Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, Распределение точек дизайна на сфере, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 5, 205–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im661>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:54:56

УДК 517.5

В. А. Юдин

Распределение точек дизайна на сфере

Определены размеры сферических шапок с центрами в точках дизайна, которые покрывают всю сферу евклидового пространства с заданной кратностью. При проектировании q -дизайна на одномерное подпространство получены узлы квадратурной формулы чебышевского типа той же точности q . При больших значениях q установлено равномерное распределение точек минимального q -дизайна на сфере. Построена весовая кубатурная формула на сфере с наименьшим по порядку количеством узлов.

Библиография: 28 наименований.

Введение

Квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 f(t)p(t) dt = \sum_{k=1}^N p_k f(t_k),$$

точная для любого алгебраического многочлена $f(t)$ степени q при равных весах $p_1 = p_2 = \dots = p_N$ и $N = q$, была предложена в работе [1]. Далее будем рассматривать лишь частный случай приведенной квадратурной формулы:

$$p(t) dt = d\mu_n = (1 - t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt \Big/ \int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^{\frac{n-3}{2}} d\tau, \quad n = 3, 4, \dots$$

Совокупность узлов $M = \{t_k\}_1^N$ будем считать принадлежащей классу $V_{q,n}$, если формула

$$\int_{-1}^1 f(t) d\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(t_k) \quad (1)$$

точна для любого многочлена степени q . В работе [1] приведен метод, позволяющий определять M , $M \in V_{q,n}$, с наименьшим количеством узлов $N = q$, однако при $q \rightarrow \infty$ большинство узлов оказываются комплекснозначными. В работе [2], где использовалась теория потенциалов, при $n = 3$ определена кривая, располагающаяся в комплексной плоскости, около которой узлы начинают концентрироваться с ростом q . Если $M \subset [-1, 1]$, то наименьшее количество узлов $N = N_n^*(q)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00986).

множества M , $M \in V_{q,n}$, имеет значительно больший порядок, до настоящего времени не известный. Для краткости записей формул примем обозначение $A \ll B$, под которым понимаем неравенство $A \leq cB$ с некоторой константой c , зависящей только от n .

Нижняя оценка

$$N_n^*(q) \gg q^{n-1} \quad (2)$$

при $n = 3$ получена С.Н. Бернштейном [3] (ее вывод был впоследствии значительно упрощен [4]); общий случай $n \geq 3$ рассматривался в работе [5]. Наилучшая в настоящее время верхняя оценка

$$N^*(q) \ll q^n \quad (3)$$

дана в работе [6]. Она неконструктивна, так как при доказательстве используется теорема существования. Подобные исследования проводятся и в многомерном случае на различных компактах. В настоящей статье рассматривается сфера из n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ — скалярное произведение векторов x и y , $|x| = \sqrt{xx}$. Через

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = 1\}, \quad S_\eta^{n-1}(a) = \{x \in S^{n-1}: ax \geq \eta\}, \quad -1 < \eta < 1,$$

обозначим единичную сферу площадью $|S| = |S^{n-1}|$ и сферическую шапку с центром в точке a , $a \in S^{n-1}$, раствора α , $\eta = \cos \alpha$, и площадью S_α .

Множество $W = \{x^{(k)}\}_{k=1}^N$, $W \subset S^{n-1}$, называется [7] *сферическим q -дизайном*, если кубатурная формула

$$\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x^{(k)}) \quad (4)$$

точна для любого алгебраического многочлена степени q , степень монома $x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}$ равна $q_1 + \dots + q_n$. Дизайн называется *минимальным*, если он содержит наименьшее количество точек, которое обозначим через $N = N_n(q)$. В работах [7]–[10] получены двухсторонние оценки

$$q^{n-1} \ll N_n(q) \ll q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \quad (5)$$

Предпринимаются различные шаги по обнаружению закономерностей в расположении точек дизайнов на сфере S^{n-1} . Широкий круг подобных вопросов рассмотрен в работе [11].

Настоящая работа состоит из четырех параграфов. В §1 покажем, как различными множествами с центрами в точках сферического дизайна можно осуществить кратные покрытия сферы. В §2 установим, что проекция сферического q -дизайна на одномерное подпространство $\mathbb{R}^n$ приводит к “хорошим” квадратурным формулам, в том числе вида (1), $M \subset [-1, 1] \in V_{q,n}$; докажем неравенство

$N_n^*(q) \leq N_n(q)$, из которого следует связь между количеством узлов квадратурной формулы и количеством точек сферического дизайна. В §3 докажем равномерную распределенность минимальных q -дизайнов, $q \rightarrow \infty$, на S^{n-1} . Доля точек W , попавших в выпуклую область D , $D \subset S^{n-1}$, асимптотически равна $\text{meas } D / |S^{n-1}|$. Оценка остаточного члена получается из оценки (5) и прямых теорем теории приближения функций.

Для оценки скорости роста $N_n(q)$ многие авторы высказывают одну и ту же гипотезу: $N_n(q) \ll q^{n-1}$. Эта гипотеза не доказана, конструкции сферических q -дизайнов малой мощности не известны. При получении верхних оценок (5) строились “слойные” конструкции точек на сфере. Немного меняя их структуру, в §4 строим кубатурную формулу

$$\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) dx = \sum_{k=1}^N w_k f(x^{(k)}), \quad \sum_{k=1}^N w_k = 1,$$

с положительными весами $\{w_k\}_1^N$, точную для всех алгебраических многочленов степени q с наилучшим по порядку количеством узлов множества W , $N \ll q^{n-1}$, $n \geq 3$. Для $n = 3$ этот факт можно считать известным (см., например, работы Я. Кореваара). Используя метод индукции по размерности n , можно строить кубатурные формулы для сфер произвольной размерности. Однако при этом получаются громоздкие выкладки, связанные с оценками нулей многочленов Гегенбауэра. В настоящей статье кубатурная формула строится с использованием свойств тригонометрической системы функций. Получаем оценку наименьшего веса w_k .

§1. Кратные покрытия сферы

Через $\{P_k(t)\}_0^\infty$ обозначим, как в работе [12], ортогональную систему многочленов Гегенбауэра с весом $p(t) = (1 - t^2)^{\frac{n-3}{2}}$ на $(-1, 1)$, а через $\{Q_k(t)\}_0^\infty$ — систему ортогональных многочленов Якоби с весом $p(t) = (1 + t)^{\frac{n-1}{2}} (1 - t)^{\frac{n-3}{2}}$. Пусть $\{t_i\}_1^k$ — нули $P_k(t)$, а $\{t'_i\}_1^k$ — нули $Q_k(t)$, расположенные в порядке убывания. Если W — q -дизайн, то [13], [14]

$$\{S_\eta(a)\}_{a \in W} \supset S^{n-1}, \quad \eta = \begin{cases} t_1, & q = 2k - 1, \\ t'_1, & q = 2k. \end{cases} \quad (6)$$

Сферические шапки раствора α , $\eta = \cos \alpha$, с центрами в точках сферического q -дизайна полностью покрывают сферу. Это утверждение использовалось в [15] для многомерной интерполяции и для решения других задач численного анализа. Отметим, что вложение (6) получено в работе [13] ранее, чем в работе [14]. Соображения, использованные для вывода (6), довольно близки к упоминавшимся в работе [4]. Продолжим эти исследования в случае кратных покрытий сферы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система множеств $E_1, E_2, \dots$ осуществляет покрытие сферы S^{n-1} с кратностью r , $r \in \mathbb{N}$, если для любой точки $x \in S^{n-1}$ существует не менее r различных множеств $E_{i_1}, \dots, E_{i_r}$, ее содержащих.

Через $A_{r,q}$, $1 \leq r < q$, обозначим совокупность многочленов одной переменной t степени $q - r$, разложение которых в ряд Фурье по системе многочленов Гегенбауэра имеет вид

$$f(t) = f_r P_r(t) + \dots + P_{q-r}(t), \quad f(t) \not\equiv 0. \quad (7)$$

Поскольку

$$\int_{-1}^1 f(t) d\mu_n(t) = 0,$$

то $f(t)$ принимает на интервале $(-1, 1)$ как положительные, так и отрицательные значения. Если в множестве $\{t \in [-1, 1]: f(t) \geq 0\}$ имеются изолированные точки, то удалим их и оставшееся множество обозначим через $P(f)$. Для $a \in S^{n-1}$ поставим в соответствие множеству $P(f)$ совокупность точек из S^{n-1} по следующему правилу:

$$E_f(a) = \{x \in S^{n-1}: ax \in P(f)\}.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < q$, и $W = \{x^{(k)}\}_1^N$ — $(q - 1)$ -дизайн. Тогда для любого многочлена (7) совокупность множеств

$$E_f(x^{(1)}), \dots, E_f(x^{(N)}) \quad (8)$$

покрывает сферу S^{n-1} с кратностью r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: существует точка $a \in S^{n-1}$ такая, что она покрывается лишь m , $0 \leq m < r$, раз рассматриваемой системой множеств. В силу их замкнутости существует окрестность точки a , которая также покрывается с кратностью m . Выберем в ней новую точку $b \in S^{n-1}$ так, чтобы все числа $bx^{(1)}, \dots, bx^{(N)}$ не совпадали с корнями многочлена $f(t)$. Таким образом, $f(bx^{(k)}) \neq 0$, $k = 1, \dots, N$. Без ограничения общности можно считать, что множества $E_f(x^{(1)}), \dots, E_f(x^{(m)})$ содержат точку b , а остальные множества $E_f(x^{(m+1)}), \dots, E_f(x^{(N)})$ ее не содержат. Рассмотрим многочлены

$$h(x) = f(bx)(xx^{(1)} - \lambda) \dots (xx^{(m)} - \lambda), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ f(bx) = f_r |x|^r P_r\left(\frac{bx}{|x|}\right) + \dots + f_{q-r} |x|^{q-r} P_{q-r}\left(\frac{bx}{|x|}\right).$$

Степень многочлена $f(bx)$ равна $q - r$, значит, степень многочлена $h(x)$ равна $q - r + m$, что по предположению не превосходит $q - 1$. Вначале вычислим среднее значение $h(x)$ на S^{n-1} . По теореме Гаусса [16] сужение многочлена степени m

$$(xx^{(1)} - \lambda) \dots (xx^{(m)} - \lambda), \quad \lambda = \text{const},$$

на S^{n-1} есть линейная комбинация сферических гармоник $Y_0(x), Y_1(x), \dots, Y_m(x)$. Первый множитель $f(bx)$ на S^{n-1} есть линейная комбинация зональных сферических гармоник $P_r(bx), \dots, P_{q-r}(bx)$. Поскольку $m < r$, то из соотношения ортогональности [16] сферических гармоник разных порядков найдем

$$I = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} h(x) dx = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \sum_{i=0}^m Y_i(x) \sum_{k=r}^{q-r} f_k P_k(bx) dx = 0$$

для любой постоянной λ . Выберем для дальнейшего число λ такое, чтобы

$$\max_{1 \leq k < l \leq m} x^{(k)} x^{(l)} \leq \lambda < 1,$$

и вычислим интеграл I другим способом, используя формулу (4). По условию теоремы $W - (q - 1)$ -дизайн и степень $h(x)$ не превосходит $q - 1$, значит,

$$I = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h(x^{(k)}) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{k=1}^m h(x^{(k)}) + \sum_{k=m+1}^N h(x^{(k)}) \right\} = \frac{1}{N} I_1 + \frac{1}{N} I_2.$$

Определим знаки слагаемых в первой сумме. Поскольку $f(bx^{(k)}) > 0$, $k = 1, \dots, m$, и произведение

$$(x^{(k)} x^{(1)} - \lambda) \dots (x^{(k)} x^{(k-1)} - \lambda) (1 - \lambda) \dots (x^{(k)} x^{(m)} - \lambda)$$

имеет знак $(-1)^{m-1}$ в силу выбора λ , то все слагаемые из суммы I_1 имеют знак $(-1)^{m-1}$. Исследуем знаки слагаемых из суммы I_2 . Так как $f(bx^{(k)}) < 0$, $k = m + 1, \dots, N$, и произведение

$$(x^{(k)} x^{(1)} - \lambda) \dots (x^{(k)} x^{(m)} - \lambda), \quad k > m,$$

имеет знак $(-1)^m$, то все слагаемые I_2 имеют все тот же знак $(-1)^{m-1}$. Следовательно, $I \neq 0$. Противоречие. Теорема доказана.

Далее будем выбирать различные многочлены $f(x)$ из класса $A_{r,q}$ и на основании (6) делать заключения о покрытиях. Для этой цели потребуются квадратурная формула Гаусса [12]. Пусть $\{R_m(t)\}_0^\infty$ – ортогональная система многочленов с весом $p(t)$ на $(-1, 1)$, $t_1, \dots, t_m$ – нули $R_m(t)$. Тогда с некоторыми положительными весами $A_1, \dots, A_m$, $A_1 + \dots + A_m = 2$, формула

$$\int_{-1}^1 f(t) p(t) dt = \sum_{\nu=1}^m A_\nu f(t_\nu) \quad (9)$$

точна для любого алгебраического многочлена степени $2m - 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При любых $r, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq j$, имеем

$$f_{j,r}(t) = (-1)^r \frac{P_j^2(t)}{(t-t_1) \dots (t-t_r)} \in A_{r,2j}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Степень многочленов $f_{j,r}(t)$, очевидно, равна $2j - r$, значит, их разложение в ряд Фурье по системе многочленов Гегенбауэра имеет вид

$$f_{j,r}(t) = \sum_{\nu=0}^{2j-r} c_\nu P_\nu(t).$$

Покажем, что первые коэффициенты $c_0, \dots, c_{r-1}$ обращаются в нуль. С этой целью выберем в (9) $p(t) = (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}$, $R_m = P_m$, $m = j$. Поскольку с точностью до числового множителя

$$c_i = \int_{-1}^1 f_{j,r}(t) P_i(t) d\mu_n,$$

а при $i < r$ многочлен $f_{j,r}(t) P_i(t)$ имеет степень, не превосходящую $2j - r + i$, что по условию не превосходит $2j - 1$, то из (9) получим

$$c_i = \sum_{\nu=1}^j A_\nu \frac{P_j^2(t) P_i(t)}{(t-t_1) \dots (t-t_r)} \Big|_{t=t_\nu} = 0.$$

Справедливость (10) установлена.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. При любых $r, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq j$, имеем

$$f'_{j,r}(t) = (-1)^r \frac{Q_j^2(t)(t+1)}{(t-t'_1) \dots (t-t'_r)} \in A_{r,2j+1}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Степень многочленов $f'_{j,r}(t)$ равна $2j + 1 - r$, поэтому их разложение в ряд Фурье по системе многочленов Гегенбауэра имеет вид

$$f'_{j,r}(t) = \sum_{\nu=0}^{2j-r+1} c_\nu P_\nu(t).$$

В формуле (9) положим $p(t) = (1+t)^{\frac{n-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-3}{2}}$, $R_m = Q_m$, $m = j$. С точностью до числового множителя

$$c_i = \int_{-1}^1 f_{j,r}(t) P_i(t) (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{Q_j^2(t) P_i(t)}{(t-t'_1) \dots (t-t'_r)} (1+t)^{\frac{n-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-3}{2}} dt.$$

При $i < r$ многочлен

$$\frac{Q_j^2(t) P_i(t)}{(t-t'_1) \dots (t-t'_r)}$$

имеет степень, не превосходящую $2j - 1$, следовательно, из (9) найдем

$$c_i = \sum_{\nu=1}^j A_\nu \frac{Q_j^2(t) P_i(t)}{(t-t'_1) \dots (t-t'_r)} \Big|_{t=t_\nu} = 0.$$

Справедливость (11) установлена.

Из явного вида многочленов (10) получаем: $P(f_{j,1}) = [t_1, 1]$, $P(f_{j,2}) = [t_2, t_1]$, $P(f_{j,3}) = [t_3, t_2] \cup [t_2, t_1], \dots$. Таким образом, множества $E_{j,r}(a) = E'_{f_{j,r}}(a)$ являются объединением сферических слоев в количестве, равном $\lceil \frac{r+1}{2} \rceil$. Аналогичную структуру имеют множества $E'_{j,r}(a) = E'_{f_{j,r}}(a)$ для многочленов (11).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $W = \{x^{(k)}\}_1^N - (q-1)$ -дизайн. Тогда для $r \leq q/2$, если q четно, совокупность множеств $\{E_{j,r}(x^{(k)})\}_1^N$ покрывает сферу S^{n-1} с кратностью r при $q = 2j$ и для $r \leq (q-1)/2$, если q нечетно, совокупность множеств $\{E'_{j,r}(x^{(k)})\}_1^N$ покрывает сферу S^{n-1} с кратностью r при $q = 2j+1$.

Выбирая в теореме 1 $r = 1$, получаем уже известное вложение (6). При $r = 2$ из теоремы 1 находим, что сферические слои $\{x \in S^{n-1}: t_2 \leq xx^{(k)} \leq t_1\}_1^N$ покрывают сферу S^{n-1} дважды, если $W - (q-1)$ -дизайн и $q = 2j \geq 4$. Аналогично, совокупность сферических слоев $\{x \in S^{n-1}: t'_2 \leq xx^{(k)} \leq t'_1\}_1^N$ покрывает сферу S^{n-1} дважды, если $W - (q-1)$ -дизайн и $q = 2j+1 \geq 5$.

Поскольку множества $P(f_{j,r}), P(f'_{j,r})$ содержатся внутри отрезков $[t_r, 1], [t'_r, 1]$, то из следствия 1 очевидным образом вытекают утверждения, относящиеся к сферическим шапкам: множества

$$\{S_{t_r}(x^{(k)})\}_1^N, \quad \{S_{t'_r}(x^{(k)})\}_1^N$$

покрывают сферу S^{n-1} с кратностью r , если $W - (2j-1)$ - и $2j$ -дизайн соответственно.

При $n = 4$ многочлены Гегенбауэра суть многочлены Чебышева второго рода [12]:

$$P_j(t) = \frac{\sin((j+1)\varphi)}{\sin \varphi}, \quad \cos \varphi = t.$$

Их нули выражаются явно: $t_k = \frac{k\pi}{j+1}$. Значит, из следствия 1 имеем: пусть $W = \{x^{(k)}\}_1^N - (2j-1)$ -дизайн на S^3 ; тогда при любом $r \leq j$ сферические шапки $\{x \in S^3: xx^{(k)} \geq \cos \frac{r\pi}{j+1}\}_1^N$ покрывают сферу S^3 с кратностью r .

Отметим, что можно строить иные многочлены (отличные от (10), (11)), которые также характеризуют распределение дизайнов на S^{n-1} . Рассмотрим два примера:

$$h_1(t) = -\frac{P_{2j}^2(t)}{t^2 - t_j^2}, \quad h_2(t) = -\frac{P_{2j+1}^2(t)}{t(t - t_j)},$$

$$P(h_1) = \{t \in [-1, 1]: |t| \leq t_j\}, \quad P(h_2) = \{t \in [-1, 1]: t_j \leq t \leq 0\}.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в доказательствах утверждений 1, 2, нетрудно получить разложения $h_1(t), h_2(t)$ в ряд Фурье по системе многочленов Гегенбауэра:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= c_2 P_2(t) + \dots + c_{4j-2} P_{4j-2}(t), & h_1(t) &\in A_{2,4j}, \\ h_2(t) &= d_2 P_2(t) + \dots + d_{4j} P_{4j}(t), & h_2(t) &\in A_{2,4j+2}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. 1) Пусть $W = \{x^{(k)}\}_1^N$ — $(4j-3)$ -дизайн на S^{n-1} . Тогда совокупность слоев $\{x \in S^{n-1}: |x^{(k)}x| \leq t_j\}_1^N$ покрывает сферу S^{n-1} с кратностью 2.

2) Пусть $W = \{x^{(k)}\}_1^N$ — $(4j+1)$ -дизайн на S^{n-1} . Тогда совокупность слоев $\{x \in S^{n-1}: t_j \leq x^{(k)}x \leq 0\}_1^N$ покрывает сферу S^{n-1} с кратностью 2.

Здесь специально были выбраны сферические слои, располагающиеся около экватора сферы. Следствие 2 имеет следующую геометрическую интерпретацию: для любого вектора из S^{n-1} в сферическом q -дизайне найдутся два различных вектора, “почти ортогональных” ему при больших q . Вопрос о наилучшем выборе многочленов $h_1(t)$, $h_2(t)$ не рассматривается, так как при этом возникают нерешенные экстремальные задачи. Например, для $q \geq 4$ необходимо сконструировать многочлен $h(t)$ вида

$$h(t) = h_2 P_2(t) + \dots + h_{q-2} P_{q-2}(t), \quad h(t) \neq 0,$$

такой, чтобы он удовлетворял неравенствам

$$\begin{aligned} h(t) &\geq 0, & |t| &\leq \Delta, \\ h(t) &\leq 0, & \Delta &\leq |t| \leq 1, \end{aligned}$$

с наименьшим значением Δ .

§ 2. Проекция сферического дизайна

Пусть a — произвольная точка из S^{n-1} и W — q -дизайн. Рассмотрим проекцию всех точек множества W на одномерное пространство, порожденное точкой a . Получим набор чисел $\{ax\}_{x \in W} = M$ из отрезка $[-1, 1]$. Покажем, что он дает “хорошие” узлы для квадратурных формул (1) чебышевского типа.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 3$ и $W = \{x^{(k)}\}_1^N$ — q -дизайн на S^{n-1} . Тогда для любого $a \in S^{n-1}$ совокупность узлов $M = \{ax^{(k)}\}_1^N$ принадлежит $V_{q,n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H(t)$ — произвольный алгебраический многочлен степени q . Разложим его по системе многочленов Гегенбауэра в ряд Фурье:

$$H(t) = c_0 + c_1 P_1(t) + \dots + c_q P_q(t),$$

и поставим ему в соответствие алгебраический многочлен n переменных по следующему правилу:

$$h(x) = c_0 + c_1 |x| P_1\left(\frac{ax}{|x|}\right) + \dots + c_q |x|^q P_q\left(\frac{ax}{|x|}\right).$$

Поскольку интеграл от гармонического многочлена $|x|^k P_k\left(\frac{ax}{|x|}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, по S^{n-1} равен нулю [16], то из определения дизайна (4) найдем

$$I = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} h(x) dx = c_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h(x^{(k)}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N H(ax^{(k)}). \quad (12)$$

Так как многочлены $\{P_k(t)\}_0^\infty$ образуют ортогональную [12] с весом $p(t) = (1 - t^2)^{\frac{n-3}{2}}$ систему на $(-1, 1)$, то

$$\int_{-1}^1 H(t) d\mu_n = c_0. \quad (13)$$

Приравнивая (12) и (13), находим, что для любого $a \in S^{n-1}$ и любого алгебраического многочлена степени q

$$\int_{-1}^1 H(t) d\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N H(ax^{(k)}).$$

Теорема доказана.

Как следствие, получаем неравенство

$$N_n^*(q) \leq N_n(q), \quad q \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3,$$

из которого имеем: нижняя оценка (5) вытекает из оценки (2); верхняя оценка (5) дает оценку сверху для $N_n^*(q)$, но здесь содержателен лишь случай $n = 3$ (см. (3)).

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1. Пусть W , $W \subset S^{n-1}$, состоит из $2n$ точек $\{\pm 1, 0, \dots, 0\}, \dots, \{0, \dots, 0, \pm 1\}$, W есть [7] минимальный 3-дизайн. Следовательно, $2n$ точек $\pm a_1, \dots, \pm a_n$ при любом $a \in S^{n-1}$ принадлежат $V_{3,n}$. Если выбрать $a = \{1, 0, \dots, 0\}$, $a = \{\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\}$, то получаем известные [4] квадратурные формулы

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t) d\mu_n &= \frac{1}{2n} \{f(-1) + (2n-2)f(0) + f(1)\}, \\ 2 \int_{-1}^1 f(t) d\mu_n &= f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

точные для любого алгебраического многочлена $f(t)$ третьей степени.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 3$ и W состоит из 12 вершин икосаэдра, расположенных на сфере S^2 ; W есть [7] минимальный 5-дизайн. Если в качестве a возьмем одну из вершин W , то придем к квадратурной формуле

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{6} \left\{ f(-1) + 5f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 5f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + f(1) \right\}.$$

Если в качестве a взять единичную нормаль к одной из 20 граней икосаэдра, то приходим к формуле вида (1):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t) dt &= \frac{1}{2} \left\{ f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}\right) \right. \\ &\quad \left. + f\left(\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Последние две формулы также известны [4] и точны для многочленов пятого порядка. Здесь a выбиралось так, чтобы расположить W на наименьшем количестве параллельных плоскостей. Для почти всех $a \in S^{n-1}$, очевидно, получаем двухпараметрическое семейство узлов $M = \{ax\}_{x \in W}$, состоящее из 12 точек, $M \subset V_{5,3}$. Отметим, что количество параметров можно увеличить, рассматривая другие конфигурации. В качестве W рассмотрим одну из двух “спорадических” конфигураций, открытых в работе [17]. Она состоит из трех частей: $W = L_+ \cup L_0 \cup L_-$, где

$$L_+ = \left\{ \sqrt{\frac{2}{5}} \cos \frac{2k\pi}{5}, \sqrt{\frac{2}{5}} \sin \frac{2k\pi}{5}, \sqrt{\frac{3}{5}} \right\}_{k=1}^5, \quad L_- = -L_+.$$

Множества L_+ , L_- – вершины двух правильных пятиугольников, симметричные относительно начала координат. Множество L_0 есть совокупность вершин правильного восьмиугольника, произвольным образом расположенных на экваторе сферы S^2 :

$$L_0 = \left\{ \cos \left(\frac{k\pi}{4} - \alpha \right), \sin \left(\frac{k\pi}{4} - \alpha \right), 0 \right\}_{k=1}^8, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

В работе [17] доказано, что для любого α множество $W(\alpha)$, состоящее из 18 точек, всегда есть 5-дизайн. Следовательно, для почти всех $a \in S^2$ получаем уже трехпараметрическое множество $M = \{ax\}_{x \in W(\alpha)}$ узлов квадратурной формулы чебышевского типа класса $V_{5,3}$.

Рассмотрим еще две конфигурации, приводящие к несимметрическим формулам.

ПРИМЕР 3. Пусть множество W состоит из $n+1$ вершин правильного симплекса, вписанного в S^{n-1} ; W – минимальный 2-дизайн. Выбирая в качестве a одну из его вершин, получаем квадратурные формулы

$$\int_{-1}^1 f(t) d\mu_n = \frac{1}{n+1} \left\{ f(1) + n f \left(-\frac{1}{n} \right) \right\},$$

точные для любого многочлена $f(t)$ второго порядка.

ПРИМЕР 4. Пусть $n = 5$ и множество W состоит из трех групп векторов. Первая группа состоит из одного вектора, все координаты которого равны $1/\sqrt{5}$. Вторая группа состоит из 10 векторов, две произвольные координаты которых равны $-1/\sqrt{5}$, а остальные три равны $1/\sqrt{5}$. Третья группа состоит из пяти векторов, одна произвольная координата которых равна $1/\sqrt{5}$, а остальные четыре равны $-1/\sqrt{5}$. Множество W , состоящее из 16 точек, является [7] минимальным 3-дизайном и, очевидно, несимметрично: $W \neq -W$. Поэтому, выбрав в качестве a вершину из первой группы, получаем несимметричную формулу

$$\int_{-1}^1 f(t) d\mu_5 = \frac{1}{16} \left\{ f(1) + 10 f \left(\frac{1}{5} \right) + 5 f \left(-\frac{3}{5} \right) \right\},$$

точную для любого алгебраического многочлена третьей степени.

В заключение параграфа отметим интересную работу [18], в которой изучалась связь между сферическими дизайнами и весовыми кубатурными формулами интегрирования на шаре.

§ 3. Равномерное распределение

Будем рассматривать области D , помещающиеся в сферические шапки раствора, меньшего π . Область D назовем *выпуклой*, если для любых точек $x, y \in D$ соединяющая их наименьшая дуга большого круга также принадлежит D . Докажем, что доля множества точек сферического q -дизайна, попавших в D , асимптотически равна отношению площадей $\text{meas } D / \text{meas } S^{n-1}$, $q \rightarrow \infty$.

В случае одной переменной хорошо известен метод, которым успешно пользовался А. А. Марков [23] и многие другие. Применим этот метод для исследования дизайнов. Пусть $h^-(x)$, $h^+(x)$ – сужения на единичную сферу S^{n-1} алгебраических многочленов $x = (x_1, \dots, x_n)$ степени q , которые с характеристической функцией $f(x)$ области D связаны неравенствами

$$h^-(x) \leq f(x) \leq h^+(x), \quad x \in S^{n-1}. \quad (14)$$

Разложим (например, по формуле Гаусса [16]) $h^-(x)$, $h^+(x)$ по сферическим гармоникам:

$$h^-(x) = Y_0^- + \dots + Y_q^-(x), \quad h^+(x) = Y_0^+ + \dots + Y_q^+(x).$$

Пусть $W = \{x^{(k)}\}_1^N$ – q -дизайн. Полагая в (14) $x = x^{(k)}$ и суммируя по k от 1 до N , получим

$$\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} h^-(x) dx = Y_0^- \leq \frac{1}{N} \sum_{k: x^{(k)} \in D} 1 \leq Y_0^+ = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} h^+(x) dx. \quad (15)$$

Через

$$E_q^+(f) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} [h^+(x) - f(x)] dx, \\ E_q^-(f) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} [f(x) - h^-(x)] dx$$

обозначим односторонние уклонения h^+ , h^- от функции $f(x)$ в метрике $L_1(S^{n-1})$. Из (15) выводим неравенства

$$-E_q^-(f) \leq \frac{1}{N} \sum_{k: x^{(k)} \in D} 1 - \frac{\text{meas } D}{|S^{n-1}|} \leq E_q^+(f). \quad (16)$$

Наряду с классическим приемом “сглаживания” неравенство (16) будет служить основой для проведения оценок.

ТЕОРЕМА 3. Пусть D – выпуклая область из S^{n-1} и $W = \{x^{(k)}\}_1^N$ – сферический q -дизайн. Тогда

$$I = \frac{1}{N} \sum_{k: x^{(k)} \in D} 1 = \frac{\text{meas } D}{|S^{n-1}|} + O(q^{-1/2}), \quad q \rightarrow \infty. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через D_λ^+ , $\lambda = \cos \alpha$, обозначим расширение области D , являющееся множеством точек из S^{n-1} таких, что угловое расстояние до области D не превосходит угла α .

Пусть $p_\lambda(ax)$, $\lambda = \cos \alpha$, – характеристическая функция сферической шапки $S_\lambda(a)$, а $f_\lambda^+(x)$ – характеристическая функция области D_λ^+ . Рассмотрим их сферическую свертку

$$F_\lambda^+(x) = \frac{1}{|S_\lambda|} \int_{S^{n-1}} f_\lambda^+(a) p_\lambda(ax) da.$$

Отметим ее простейшие свойства:

- 1) $F_\lambda^+(x) \equiv 1$, $x \in D$; $F_\lambda^+(x) \equiv 0$, $x \notin D_\eta$, $\eta = \cos 2\alpha$;
- 2) $0 \leq F_\lambda^+(x) \leq 1$, $x \in D_\eta \setminus D$;
- 3) $\int_{S^{n-1}} (F_\lambda^+(x) - f(x)) dx \ll \alpha$;
- 4) функция $F_\lambda^+(x)$ непрерывна на S^{n-1} и удовлетворяет условию Липшица: для любых $x, y \in S^{n-1}$

$$|F_\lambda^+(x) - F_\lambda^+(y)| \ll \frac{1}{\alpha} |x - y|. \quad (18)$$

Пусть $g(x)$ – один из алгебраических многочленов степени q , наилучшим образом приближающий $F_\lambda^+(x)$ в пространстве $C[S^{n-1}]$,

$$E_q(F_\lambda^+) = \max_{x \in S^{n-1}} |F_\lambda^+(x) - g(x)|.$$

Используя прямые теоремы теории приближения функций на сфере (см. [19]–[22]), из (18) находим

$$E_q(F_\lambda^+) \ll \frac{1}{\alpha q}, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

В качестве $h^+(x)$ выберем сумму $g(x) + E_q(F_\lambda^+)$. Из свойств 1)–3) находим $F_\lambda^+(x) \geq f(x)$, и по построению имеем $h^+(x) \geq F_\lambda^+(x)$ для всех λ и $x \in S^{n-1}$. Таким образом, алгебраический многочлен $h^+(x)$ имеет степень q и осуществляет приближение сверху функции $f(x)$. Оценим его одностороннее уклонение от $f(x)$ в метрике $L_1(S^{n-1})$. Имеем

$$\begin{aligned} E_q^+(f) &\ll \int_{S^{n-1}} [h^+(x) - f(x)] dx \\ &= \int_{S^{n-1}} [g(x) - F_\lambda^+(x)] dx + \int_{S^{n-1}} [F_\lambda^+(x) - f(x)] dx + E_q(F_\lambda^+) \\ &= I_1 + I_2 + E_q(F_\lambda^+), \end{aligned}$$

так как

$$I_1 \ll \max_{x \in S^{n-1}} |g(x) - F_\lambda^+(x)| = E_q(F_\lambda^+),$$

а из свойств 1)–3) находим оценку

$$I_2 \ll \alpha.$$

Теперь из неравенства (19) получим

$$E_q^+(f) \ll \alpha + \frac{1}{q\alpha}.$$

Выбирая α наилучшим образом: $\alpha = q^{-1/2}$, находим требуемую оценку сверху: $E_q^+(f) \ll q^{-1/2}$. Правая часть неравенства (16) установлена. Аналогичным образом устанавливается и левая часть (16). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Первоначальное доказательство автора было длиннее, и остаточный член в (17) оценивался хуже. С. В. Конягин предложил улучшение. В приведенном выше доказательстве оно было использовано с его любезного согласия.

Обычно при доказательствах равномерного распределения конкретных последовательностей точек остаточный член убывает с ростом N . В нашем случае теорема сформулирована для произвольных q -дизайнов и подобное утверждение для них не верно. Однако если ограничимся рассмотрением минимальных дизайнов, то подобные утверждения оказываются возможны.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $W = \{x^{(k)}\}_1^N$ — минимальный q -дизайн. Тогда для любой выпуклой области D из S^{n-1}

$$\frac{1}{N} \sum_{k: x^{(k)} \in D} 1 = \frac{\text{meas } D}{|S^{n-1}|} + O(N^{-\frac{1}{n(n-1)}}), \quad N \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Действительно, из верхней оценки (5) для мощности минимальных q -дизайнов получаем $q \gg N^{-\frac{2}{n(n-1)}}$. Подставляя это неравенство в (17), приходим к соотношению (20).

§ 4. Кубатурная формула

Конструкцию кубатурной формулы

$$\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) dx = \sum_{k=1}^N w_k f(x^{(k)}), \quad w_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^N w_k = 1, \quad (21)$$

точную для любого алгебраического многочлена порядка q , будем строить, используя классическую формулу прямоугольников: при любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{N}$ равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t(\theta) d\theta = \frac{1}{Q} \sum_{k=0}^{Q-1} t\left(\alpha + \frac{2k\pi}{Q}\right) \quad (22)$$

справедливо для любого тригонометрического полинома

$$t(\theta) = \sum_{|\nu| < Q} t_\nu e^{i\nu\theta}$$

порядка $Q-1$. Далее потребуются информация о поведении частных сумм $(S_k g)(\theta)$ ряда Фурье конкретной функции $g(\theta) = |\sin \theta|$ на периоде $(-\pi, \pi) = T$.

ЛЕММА 1. Для любого $\theta \in T$ и любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $S_{2m}(g, \theta) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем разложение функции $g(\theta)$ в ряд Фурье:

$$g(\theta) = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos(2\nu\theta)}{4\nu^2 - 1} \right\},$$

и выпишем ее частную сумму:

$$S_{2m}(\theta) = (S_{2m}g)(\theta) = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - 2 \sum_{\nu=1}^m \frac{\cos(2\nu\theta)}{4\nu^2 - 1} \right\}.$$

Поскольку $g(0) = 0$, то

$$2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4\nu^2 - 1} = 1.$$

Следовательно,

$$S_{2m}(\theta) = \frac{2}{\pi} \left\{ 2 \sum_{\nu=1}^m \frac{1 - \cos(2\nu\theta)}{4\nu^2 - 1} + \sum_{\nu>m} \frac{1}{4\nu^2 - 1} \right\},$$

откуда

$$S_{2m}(\theta) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{\nu>m} \frac{1}{4\nu^2 - 1} > 0.$$

Из этого неравенства вытекает и эффективная оценка снизу:

$$\min_{\theta \in T} S_{2m}(\theta) \gg \frac{1}{m}. \quad (23)$$

Она точна и достигается при $\theta = 0$.

Совокупность узлов $W = \{x^{(k)}\}_1^N \subset S^{n-1}$ будем задавать в сферической системе координат

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_1 \cos \varphi, \\ x_2 &= \sin \theta_{n-2} \dots \sin \theta_1 \sin \varphi, \\ x_3 &= \sin \theta_{n-2} \dots \cos \theta_1, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \cos \theta_{n-2}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta_j \leq \pi, \quad j = 1, \dots, n-2.$$

Через Q обозначим наименьшее четное число, большее $2q + 2n - 6$, $2m$ – наименьшее четное число, большее $q + n - 5$. В обоих случаях $q \ll m$, $Q \ll q$. Пусть

$$E' = \left\{ \frac{\pi}{Q} + \frac{2\pi\mu}{Q} \right\}_{\mu=0}^{Q-1}, \quad E = \left\{ \frac{\pi}{Q} + \frac{2\pi\nu}{Q} \right\}_{\nu=0}^{Q/2-1}.$$

Пусть координата φ принимает Q значений из E' , а остальные $n-2$ координаты $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ – значения из множества E , состоящего из $Q/2$ точек. После подстановки указанных сферических координат в (24) получаем все множество узлов W :

$$W = \{M_{\mu,\nu}\}, \quad \mu = 0, \dots, Q-1, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-2}),$$

$$\nu_j = 0, \dots, \frac{Q}{2}, \quad j = 1, \dots, n-2. \quad (25)$$

Мощность множества W равна $N = Q(Q/2)^{n-2}$, откуда $N \ll q^{n-1}$.

Для построения весов $w_{\mu,\nu}$ выпишем значение якобиана:

$$J(\theta) = \sin^{n-2} \theta_{n-2} \sin^{n-3} \theta_{n-3} \dots \sin \theta_1,$$

и множители $\sin \theta_1, \sin \theta_3, \sin \theta_5, \dots$ заменим на новые $S_{2m}(\theta_1), S_{2m}(\theta_3), S_{2m}(\theta_5), \dots$. Полученное выражение обозначим через $J'(\theta)$. Положим

$$w_{\mu,\nu} = (2\pi)^{n-1} |S^{n-1}|^{-1} Q^{1-n} J'(M_{\mu,\nu}), \quad (26)$$

веса постоянны при $\varphi \in E'$. Установим два свойства узлов и весов построенной кубатурной формулы.

СВОЙСТВО 1. *Относительно любой координатной плоскости точки множества W расположены симметрично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что каждой точке $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ из W соответствует новая точка $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$, также принадлежащая W . Если $k = 1$, то каждому $\mu \in \{0, 1, \dots, Q-1\}$ поставим в соответствие новое $\bar{\mu} = \mu + Q/2 \pmod{Q}$. Если $k > 1$, то каждому $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{k-1}, \nu_k, \nu_{k+1}, \dots, \nu_{n-2})$ поставим в соответствие $\bar{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_{k-1}, \bar{\nu}_k, \nu_{k+1}, \dots, \nu_{n-2})$, где $\bar{\nu}_k + \nu_k = Q$; $\nu_k, \bar{\nu}_k = 0, 1, \dots, Q/2 - 1$. Как видно из (24), k -я координата меняет знак. Указанное свойство обусловлено видом множеств E', E .

Положительность весов (26) вытекает из леммы 1, но довольно часто требуется информация о величине наименьшего веса кубатурной формулы (в случае одной переменной эти исследования встречаются уже в работах С.Н. Бернштейна [3]). Приведем оценку снизу весов (26).

СВОЙСТВО 2. *Имеем*

$$\min_{\mu,\nu} w_{\mu,\nu} \gg q^{\frac{-n(n-1)}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из (23) имеем

$$S_{2m}(\theta_1), S_{2m}(\theta_3), \dots \gg q^{-1}.$$

Из конструкции множества E находим, что каждый множитель якобиана $J(\theta)$ в произвольной точке $M_{\mu,\nu}$ допускает оценку снизу

$$\sin \theta_j|_E \gg q^{-1}, \quad j = 1, \dots, n-2.$$

Перемножая множители якобиана, получим

$$w_{\mu,\nu} \gg Q^{1-n} J'(M_{\mu,\nu}) \gg q^{1-n} q^{-1} q^{-2} \dots q^{-(n-2)} = q^{-\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Соотношение $\sum w_{\mu,\nu} = 1$ установим далее в процессе доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. 1) Построенная кубатурная формула (21) с узлами (25) и весами (26) точна для любого алгебраического многочлена порядка q .

2) Для любой кубатурной формулы (21), точной для алгебраических многочленов порядка q , с количеством узлов N справедлива оценка снизу:

$$N \gg q^{n-1}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале рассмотрим утверждение 1) для любого монома

$$f(x) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, \quad a_1 + \dots + a_n \leq q.$$

Выделим два случая.

i) Среди чисел $a_1, \dots, a_n$ есть хотя бы одно нечетное. Тогда, очевидно, левая часть формулы (21) равна нулю, правая часть (21) также обращается в нуль в силу свойства 1).

ii) Пусть все числа $a_1, \dots, a_n$ четные. Вычислим интеграл

$$I = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} dx = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) dx$$

в сферической системе координат. Используя (24), найдем

$$I = \frac{1}{|S^{n-1}|} I_0 I_1 \dots I_{n-2},$$

где

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \sin^{a_1} \varphi \cos^{a_2} \varphi d\varphi,$$

$$I_j = \int_0^\pi P_j(\theta) \sin^j \theta d\theta, \quad P_j(\theta) = \sin^{a_1 + \dots + a_{j+1}} \theta \cos^{a_{j+2}} \theta, \quad j \geq 1.$$

Поскольку $a_1 + a_2 \leq q < Q$, то из формулы (22) получим

$$I_0 = \frac{2\pi}{Q} \sum_{\mu=0}^{Q-1} \sin^{a_1} \theta \cos^{a_2} \varphi \Big|_{M_{\mu,\nu}}.$$

Вычислим интегралы I_j с четными индексами j . В силу четности интегрируемых функций имеем

$$I_j = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi P_j(\theta) \sin^j \theta d\theta.$$

Тригонометрический полином $P_j(\theta) \sin^j \theta$ имеет порядок $a_1 + \dots + a_{j+1} + a_{j+2} + j \leq q + j \leq q + n - 2$, меньший Q , поэтому по формуле (22) найдем

$$I_j = \frac{\pi}{Q} \sum_{\nu=0}^{Q-1} P_j \left(\frac{\pi}{Q} + \frac{2\pi\nu}{Q} \right) \sin^j \left(\frac{\pi}{Q} + \frac{2\pi\nu}{Q} \right) = \frac{2\pi}{Q} \sum_{\nu=0}^{Q/2-1} P_j(\theta_\nu) \sin^j \theta_\nu.$$

Теперь вычислим интегралы I_j с нечетными индексами j . В силу четности тригонометрического полинома $P_j(\theta) \sin^{j-1} \theta$ имеем

$$I_j = \int_0^\pi P_j(\theta) \sin^j \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi P_j(\theta) \sin^{j-1} \theta |\sin \theta| d\theta.$$

Порядок тригонометрического полинома $P_j(\theta) \sin^{j-1} \theta$ не превосходит $a_1 + \dots + a_{j+2} + j - 1 \leq q + n - 3 < 2m + 2$, значит, в силу ортогональности

$$I_j = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi P_j(\theta) \sin^{j-1} \theta S_{2m}(\theta) d\theta.$$

Порядок интегрируемого тригонометрического полинома не превосходит $q + n - 3 + 2m$, что меньше Q в силу выбора m , Q , поэтому из формулы прямоугольников (22) следует

$$I_j = \frac{\pi}{Q} \sum_{\nu=0}^{Q-1} P_j(\theta_\nu) \sin^{j-1} \theta_\nu S_{2m}(\theta_\nu) = \frac{2\pi}{Q} \sum_{\nu=0}^{Q/2-1} P_j(\theta_\nu) \sin^{j-1} \theta_\nu S_{2m}(\theta_\nu).$$

Перемножая все интегралы I_j , получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{|S^{n-1}|} \left(\frac{2\pi}{Q} \right)^{n-1} \sum_{\mu, \nu} f(M_{\mu, \nu}) \prod_{j \text{ нечет.}} \sin^{j-1} \theta_\nu S_{2m}(\theta_\nu) \prod_{j \text{ чет.}} \sin^j \theta_\nu \\ &= \frac{1}{|S^{n-1}|} \left(\frac{2\pi}{Q} \right)^{n-1} \sum_{\mu, \nu} f(M_{\mu, \nu}) J'(M_{\mu, \nu}) = \sum_{\mu, \nu} f(M_{\mu, \nu}) w_{\mu, \nu}. \end{aligned}$$

Справедливость утверждения 1) доказана для любого монома $f = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, $a_1 + \dots + a_n \leq q$, следовательно, в силу линейности оно справедливо и для любого алгебраического многочлена степени q . В частности, полагая $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, найдем, что

$$1 = \sum_{\mu, \nu} w_{\mu, \nu},$$

т. е. сумма весов рассматриваемой кубатурной формулы равна единице. Утверждение 1) теоремы доказано. Утверждение 2) доказывается значительно проще и может быть легко выведено из работы [7], оно приведено для того, чтобы отметить, что построенная кубатурная формула – наилучшая, поскольку имеет наименьший по порядку рост количества узлов q^{n-1} .

Приведем новое доказательство, наиболее близкое к методам, использованным в настоящей работе. Как отмечено в работе [24], вложение (6) справедливо не только в случае, когда W – q -дизайн, но и в более общей ситуации, когда W – совокупность узлов кубатурной формулы (21). Следовательно, из (6) имеем

$$|S^{n-1}| \leq \sum_{k=1}^N |S_\eta(x^{(k)})| = N|S_\eta|. \quad (28)$$

Оценим площадь сферической шапки $|S_\eta|$, используя известные [12, с. 201] соотношения для первых нулей многочленов Якоби:

$$1 - t_1^2 \ll \frac{1}{q^2}, \quad 1 - t_1'^2 \ll \frac{1}{q^2}.$$

В случае четного q имеем

$$|S_\eta| \ll \int_{t_1}^1 (1 - t_1^2)^{\frac{n-3}{2}} dt \ll (1 - t_1^2)^{\frac{n-1}{2}} \ll q^{1-n},$$

аналогично получается оценка и для нечетного q . Из (28) находим оценку снизу (27). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Все оценки проводились в работе неравномерно относительно размерности n . Количество точек минимального дизайна $N_n(q)$ зависит на самом деле от двух параметров, n и q , и исследование поведения $N_n(q)$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном q имеет смысл уже начиная с $q = 4$. Для произвольных n, q имеются две различные оценки снизу $N_n(q)$. Первая оценка [7] в целой серии пар n, q дает точное неравенство. Вторая оценка [25] лучше первой в ситуации, когда размерность фиксирована и $q \rightarrow \infty$, и значительно слабее первой оценки при фиксированном q и $n \rightarrow \infty$. Вторая оценка получена в силу свойств положительной определенности, что впервые применялось в теории кодирования Ф. Дельсартом. Используемые в оценках мощности дизайнов экстремальные функции являются аналогом многочленов, построенных В. И. Левенштейном и В. М. Сидельниковым для оценок мощности сферических кодов (см. [25], [26]). Последняя точная оценка мощности дизайна на этом пути найдена в работе [27] для случая $n = 4, q = 11$. Отметим, что в вышедшей недавно работе [28] свойства положительной определенности и конструкции специальных экстремальных функций привели к новым, улучшающим классические, оценкам мощности узлов кубатурных формул для шаров из $\mathbb{R}^n$.

В заключение вернемся к основной проблеме о мощности q -дизайнов. Предлагаем гипотезу $N_n(q) \ll q^{n-1}$, сформулированную во введении, доказать вначале в более слабом варианте. Рассмотрим квадратурную формулу (4), точную не для всего класса алгебраических многочленов порядка q , а для более узкого – совокупности однородных гармонических многочленов четного порядка q . При нечетном q , очевидно, достаточно в качестве W рассмотреть всего две противоположные точки сферы. Некоторые экстремальные задачи математического анализа приводят

к вопросу: каков минимальный набор ортогональных матриц T_k , $\det T_k = 1$, обладающих свойством

$$\sum_{k=1}^N f(T_k x) = 0, \quad x \in S^{n-1}, \quad n \geq 3,$$

для всех многочленов указанного выше типа.

При $n = 4$ оба эти вопроса эквивалентны. Сопоставляя каждой точке $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$ кватернион $h = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$, получаем вращение $\mathbb{R}^4$ (ортогональную матрицу), и наоборот.

В заключение автор выражает благодарность рецензенту настоящей работы.

Список литературы

1. Чебышев П. Л. О квадратурах // Полн. собр. соч. Т. III. М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 49–62.
2. Кузьмин Р. О. О распределении корней полиномов, связанных с квадратурами Чебышева // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. Т. 2. № 2. С. 427–443.
3. Бернштейн С. Н. Полн. собр. соч. Т. II. М.: Изд-во АН СССР, 1952–1954.
4. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959.
5. Meir A., Sharma A. A variation on the Tchebicheff quadrature problem // Illinois J. Math. 1967. V. 11. P. 535–546.
6. Rabau P., Bajnok B. Bounds for the Number of nodes in Chebyshev Type Quadrature Formulas // J. Approx. Theory. 1991. V. 67. P. 199–214.
7. Delsarte P., Goethals G. M., Seidel J. J. Spherical codes and designs // Geom. Dedic. 1979. V. 6. P. 363–388.
8. Wagner G. On averaging sets // Monats. Math. 1991. V. 111. P. 69–78.
9. Bajnok B. Construction of spherical t -designs // Geom. Dedic. 1992. V. 43. P. 167–179.
10. Korevaar J., Meyers J. L. H. Chebyshev-type quadrature on multidimensional domains // J. Approx. Theory. 1994. V. 79. P. 144–164.
11. Korevaar J. The problem of Chebyshev quadrature on the sphere. Preprint: Discussion paper, September 4, 2000. P. 1–17.
12. Сега Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
13. Fazekas G., Levenstein V. I. On Upper Bounds for Code Distance and Covering Radius of Designs in Polynomial Metric Spaces // J. Combin. Theory. Ser. A. 1995. V. 70. P. 267–288.
14. Юдин В. А. Покрывтия сферы и экстремальные свойства ортогональных многочленов // Дискр. математика. 1995. Т. 7. № 3. С. 81–88.
15. Reimer M. Hyperinterpolation on the Sphere at the Minimal Projection Order // J. Approx. Theory. 2000. V. 104. P. 272–286.
16. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
17. Reznick B. Some Constructions of Spherical 5-designs // Linear Algebra and its Applications. 1995. V. 226/228. P. 163–196.
18. Yuan Xu. Orthogonal polynomials and cubature formulae on spheres and on balls // SIAM J. Math. Anal. 1998. V. 29. P. 779–793.
19. Pawelke S. Über die Approximationsordnung bei Kugelfunktionen und algebraischen Polynomen // Tohoku Math. J. 1972. V. 24. № 3. P. 473–486.
20. Lizorkin P. I., Nikol'skii S. M. A theorem concerning approximation on the sphere // Anal. Math. 1983. V. 9. P. 207–221.
21. Рустамов Х. П. О приближении функций на сфере // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 127–148.
22. Бабенко А. Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 333–355.

23. *Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.: Гостехиздат, 1948.
24. *Reimer M.* Spherical Polynomial Approximations: A Survey // *Advances in Multivariate Approximation* / Eds. W. Haussmann, K. Jetter, M. Reimer. Berlin: WILEY-VCH, 1999. P. 231–252.
25. *Юдин В. А.* Нижние оценки для сферических дизайнов // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1997. Т. 61. № 3. С. 211–223.
26. *Levenstein V. I.* Universal bounds for codes and designs // *Handbook of Coding Theory* / Eds. V.S. Pless, W.C. Huffman, R.A. Brualdi. Amsterdam: North-Holland, 1998. P. 499–648.
27. *Андреев Н. Н.* Минимальный дизайн 11-го порядка на трехмерной сфере // *Матем. заметки.* 2000. Т. 67. № 4. С. 489–497.
28. *Yuan Xu.* Lower bound for the number of nodes of cubature formulae on the unit ball // *J. of Complexity.* 2003. V. 19. P. 392–402.

Московский энергетический институт
E-mail: vlayudin@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
27.11.2003