Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Гоф, О. О. Обрезков, О. Г. Смолянов, Рандомизированные гамильтоновы интегралы Фейнмана и стохастические уравнения Шрёдингера–Ито, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 6, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/im663>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:45:01

УДК 517.987.4

Дж. Гоф, О. О. Обрезков, О. Г. Смолянов

Рандомизированные гамильтоновы интегралы Фейнмана и стохастические уравнения Шрёдингера–Ито

Рассмотрены стохастические уравнения Шрёдингера с двумерным белым шумом. Такие уравнения используются для описания эволюции открытой квантовой системы, подвергающейся процессу непрерывного измерения. Получены представления решений стохастических уравнений Шрёдингера с помощью обобщения классической конструкции интегралов Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве на стохастический случай.

Библиография: 36 наименований.

Введение

В настоящей статье получено представление решений уравнений Шрёдингера с коэффициентами типа белого шума (стохастических уравнений Шрёдингера–Ито) с помощью рандомизированных интегралов Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве (гамильтоновых интегралов Фейнмана). Такие уравнения описывают предельное поведение квантовой системы, наблюдаемой в дискретные моменты времени, при условии, что точность измерений и интервалы между ними пропорциональны и стремятся к нулю. Непрерывное наблюдение квантовой системы можно (неформально) определить как предел таких наблюдений. Это позволяет считать, что уравнения Шрёдингера–Ито описывают эволюцию квантовой системы [20], [22], подвергающейся процессу непрерывных измерений; в то же время эти уравнения описывают так называемую марковскую аппроксимацию для эволюции открытой квантовой системы¹, альтернативную той, которая дается квантовыми стохастическими уравнениями типа Хадсона–Партасарати (см. [12], [4], [5]).

Впервые уравнение, описывающее эволюцию квантовой системы, подвергаемой процессу непрерывных измерений одной и той же наблюдаемой (являющейся оператором умножения на координату при подходящей реализации гильбертова пространства состояний в виде $L^2(\mathbb{R}^1)$), было постулировано в работе [25] для описания спонтанной редукции волновой функции. Оно было выведено независимо

¹Так называется квантовая система, являющаяся частью некоторой большей квантовой системы; эволюция открытой квантовой системы описывается не уравнением Шрёдингера, а вытекающим из него (интегро-дифференциальным) управляющим уравнением (master-equation); так как управляющие уравнения являются интегро-дифференциальными и исследовать их достаточно сложно, то используются различные приближенные уравнения, уравнение Шрёдингера–Ито можно считать одним из них.

Работа второго и третьего авторов выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01074).

В. П. Белавкиным в общей ситуации [17] (при этом использовались квантовые стохастические уравнения Хадсона–Партасарати [26]; см. также [18]) и Л. Дьоши для наиболее важного частного случая [21], работа которого написана на физическом уровне строгости. Вывод, основанный на стандартной аксиоматике квантовой механики, содержится в работе [8] (см. также [3], [15], [16]). Там же анонсировано стохастическое уравнение Шрёдингера с двумерным белым шумом, полный вывод которого приведен в [32].

Отметим также, что помимо изложенного выше, локального, подхода к описанию поведения непрерывно наблюдаемой квантовой системы, при котором получается эволюционное уравнение, обобщающее уравнение Шрёдингера и учитывающее взаимодействие квантовой системы с измерительным аппаратом и влияние последнего на состояние квантовой системы, существует и глобальный подход, получивший свое развитие в работах [30], [31]. При этом для глобального описания процесса непрерывного измерения вводится линейный пропагатор квантовой системы в виде эвристического интеграла Фейнмана по траекториям. Рассмотрению связи между двумя способами описания посвящены работы [15], [16].

Представления решений стохастических уравнений Шрёдингера с помощью интегралов Фейнмана были впервые получены в [8], [2] и [16]. В этих работах интеграл Фейнмана определялся как аналитическое продолжение интеграла по мере Винера (ср. с [9]), вследствие чего аналитические требования, налагаемые на начальное условие и потенциал, оказались достаточно ограничивающими. Кроме этого, в работе [13] получено представление решения стохастического уравнения Шрёдингера с одномерным белым шумом в предположении, что потенциал и начальное условие задачи Коши являются преобразованиями Фурье счетно-аддитивных мер. В этом подходе используется определение интеграла Фейнмана с помощью равенства Парсеваля [7], [14], [10], [9].

Мы используем оригинальное фейнмановское [11], [23] определение функционального интеграла с помощью предела конечнократных интегралов и распространяем на вероятностный случай подход, основанный на теореме Чернова [19]. Этот подход был впервые применен в [35] для представления решения уравнения теплопроводности на компактном римановом многообразии и в [34] для представления решения уравнения Шрёдингера с помощью интеграла Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве. В настоящей работе получено представление решения стохастического уравнения Шрёдингера с помощью рандомизированных интегралов Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве (рандомизированных гамильтоновых интегралов Фейнмана).

§ 1. Псевдодифференциальные операторы и стохастическое уравнение Шрёдингера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для всякого $\tau \in [0, 1]$ определим отображение $\hat{\cdot} : \mathcal{H} \mapsto \hat{\mathcal{H}}$ из пространства комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ в пространство линейных операторов на $L^2(\mathbb{R})$ следующим образом: действие оператора $\hat{\mathcal{H}} : D(\hat{\mathcal{H}}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ на функцию φ задается равенством (ср. с [34], [24])

$$(\hat{\mathcal{H}}\varphi)(q) = \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z \int_{-z}^z \mathcal{H}((1-\tau)q + \tau q_0, p_0) e^{ip_0(q-q_0)} \varphi(q_0) dq_0 dp_0, \quad (1)$$

где предел берется в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. В качестве $D(\widehat{\mathcal{H}})$ возьмем множество всех $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, для которых $\widehat{\mathcal{H}}\varphi$ существует.

Функция $\mathcal{H}(\cdot, \cdot)$ называется τ -символом (или классическим гамильтонианом на фазовом пространстве $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$) для псевдодифференциального оператора $\widehat{\mathcal{H}}$. Отображение $\widehat{\cdot}$ задает τ -квантование.

При $\tau = 0$ оператор $\widehat{\cdot}$ называется *оператором qr -квантования*, а при $\tau = 1$ – *оператором pq -квантования*. Такая терминология связана с тем, что псевдодифференциальный оператор, соответствующий τ -символу $\mathcal{H}(p, q) = pq$, равен $\hat{q}\hat{p}$ при $\tau = 0$ и $\hat{p}\hat{q}$ при $\tau = 1$. Здесь и далее $\hat{q}$ и $\hat{p}$ – это соответственно операторы координаты и импульса, задаваемые равенствами

$$\begin{aligned}\hat{q}: f \in \text{Dom}(\hat{q}) \subset L^2(\mathbb{R}) &\mapsto [q \mapsto qf(q)], \\ \hat{p}: f \in \text{Dom}(\hat{p}) \subset L^2(\mathbb{R}) &\mapsto [q \mapsto -if'(q)].\end{aligned}$$

Операция τ -квантования при $\tau = 1/2$ называется *квантованием по Вейлю*. Отметим также, что если $\mathcal{H}(q, p) = f(q) + g(p)$ для всех $p, q \in \mathbb{R}$ и некоторых функций f и g , то результат квантования не зависит от параметра τ .

Далее рассматривается стохастическое уравнение Шрёдингера с двумерным белым шумом, интерпретируемое как стохастическое уравнение Ито:

$$\begin{aligned}d\varphi(t) = &\left[\left(-i\widehat{\mathcal{H}} - \frac{\mu_1}{2} k^2(\hat{q}) - \frac{\mu_2}{2} h^2(\hat{p}) \right) (\varphi(t)) \right] dt \\ &- \sqrt{\mu_1} k(\hat{q})(\varphi(t)) dW_1(t) - \sqrt{\mu_2} h(\hat{p})(\varphi(t)) dW_2(t),\end{aligned}\quad (2)$$

где $\widehat{\mathcal{H}}$ – это (внутренний) гамильтониан наблюдаемой системы, получающийся τ -квантованием классического гамильтониана $\mathcal{H}$, а $k(\hat{q})$ и $h(\hat{p})$ – это (некоммутирующие) дифференциальные операторы, соответствующие вещественнозначным символам $(q, p) \mapsto k(q)$ и $(q, p) \mapsto h(p)$, кроме этого, W_1, W_2 – независимые стандартные винеровские процессы и $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ – это случайная (волновая) функция, описывающая эволюцию смешанных состояний наблюдаемой системы. Уравнение (2) описывает эволюцию открытой квантовой системы, подвергающейся непрерывному измерению наблюдаемых $k(\hat{q})$ и $h(\hat{p})$. В работах [8] и [32] уравнение (2) рассматривалось в частном случае $k(q) = q$, $h(p) = p$ и $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2} + V(q)$ для всех $p, q \in \mathbb{R}$ и некоторой вещественнозначной функции V .

Уравнение (2) для произвольных функций h, k и $\mathcal{H}$ может быть получено методом, примененным в [8] и [32]. Для этого достаточно выбрать подходящую реализацию гильбертова пространства состояний.

§ 2. Интегралы Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве

Пусть E – вещественное векторное пространство, $G \subset E^*$ – некоторое пространство линейных функционалов на E (предполагается, что E и G находятся в отношении двойственности) и b – квадратичный функционал на пространстве G . Тогда для всех $a \in E$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ α -псевдомера Фейнмана с корреляционным функционалом

лом b и средним значением a – это обобщенная мера $\Phi_{b,a,\alpha}$ на E , преобразование Фурье которой определяется равенством

$$(\mathcal{F}\Phi_{b,a,\alpha})(g) = \exp\left\{\frac{\alpha b(g)}{2} + \alpha g(a)\right\}$$

для всех $g \in G$.

Пусть Q и P – бесконечномерные локально выпуклые пространства такие, что $Q = P^*$ и $P = Q^*$ как векторные пространства. Если $E = Q \times P$ – фазовое пространство, а $G = P \times Q$, то i -псевдомера Фейнмана на E с нулевым средним и корреляционным оператором, задаваемым равенством $b(p, q) = 2p(q)$ для всех $(p, q) \in G$, называется *гамильтоновым интегралом Фейнмана* (или интегралом Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве).

В этом случае значение псевдомеры Фейнмана на функции $f: Q \times P \rightarrow \mathbb{C}$ (интеграл Фейнмана от функции) можно задать с помощью предела конечнократных интегралов. Пусть $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательности конечномерных ($\dim Q_n = \dim P_n = n$) подпространств в Q и P соответственно. Секвенциальным интегралом Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве от функции f называется предел при $n \rightarrow \infty$ (если он существует) выражений

$$\left(\int_{Q_n \times P_n} e^{ip(q)} dq dp \right)^{-1} \int_{Q_n \times P_n} f(q, p) e^{ip(q)} dq dp,$$

где интегрирование проводится по произвольной мере Лебега.

Для представлений секвенциальными интегралами Фейнмана решений уравнений типа Шрёдингера важен частный случай интеграла Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве, когда Q и P – некоторые пространства вещественнозначных функций на отрезке $[0, t]$. Пусть $z \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, 1]$, $t > 0$, Q – векторное пространство всех вещественнозначных функций на $[0, t]$, обобщенные производные которых являются мерами на $[0, t]$, а $P = \{f \in C([0, t], \mathbb{R}) : f(t) = 0\}$. При этом отношение двойственности между Q и P задается равенством

$$\xi_p(\xi_q) = \int_0^t \xi_p(s) \xi'_q(s) ds$$

для всех $\xi_p \in P$ и $\xi_q \in Q$, где через $\xi'_q(s) ds$ обозначена мера, являющаяся обобщенной производной функции $\xi_q(\cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Секвенциальным интегралом Фейнмана

$$I(F, z) = \int_{Q \times P^0} F(\xi_q, \xi_p) \Phi^{\tau, t, z}(d\xi_q, d\xi_p)$$

по траекториям в фазовом пространстве $Q \times P^0$ от функции $F: Q \times P^0 \rightarrow \mathbb{C}$ называется предел при $n \rightarrow \infty$ (если он существует) конечнократных интегралов

$$\begin{aligned} I_n(F, z) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(J_\tau(q_0, \dots, q_n), J_1(p_0, \dots, p_n)) dq_0 dp_0 \dots dq_{n-1} dp_{n-1} \\ &\times \exp\left\{i \sum_{k=0}^{n-1} p_k(q_{k+1} - q_k)\right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $p_n = 0$, $q_n = z$ и для каждого $r \in [0, 1]$ J_r – это (инъективное) отображение пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ на пространство, состоящее из функций, постоянных на каждом из промежутков $(\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n})$, $k = 1, \dots, n$, такое, что для всякого набора $(q_0, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ функция $J_r(q_0, \dots, q_n)$ принимает значение $(1 - \tau)q_k + \tau q_{k-1}$ на интервале $(\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n})$ для каждого $k = 1, \dots, n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (ср. с [9], [34]). При $\tau = 0$ секвенциальный интеграл Фейнмана, определенный выше, может быть интерпретирован и как интеграл по пространству функций, непрерывных справа. Случай $\tau = 1$ соответствует гамильтонову интегралу Фейнмана по пространству функций, непрерывных слева, а при $\tau \in (0, 1)$ в качестве фазового пространства следует рассматривать множество функций, являющееся выпуклой комбинацией (с весами $(1 - \tau)$ и τ) указанных пространств функций.

§ 3. Интегралы Фейнмана и представления решений эволюционных уравнений

Существование интегралов Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве (т. е. сходимости соответствующих конечнократных интегралов) в некоторых частных случаях было показано в работах [1], [6], где использовался метод конечных разностей. Определения интеграла Фейнмана с помощью аналитического продолжения интеграла по мере Винера и равенства Парсеваля были применены в [9] для представления решений уравнений Шрёдингера.

Новый подход, основанный на теореме Чернова и впервые примененный в [34], позволил существенно расширить область применения формул Фейнмана (представлений решений уравнений Шрёдингера с помощью интегралов Фейнмана). В работе [34] было замечено, что если $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ – решение задачи Коши с начальным условием φ_0 для уравнения Шрёдингера с псевдодифференциальным оператором, имеющим τ -символ $\mathcal{H}$, в качестве гамильтониана:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -i\widehat{\mathcal{H}}\varphi, \quad (4)$$

то равенство

$$\varphi(t) \equiv e^{-it\widehat{\mathcal{H}}}\varphi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-i\frac{t}{n}\widehat{\mathcal{H}}} \right)^n \varphi_0 \quad (5)$$

является представлением решения уравнения Шрёдингера с помощью интеграла Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве. Действительно, можно проверить, что правая часть равенства (5) – это функция, значение которой в точке z совпадает с пределом конечнократных аппроксимаций интеграла Фейнмана

$$\exp \left\{ -i \int_0^t \mathcal{H}(\xi_q(s), \xi_p(s)) ds \right\} \varphi_0(\xi_q(0)) \Phi^{\tau, t, z}(d\xi_q, d\xi_p).$$

В работе [34] равенство (5) было доказано для достаточно широкого класса гамильтонианов, при этом использовалась теорема Чернова.

В настоящей работе мы распространяем этот подход на стохастические дифференциальные уравнения типа (2). В этом случае соответствующая формула Фейнмана изменится. Покажем, что если случайная функция $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ является решением задачи Коши с начальным условием φ_0 для стохастического уравнения

$$d\varphi = \widehat{A}\varphi dt + \widehat{B}\varphi dW(t), \quad (6)$$

где $\widehat{A}, \widehat{B}$ – псевдодифференциальные операторы на $L^2(\mathbb{R})$, а W – стандартный винеровский процесс, то при некоторых условиях, налагаемых на A и B , справедливо соотношение

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \text{hat} \left(\exp \left\{ -\frac{tB^2}{2n} + B\Delta W_{k,n} + \frac{t}{n}A \right\} \right) \varphi_0, \quad (7)$$

где $\Delta W_{k,n} = W(tk/n) - W(t(k-1)/n)$ для всех $k = 1, \dots, n$, а $\text{hat}(M) \equiv \widehat{M}$. Дополнительные множители $e^{-\frac{tB^2}{2n}}$ под знаком произведения соответствуют формуле Ито. Правая часть (7) может быть интерпретирована как рандомизированный гамильтонов интеграл Фейнмана.

§ 4. Стохастический аналог формулы Фейнмана

Подход, примененный в [34] для получения решений нестохастических уравнений Шрёдингера, основан на построении семейства операторов, аппроксимирующего по Чернову [36] разрешающую полугруппу операторов для уравнения Шрёдингера. Пусть D_1 – это некоторая существенная область определения оператора $\widehat{\mathcal{H}}$, т.е. оператор $(\widehat{\mathcal{H}}, D(\widehat{\mathcal{H}}))$ является замыканием $(\widehat{\mathcal{H}}, D_1)$. Однопараметрическое семейство операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ аппроксимирует по Чернову полугруппу с генератором $-i\widehat{\mathcal{H}}$ (по определению именно эта полугруппа является разрешающей для уравнения (2) при $\mu_1 = \mu_2 = 0$), если для всех $f \in D_1$ выполнено равенство $S(t)f = f - it\widehat{\mathcal{H}}f + o(t)$ при $t \rightarrow 0$. Тогда из теоремы Чернова следует, что для всех $t > 0$ и $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ справедливо соотношение

$$e^{-it\widehat{\mathcal{H}}}\varphi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n \varphi_0.$$

Если в качестве $S(t)$ взять $\widehat{e^{-i\frac{t}{n}\mathcal{H}}}$, получим представление (5).

Этот метод нельзя применить для представления решений стохастических уравнений типа Шрёдингера ($\mu_1, \mu_2 > 0$ в (2)), поскольку решение является случайной функцией из $L^2(\mathbb{R})$ и семейство операторов, аппроксимирующее разрешающее семейство операторов для уравнения (2), не будет детерминистическим. Отметим также, что из-за присутствия случайного процесса в правой части для разрешающего семейства операторов, соответствующего стохастическому уравнению, не выполнено полугрупповое свойство. Тем не менее, если $\{T_r^s\}_{s \geq r \geq 0}$ – разрешающее семейство (случайных) операторов на $L^2(\mathbb{R})$, соответствующих задаче Коши для стохастического уравнения (2) (т.е. T_r^s определено так: $T_r^s\varphi_0 = \varphi(s)$ для произвольных $s \geq r \geq 0$, где φ – решение стохастического уравнения (2) с условием

$\varphi(r) = \varphi_0$; здесь предполагается, что решение уравнения существует и единственно), то в силу того, что W_1 и W_2 – процессы с независимыми приращениями, выполнено “стохастическое” полугрупповое свойство: распределение T_r^s зависит только от разности $s - r$. Это обстоятельство позволяет обобщить подход, основанный на понятии эквивалентности по Чернову, на стохастический случай.

Далее мы рассматриваем уравнение (2) для случая $\tau = 0$, т.е. оператор $\hat{\mathcal{H}}$ получен из $\mathcal{H}$ qp -квантованием. Предполагается, что для гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}$ справедлива формула Фейнмана (5). Достаточное условие [34] для выполнения (5) состоит в том, что справедливо равенство

$$\mathcal{H}(q, p) = k_0(q) + h_0(p) + l(q, p) \quad (8)$$

для всех $q, p \in \mathbb{R}$ и некоторых вещественнозначных функций $l \in L^2(\mathbb{R}^2)$, k_0 и h_0 . Кроме этого, мы предполагаем, что $-i\hat{\mathcal{H}}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов.

Рассмотрим семейство $\{Q_r^s\}_{0 \leq r \leq s}$ случайных операторов на $L^2(\mathbb{R})$, определяемое равенством

$$(Q_r^s f)(q) = \exp\{-\sqrt{\mu_1} k(q)(W_1(s) - W_1(r)) - \mu_1(s - r)k^2(q)\} f(q), \quad q \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Покажем, что функция $s \mapsto Q_r^s f$ – это решение задачи Коши для уравнения

$$d\varphi(t) = -\frac{\mu_1}{2} k^2(\hat{q})(\varphi(t)) dt - \sqrt{\mu_1} k(\hat{q})(\varphi(t)) dW_1(t) \quad (10)$$

с начальным условием $\varphi(r) = f$.

Возьмем полную производную $Q_r^s f$ по s :

$$\begin{aligned} d_s(Q_r^s f)(q) = & \left[-\sqrt{\mu_1} k(q) dW_1(s) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\sqrt{\mu_1} k(q))^2 dW_1(s) dW_1(s) - \mu_1(s - r)k^2(q) ds \right] (Q_r^s f)(q). \end{aligned}$$

Согласно формуле Ито $dW_1(s) dW_1(s) = ds$, отсюда получаем, что функция $s \mapsto Q_r^s f$ – решение уравнения (10). Выполнение начального условия очевидно.

Аналогично можно проверить, что если $\{P_r^s\}_{0 \leq r \leq s}$ – семейство операторов, задаваемое равенством

$$\begin{aligned} (P_r^s f)(q) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\{-\sqrt{\mu_2} h(p_0)(W_2(s) - W_2(r)) - \mu_2(s - r)h^2(p_0)\} \\ & \times e^{ip_0(q - q_0)} f(q_0) dq_0 dp_0, \quad q \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (11)$$

то функция $s \mapsto P_r^s f$ является решением задачи Коши для уравнения

$$d\varphi(t) = -\frac{\mu_2}{2} h^2(\hat{p})(\varphi(t)) dt - \sqrt{\mu_2} h(\hat{p})(\varphi(t)) dW_2(t) \quad (12)$$

с начальным условием $\varphi(r) = f$.

Как показано в [34], если $Y_t = \widehat{e^{-it\mathcal{H}}}$ для всех t , то функция $t \mapsto Y_t\varphi_0$ аппроксимирует по Чернову решение уравнения

$$d\varphi(t) = -i\widehat{\mathcal{H}}\varphi(t) dt. \quad (13)$$

Заметим, что сумма правых частей (линейных) уравнений (10), (12) и (13) совпадает с правой частью (2), поэтому можно ожидать, что семейство операторов $\{U_r^s\}_{0 \leq r \leq s}$, определяемое равенством $U_r^s = Q_r^s Y_{s-r} P_r^s$, в каком-то смысле аппроксимирует разрешающее семейство T_r^s для уравнения (2).

Следующее равенство мы будем называть *стохастической формулой Фейнмана*:

$$T_0^t \varphi_0 = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_{(n-1)t/n}^t U_{(n-2)t/n}^{(n-1)t/n} \dots U_0^{t/n} \varphi_0, \quad (14)$$

где $w\text{-}\lim$ – это некоторая (определяемая ниже) сходимость $L^2(\mathbb{R})$ -значных случайных величин. Для того чтобы увидеть аналогию с обычной формулой Фейнмана, достаточно заметить, что $t \mapsto T_0^t \varphi_0$ – решение уравнения (2) с начальным условием φ_0 , а правая часть равенства (14) является конечномерной аппроксимацией интеграла Фейнмана от случайной функции (ср. с (7)). Наконец, при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ получается стандартная формула Фейнмана из [34].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ и принимающие значения в $L^2(\mathbb{R})$. Случайная величина ξ , определенная на том же пространстве, является *w-пределом* ξ_n при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}\|\xi - \xi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. При этом через $\mathbb{E}$ обозначен оператор математического ожидания в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Для доказательства формулы (14) необходимо рассмотреть асимптотические свойства оператора U_r^s при $s - r \rightarrow 0$. Далее мы используем известный результат П. Леви [28] (см. также [29]) о локальной гладкости винеровского процесса.

ЛЕММА 1. Пусть $\{W(r)\}_{0 \leq r \leq 1}$ – стандартный винеровский процесс. Тогда с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\overline{\lim}_{v \rightarrow 0} \sup_{r \in [0,1]} \frac{|W(r+v) - W(r)|}{\sqrt{-2v \ln v}} = 1.$$

Из леммы 1 вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 выполняется соотношение

$$\overline{\lim}_{v \rightarrow 0} \sup_{r \in [0,1]} \frac{|W(r+v) - W(r)|}{v^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} = 0.$$

Для всякого $q \in \mathbb{R}$ обозначим $\varepsilon_2(q) \equiv e^q - 1 - q - \frac{q^2}{2}$. Очевидно, для некоторой константы $A_1 > 0$ справедливо неравенство $|\varepsilon_2(q)| \leq A_1 |q|^3$ при $q \rightarrow 0$. Далее мы будем для краткости использовать обозначение $\Delta W_j^{r,v} = W_j(r+v) - W_j(r)$ для

$j = 1, 2$. Тогда для функции, умножение на которую задает действие оператора Q_r^{r+v} (см. (9)), выполняется равенство

$$\begin{aligned} \exp\{-\sqrt{\mu_1} k(q)(W_1(r+v) - W_1(r)) - \mu_1 v k^2(q)\} &= 1 - \sqrt{\mu_1} k(q) \Delta W_1^{r,v} - \mu_1 v k^2(q) \\ &+ \frac{1}{2} [\sqrt{\mu_1} \Delta W_1^{r,v} k(q) + \mu_1 v k^2(q)]^2 + \varepsilon_2 (\sqrt{\mu_1} \Delta W_1^{r,v} k(q) + \mu_1 v k^2(q)) \\ &\equiv 1 - \sqrt{\mu_1} k(q) \Delta W_1^{r,v} - \mu_1 v k^2(q) + \frac{1}{2} [\sqrt{\mu_1} \Delta W_1^{r,v} k(q)]^2 + c(v, r, q). \end{aligned}$$

Далее предполагается, что функция k ограничена ($\sup_{q \in \mathbb{R}} |k(q)| = K_1 < \infty$) и принадлежит $L^2(\mathbb{R})$. Докажем, что в этом случае соотношение $\mathbb{E} \|c(v, r, \cdot)\|_{L^2} = O(v^{3/2})$ выполняется равномерно по r при $v \rightarrow 0$. Согласно определению

$$c(v, r, q) = \frac{1}{2} \mu_1^2 v^2 k^4(q) + (\mu_1)^{3/2} v \Delta W_1^{r,v} k^3(q) + \varepsilon_2 (\sqrt{\mu_1} \Delta W_1^{r,v} k(q) + \mu_1 v k^2(q)).$$

Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|v^2 k^4\|_{L^2} &\leq \|k\|_{L^2} K_1^3 v^2 = O(v^{3/2}), \\ \mathbb{E} \|v \Delta W_1^{r,v} k^3\|_{L^2} &\leq \|k\|_{L^2} K_1^2 v \mathbb{E} |\Delta W_1^{r,v}| = \|k\|_{L^2} K_1^2 v \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{\mathbb{R}} |z| e^{-z^2/(2v)} dz \\ &= \|k\|_{L^2} K_1^2 v \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{v} = O(v^{3/2}), \\ \mathbb{E} \|\varepsilon_2 (\sqrt{\mu_1} \Delta W_1^{r,v} k + \mu_1 v k^2)\|_{L^2} &\leq A_1 \mathbb{E} \|(\sqrt{\mu_1} \Delta W_1^{r,v} k + \mu_1 v k^2)^3\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Выражение в правой части последнего неравенства можно оценить сверху суммой $\sum_{j=0}^3 b_j \mathbb{E} |\Delta W_1^{r,v}|^j \|k^j\|_{L^2} v^{3-j} \|k^{2(3-j)}\|_{L^2}$ для некоторых констант b_j . Поскольку $\mathbb{E} |\Delta W_1^{r,v}|^j$ пропорционально $v^{j/2}$ и $\|k^\alpha\|_{L^2} \leq \|k\|_{L^2} K_1^{\alpha-1}$ для каждого $\alpha > 1$, то каждое из слагаемых выписанной суммы является $O(v^{3/2})$. Следовательно, $\mathbb{E} \|c(v, r, \cdot)\|_{L^2} = O(v^{3/2})$, или $\mathbb{E} \|c(v, r, \cdot)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = O(v^{3/2})$, где $\mathcal{L}(L^2)$ – пространство линейных непрерывных операторов в $L^2(\mathbb{R})$. Равномерность оценок по r следует из того, что распределение $\Delta W_1^{r,v}$ не зависит от r .

Везде далее для произвольных $s > r > 0$ через $\mathcal{Q}_r^s$ обозначена минимальная σ -алгебра, относительно которой измеримы случайные величины $\{W_1(t) - W_1(r)\}_{r \leq t \leq s}$. Отметим, что в силу того, что W_1 – процесс с независимыми приращениями, σ -алгебры $\mathcal{Q}_{r_1}^{s_1}$ и $\mathcal{Q}_{r_2}^{s_2}$ являются независимыми, если интервалы (r_1, s_1) и (r_2, s_2) не пересекаются.

ЛЕММА 2. Пусть функция k принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R})$ и ограничена. Тогда для произвольных $r, v > 0$ выполнено следующее асимптотическое разложение случайного оператора Q_r^{r+v} по параметру v при $v \rightarrow 0$:

$$Q_r^{r+v} = 1 - \sqrt{\mu_1} k(\hat{q}) \Delta W_1^{r,v} - \frac{\mu_1}{2} v k^2(\hat{q}) + \frac{\mu_1}{2} v k^2(\hat{q}) \zeta^{r,v} + O(v^{3/2}), \quad (15)$$

где через $O(v^{3/2})$ обозначен случайный оператор в $L^2(\mathbb{R})$, измеримый относительно $\mathcal{Q}_r^{r+v}$ и такой, что математическое ожидание его нормы является $O(v^{3/2})$ равномерно по r . Кроме этого, $\zeta^{r,v}$ – это случайная величина с нулевым средним, измеримая относительно $\mathcal{Q}_r^{r+v}$, распределение которой не зависит от r и v . В равенстве (15) единичный оператор в $L^2(\mathbb{R})$ обозначен 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\begin{aligned} Q_r^{r+v} &= 1 - \sqrt{\mu_1} k \Delta W_1^{r,v} - \mu_1 v k^2 + \frac{\mu_1}{2} k^2 (\Delta W_1^{r,v})^2 + O(v^{3/2}) \\ &= 1 - \sqrt{\mu_1} k \Delta W_1^{r,v} - \frac{\mu_1}{2} v k^2 + \frac{\mu_1}{2} v k^2 \frac{(\Delta W_1^{r,v})^2 - v}{v} + O(v^{3/2}). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что $\zeta^{r,v} = \frac{(\Delta W_1^{r,v})^2 - v}{v}$ – случайная величина с нулевым средним, распределенная согласно закону $\chi^2(1) - 1$.

Аналогично можно получить асимптотическое разложение для P_r^{r+v} (везде далее через $\mathcal{P}_r^s$ обозначена минимальная σ -алгебра, относительно которой измеримы случайные величины $\{W_2(t) - W_2(r)\}_{r \leq t \leq s}$). Если $h \in L^2(\mathbb{R})$ и $\sup_{q \in \mathbb{R}} |h(q)| < \infty$, то при $v \rightarrow 0$ выполнено соотношение

$$P_r^{r+v} = 1 - \sqrt{\mu_2} h(\hat{p}) \Delta W_2^{r,v} - \frac{\mu_2}{2} v h^2(\hat{p}) + \frac{\mu_2}{2} v h^2(\hat{p}) \eta^{r,v} + O(v^{3/2}), \quad (16)$$

где через $O(v^{3/2})$ обозначен случайный оператор в $L^2(\mathbb{R})$, измеримый относительно $\mathcal{P}_r^{r+v}$ и такой, что математическое ожидание его нормы является $O(v^{3/2})$ равномерно по r . Кроме этого, $\eta^{r,v}$ – это случайная величина с нулевым средним, измеримая относительно $\mathcal{P}_r^{r+v}$, распределение которой не зависит от r и v .

Для доказательства равенства (16) достаточно заметить, что с использованием преобразования Фурье $\mathcal{F}$ в $L^2(\mathbb{R})$ оператор P_r^{r+v} можно записать следующим образом:

$$P_r^{r+v} = \mathcal{F} \exp\{-\sqrt{\mu_2} h \Delta W_2^{r,v} - \mu_2 v h^2\} \mathcal{F}^{-1}.$$

Для экспоненты в последнем равенстве можно получить разложение, аналогичное (15), а применение оператора преобразования Фурье справа и слева от экспоненты приведет к асимптотическому разложению (16), так как этот оператор является унитарным и неслучайным.

Из асимптотических разложений (15) и (16), определения символа гамильтониана (8) и из леммы 1 следует асимптотическое разложение для оператора $U_r^{r+v} = Q_r^{r+v} e^{-iv\mathcal{H}} P_r^{r+v}$:

$$\begin{aligned} U_r^{r+v} &= 1 - \sqrt{\mu_1} k(\hat{q}) \Delta W_1^{r,v} - \frac{\mu_1}{2} v k^2(\hat{q}) + \frac{\mu_1}{2} v k^2(\hat{q}) \zeta^{r,v} - \sqrt{\mu_2} h(\hat{p}) \Delta W_2^{r,v} \\ &\quad - \frac{\mu_2}{2} v h^2(\hat{p}) + \frac{\mu_2}{2} v h^2(\hat{p}) \eta^{r,v} - iv(k_0(\hat{q}) + h_0(\hat{p}) + \hat{l}) \\ &\quad + \sqrt{\mu_1 \mu_2} k(\hat{q}) h(\hat{p}) \Delta W_1^{r,v} \Delta W_2^{r,v} + o(v^{\frac{3}{2}-\varepsilon}), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Для того чтобы получить аналогичное асимптотическое разложение для оператора T_r^{r+v} , необходимо следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть A и B являются операторами в банаховом пространстве X , и пусть W – стандартный винеровский процесс, $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ – случайная функция, являющаяся решением стохастического дифференциального

уравнения Ито $d\varphi = A\varphi dt + B\varphi dW(t)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ справедливо разложение

$$\varphi(t) = \varphi(0) + B\varphi(0)W(t) + A\varphi(0)t + \frac{1}{2}B^2\varphi(0)(W^2(t) - t) + o(t^{\frac{3}{2}-\varepsilon})$$

при $t \rightarrow 0$. При этом через $o(t^{\frac{3}{2}-\varepsilon})$ обозначена случайная величина ξ_t такая, что с вероятностью 1 выполнено соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\xi_t|}{t^{\frac{3}{2}-\varepsilon}} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению решения стохастического дифференциального уравнения Ито функция φ удовлетворяет интегральному соотношению

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t A\varphi(r) dr + \int_0^t B\varphi(r) dW(r), \quad (18)$$

где $\int_0^t B\varphi(r) dW(r)$ – стохастический интеграл Ито. Найдем асимптотическое разложение $\varphi(t)$ при $t \rightarrow 0$ с помощью метода неопределенных коэффициентов. Пусть

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \beta W(t) + \alpha t + \frac{1}{2}\gamma(W^2(t) - t) + o(t^{\frac{3}{2}-\varepsilon}).$$

Подставим правую часть последнего равенства в обе части уравнения (18). Поскольку нас интересует разложение с точностью до $o(t^{\frac{3}{2}-\varepsilon})$, то при подстановке $\varphi(r)$ в $\int_0^t A\varphi(r) dr$ можно учитывать только константу в асимптотическом разложении (остальные члены в этом разложении являются $o(r^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ в силу леммы 1), следовательно,

$$\int_0^t A\varphi(r) dr = A\varphi(0)t + o(t^{\frac{3}{2}-\varepsilon}).$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^t B\varphi(r) dW(r) &= B\varphi(0)W(t) + \int_0^t B\beta W(r) dW(r) + o(t^{\frac{3}{2}-\varepsilon}) \\ &= B\varphi(0)W(t) + \frac{1}{2}B\beta(W^2(t) - t) + o(t^{\frac{3}{2}-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Приравнивая левую и правую части равенства (18), получим соотношение

$$\begin{aligned} \beta W(t) + \alpha t + \frac{1}{2}\gamma(W^2(t) - t) + o(t^{\frac{3}{2}-\varepsilon}) \\ = A\varphi(0)t + B\varphi(0)W(t) + \frac{1}{2}B\beta(W^2(t) - t) + o(t^{\frac{3}{2}-\varepsilon}), \end{aligned}$$

откуда вытекают равенства $\alpha = A\varphi(0)$, $\beta = B\varphi(0)$, $\gamma = B\beta$ и следует утверждение леммы.

Применяя лемму 3 в случае уравнения (2), получим асимптотическое разложение для оператора T_r^{r+v} :

$$\begin{aligned} T_r^{r+v} = & 1 - \sqrt{\mu_1} k(\hat{q}) \Delta W_1^{r,v} - \frac{\mu_1}{2} v k^2(\hat{q}) \\ & + \frac{\mu_1}{2} v k^2(\hat{q}) \zeta^{r,v} - \sqrt{\mu_2} h(\hat{p}) \Delta W_2^{r,v} - \frac{\mu_2}{2} v h^2(\hat{p}) \\ & + \frac{\mu_2}{2} v h^2(\hat{p}) \eta^{r,v} - i v (k_0(\hat{q}) + h_0(\hat{p}) + \hat{l}) + o(v^{\frac{3}{2}-\varepsilon}), \end{aligned} \quad (19)$$

где, как обычно, $\zeta^{r,v} = \frac{(\Delta W_1^{r,v})^2 - v}{v}$, $\eta^{r,v} = \frac{(\Delta W_2^{r,v})^2 - v}{v}$. Отметим, что непосредственное применение леммы 3 доказывает разложение (19) только для $r = 0$. Однако, так как W_1 и W_2 – винеровские процессы, распределение операторнозначной случайной величины T_r^{r+v} не зависит от r и разложение справедливо для любого r . Более того, $o(v^{\frac{3}{2}-\varepsilon})$ в правой части (19) – это оператор в $L^2(\mathbb{R})$, математическое ожидание нормы которого является $o(v^{\frac{3}{2}-\varepsilon})$ равномерно по r .

Из асимптотических разложений (19) и (17) видно, что T_r^{r+v} и U_r^{r+v} отличаются на слагаемое $\sqrt{\mu_1 \mu_2} k(\hat{q}) h(\hat{p}) \Delta W_1^{r,v} \Delta W_2^{r,v} + o(v^{\frac{3}{2}-\varepsilon})$, которое является ключевым для доказательства рандомизированной формулы Фейнмана (14). Отметим также, что в стандартной формулировке теоремы Чернова, используемой для вывода формул типа Фейнмана, помимо требования аппроксимации семейства операторов, предполагается, что норма $\|S(t)\|$ оператора из аппроксимирующего семейства не превосходит e^{Ct} для некоторой константы $C > 0$ (эта константа является общей для всех $t \geq 0$).

Оказывается, что аналогичное техническое ограничение необходимо и для доказательства рандомизированной формулы Фейнмана. Следующая лемма содержит некоторые достаточные условия для выполнения этого ограничения.

ЛЕММА 4. Пусть функции h и k принадлежат $L^2(\mathbb{R})$ и ограничены, а отображение $t \mapsto \mathbb{E}\|T_0^t\|$ дифференцируемо в нуле. Тогда найдется константа $C > 0$ такая, что для всех $r, v > 0$ справедливы оценки

$$\mathbb{E}\|U_r^{r+v}\| \leq e^{Cv}, \quad \mathbb{E}\|T_r^{r+v}\| \leq e^{Cv},$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму на пространстве линейных операторов в $L^2(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $r = 0$ (оценки для произвольных $r > 0$ будут такими же, как и для $r = 0$ в силу того, что распределения рассматриваемых операторнозначных случайных величин зависят только от разности верхнего и нижнего индексов). Получим сначала оценку для U_0^v . Если $K_1 = \sup_{q \in \mathbb{R}} |k(q)| < \infty$, то $\|Q_0^v\| \leq e^{K_1 \sqrt{\mu_1} \Delta W_1(v)}$. Поэтому $\mathbb{E}\|Q_0^v\| \leq e^{\frac{1}{2} K_1^2 \mu_1 v}$.

Аналогично, если $K_2 = \sup_{q \in \mathbb{R}} |h(q)| < \infty$, то $\mathbb{E}\|P_0^v\| \leq e^{\frac{1}{2} K_2^2 \mu_2 v}$. Для доказательства последней оценки достаточно заметить, что по определению оператора квантования

$$P_0^v = \mathcal{F}^{-1} \exp\{\sqrt{\mu_2} h(\cdot) W_2(v) - \mu_2 v h^2(\cdot)\} \mathcal{F},$$

где $\exp\{\sqrt{\mu_2} h(\cdot) W_2(v) - \mu_2 v h^2(\cdot)\}$ – оператор умножения на соответствующую функцию в $L^2(\mathbb{R})$, а $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R})$. После этого неравенство $\mathbb{E}\|P_0^v\| \leq e^{\frac{1}{2} K_2^2 \mu_2 v}$ вытекает из унитарности преобразования Фурье и оценки математического ожидания нормы оператора $\exp\{\sqrt{\mu_2} h(\cdot) W_2(v) - \mu_2 v h^2(\cdot)\}$.

Заметим, что поскольку операторнозначная случайная величина Q_0^v зависит только от реализации процесса W_1 , P_0^v — только от реализации процесса W_2 , а процессы W_1 и W_2 являются независимыми, то выполнено соотношение

$$\mathbb{E}\|U_0^v\| \leq \mathbb{E}\|Q_0^v\| \|\widehat{e^{-iv\mathcal{H}}}\| \mathbb{E}\|P_0^v\| \leq e^{v(\mu_1 K_1^2 + \mu_2 K_2^2)}.$$

Докажем теперь аналогичную оценку для оператора T_0^v . Так как $\{T_r^s\}_{0 \leq r \leq s}$ — разрешающее семейство случайных операторов, соответствующее уравнению (2), то для произвольного $r \in (0, v)$ выполнено равенство $T_0^v = T_r^v T_0^r$. Поскольку случайные величины T_r^v и T_0^r независимы, то справедлива оценка

$$\mathbb{E}\|T_0^v\| \leq \mathbb{E}\|T_r^v\| \mathbb{E}\|T_0^r\|.$$

В силу того, что распределение T_r^v зависит только от $v - r$, функция f , задаваемая равенством $f(v - r) = \mathbb{E}\|T_r^v\|$ для всех r, v таких, что $0 \leq r \leq v$, определена корректно.

В терминах функции f последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$f(v) \leq f(r)f(v - r).$$

Аналогично можно получить неравенство $f(v) \leq (f(v/n))^n$ для всех $v > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Из условия леммы вытекает, что существует $f'(0) < \infty$. Следовательно, выполняется соотношение

$$f(v) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (f(v/n))^n = e^{f'(0)v}.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1 (рандомизированная формула Фейнмана). Пусть функции h и k принадлежат $L^2(\mathbb{R})$ и ограничены, а отображение $t \mapsto \mathbb{E}\|T_0^t\|$ дифференцируемо в нуле. Тогда для произвольной функции $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ и $t > 0$ выполняется равенство

$$T_0^t \varphi_0 = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_{(n-1)t/n}^t U_{(n-2)t/n}^{(n-1)t/n} \dots U_0^{t/n} \varphi_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Везде далее $t > 0$ произвольно и фиксировано, а $v = t/n$. Запишем разность между операторами в левой и правой частях (14) в виде

$$\begin{aligned} T_0^{nv} - U_{(n-1)v}^{nv} U_{(n-2)v}^{(n-1)v} \dots U_0^v &= \prod_{j=n}^1 T_{(j-1)v}^{jv} - \prod_{j=n}^1 U_{(j-1)v}^{jv} \\ &= \frac{t}{n} \sum_{j=n}^1 \prod_{k=n}^{j+1} T_{(k-1)v}^{kv} \frac{T_{(j-1)v}^{jv} - U_{(j-1)v}^{jv}}{v} \prod_{k=j-1}^1 U_{(k-1)v}^{kv}. \end{aligned}$$

Для всех $v > 0$ и $j = 1, \dots, n$ (разумеется, v и n связаны соотношением $nv = t$) определим $L^2(\mathbb{R})$ -значные случайные величины ξ_j^v равенством

$$\xi_j^v = \prod_{k=n}^{j+1} T_{(k-1)v}^{kv} \frac{T_{(j-1)v}^{jv} - U_{(j-1)v}^{jv}}{v} \prod_{k=j-1}^1 U_{(k-1)v}^{kv} \varphi_0.$$

Тогда доказательство рандомизированной формулы Фейнмана (14) эквивалентно проверке того, что

$$\mathbb{E} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j^v \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Для доказательства последнего соотношения достаточно показать, что величины $\mathbb{E} \|\xi_j^v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ равномерно ограничены по j в некоторой окрестности точки $v = 0$, а $\mathbb{E}(\xi_j^v, \xi_l^v)_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $v \rightarrow 0$ равномерно по всем $j \neq l$. Пусть $\mathcal{Y}_r^{r+v}$ – минимальная σ -алгебра для всех $r, v > 0$, содержащая $\mathcal{P}_r^{r+v}$ и $\mathcal{Q}_r^{r+v}$. Кроме того, для произвольной случайной величины ξ через $\mathbb{E}_r^{r+v} \xi$ обозначено условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{Y}_0^r \cup \mathcal{Y}_{r+v}^t)$. Таким образом, $\mathbb{E}_r^{r+v}$ является оператором усреднения по σ -алгебре $\mathcal{Y}_r^{r+v}$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \|\xi_j^v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\prod_{k=n}^{j+1} T_{(k-1)v}^{kv} \frac{T_{(j-1)v}^{jv} - U_{(j-1)v}^{jv}}{v} \prod_{k=j-1}^1 U_{(k-1)v}^{kv} \varphi_0 \right)(q) \\ &\quad \times \overline{\left(\prod_{k=n}^{j+1} T_{(k-1)v}^{kv} \frac{T_{(j-1)v}^{jv} - U_{(j-1)v}^{jv}}{v} \prod_{k=j-1}^1 U_{(k-1)v}^{kv} \varphi_0 \right)(q)} dq. \end{aligned}$$

Из асимптотических разложений (19) и (17) следует, что

$$\frac{T_{(j-1)v}^{jv} - U_{(j-1)v}^{jv}}{v} = \frac{1}{v} \sqrt{\mu_1 \mu_2} k(\hat{q}) h(\hat{p}) \Delta W_1^{(j-1)v, v} \Delta W_2^{(j-1)v, v} + o(v^{\frac{1}{2}-\varepsilon}).$$

Из этого равенства и оценок на математические ожидания норм операторов, выведенных в лемме 4, вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\xi_j^v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \mathbb{E}(\mathbb{E}_{(j-1)v}^{jv} \|\xi_j^v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2) \\ &\leq e^{2Cv(n-j)} \left(\mu_1 \mu_2 \|k\|^2 \|h\|^2 \mathbb{E}(\Delta W_1^{(j-1)v, v} / \sqrt{v})^2 \right. \\ &\quad \times \mathbb{E}(\Delta W_2^{(j-1)v, v} / \sqrt{v})^2 + o(v^{1-2\varepsilon}) \Big) e^{2Cv(j-1)} \|\varphi_0\|^2 \\ &\leq e^{Ct} (\mu_1 \mu_2 \|k\|^2 \|h\|^2 + o(v^{1-2\varepsilon})) \|\varphi_0\|^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то последняя оценка является искомой.

Осталось показать, что ковариации $\mathbb{E}(\xi_j^v, \xi_l^v)_{L^2(\mathbb{R})}$ стремятся к нулю при $v \rightarrow 0$ равномерно по $j \neq l$. Рассмотрим случай $j = n, l = n-1$. Тогда

$$\begin{aligned} (\xi_n^v, \xi_{n-1}^v)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{T_{(n-1)v}^{nv} - U_{(n-1)v}^{nv}}{v} \prod_{k=n-1}^1 U_{(k-1)v}^{kv} \varphi_0 \right)(q) \\ &\quad \times \overline{\left(\frac{T_{(n-2)v}^{(n-1)v} - U_{(n-2)v}^{(n-1)v}}{v} \prod_{k=n-2}^1 U_{(k-1)v}^{kv} \varphi_0 \right)(q)} dq. \end{aligned}$$

Сначала найдем $E_{(n-1)v}^{nv}(\xi_n^v, \xi_{n-1}^v)_{L^2(\mathbb{R})}$, т.е. проведем усреднение по σ -алгебре $\mathcal{Y}_{(n-1)v}^{nv}$. В скалярное произведение (ξ_n^v, ξ_{n-1}^v) входят только две случайные величины, зависящие от $\mathcal{Y}_{(n-1)v}^{nv}$, — это $\frac{T_{(n-1)v}^{nv} - U_{(n-1)v}^{nv}}{v}$ и $T_{(n-1)v}^{nv}$.

Если $\psi = \prod_{k=n-2}^1 U_{(k-1)v}^{kv} \varphi_0$, то из асимптотических разложений для двух указанных выше случайных величин вытекает равенство

$$\begin{aligned} (\xi_n^v, \xi_{n-1}^v)_{L^2(\mathbb{R})} = & \left(\left[1 - \sqrt{\mu_1} k(\hat{q}) \Delta W_1^{r,v} - \frac{\mu_1}{2} v k^2(\hat{q}) + \frac{\mu_1}{2} v k^2(\hat{q}) \zeta^{r,v} \right. \right. \\ & - \sqrt{\mu_2} h(\hat{p}) \Delta W_2^{r,v} - \frac{\mu_2}{2} v h^2(\hat{p}) + \frac{\mu_2}{2} v h^2(\hat{p}) \eta^{r,v} \\ & \left. \left. - i v (k_0(\hat{q}) + h_0(\hat{p}) + \hat{l}) + o(v^{\frac{3}{2}-\varepsilon}) \right] \frac{T_{(n-2)v}^{(n-1)v} - U_{(n-2)v}^{(n-1)v}}{v} \psi, \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{v} \sqrt{\mu_1 \mu_2} k(\hat{q}) h(\hat{p}) \Delta W_1^{(j-1)v,v} \Delta W_2^{(j-1)v,v} + o(v^{\frac{1}{2}-\varepsilon}) \right] U_{(n-2)v}^{(n-1)v} \psi \right)_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Для вычисления $E_{(n-1)v}^{nv}(\xi_n^v, \xi_{n-1}^v)_{L^2(\mathbb{R})}$ необходимо раскрыть обе пары квадратных скобок в последнем равенстве. Можно заметить, что математические ожидания некоторых слагаемых, получающихся после раскрытия скобок, равны нулю. Поэтому

$$\begin{aligned} E_{(n-1)v}^{nv}(\xi_n^v, \xi_{n-1}^v)_{L^2(\mathbb{R})} = & E_{(n-1)v}^{nv} \left(\left[1 - \sqrt{\mu_1} k(\hat{q}) \Delta W_1^{r,v} - \frac{\mu_1}{2} v k^2(\hat{q}) \right. \right. \\ & + \frac{\mu_1}{2} v k^2(\hat{q}) \zeta^{r,v} - \sqrt{\mu_2} h(\hat{p}) \Delta W_2^{r,v} - \frac{\mu_2}{2} v h^2(\hat{p}) + \frac{\mu_2}{2} v h^2(\hat{p}) \eta^{r,v} - i v (k_0(\hat{q}) \\ & + h_0(\hat{p}) + \hat{l}) + o(v^{\frac{3}{2}-\varepsilon}) \left. \right] \frac{T_{(n-2)v}^{(n-1)v} - U_{(n-2)v}^{(n-1)v}}{v} \psi, o(v^{\frac{1}{2}-\varepsilon}) U_{(n-2)v}^{(n-1)v} \psi \Big)_{L^2(\mathbb{R})} \\ & + \left(o(v^{\frac{3}{2}-\varepsilon}) \frac{T_{(n-2)v}^{(n-1)v} - U_{(n-2)v}^{(n-1)v}}{v} \psi, \sqrt{\mu_1 \mu_2} k(\hat{q}) h(\hat{p}) U_{(n-2)v}^{(n-1)v} \psi \right)_{L^2(\mathbb{R})} \\ = & \left((1 + o(1)) \frac{T_{(n-2)v}^{(n-1)v} - U_{(n-2)v}^{(n-1)v}}{v} \psi, o(v^{\frac{1}{2}-\varepsilon}) U_{(n-2)v}^{(n-1)v} \psi \right)_{L^2(\mathbb{R})} \\ & + \left(o(v^{\frac{3}{2}-\varepsilon}) \frac{T_{(n-2)v}^{(n-1)v} - U_{(n-2)v}^{(n-1)v}}{v} \psi, \sqrt{\mu_1 \mu_2} k(\hat{q}) h(\hat{p}) U_{(n-2)v}^{(n-1)v} \psi \right)_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что $\|\psi\| \leq e^{C(n-2)v} \|\varphi_0\| \leq e^{Ct} \|\varphi_0\|$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} |E(\xi_n^v, \xi_{n-1}^v)| &= |E\{E_{(n-2)v}^{(n-1)v}[E_{(n-1)v}^{nv}(\xi_n^v, \xi_{n-1}^v)]\}| \\ &\leq (1 + o(1)) o(v^{\frac{1}{2}-\varepsilon}) e^{2Ct} \|\varphi_0\|^2 \\ &\quad + (1 + o(1)) o(v^{\frac{3}{2}-\varepsilon}) \sqrt{\mu_1 \mu_2} \|k\| \|h\| e^{2Ct} \|\varphi_0\|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $v \rightarrow 0$.

Случай произвольных j и l рассматривается аналогично. При этом сходимость $E(\xi_j^v, \xi_l^v)$ к нулю будет равномерной по $j \neq l$, так как асимптотические разложения при $v \rightarrow 0$ операторов $T_{(j-1)v}^{jv}$ и $U_{(j-1)v}^{jv}$ не зависят от j . Теорема доказана.

§ 5. Стохастические интегралы Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве

Если функция, определенная на фазовом пространстве, зависит от случайного параметра, то гамильтонов интеграл Фейнмана от этой функции можно определить естественным образом, расширив классическое определение из [24]. Пусть $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ – это вероятностное пространство. Везде далее случайный интеграл Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве от функции $F: C([0, t], \mathbb{R}) \times C([0, t], \mathbb{R}) \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $F(\xi_q, \xi_p, \cdot)$ измерима относительно $(\Omega, \mathcal{G})$ для всех $\xi_q, \xi_p \in C([0, t], \mathbb{R})$, – это случайная функция из $L^2(\mathbb{R})$, являющаяся w -пределом случайных функций $z \mapsto I_n(F, z)$ при $n \rightarrow \infty$, определенных равенством (3).

ТЕОРЕМА 2. Пусть вещественнозначные функции h и k принадлежат $L^2(\mathbb{R})$ и ограничены, и пусть h_0 и k_0 – функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, а $l \in L^2(\mathbb{R}^2)$ – вещественнозначная и $\mathcal{H}(q, p) = k_0(q) + h_0(p) + l(q, p)$ для всех $q, p \in \mathbb{R}$. Кроме того, предполагается, что если $\{T_r^t\}_{0 \leq r \leq t}$ – разрешающее семейство операторов, соответствующее уравнению (2) с гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}$, получающимся qp -квантованием $\mathcal{H}$, то отображение $t \mapsto \mathbb{E}\|T_0^t\|$ дифференцируемо в нуле. Тогда для произвольной функции $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ и $t > 0$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} T_0^t \varphi_0 &= \int \exp \left\{ - \int_0^t (i\mathcal{H}(\xi_q(s), \xi_p(s)) + \mu_1 k^2(\xi_q(s)) + \mu_2 h^2(\xi_p(s))) ds \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\sqrt{\mu_1} \int_0^t k(\xi_q(s)) dW_1(s) - \sqrt{\mu_2} \int_0^t h(\xi_p(s)) dW_2(s) \right\} \\ &\quad \times \varphi_0(\xi_q(0)) \Phi^{0,t,\cdot}(d\xi_q, d\xi_p). \end{aligned} \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению стохастического гамильтонова интеграла Фейнмана правая часть равенства (21) – это $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} B_{t(n-1)/n}^t B_{t(n-2)/n}^{t(n-1)/n} \dots B_0^{t/n} \varphi_0$, где для всех $r, v \geq 0$ действие оператора B_r^{r+v} на функцию $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ определяется следующим образом. Пусть

$$f(q, p) = \exp \{ -(i\mathcal{H}(q, p) + \mu_1 k^2(q) + \mu_2 h^2(p))v - \sqrt{\mu_1} k(q) \Delta W_1^{r,v} - \sqrt{\mu_2} h(p) \Delta W_2^{r,v} \}$$

для всех $q, p \in \mathbb{R}$. Тогда $B_r^{r+v} \varphi = \hat{f} \varphi$, где $\hat{}$ – операция qp -квантования.

Покажем, что B_r^{r+v} совпадает с U_r^{r+v} . Пусть $f_1(q, p) = \exp \{ -\sqrt{\mu_1} k(q) \Delta W_1^{r,v} - \mu_1 k^2(q)v \}$ для всех $q, p \in \mathbb{R}$, $f_2(q, p) = \exp \{ -i\mathcal{H}(q, p)v \}$ для всех $q, p \in \mathbb{R}$ и $f_3(q, p) = \exp \{ -\sqrt{\mu_2} h(p) \Delta W_2^{r,v} - \mu_2 h^2(p)v \}$ для всех $q, p \in \mathbb{R}$. Тогда согласно определениям соответствующих семейств операторов имеем $U_r^{r+v} = \hat{f}_1 \hat{f}_2 \hat{f}_3$, а $B_r^{r+v} = \widehat{f_1 f_2 f_3}$. Последнее равенство было доказано в работе [34] в предположении того, что функции f_1, f_2, f_3 неслучайны. В стохастическом случае доказательство аналогично.

Для каждой функции $g \in L^2(\mathbb{R} \times L^2(\mathbb{R}))$ определим оператор $\mathcal{J}(g): L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ равенством

$$[\mathcal{J}(g)\varphi](q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(q, p) e^{ipq} \varphi(p) dp.$$

Тогда операция qp -квантования функции g может быть записана следующим образом:

$$\hat{g} = \mathcal{J}(g)\mathcal{F}^{-1}.$$

Из того, что функция f_1 не зависит от p , а функция f_3 не зависит от q , следуют равенства

$$\widehat{f_1 f_2 f_3} = \mathcal{J}(f_1 f_2 f_3)\mathcal{F}^{-1} = \hat{f}_1 \mathcal{J}(f_2)\mathcal{F}^{-1} \hat{f}_3 = \hat{f}_1 \hat{f}_2 \hat{f}_3.$$

Итак, для всех $r, v > 0$ выполняется равенство $B_r^{r+v} = U_r^{r+v}$ и соотношение (21) следует из утверждения теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результаты теоремы 2 можно распространить на случай τ -квантования с произвольным $\tau \in [0, 1]$. Для этого достаточно получить асимптотические разложения при $v \rightarrow 0$ для оператора $B_r^{r+v} = \hat{f}$ в случае когда $\hat{\cdot}$ – оператор τ -квантования. Можно показать, что эти разложения будут иметь тот же вид, что и (17) (при этом, разумеется, операторы $\hat{\cdot}$ в правой части этого равенства будут соответствовать τ -квантованию). После этого можно доказать аналог теоремы 1, откуда и будет следовать представление решения с помощью гамильтонова интеграла Фейнмана. При этом формула для представления решения будет совпадать с (21), за исключением того, что вместо символа $\Phi^{0,t,\cdot}$ появится псевдомера $\Phi^{\tau,t,\cdot}$, отвечающая случаю τ -квантования.

Отметим также, что использование в стохастическом случае методов, основанных на теореме Чернова, позволяет получить и рандомизированные аналоги формул из работ Смолянова и Шавгулидзе [9], [33]. Для этого следует рассматривать подходящие разложения в ряд Дайсона случайных мер, зависящих от реализаций винеровских процессов W_1 и W_2 .

Список литературы

1. Алимов А. Л. О связи между континуальными интегралами и дифференциальными уравнениями // ТМФ. 1972. Т. 11. №2. С. 182–190.
2. Альбеверио С., Смолянов О. Г. Бесконечномерные стохастические уравнения Шрёдингера–Белавкина // УМН. 1997. Т. 52. №4. С. 199–201.
3. Белавкин В. П., Смолянов О. Г. Интеграл Фейнмана по траекториям, соответствующий стохастическому уравнению Шрёдингера // Докл. РАН. 1998. Т. 360. №5. С. 589–593.
4. Гоф Дж. Некоммутативные марковские аппроксимации // Докл. РАН. 2001. Т. 379. №6. С. 730–734.
5. Гоф Дж. Спектральное разложение стационарных в широком смысле квантовых случайных процессов // Докл. РАН. 2004. Т. 397. №5. С. 602–605.
6. Евграфов М. А. Об одной формуле для представления решения дифференциального уравнения континуальным интегралом // ДАН СССР. 1970. Т. 191. №5. С. 979–982.
7. Маслов В. П. Комплексные цепи Маркова и интеграл Фейнмана для нелинейных систем. М.: Наука, 1976.
8. Смолянов О. Г., Трумен А. Уравнения Шрёдингера–Белавкина и ассоциированные с ними уравнения Колмогорова и Линдблада // ТМФ. 1999. Т. 120. №2. С. 193–207.
9. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.
10. Угланов А. В. Об одной конструкции фейнмановского интеграла // ДАН СССР. 1978. Т. 243. №6. С. 1406–1409.
11. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
12. Accardi L., Lu Y. G., Volovich I. Quantum theory and its stochastic limit. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

13. *Albeverio S., Guatteri G., Mazzucchi S.* A representation of the Belavkin equation via phase space Feynman path integrals // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2004. V. 7. № 4. P. 507–526.
14. *Albeverio S., Hoegh-Krohn R.* Mathematical Theory of Feynman Integrals // Lecture Notes in Math. V. 523. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
15. *Albeverio S., Kolokol'tsov V.N., Smolyanov O.G.* Représentation des solution de l'équation de Belavkin pour la mesure quantique par une version rigoureuse de la formule d'intégration fonctionnelle de Menski // C.R. Acad. Sci. Paris. 1996. V. 323. № 1. P. 661–664.
16. *Albeverio S., Kolokol'tsov V.N., Smolyanov O.G.* Quantum Restrictions for Continuous Observation of an Oscillator // Rev. Math. Phys. 1997. V. 9. № 6. P. 907–920.
17. *Belavkin V.P.* Nondemolition Measurements, Nonlinear Filtering and Dynamic Programming of Quantum Stochastic Processes // Proc. Bellman Continuous Workshop, Sophia-Antinopolis. (Lect. Not. in Computer and Inform. Sciences; V. 121) 1988. P. 245–265.
18. *Belavkin V.P.* A New Wave Equation For a Continuous Nondemolition Measurement // Phys. Lett. A. 1989. V. 140. P. 355–358.
19. *Chernoff R.* Product Formulas, Nonlinear Semigroups and Addition of Unbounded Operators // Mem. Amer. Math. Soc. 1974. V. 140. P. 1–121.
20. *Davies E.B.* Quantum Theory of Open Systems. London: Academic Press, 1976.
21. *Diosi L.* Continuous Quantum Measurement and Itô Formalism // Phys. Lett. A. 1988. V. 129. P. 419–423.
22. *Erner P.* Open Quantum Systems and Feynman Integrals. Dordrecht–Boston–Lancaster: D. Reidel Publishing company, 1985.
23. *Feynman R.P.* Space-time Approach to Nonrelativistic Quantum Mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367–387.
24. *Feynman R.P.* An Operation Calculus Having Application in Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 108–128.
25. *Ghirardi G.C., Rimini A., Weber T.* Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems // Phys. Rev. D. 1986. V. 34. P. 471.
26. *Hudson R.L., Parthasarathy K.R.* Quantum Itô's Formula and Stochastic Evolutions // Commun. Math. Phys. 1984. V. 93. P. 301–323.
27. *Ikeda N., Watanabe S.* Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Kodansha: North Holland, 1981.
28. *Levy P.* Theorie de l'Addition des Variables Aleatoires. Paris: Gauthier-Villars, 1937.
29. *McKean H.* Stochastic Integrals. N.Y.: Acad. Press, 1969.
30. *Mensky M.B.* Quantum Restrictions for Continuous Observation of an Oscillator // Phys. Rev. D. 1979. V. 20. P. 384–387.
31. *Mensky M.B.* Continuous Quantum Measurements and Path Integrals. Bristol: IOP Publishing, 1993.
32. *Obrezkov O.O.* Stochastic Schrödinger Equation with Two-dimensional White Noise // Russian J. of Math. Physics. 2002. V. 9. № 4. P. 446–454.
33. *Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T.* Some Properties and the Applications of Feynman Measures in the Phase Space // Proc. of the Fourth Vilnius Conference. 1987. V. 2. P. 595–608.
34. *Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A.* Hamiltonian Feynman Path Integrals via the Chernoff Formula // J. Math. Phys. 2002. V. 43. № 10. P. 5161–5171.
35. *Smolyanov O.G., von Weizsäcker H., Wittich O.* Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions // Canadian Math. Society Conference Proceedings. 2000. V. 29. P. 589–602.
36. *Smolyanov O.G., von Weizsäcker H., Wittich O.* Chernoff's Theorem and the Construction of Semigroups. Preprint № 01-11 / Institute of Biomathematics and Biometrics, GSF-National Research Center for Environment and Health (Neuherberg, Germany), 2001