $\hat{u}_\varepsilon$ может не принадлежать пространству $H_D^1(\Omega_\varepsilon)$, поскольку $\{\hat{\psi}_\varepsilon\} \subset H^1(\Omega_\varepsilon)$. Тогда

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

как и в доказательстве теоремы 1.5, а из результатов работы [3, лемма 2.3] следует, что для каждого $\omega \Subset \Omega$ выполнено соотношение

$$\|\hat{u}_\varepsilon - \hat{u}_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \cap \omega)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Разумеется, и $\|\hat{u}_\varepsilon - \hat{u}_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0$, если $\|\hat{\psi}_\varepsilon - \hat{\psi}_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако последнее соотношение для $\hat{\psi}_\varepsilon$ не следует из (1.24) и (1.25) и может не выполняться в общем случае для $\{\hat{\psi}_\varepsilon\} \subset H^1(\Omega_\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.8. Из соотношений (1.6) и (1.28) следует, что

$$b(y, \xi) - b(y, \zeta) \geq a(y, \zeta)(\xi - \zeta) \quad (2.16)$$

п.в. в F для любых $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ (см. [13, утверждения I.5.4 и I.5.5]). Более того, из предположений (1.6) также следует, что

$$0 \leq b(y, \xi) - b(y, \zeta) - a(y, \zeta)(\xi - \zeta) \leq \frac{\beta}{2} |\xi - \zeta|^2 \quad (2.17)$$

п.в. в F для любых $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$. Действительно, используя непрерывность (по ξ) функций $b(y, \xi)$ и $a(y, \xi)$, имеем соотношения

$$\begin{aligned} b(y, \xi) - b(y, \zeta) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} b(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) dt \\ &= \int_0^1 \nabla_\xi b(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) dt (\xi - \zeta) \\ &= a(y, \zeta)(\xi - \zeta) + \int_0^1 (a(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) - a(y, \zeta)) dt (\xi - \zeta), \end{aligned}$$

которые доказывают второе неравенство из (2.17), а первое неравенство из (2.17) эквивалентно неравенству (2.16).

Пусть $u_0 \in K_0$ является решением осредненной задачи (1.19) и $v_0 \in K_0$. Выберем в неравенстве (2.16) $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla v_0)$ и $\zeta = \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)$ для п.в. $x \in \Omega$ и п.в. $y \in F$ и проинтегрируем результат по $\Omega \times F$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_F b(y, \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla v_0)) dy dx \\ & \quad - \int_{\Omega} \int_F b(y, \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_F a(y, \eta + \nabla_y U(\eta)) (\nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla v_0) \\ & \quad - \eta - \nabla_y U(\eta)) dy dx \geq \int_{\Omega} \int_F f(v_0 - u_0) dy dx, \end{aligned}$$

поскольку u_0 удовлетворяет неравенству из (1.19), в котором учтено утверждение 1.4 и выбрано $v_1 = U(y, \nabla\psi_0(x) + \nabla v_0(x)) - \psi_1(x, y)$. Здесь $\eta = \nabla\psi_0 + \nabla u_0$. Из этих неравенств следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_F (b(y, \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla v_0)) - f v_0) dx dy \\ & \geq \int_{\Omega} \int_F (b(y, \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)) - f u_0) dy dx \end{aligned} \quad (2.18)$$

для всех $v_0 \in K_0$. По определению это означает, что $u_0 \in K$ является решением осредненной задачи минимизации (1.31).

Предположим, что $u_0 \in K_0$ является решением осредненной задачи минимизации (1.31), и поэтому выполнено (2.18). Для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим задачу минимизации (1.30). В соответствии с определением решения $U(\xi) \in H_P^1(F)/\mathbb{R}$ этой задачи выполнено неравенство

$$\int_F b(y, \xi + \nabla_y V) dy \geq \int_F b(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) dy \quad \forall V \in H_P^1(F)/\mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Пусть $(v_0, v_1) \in K_2$. Выбирая $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla v_0$ и $V = v_1$ (для п.в. $x \in \Omega$) в (2.19) и интегрируя результат по Ω , имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_F b(y, \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_F b(y, \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla v_0)) dy dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Учитывая это неравенство, из (2.18) получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_F b(y, \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) dy dx \\ & \quad - \int_{\Omega} \int_F b(y, \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_F f(v_0 - u_0) dy dx. \end{aligned}$$

Выберем в этом соотношении $v_0 = u_0 + \sigma(w_0 - u_0)$ и $v_1 = U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)$, где $w_0 \in K_0$ и $0 < \sigma \leq 1$. Тогда, учитывая неравенство (2.17), в котором выбрано $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \sigma\nabla(w_0 - u_0) + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)$ и $\zeta = \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)$, имеем

$$\begin{aligned} & \sigma \int_{\Omega} \int_F a(y, \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)) (\nabla w_0 - \nabla u_0) dy dx \\ & + \sigma^2 \int_{\Omega} \int_F |\nabla(w_0 - u_0)|^2 dx \geq \sigma \int_{\Omega} \int_F f(w_0 - u_0) dy dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

для $w_0 \in K_0$, поскольку $\xi - \zeta = \sigma\nabla(w_0 - u_0)$ для выбранных ξ и ζ . Сокращая на σ и переходя к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ в неравенстве (2.21), заключаем, что $u_0 \in K_0$ является решением осредненной задачи (1.19), где учтено, что $\theta > 0$ в силу предположений. Утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.9. Доказательство этого утверждения фактически повторяет доказательство утверждения 1.8. Действительно, решение $(u_0, u_1) \in K_2$ вариационного неравенства (1.16) является решением двухмасштабной задачи минимизации (1.32) в силу неравенства (2.16) с соответствующими ξ и ζ . Обратное утверждение следует из (2.20), утверждения 1.4 и неравенства (2.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.13. Как и в доказательстве утверждения 1.1, проверяется, что последовательности $\{u_\varepsilon\}$ и $\{\nabla u_\varepsilon\}$ решений задачи (1.37) и градиентов этих решений равномерно ограничены в $L^2(\Omega_\varepsilon)$ и $L^2(\Omega_\varepsilon)^n$ соответственно. Тогда утверждения о сходимости следуют из результатов работы [9, доказательство теоремы 2.9].

Кроме того, $\chi_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup \theta u_0$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку в определении (1.10) можно выбрать тестовую функцию φ из $L^2(\Omega)$. Следовательно, используя лемму о компактности [3, лемма 2.3], получаем

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi u_\varepsilon dx \rightarrow \theta \int_{\Omega} \varphi u_0 dx, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap K_0$ (см. (1.19)). Интеграл, стоящий слева в этом соотношении, является неотрицательным в силу предположений (см. (1.37)), и поэтому неотрицателен интеграл, стоящий справа, что доказывает неотрицательность u_0 (поскольку $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap K_0$ произвольно) и утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.14. В неравенстве из (1.38) можно выбрать тестовую функцию $v = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon \delta e_\varepsilon$ (см. (1.14)) и повторить доказательство леммы 2.1. Кроме того, выполнены утверждения, аналогичные утверждениям 1.2–1.4 (без существенных изменений в доказательствах). Таким образом, доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 1.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Несложно проверить, что доказанные утверждения остаются выполненными, если вместо задачи (1.5) рассмотреть более общее вариационное неравенство для $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right) (\nabla \hat{v} - \nabla \hat{u}_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(\hat{v} - \hat{u}_\varepsilon) dx \quad \forall \hat{v} \in K_\varepsilon, \quad (2.22)$$

где последовательность $\{f_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega_\varepsilon)$ является равномерно ограниченной, $\chi_\varepsilon f_\varepsilon \rightharpoonup \theta f$ слабо в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. [3, лемма 3.3]) и f определено однозначно (разумеется, что при неоднозначном определении f в соответствующих утверждениях следует рассматривать подходящие подпоследовательности решений). Это замечание позволяет обобщить доказанные утверждения на случай, когда в задаче (2.22) выбрано $f_\varepsilon = F(x, x/\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon, \nabla \hat{u}_\varepsilon)$ при подходящих предположениях для функции F . Аналогичное замечание относится и к задачам (1.22), (1.26) и (1.36).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Доказанные утверждения остаются выполненными без существенных изменений и в случае, когда в задаче (1.5) множество K_ε заменяется множеством $K_\varepsilon^- \equiv \{\hat{v} \in H_D^1(\Omega_\varepsilon): \hat{v} \leq \psi_\varepsilon \text{ п.в. на } S_\varepsilon\}$. Это замечание позволяет обобщить доказанные утверждения на вариационные неравенства с двухсторонними ограничениями на границе S_ε . Аналогичное замечание относится и к задаче (1.36).

Проверим наконец, что равенство (1.11) выполнено, если ψ_ε определено равенством (1.33), в котором $\psi_1(x, y) \in L^2(\Omega; L_P^\infty(F))$, $\nabla_y \psi_1(x, y), \nabla_x \psi_1(x, y) \in L^2(\Omega; L_P^\infty(F)^n)$, $\psi_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega)$ и $\psi_\varepsilon^0 \rightarrow \psi_0$ сильно в $H_0^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, в этом случае

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla(\psi_\varepsilon^0 - \psi_0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} = 0.$$

Кроме того, из (2.6) и неравенства треугольника имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)^n}$$

и (1.11) следует из равенства (1.35), доказанного в [16], что завершает доказательство утверждений, сформулированных во введении.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992.
3. Allaire G., Murat F. Homogenization of the Neuman problem with non-isolated holes. Paris: Universite Pierre et Marie Curie, 1992.
4. Hedberg L. I. Spectral synthesis in Sobolev spaces, and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem // Acta Math. 1981. V. 147. P. 237–264.
5. Mitrea M., Taylor M. Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds // J. Funct. Anal. 1999. V. 163. № 2. P. 181–251.
6. Агранович М. С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // УМН. 2002. Т. 57. № 5. С. 3–78.
7. Ding Z. A proof of the trace theorem of Sobolev spaces on Lipschitz domains // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. № 2. P. 591–600.
8. Ngutseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608–623.
9. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518.
10. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.
11. Батталов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
12. Allaire G., Briane M. Multiscale convergence and reiterated homogenization // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1996. V. 126A. P. 297–342.
13. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
14. Braides A., Defranceschi A. Homogenization of multiple integrals. N. Y.: Oxford University Press, 1998.

15. *Пастухова С. Е.* Усреднение смешанной задачи с условием Синьорини для эллиптического оператора в перфорированной области // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 2. С. 87–102.
16. *Амосов А. А.* О слабой сходимости одного класса быстроосциллирующих функций // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 1. С. 145–150.
17. *Zhikov V. V.* On the homogenization of nonlinear variational problems in perforated domains // Russian J. Math. Physics. 1994. V. 2. № 3. P. 393–408.
18. *Жиков В. В., Рычаго М. Е.* Усреднение нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 1. С. 69–88.
19. *Сандраков Г. В.* Осреднение вариационных неравенств для задач с регулярным препятствием // Докл. РАН. 2004. Т. 397. № 2. С. 170–173.
20. *Киндерлерер Д., Стампажкья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
21. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
22. *Benoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
23. *Lions J.-L., Sanchez-Palencia E.* Écoulement d'un fluide viscoplastique de Bingham dans un milieu poreux // J. Math. Pures Appl. 1981. V. 60. P. 341–360.
24. *Attouch H., Picard C.* Variational inequalities with varying obstacles: the general form of the limit problem // J. Func. Anal. 1983. V. 50. P. 329–386.
25. *Dal Maso G., Trebeschi P.* Γ -limit of periodic obstacles // Acta Appl. Math. 2001. V. 65. P. 207–215.
26. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
27. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
28. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Киевский национальный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило в редакцию
17.05.2004