Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Зорина, О C^m -продолжении субголоморфных функций с плоских жордановых областей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 6, 21–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/im664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:41:50

УДК 517.5

О. А. Зорина

О C^m -продолжении субголоморфных функций с плоских жордановых областей

Доказано, что всякая субголоморфная в D функция f класса $C^m(\overline{D})$ продолжается до субголоморфной функции класса C^m во всем $\mathbb{C}$ с оценкой C^m -нормы, где $m \in (0, 2)$ и D – произвольная жорданова B -область в $\mathbb{C}$. Получен ряд следствий, а также аналог приведенного утверждения для классов Lip^m при $m \in (0, 2]$.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

Для произвольного открытого множества Ω в $\mathbb{C}$ через $A^+(\Omega)$ обозначим класс субголоморфных в Ω (обобщенных) функций. Напомним, что $f \in A^+(\Omega)$, если f удовлетворяет (в обобщенном смысле) неравенству $\partial f / \partial \bar{z} \geq 0$ в Ω . Другими словами, локально в Ω , с точностью до голоморфного слагаемого, f является преобразованием Коши от неотрицательной борелевской меры (подробнее об этом см. [1]).

В настоящей работе мы продолжаем изучение следующей задачи, поставленной в [2]: *каковы условия на компакт X в $\mathbb{C}$ и $m \geq 0$, необходимые и достаточные для того, чтобы для любой функции $f \in A^+(X^\circ) \cap C^m(\mathbb{C})|_X$ существовала функция $F \in A^+(\mathbb{C}) \cap C^m(\mathbb{C})$ такая, что $F|_X = f$.*

Необходимые нам в дальнейшем пространства BC^m , C^m , $B\text{Lip}^m$, Lip^m (на произвольных открытых множествах Ω и компактах X в $\mathbb{C}$), а также соответствующие им нормы (при всех $m \geq 0$) введены, например, в работе [3, § 2].

При $m = 0$ (случай непрерывного продолжения) для кругов B рассматриваемая задача была решена в работе [1]: при любом $c > 3$ всякую функцию $f \in A^+(B) \cap C(\overline{B})$ можно непрерывно продолжить до функции $F \in A^+(\mathbb{C}) \cap C(\mathbb{C})$ с оценкой $\|F\|_{\mathbb{C}} \leq c\|f\|_{\overline{B}}$. Полученный результат пока не удается обобщить на другие области (даже без оценок равномерной нормы). Основная трудность при переходе к другим областям состоит в том, что класс субголоморфных функций не инвариантен относительно конформных отображений.

Пусть $B(a, r)$ – открытый круг в $\mathbb{C}$ радиуса $r > 0$ с центром в точке a , $B_1 = B(0, 1)$ – единичный круг.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00720) и программы “Ведущие научные школы РФ” (грант НШ-2040.2003.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (см. [3]). Жорданову область D в $\mathbb{C}$ назовем B -областью, если конформное отображение k внешности области D на внешность единичного круга B_1 с условиями $k(\infty) = \infty$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} (k(z)/z) > 0$ является билипшицевым, т. е. существует константа $c_0 \geq 1$ такая, что

$$c_0^{-1}|z_1 - z_2| \leq |k(z_1) - k(z_2)| \leq c_0|z_1 - z_2|$$

при всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus D$.

Пусть $SH(\Omega)$ – класс всех (вещественных) субгармонических функций на открытом множестве Ω в $\mathbb{C}$. В работе [3] установлено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА А. Пусть D – произвольная B -область, $m \in (1, 3)$. Тогда найдется константа $c = c(D, m) > 0$ такая, что для любой функции $g \in C^m(\overline{D}) \cap SH(D)$ существует $G \in C^m(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$ с условиями $G|_{\overline{D}} = g$ и

$$\|\nabla G\|_{m-1, \mathbb{C}} \leq c \|\nabla g\|_{m-1, \overline{D}}.$$

(При $m \notin [1, 3]$ утверждение о продолжении не верно даже для кругов.)

Основным результатом настоящей работы является следующий аналог теоремы А.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть D является B -областью, $m \in (0, 2)$. Найдется константа $c = c(D, m) > 0$ такая, что для любой функции $f \in C^m(\overline{D}) \cap A^+(D)$ существует $F \in BC^m(\mathbb{C}) \cap A^+(\mathbb{C})$ с условиями $F|_{\overline{D}} = f$ и

$$\|F\|_{m, \mathbb{C}} \leq c \|f\|_{m, \overline{D}}. \quad (1.1)$$

Напомним [1], что при $m \geq 2$ для (любого) круга B найдется функция $f \in A^+(B) \cap C^\infty(\mathbb{C})|_{\overline{B}}$, которую нельзя продолжить C^2 -субголоморфно ни в какую окрестность замкнутого круга $\overline{B}$.

Теорема 1.2 доказывается с помощью теоремы А, однако сведение теоремы 1.2 к теореме А совсем не так просто, как это может показаться на первый взгляд. Одной из причин здесь является то, что, в отличие от субголоморфных функций, субгармонические функции инвариантны относительно конформных замен координат.

В случае нецелых m существенным моментом в доказательстве теоремы 1.2 является (локальная) непрерывность в пространстве $C^m(\mathbb{C})$ оператора Кальдерона–Зигмунда с ядром $1/\bar{z}^2$ (по мере Лебега) в $\mathbb{C}$. Вторым важным моментом доказательства является лемма 2.1, из которой следует, что для произвольного квазидиска D (и, следовательно, для любой B -области) оператор гармонического сопряжения непрерывен в пространстве $C^m(\overline{D})$ при $m \geq 1$.

Теорема 1.2 доказывается в § 3.

В § 4 приводятся следствия из теоремы 1.2, которые представляют самостоятельный интерес и могут быть полезными в приложениях. В этом же параграфе доказывается аналог теоремы 1.2 для классов Lip^m и приводится пример отсутствия C^1 -продолжения субголоморфных функций с квазидиска с кусочно гладкой границей.

Автор выражает признательность П. В. Парамонову за научное руководство.

§ 2. Лемма о сопряженной гармонической функции

Всюду далее через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначены положительные константы, причем c может меняться в разных соотношениях. Через $H(\Omega)$ обозначен класс (вещественных) гармонических функций на открытом множестве Ω .

Напомним, что жорданова область D со спрямляемой границей ∂D называется *квазидиском*, если найдется такая константа $c_1 = c_1(D) \in (0, +\infty)$, что для любых z_1 и z_2 на ∂D имеет место оценка

$$\ell_{\partial D}(z_1, z_2) \leq c_1 |z_1 - z_2|,$$

где $\ell_{\partial D}(z_1, z_2)$ – минимальная из длин дуг на ∂D , соединяющих z_1 и z_2 .

Очевидно, что всякая B -область является квазидиском.

ЛЕММА 2.1. Пусть D – квазидиск в $\mathbb{C}$, $m \geq 1$, $u \in H(D) \cap C^m(\bar{D})$. Тогда гармонически сопряженная с функцией u функция v в D принадлежит классу $C^m(\bar{D})$, причем выполнена оценка

$$\|v\|_{m, \bar{D}} \leq c(m, D) \|u\|_{m, \bar{D}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $a \in D$ и определим функцию v , гармонически сопряженную с функцией u в D , по стандартной формуле

$$v(z) = \int_a^z \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right), \quad (2.1)$$

где интеграл берется по любой (спрямляемой) кривой, соединяющей точки a и z внутри области D . Ясно, что интеграл в (2.1) (при фиксированных u и a) зависит только от z , причем все частные производные функции v порядков от 1 до $[m]$ (в силу условий Коши–Римана) непрерывно продолжаются на $\bar{D}$.

Применим теорему Уитни [4, гл. 6, п. 2.3 и п. 4.6], согласно которой функция u принадлежит классу $C^m(\bar{D})$, если и только если найдутся $M \geq 0$ и функция $\omega(t): [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$, $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$, такие, что выполнены оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^l \partial y^{k-l}}(z_1) \right| &\leq M, \\ \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^l \partial y^{k-l}}(z_1) - P_{l, k-l}^u(z_1, z_0) \right| &\leq M \omega(|z_1 - z_0|) |z_1 - z_0|^{m-k} \end{aligned} \quad (2.2)$$

при всех $k \leq [m]$, $0 \leq l \leq k$ и всех $z_0 = (x_0, y_0)$, $z_1 = (x_1, y_1)$ в $\bar{D}$, где

$$\begin{aligned} P_{l, k-l}^u(z, z_0) &= \\ &= \sum_{k'=0}^{[m]-k} \sum_{l'=0}^{k'} \frac{1}{l'! (k' - l')!} \left(\frac{\partial^{k'}}{\partial x^{l'} \partial y^{k'-l'}} \frac{\partial^k u}{\partial x^l \partial y^{k-l}}(z_0) \right) (x - x_0)^{l'} (y - y_0)^{k'-l'} \end{aligned} \quad (2.3)$$

– полиномы Тейлора функции u с центром в точке z_0 . При этом величина $\|u\|_{m,\overline{D}}$ (равная, по определению, $\inf\{\|U\|_{m,\mathbb{C}}\}$, где указанная нижняя грань берется по всем возможным C^m -продолжениям U функции u с $\overline{D}$ на все $\mathbb{C}$) *сравнима* с величиной $M(u, m, D) = \inf\{M\}$, где последняя нижняя грань берется по всем M , удовлетворяющим (2.2) (каждая M со своим *допустимым* $\omega(\cdot)$). Точнее говоря, найдется $c_2 = c_2(m, D) \geq 1$ такая, что

$$c_2^{-1}\|u\|_{m,\overline{D}} \leq M(u, m, D) \leq c_2\|u\|_{m,\overline{D}}.$$

Доказательство леммы 2.1 проводится методом итераций (по аналогии с [5, доказательство теоремы 5.1]): мы найдем жордановы окрестности D_n замкнутой области $\overline{D}$ и функции $v_n \in H(D_n)$ такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сойдется к v (с надлежащими оценками, абсолютно в норме пространства $C^m(\overline{D})$).

Пусть $\|u\|_{m,\overline{D}} = M_0$. Возьмем $\varepsilon_1 = M_0/2$ и построим функцию $u_1 \in H(D_1)$, где D_1 – некоторая жорданова окрестность компакта $\overline{D}$, такую, что $\|u - u_1\|_{m,\overline{D}} \leq \varepsilon_1$ (откуда $\|u_1\|_{m,\overline{D}} \leq 3M_0/2$). Возможность указанного приближения функции u следует из теорем О’Фаррелла [6, теорема 1] (для случая $m > 2$, $m \notin \mathbb{Z}$), Вердери [7, теоремы 1 и 2] (для $m \in (1, 2) \cup \{2, 3, \dots\}$) и Парамонова [8, теорема 2] (для $m = 1$); выполнение нужных достаточных условий следует из того, что D – квазидиск.

Определим функцию v_1 , гармонически сопряженную с функцией u_1 в D_1 , по формуле (2.1) (с заменой u на u_1 и v на v_1). Ясно, что $v_1 \in C^m(\overline{D})$. Оценим $\|v_1\|_{m,\overline{D}}$. Поскольку $u_1 \in C^m(\overline{D})$, неравенства (2.2) (с заменой u на v_1 и M на $c_2 M_0$) при $k \geq 1$ непосредственно следуют из аналогичных неравенств для u_1 и условий Коши–Римана. Остается проверить справедливость (2.2) (для v_1 и $M = c(m, D)M_0$) при $k = 0$.

Пусть $z_0, z_1 \in \overline{D}$. Пользуясь тем, что D – квазидиск, найдем кривую γ , соединяющую точки z_0 и z_1 в замкнутой области $\overline{D}$, такую, что ее длина $\ell(\gamma)$ не превосходит $c_1|z_1 - z_0|$. Для этого соединим точки z_0 и z_1 отрезком I . Если I целиком лежит в $\overline{D}$, то полагаем $\gamma = I$. В противном случае пусть z'_0 и z'_1 – точки пересечения отрезка I с границей ∂D области D , ближайшие к z_0 и z_1 соответственно. Тогда γ – кривая, получающаяся объединением отрезка $[z_0, z'_0]$, короткой части границы ∂D (с длиной не более $c_1|z'_0 - z'_1|$), соединяющей точки z'_0 и z'_1 , и отрезка $[z'_1, z_1]$.

Необходимо оценить

$$|v_1(z_1) - P_{0,0}^{v_1}(z_1, z_0)| = \left| \int_{\gamma} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial y}(z) dx + \frac{\partial u_1}{\partial x}(z) dy \right) - (P_{0,0}^{v_1}(z_1, z_0) - v_1(z_0)) \right|. \quad (2.4)$$

Здесь и далее мы интегрируем по кривой γ в направлении от z_0 к z_1 .

Из условий Коши–Римана и из формулы (2.3) (с заменой u на v_1) при $k = 1$ получаются следующие равенства:

$$\begin{aligned} P_{1,0}^{u_1}(z_1, z_0) &= P_{0,1}^{v_1}(z_1, z_0), \\ P_{0,1}^{u_1}(z_1, z_0) &= -P_{1,0}^{v_1}(z_1, z_0). \end{aligned}$$

По условиям Уитни (2.2) для $\partial u_1/\partial x$ и $\partial u_1/\partial y$ (при $M = c_2 M_0$) имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x}(z) - P_{1,0}^{u_1}(z, z_0) \right| &\leq c_2 M_0 \omega_1(|z - z_0|) |z - z_0|^{m-1}, \\ \left| \frac{\partial u_1}{\partial y}(z) - P_{0,1}^{u_1}(z, z_0) \right| &\leq c_2 M_0 \omega_1(|z - z_0|) |z - z_0|^{m-1}, \end{aligned}$$

где $\omega_1(t)$ – некоторая допустимая для u_1 и $M = c_2 M_0$ функция в (2.2).

Поскольку

$$P_{0,0}^{v_1}(z_1, z_0) = \int_{\gamma} (P_{1,0}^{v_1}(z, z_0) dx + P_{0,1}^{v_1}(z, z_0) dy) + v_1(z_0),$$

из (2.4) получаем

$$\begin{aligned} |v_1(z_1) - P_{0,0}^{v_1}(z_1, z_0)| &= \\ &= \left| \int_{\gamma} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial y}(z) dx + \frac{\partial u_1}{\partial x}(z) dy \right) - \int_{\gamma} (P_{1,0}^{v_1}(z, z_0) dx + P_{0,1}^{v_1}(z, z_0) dy) \right| \\ &\leq \left| \int_{\gamma} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial y}(z) + P_{1,0}^{u_1}(z, z_0) \right) dx + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}(z) - P_{0,1}^{u_1}(z, z_0) \right) dy \right| \\ &\leq c_2 M_0 \omega_1(c_1 |z_1 - z_0|) (c_1 |z_1 - z_0|)^m. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $|z - z_0| \leq \ell(\gamma) \leq c_1 |z_1 - z_0|$. Учитывая все сказанное, а также равенство $v_1(a) = 0$, получаем нужную оценку $\|v_1\|_{m, \overline{D}} \leq c_3 \|u_1\|_{m, \overline{D}}$, где $c_3 = c_3(m, D)$.

Теперь, при $n = 2, 3, 4, \dots$, полагая $\varepsilon_n = M_0/2^n$, с помощью упомянутых выше теорем О'Фаррелла, Вердеры и Парамонова строим (последовательно вложенные) жордановы окрестности D_n замкнутой области $\overline{D}$ и функции $u_n \in H(D_n)$ такие, что

$$\left\| \left(u - \sum_{j=1}^{n-1} u_j \right) - u_n \right\|_{m, \overline{D}} \leq \varepsilon_n. \quad (2.5)$$

Для каждой функции u_n (по формуле (2.1)) находим в D_n сопряженную гармоническую функцию v_n , которая, как было показано выше, принадлежит классу $C^m(\overline{D})$, причем $\|v_n\|_{m, \overline{D}} \leq c_3 \|u_n\|_{m, \overline{D}}$. Из (2.5) непосредственно следует, что $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ в $\overline{D}$ и выполнены оценки $\|u_n\|_{m, \overline{D}} \leq 3\varepsilon_n$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ задает функцию v в $\overline{D}$, гармонически сопряженную функции u в D . Остается только учесть, что

$$\|v\|_{m, \overline{D}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_{m, \overline{D}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_3 \|u_n\|_{m, \overline{D}} \leq c_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3M_0}{2^n} = c(m, D) \|u\|_{m, \overline{D}}.$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

Напомним стандартные обозначения:

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $m \in (0, 2)$, D является квазидиском в $\mathbb{C}$ и функция $f \in A^+(D) \cap C^m(\bar{D})$. Тогда существует (вещественная) функция $g \in SH(D) \cap C^{m+1}(\bar{D})$ такая, что $\partial g = f$ на $\bar{D}$, причем

$$\|g\|_{m+1, \bar{D}} \leq c(m, D) \|f\|_{m, \bar{D}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $a \in D$ и положим $B = B(a, 2 \operatorname{diam} D)$. Рассмотрим отдельно случаи $m \in (0, 1)$ и $m \in [1, 2)$.

Пусть сначала $m \in (0, 1)$. С помощью теоремы Уитни (см. [4, гл. 6, п. 2.3]) продолжим функцию f до функции (также обозначаемой f) класса $C^m(\mathbb{C})$ с носителем в B и оценкой $\|f\|_{m, \mathbb{C}} \leq c_4 \|f\|_{m, \bar{D}}$, где $c_4 = c_4(m) \geq 1$. Определим функцию g_0 по формуле

$$g_0(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(\zeta) d\Lambda(\zeta)}{z - \bar{\zeta}}, \quad (3.1)$$

где $\Lambda(\cdot)$ – мера Лебега в $\mathbb{C}$. Легко показать, что функция $g_0(z)$ определена при любом z и $g_0 \in C^m(\mathbb{C})$. Хорошо известно также, что функция $1/(\pi z)$ является фундаментальным решением для уравнения Коши–Римана $\partial h = 0$. Из последнего вытекает, что если $\delta(z)$ – функция Дирака с центром в нуле, то

$$\partial \left(\frac{1}{\pi \bar{z}} \right) = \overline{\bar{\partial} \left(\frac{1}{\pi \bar{z}} \right)} = \overline{\bar{\partial} \left(\frac{1}{\pi z} \right)} = \overline{\delta(z)} = \delta(z).$$

В частности, поскольку $f \in C_0(\mathbb{C}) \cap A^+(D)$, справедливы следующие соотношения (понимаемые в обобщенном смысле, символ $*$ означает свертку):

$$\partial g_0 = \partial \left(\frac{1}{\pi \bar{z}} * f \right) = \delta * f = f,$$

причем $\Delta g_0 = 4\bar{\partial}\partial g_0 = 4\bar{\partial}f \geq 0$ в D .

Дифференцируя равенство (3.1) по $\bar{z}$, получим, что (в обобщенном смысле)

$$\bar{\partial} g_0(z) = -\frac{1}{\pi} (\text{v.p.}) \int \frac{f(\zeta) d\Lambda(\zeta)}{(z - \bar{\zeta})^2}. \quad (3.2)$$

Оператор Кальдерона–Зигмунда с ядром $1/\bar{z}^2$ (по мере Лебега Λ) переводит функции класса $C^m(\mathbb{C})$ (с носителем в B) в функции класса $C^m(\mathbb{C})$ (см., например, [9, теорема 1.32]), причем $\|\bar{\partial} g_0\|_{m, \mathbb{C}} \leq c_5 \|f\|_{m, \mathbb{C}}$, где $c_5 = c_5(m, D)$. Теперь, поскольку функция $g_0 \in C(\mathbb{C})$, а ее обобщенные производные ∂g_0 и $\bar{\partial} g_0$ принадлежат классу $C^m(\mathbb{C})$, из [10, теорема 6.10] заключаем, что $g_0 \in C^{m+1}(\mathbb{C})$. Итак,

мы построили функцию $g_0 \in C^{m+1}(\overline{D})$ такую, что $\Delta g_0 \geq 0$ в обобщенном смысле на D , $\partial g_0 = f$ на $\overline{D}$, причем $\|g_0\|_{m+1, \mathbb{C}} \leq c_5 \|f\|_{m, \mathbb{C}}$. Однако функция g_0 , задаваемая формулой (3.1), как правило, является комплекснозначной:

$$g_0(z) = g_1(z) + i g_2(z),$$

где $g_1 = \operatorname{Re} g_0$ и $g_2 = \operatorname{Im} g_0$ – вещественные функции. Теперь построим искомую функцию g .

Очевидно, что $g_1, g_2 \in C^{m+1}(\mathbb{C})$ и на D выполняется неравенство

$$\Delta g_0 = \Delta g_1 + i \Delta g_2 \geq 0,$$

из которого следует, что $\Delta g_1 \geq 0$ и $\Delta g_2 = 0$ на D , т.е. $g_1 \in C^{m+1}(\overline{D}) \cap SH(D)$ и $g_2 \in C^{m+1}(\overline{D}) \cap H(D)$.

Представим на $\overline{D}$ функцию f в виде

$$f = f_1 + i f_2,$$

где $f_1 = \partial g_1$ и $f_2 = \partial g_2$.

Пользуясь леммой 2.1, найдем функцию g_3 , гармонически сопряженную к функции g_2 в D с условиями $g_3 \in C^{m+1}(\overline{D})$ и $\|g_3\|_{m+1, \overline{D}} \leq c \|g_2\|_{m+1, \overline{D}}$. Функции g_2 и g_3 связаны между собой соотношениями Коши–Римана:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{\partial g_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = -\frac{\partial g_3}{\partial x},$$

выполненными на $\overline{D}$. Следовательно, на $\overline{D}$ получаем

$$\partial(-g_3) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_3}{\partial x} + i \frac{\partial g_3}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial y} + i \frac{\partial g_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} i \left(-i \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial x} \right) = i f_2.$$

Определим $g = g_1 - g_3$ на $\overline{D}$. Функция g вещественна, $g \in C^{m+1}(\overline{D}) \cap SH(D)$, $\|g\|_{m+1, \overline{D}} \leq c \|f\|_{m, \overline{D}}$, причем $\partial g = \partial g_1 - \partial g_3 = f_1 + i f_2 = f$ на $\overline{D}$. Таким образом, при $m \in (0, 1)$ предложение доказано.

Пусть теперь $m \in [1, 2)$. По теореме Уитни [4, гл. 6, пп. 2.3 и 4.6] продолжим функцию $\bar{\partial} f \in C^{m-1}(\overline{D})$ до функции h класса $C_0^{m-1}(\mathbb{C})$ с носителем в B , условием $h \geq 0$ всюду в $\mathbb{C}$ и оценкой $\|h\|_{m-1} \leq c_6 \|f\|_{m, \overline{D}}$, где $c_6 = c_6(m) \geq 0$. Пусть $\Phi_\Delta(z) = (2\pi)^{-1} \ln |z|$ – фундаментальное решение для уравнения Лапласа в $\mathbb{C}$. Положим

$$g_0 = \Phi_\Delta * (4h).$$

Очевидно, что $g_0 \in SH(\mathbb{C})$, причем при $m = 1$ функция $g_0 \in C^1(\mathbb{C})$ и выполнена оценка $\|g_0\|_1 \leq c \|h\|$; а при $m \in (1, 2)$ функция $g_0 \in C^{m+1}(\mathbb{C})$ и выполнена оценка $\|g_0\|_{m+1} \leq c \|h\|_{m-1}$ (подробное доказательство данного факта приведено в [3, доказательство леммы 3.1 (случай $m \in (2, 3)$)]).

Определим функцию f_1 на $\overline{D}$ по формуле

$$f_1 = \partial g_0 - f. \quad (3.3)$$

Функция f_1 голоморфна на D . Из приведенных выше свойств функции g_0 получаем, что при $m = 1$ функция $f_1 \in C(\overline{D})$ и выполнена оценка $\|f_1\|_{\overline{D}} \leq c\|f\|_{1,\overline{D}}$, а при $m \in (1, 2)$ функция $f_1 \in C^m(\overline{D})$ и выполнена оценка $\|f_1\|_{m,\overline{D}} \leq c\|f\|_{m,\overline{D}}$.

Найдем первообразную g_1 функции f_1 по формуле

$$g_1(z) = \int_a^z f_1(\zeta) d\zeta,$$

где интеграл берется по любой кривой, соединяющей точки a и z внутри области D . Рассмотрим вещественную функцию $g_2 = 2 \operatorname{Re} g_1$. Очевидно, $g_2 \in H(D)$, и поскольку g_1 голоморфна в области D , верна цепочка равенств $\partial g_2 = \partial g_1 = f_1$ в D . Записывая последнее равенство в виде

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = 2 \operatorname{Re} f_1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = -2 \operatorname{Im} f_1, \quad (3.4)$$

легко показать, что функцию g_2 можно восстановить в области D по формуле

$$g_2(z) = 2 \int_a^z ((\operatorname{Re} f_1) dx - (\operatorname{Im} f_1) dy),$$

где интеграл берется по любой (спрямляемой) кривой внутри заданной области D .

Докажем, что при $m = 1$ функция $g_2 \in C^1(\overline{D})$ и выполнена оценка $\|g_2\|_{1,\overline{D}} \leq c\|f_1\|_{\overline{D}}$, а при $m \in (1, 2)$ функция $g_2 \in C^{m+1}(\overline{D})$ и выполнена оценка $\|g_2\|_{m+1,\overline{D}} \leq c\|f_1\|_{m,\overline{D}}$. Доказательство проведем по той же схеме, что и доказательство леммы 2.1. Предположим сначала, что f_1 голоморфна в некоторой жордановой окрестности замкнутой области $\overline{D}$. Ясно, что тогда $g_2 \in C^1(\overline{D})$ при $m = 1$ (или $g_2 \in C^{m+1}(\overline{D})$ при $m \in (1, 2)$). Получим требуемые оценки на нормы в соответствующих пространствах. Поскольку $f_1 \in C(\overline{D})$ в случае $m = 1$ (или $f_1 \in C^m(\overline{D})$ в случае $m \in (1, 2)$), неравенства (2.2) (с заменой u на g_2 и M на $c\|f_1\|_{\overline{D}}$ в случае $m = 1$ или на $c\|f_1\|_{m,\overline{D}}$ в случае $m \in (1, 2)$) при $k \geq 1$ непосредственно следуют из (3.4). Проверим справедливость (2.2) для g_2 и $M = c(m, D)\|f_1\|_{\overline{D}}$ в случае $m = 1$ ($M = c(m, D)\|f_1\|_{m,\overline{D}}$ в случае $m \in (1, 2)$) при $k = 0$. Пусть $z_0, z_1 \in \overline{D}$ и γ — кривая, соединяющая точки z_0 и z_1 , такая же, как в доказательстве леммы 2.1. Отметим, что из (3.4) и формулы (2.3) (с заменой u на g_2) при $k = 1$ получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} P_{1,0}^{g_2}(z_1, z_0) &= 2 \operatorname{Re} P_{0,0}^{f_1}(z_1, z_0), \\ P_{0,1}^{g_2}(z_1, z_0) &= -2 \operatorname{Im} P_{0,0}^{f_1}(z_1, z_0). \end{aligned}$$

При $k = 0$ имеем

$$\begin{aligned} & |g_2(z_1) - P_{0,0}^{g_2}(z_1, z_0)| = \\ & = \left| 2 \int_{\gamma} ((\operatorname{Re} f_1)(z) dx - (\operatorname{Im} f_1)(z) dy) - (P_{0,0}^{g_2}(z_1, z_0) - g_2(z_0)) \right| \\ & = \left| 2 \int_{\gamma} ((\operatorname{Re} f_1)(z) dx - (\operatorname{Im} f_1)(z) dy) - \int_{\gamma} (P_{1,0}^{g_2}(z, z_0) dx - P_{0,1}^{g_2}(z, z_0) dy) \right| \\ & \leq \left| 2 \int_{\gamma} (\operatorname{Re}(f_1(z) - P_{0,0}^{f_1}(z, z_0)) dx - \operatorname{Im}(f_1(z) - P_{0,0}^{f_1}(z, z_0)) dy) \right|. \end{aligned}$$

Отсюда так же, как в лемме 2.1, получаем оценки $\|g_2\|_{1,\overline{D}} \leq c\|f_1\|_{\overline{D}}$ при $m = 1$ и $\|g_2\|_{m+1,\overline{D}} \leq c\|f_1\|_{m,\overline{D}}$ при $m \in (1, 2)$.

Применяя теоремы О'Фаррелла [6, теорема 1] и Вердеры [7, теорема 1] для голоморфных функций, можно осуществить итерационный процесс такой же, как в лемме 2.1, и получить представление функции g_2 в виде ряда функций класса $C^1(\overline{D})$ при $m = 1$ (или $C^{m+1}(\overline{D})$ при $m \in (1, 2)$), сходящегося в норме соответствующего пространства. Так же, как в доказательстве леммы 2.1, получаем требуемые оценки на нормы.

Определим функцию g на $\overline{D}$ по формуле

$$g = g_0 - g_2.$$

Очевидно, что $g \in SH(D)$. Проверим, что g – искомая функция. Пользуясь (3.3), получаем, что $\partial g = \partial g_0 - \partial g_2 = \partial g_0 - f_1 = f$ на $\overline{D}$. В ходе доказательства было получено, что $g \in C^{m+1}(\overline{D})$ и $\|g\|_{m+1,\overline{D}} \leq c\|f\|_{m,\overline{D}}$ при $m \in (1, 2)$, поэтому предложение в этом случае доказано.

Докажем, что $g \in C^2(\overline{D})$ и $\|g\|_{2,\overline{D}} \leq c\|f\|_{1,\overline{D}}$ при $m = 1$. Поскольку функция g вещественная, то, записывая равенство $\partial g = f$ на $\overline{D}$ в виде

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2 \operatorname{Re} f \quad \text{и} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2 \operatorname{Im} f,$$

получаем, что функцию g можно восстановить в области D по формуле

$$g(z) = 2 \int_a^z ((\operatorname{Re} f) dx - (\operatorname{Im} f) dy) + g(a), \quad (3.5)$$

где интеграл берется по любой кривой, соединяющей точки a и z внутри области D , причем значение интеграла не зависит от пути интегрирования, поскольку $f \in A^+(D)$.

Если предположить, что $f \in A^+(D_1)$, где D_1 – окрестность замкнутой области $\overline{D}$, и функция g определяется через функцию f по формуле (3.5), то по аналогии с шагом доказательства леммы 2.1 можно доказать, что $g \in C^2(\overline{D})$ и $\|g\|_{2,\overline{D}} \leq c\|f\|_{1,\overline{D}}$.

Теперь, чтобы применить схему доказательства леммы 2.1 в нашем случае, нужно показать, что для любой функции $f \in A^+(D) \cap C^1(\overline{D})$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся жорданова окрестность D_1 замкнутой области $\overline{D}$ и функция $\tilde{f} \in A^+(D_1) \cap C^1(\overline{D_1})$ такие, что $\|f - \tilde{f}\|_{1,\overline{D}} < \varepsilon$. Для доказательства данного утверждения достаточно дословно повторить доказательство аналогичного утверждения для голоморфных функций [11, 1-теорема], надо только предварительно исключить из множества аппроксимируемых локализованных функций те, которые субголоморфны в $\mathbb{C}$.

Таким образом, при $m = 1$ предложение тоже доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Применим утверждение 3.1 к функции f и получим вещественную функцию $g \in SH(D) \cap C^{m+1}(\overline{D})$ такую, что $\partial g = f$ на $\overline{D}$, причем $\|g\|_{m+1,\overline{D}} \leq c_1 \|f\|_{m,\overline{D}}$.

Далее, к полученной функции g применим теорему А о C^{m+1} -продолжении субгармонических функций и найдем функцию $G \in SH(\mathbb{C}) \cap C^{m+1}(\mathbb{C})$ с условиями $G|_{\overline{D}} = g$ и $\|\nabla G\|_{m,\mathbb{C}} \leq c_2 \|g\|_{m+1,\overline{D}}$.

Определим функцию F равенством $F = \partial G$. Очевидно, что $F \in A^+(\mathbb{C}) \cap C^m(\mathbb{C})$, причем

$$F|_{\overline{D}} = \partial G|_{\overline{D}} = \partial g|_{\overline{D}} = f.$$

Выписывая цепочку неравенств

$$\|F\|_{m,\mathbb{C}} = \|\partial G\|_{m,\mathbb{C}} \leq \|\nabla G\|_{m,\mathbb{C}} \leq c_2 \|g\|_{m+1,\overline{D}} \leq c_1 c_2 \|f\|_{m,\overline{D}},$$

получаем требуемую оценку.

§ 4. Следствия и примеры

Справедлива следующая “локализационная” теорема о C^m -продолжении субголоморфных функций с замкнутых жордановых областей.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}$, $m \in (0, 2)$ и $f \in C^m(\overline{D}) \cap A^+(D)$. Предположим, что для любого $a \in \partial D$ найдутся окрестность U_a точки a в $\mathbb{C}$ и функция $F_a \in C^m(U_a) \cap A^+(U_a)$ такие, что $F_a = f$ в $D \cap U_a$. Тогда найдется $F \in C^m(\mathbb{C}) \cap A^+(\mathbb{C})$ с условием $F = f$ в $\overline{D}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству “локализационной” теоремы для субгармонических функций [3, теорема 4.1] (достаточно функции класса SH всюду заменить на функции класса A^+).

Из теоремы 4.1 непосредственно вытекает аналог следствия 4.2 работы [3].

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть D – произвольная жорданова область в $\mathbb{C}$, $m \in (0, 2)$. Предположим, что для любой точки $a \in \partial D$ существует круг $B(a, r_a)$, $r_a > 0$, такой, что для всякой функции $f \in C^m(\overline{D}) \cap A^+(D)$ найдется функция $F_a \in C^m(\overline{D_a}) \cap A^+(D_a)$, $D_a = D \cup B(a, r_a)$, с условием $F_a = f$ в $\overline{D}$. Тогда для любой $f \in C^m(\overline{D}) \cap A^+(D)$ найдется $F \in C^m(\mathbb{C}) \cap A^+(\mathbb{C})$ с условием $F = f$ в $\overline{D}$. Если, кроме того, каждая функция F_a может быть выбрана

с оценкой $\|F_a\|_{m, \overline{D_a}} \leq c(D, a)\|f\|_{m, \overline{D}}$, то указанная выше функция F может быть выбрана с дополнительным условием $\|F\|_{m, \mathbb{C}} \leq c(D)\|f\|_{m, \overline{D}}$.

Представляет интерес следующая переформулировка теоремы 1.2, которая позволяет продолжать меру Коши $\sigma = \bar{\partial}f$ субголоморфной функции $f \in C^m(\overline{D})$ из D в $\mathbb{C}$ с сохранением C^m -свойства соответствующего потенциала.

Пусть $\Phi(z) = 1/(\pi z)$ – фундаментальное решение для уравнения Коши–Римана.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть D является B -областью, Ω – некоторая окрестность множества $\overline{D}$ и $m \in (0, 2)$. Найдется константа $c = c(D, \Omega, m) > 0$ со следующими свойствами. Пусть σ – неотрицательная конечная борелевская мера в D и h – голоморфная функция в D такие, что функция

$$\Phi * \sigma(x) + h(x) = \int_D \Phi(x - y) d\sigma(y) + h(x)$$

продолжается (из D) до функции класса $C^m(\overline{D})$. Тогда найдется неотрицательная конечная борелевская мера σ_1 в $\Omega \setminus \overline{D}$ такая, что $\Phi * (\sigma + \sigma_1) \in C^m(\mathbb{C})$, причем

$$\|\Phi * (\sigma + \sigma_1)\|_{m, \mathbb{C}} \leq c\|(\Phi * \sigma + h)\|_{m, \overline{D}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = \Phi * \sigma + h \in A^+(D) \cap C^m(\overline{D})$. Отметим, что мера σ есть мера Коши функции f в D , причем согласно (обобщенной) формуле Грина имеем

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial D} f(z) dz = \sigma(D),$$

так что условие конечности меры σ в D необходимо. Продолжим функцию f по теореме 1.2 до функции F . Фиксируем какую-либо функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ с условием $\varphi = 1$ на D . Положим $F_2 = \Phi * (\varphi \bar{\partial}F)$. Известно [7], что $\bar{\partial}F_2 = \varphi \bar{\partial}F \geq 0$, причем

$$\|F_2\|_{m, \mathbb{C}} \leq c(m, \varphi)\|F\|_{m, \mathbb{C}}.$$

Поскольку F субголоморфна в $\mathbb{C}$, ее мера Коши $\mu = \bar{\partial}F$ есть неотрицательная локально конечная борелевская мера в $\mathbb{C}$, причем из упомянутой выше формулы Грина следует, что $\mu(\partial D) = 0$ (см. [1, замечание 1]). Искомая мера σ_1 имеет вид $\sigma_1 = \varphi\mu - \sigma$. Следствие доказано.

Справедливо следствие о Lip^m -продолжении, аналогичное теореме 4.4 работы [3].

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть D является B -областью, $m \in (0, 2]$. Тогда найдется константа $c = c(D, m) > 0$ такая, что для любой функции $f \in \text{Lip}^m(\overline{D}) \cap A^+(D)$ существует $F \in \text{Lip}^m(\mathbb{C}) \cap A^+(\mathbb{C})$ с условиями $F|_{\overline{D}} = f$ и

$$\|F\|_{m, \mathbb{C}} \leq c\|f\|_{m, \overline{D}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что справедлив аналог предложения 3.1 для классов Lip^m при $m \in (0, 2]$, причем доказательство указанного утверждения при $m \in (0, 2)$ дословно повторяет доказательство предложения 3.1. При $m = 2$ доказательство аналогично случаю $m = 1$. Применение теоремы 4.4 из [3] завершает доказательство теоремы.

В заключение приведем один пример отсутствия C^1 -продолжения субголоморфных функций с квазидисков. Аналогичные примеры можно привести и для всех $m \in [0, 2)$, однако мы их отложим до получения полной ясности. Идея этого примера восходит к работе [12, § 3].

Фиксируем произвольное $\alpha \in (0, \pi/2)$ и определим

$$D'_\alpha = \{\rho e^{i\varphi} \mid 0 < \rho < 2, \alpha < \varphi < \pi - \alpha\},$$

$$D_\alpha = B(0, 2) \setminus \overline{D'_\alpha}.$$

Очевидно, что каждая область D_α является квазидиском, но не является B -областью.

ПРИМЕР 4.5. Пусть $D = D_{3\pi/8}$. Тогда существует функция $f \in A^+(D) \cap C^1(\overline{D})$, которая не может быть продолжена из $\overline{D}$ до C^1 -субголоморфной функции ни в какую окрестность точки 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем луч $l = \{(\rho, \varphi) : \rho \geq 0, \varphi = 7\pi/16\}$, отложим на l точки $a_1 = e^{i(7\pi/16)}$, $a_n = a_{n-1}/2$ при $n = 2, 3, 4, \dots$ и построим попарно непересекающиеся круги $B_n = B(a_n, \delta_n)$ с центрами в точках a_n и радиусами $\delta_n = 1/2^{n+1}$.

Для произвольного круга $B = B(a, r)$ и $\lambda > 0$ через λB обозначим круг $B(a, \lambda r)$. Пусть далее $D' = D'_{3\pi/8}$. Для каждого круга B_n справедливы следующие свойства:

- 1) $B_n \subset D'_{\pi/4}$;
- 2) $B_n \cap D'$ содержит $(1/2)B_n$;
- 3) существует константа $c > 1$ такая, что для любого $z \in B_n$ выполняются неравенства $c^{-1}\delta_n \leq |z| \leq c\delta_n$;
- 4) существуют число $\lambda \in (0, 1)$ и круг $\tilde{B}_n = B(\tilde{a}_n, \tilde{\delta}_n)$ такие, что $\tilde{B}_n \subset (1 - \lambda)B_n \cap D$ и $\tilde{\delta}_n \geq \delta_n/9$.

Определим функции g_n по формуле

$$g_n(z) = \begin{cases} \overline{z - a_n} & \text{при } z \in B_n, \\ \frac{\delta_n^2}{z - a_n} & \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus B_n. \end{cases}$$

При каждом n функции $g_n \in A^+(\mathbb{C}) \cap \text{Lip}^1(\mathbb{C})$ и $\|g_n\|_{1, \overline{D}} \leq 1$.

Пусть $\chi \in C_0^\infty(B_1)$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\int \chi(z) d\Lambda(z) = 1$. Для $\lambda \in (0, 1)$ из свойства 4) положим

$$\chi_{\lambda\delta_n}(z) = \chi(z/(\lambda\delta_n))/(\lambda\delta_n)^2, \quad \tilde{f}_n = \chi_{\lambda\delta_n} * g_n.$$

Определим функции $f_n = \tilde{f}_n - \delta_n^2/(z - a_n)$ на $\overline{D}$. Из свойства 2) получаем, что $f_n \in A^+(D) \cap C^1(\overline{D})$ и $\|f_n\|_{1,\overline{D}} \leq 4$, а также по теореме о среднем для голоморфных функций получаем, что $f_n = 0$ в $\overline{D} \setminus (1 + \lambda)B_n$.

Пусть $\varepsilon_n = 1/n$. Определим функцию f на $\overline{D}$ по формуле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(z).$$

Тогда $f \in A^+(D) \cap C^1(\overline{D})$ и $\|f\|_{1,\overline{D}} \leq \max \|f_n\|_{1,\overline{D}} \leq 4$. Покажем, что f не может быть продолжена из $\overline{D}$ до C^1 -субголоморфной функции ни в какую окрестность нуля.

От противного, пусть найдутся $r \in (0, 2)$ и $F_0 \in A^+(B_r) \cap C^1(\overline{B_r})$ такие, что $F_0 = f$ на $B_r \cap \overline{D}$. Выберем $\psi \in C_0^\infty(B_r)$ с условием $\psi = 1$ на $B(0, r/2)$ и положим $F = \Phi * \psi \bar{\partial} F_0$. По определению F является локализационным оператором Витушкина (см. [13]), примененным к функции F_0 . Как известно, локализационный оператор Витушкина инвариантен в пространстве C^1 , т.е. непрерывно отображает C^1 в C^1 (см. [11, доказательство теоремы 1]), поэтому $F \in A^+(\mathbb{C}) \cap C^1(\mathbb{C})$. Пусть $\mu = \bar{\partial} F$. Выберем натуральное N такое, что $B_n \subset B_r$ при $n \geq N$. Тогда

$$\nu = \mu - \sum_{n=N}^{\infty} \mu_{\tilde{B}_n},$$

где $\mu_{\tilde{B}_n} = \varepsilon_n \Lambda|_{\tilde{B}_n}$, является конечной неотрицательной мерой с носителем в $B_r \cap D'_{\pi/4}$. Поскольку $F = \Phi * \mu$, то при всех $\varepsilon > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\partial F)|_{z=-i\varepsilon} &= \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{\pi z^2} * \mu\right)\Big|_{z=-i\varepsilon} = \operatorname{Re}\left(-\frac{\bar{z}^2}{\pi|z|^4} * \mu\right)\Big|_{z=-i\varepsilon} \\ &= \left(\frac{y^2 - x^2}{\pi|z|^4} * \mu\right)\Big|_{z=-i\varepsilon} \geq \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{y^2 - x^2}{\pi|z|^4} * \mu_{\tilde{B}_n}\right)\Big|_{z=-i\varepsilon} \\ &= \sum_{n=N}^{\infty} \operatorname{Re}\left(\partial\left(\frac{1}{\pi z} * \mu_{\tilde{B}_n}\right)\right)\Big|_{z=-i\varepsilon} = \sum_{n=N}^{\infty} \operatorname{Re}\left(-\frac{\varepsilon_n \tilde{\delta}_n^2}{(-i\varepsilon - \tilde{a}_n)^2}\right). \end{aligned}$$

По свойствам 3) и 4) последняя сумма стремится к ∞ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Аналогичный пример может быть построен для любой области D_α при $\alpha \in (\pi/4, \pi/2)$. Можно также, немного усложнив конструкцию области D и функции f , обобщить данный пример для классов C^m , $m \in (0, 2)$.

Список литературы

1. Зорина О. А. О непрерывном продолжении субголоморфных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. №4. С. 30–36.
2. Парамонов П. В. О C^m -продолжении решений однородных эллиптических неравенств // Тез. докладов 11-й Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”. Саратов, 2002. С. 149–150.
3. Парамонов П. В. О C^m -продолжении субгармонических функций // Изв. РАН Сер. матем. 2005. Т. 69. №6. С. 139–152.

4. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
5. *Вердера Дж., Мельников М. С., Парамонов П. В.* C^1 -аппроксимация и продолжение субгармонических функций // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 4. С. 37–58.
6. *O'Farrell A. G.* Rational approximations in Lipschitz norms. II // Proc. Royal Irish Acad. 1979. V. 79A. P. 104–114.
7. *Verdera J.* C^m -approximations by solutions of elliptic equations and Calderon-Zygmund operators // Duke Math J. 1987. V. 55. № 1. P. 157–187.
8. *Парамонов П. В.* О гармонических аппроксимациях в C^1 -норме // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 10. С. 1341–1365.
9. *Векун И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
10. *Либ Э., Лосс М.* Анализ. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
11. *Verdera J.* On C^m rational approximations // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 97. P. 621–625.
12. *Мельников М. С., Парамонов П. В.* C^1 -продолжение субгармонических функций с замкнутых жордановых областей в $\mathbb{R}^2$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 6. С. 105–118.
13. *Витушкин А. Г.* Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. № 6. С. 141–199.

Поступило в редакцию
23.05.2005