Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Топологический тип поверхности Фано вещественной трехмерной M -кубики, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 6, 61–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/im666>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:01:51

УДК 512.7

В. А. Краснов

Топологический тип поверхности Фано вещественной трехмерной M -кубики

Вычисляется топологический тип вещественной части поверхности Фано, параметризующей множество вещественных прямых на неособом вещественном трехмерном M -многообразии третьей степени. При исследовании поверхности Фано используются результаты и конструкции из работы [3] о промежуточном якобиане трехмерной комплексной кубики. Поэтому вначале вычисляется топологический тип вещественной части поверхности Фано, параметризующей множество вещественных прямых на особой вещественной M -кубике с единственной простой особой точкой.

Библиография: 11 наименований.

Введение

Далее V – трехмерное комплексное алгебраическое многообразие в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^4$, заданное уравнением

$$P(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) = 0, \quad (0.1)$$

где $P(X) = P(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ – однородный многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами. Будем предполагать, что многообразие V неособое. Через $\mathbb{R}V$ обозначим множество вещественных решений уравнения (0.1), оно всегда непустое и состоит из одной или двух компонент связности. Через $F_V = F$ обозначим поверхность Фано кубики X , которая параметризует множество прямых на V . Она будет также неособым многообразием, определенным над полем вещественных точек, так как многочлен $P(X)$ имеет вещественные коэффициенты. Поэтому определено множество вещественных точек $\mathbb{R}F$ комплексной поверхности Фано F , параметризующее множество прямых на $\mathbb{R}V$. Это множество также всегда непустое, так как на вещественной кубике всегда имеются вещественные прямые. Таким образом, $\mathbb{R}F$ – компактная дифференцируема поверхность. На многообразиях V, F определена инволюция комплексного сопряжения τ , причем множества вещественных точек $\mathbb{R}V, \mathbb{R}F$ совпадают со множествами неподвижных точек этой инволюции: $\mathbb{R}V = V^\tau, \mathbb{R}F = F^\tau$. Поэтому имеют место неравенства Гарнака–Тома

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^*(V, \mathbb{F}_2), \quad (0.2)$$

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^*(F, \mathbb{F}_2), \quad (0.3)$$

где $H^*(-, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_q H^q(-, \mathbb{F}_2)$ и $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – поле из двух элементов. Напомним, что каждое из вещественных многообразий (V, τ) , (F, τ) называется M -многообразием, если соответствующее ему неравенство (0.2) или (0.3) становится равенством.

В заметке [9] доказана

ТЕОРЕМА 0.1. *Поверхность Фано (F, τ) будет тогда и только тогда M -поверхностью, когда кубика (V, τ) является M -многообразием.*

С другой стороны, возникает вопрос о том, как устроена топологическая поверхность $\mathbb{R}F$ в случае, когда вещественная кубика (V, τ) является M -многообразием. Конечно, аналогичный вопрос можно задать и в случае произвольной кубики, но в настоящей статье мы ограничились рассмотрением M -кубики, так как этот случай наиболее интересен, а получить результат можно с наименьшими трудностями.

Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, введем следующие обозначения для топологических поверхностей. Через S_g^2 обозначим связную компактную ориентируемую поверхность без края рода g , т.е. топологическую поверхность, гомеоморфную сфере с g ручками; в частности, S_1^2 – тор, он также обозначается через T^2 . Через ${}_gS^2$ обозначим связную компактную неориентируемую поверхность без края рода g , т.е. топологическую поверхность, гомеоморфную сфере с g пленками Мёбиуса; в частности, ${}_1S^2$ – проективная плоскость, она также обозначается через $\mathbb{R}P^2$. Кроме этого, если S – топологическая поверхность, а n – натуральное число, то через nS обозначим несвязную сумму n экземпляров поверхности S .

В настоящей статье доказывается

ТЕОРЕМА 0.2. *Вещественная часть $\mathbb{R}F$ поверхности Фано F неособой M -кубики V может иметь только топологический тип ${}_5S^2 \sqcup 15T^2$.*

Сделаем теперь несколько замечаний о структуре данной статьи и о доказательстве теоремы 0.2.

В §1 приводятся вспомогательные факты об симметрическом квадрате $C^{(2)}$ комплексной кривой C с вещественной структурой $\tau: C \rightarrow C$. Некоторые из этих фактов являются общеизвестными, а другие, связанные с вещественной структурой, являются новыми. Сначала рассматривается симметрический квадрат кривой (C, τ) произвольного рода $g > 0$. Здесь вычисляется вещественная часть $\mathbb{R}C^{(2)}$ симметрического квадрата $C^{(2)}$, а затем доказывается, что поверхность $(C^{(2)}, \tau)$ будет M -поверхностью тогда и только тогда, когда кривая (C, τ) является M -кривой. Затем рассматривается симметрический квадрат канонической M -кривой рода 4. Каждая такая кривая C является неособым полным пересечением квадрики Q и кубики в $\mathbb{P}^3$, причем квадрика Q определяется кривой C однозначно. Если квадрика Q неособая, то два семейства прямых на ней порождают два отображения $\lambda', \lambda'': C \rightarrow C^{(2)}$, которые являются вложениями (см. п. 1.2). В случае, когда вещественная часть $\mathbb{R}Q$ квадрики Q является гиперboloидом, отображения λ', λ'' вещественные, а поэтому определены ограничения этих отображений на вещественные точки $\lambda'_\mathbb{R}, \lambda''_\mathbb{R}: \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}C^{(2)}$. Мы показываем, что если (C, τ) – M -кривая, то отображения $\lambda'_\mathbb{R}, \lambda''_\mathbb{R}$ гомотопны. Для доказательства этого утверждения пришлось изучить пространство канонических M -кривых рода 4. В част-

ности, была доказана связность пространства канонических M -кривых на гиперболоидах, связность пространства канонических M -кривых на квадратичных конусах, а также связность всего пространства канонических M -кривых. Для доказательства этих фактов мы использовали результаты о жесткой изотопической классификации вещественных кривых бистепени $(3, 3)$ на гиперboloиде и кубических сечений квадратичного конуса, изложенные в [5], [4].

Результаты, полученные в § 1, применяются для вычисления топологического типа вещественной части $\mathbb{R}F_0$ поверхности Фано F_0 для M -кубики V_0 , имеющей единственную особенность – простую двойную точку. Этим вычислениям посвящен § 2. Здесь используется схема вычисления топологии комплексной поверхности Фано F_0 особой кубики V_0 из работы [3], но только эта схема применяется в вещественной ситуации. Опишем соответствующие конструкции более подробно. Если $p_0 \in V_0$ – особая точка кубики $V_0 \subset \mathbb{P}^4$, то обозначим через $\mathbb{P}^3$ проективизацию касательного пространства $T_{p_0}\mathbb{P}^4$. Таким образом, точками $\mathbb{P}^3$ являются прямые в $\mathbb{P}^4$, проходящие через p_0 . Проективизация касательного конуса к кубике V_0 в точке p_0 дает квадрику $Q \subset \mathbb{P}^3$. А множество прямых, лежащих на кубике V_0 и проходящих через особую точку p_0 , определяет каноническую кривую C рода 4 на квадрике Q . Эта кривая также содержится в поверхности Фано F_0 , причем множество особых точек поверхности Фано F_0 совпадает с кривой C , которая является простой двойной кривой этой особой поверхности (см. [3]). Мы показываем, что вещественное алгебраическое многообразие (V_0, τ) тогда и только тогда будет M -многообразием, когда вещественная алгебраическая кривая (C, τ) является M -кривой.

Если теперь $C', C'' \subset C^{(2)}$ – образы кривой C при отображениях λ', λ'' , то поверхность Фано F_0 получается из симметрического квадрата $C^{(2)}$ с помощью отождествления кривых $C', C'' \subset C^{(2)}$, которое производится отображением $\lambda'' \circ (\lambda')^{-1}: C' \rightarrow C''$, причем из кривых $C', C'' \subset C^{(2)}$ получается двойная кривая $C \subset F_0$ [3]. Из этого результата сразу выводится, что если квадрика $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом, то вещественная часть $\mathbb{R}F_0$ поверхности Фано F_0 гомеоморфна несвязной сумме $\mathbb{R}C^{(2)} \sqcup \mathbb{R}C$.

Если квадрика $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом, то задача вычисления топологического типа поверхности $\mathbb{R}F_0$ оказывается более сложной. В настоящей статье мы решаем ее только в случае, когда (C, τ) – M -кривая. Сначала заметим, что особая поверхность $\mathbb{R}F_0$ получается из неособой поверхности $\mathbb{R}C^{(2)}$ с помощью отождествления кривых $\mathbb{R}C', \mathbb{R}C''$, которое производится отображением

$$\lambda''_{\mathbb{R}} \circ (\lambda'_{\mathbb{R}})^{-1}: \mathbb{R}C' \rightarrow \mathbb{R}C''.$$

Затем, используя гомотопность отображений $\lambda'_{\mathbb{R}}, \lambda''_{\mathbb{R}}$, а также мономорфность гомоморфизмов

$$(\lambda'_{\mathbb{R}})_*, (\lambda''_{\mathbb{R}})_*: H_*(\mathbb{R}C, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_*(\mathbb{R}C^{(2)}, \mathbb{F}_2),$$

удается описать топологический тип особой поверхности $\mathbb{R}F_0$ (см. предложение 2.3). Сделаем несколько замечаний об этом топологическом типе.

Прежде всего заметим, что вещественная часть $\mathbb{R}C^{(2)}$ симметрического квадрата $C^{(2)}$ имеет топологический тип $5S^2 \sqcup 10T^2$. Далее неориентируемую компоненту $5S^2$ этой поверхности будем обозначать через Π . На поверхности Π расположены по одной из компонент связности кривых $\mathbb{R}C', \mathbb{R}C''$, обозначим эти

компоненты через Γ'_0, Γ''_0 соответственно. Эти компоненты разбивают поверхность Π на две поверхности с краем: Π', Π'' , первая из которых является цилиндром, а вторая – неориентируемой поверхностью рода 3 с двумя дырами. После склейки краев из поверхностей Π', Π'' получаются топологические поверхности без края Π_1, Π_2 , первая из которых является тором, а вторая – неориентируемой поверхностью рода 5. Поверхности Π_1, Π_2 пересекаются по кривой $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}C$, которая получается из компонент Γ'_0, Γ''_0 после их отождествления.

Кроме поверхности Π вещественная часть $\mathbb{R}C^{(2)}$ симметрического квадрата $C^{(2)}$ содержит 10 торов. На четырех из них $T_1, \dots, T_4$ содержатся по одной из оставшихся четырех компонент кривых $\mathbb{R}C', \mathbb{R}C''$, обозначим эти компоненты через $\Gamma'_1, \Gamma''_1, \dots, \Gamma'_4, \Gamma''_4$. Итак, $\Gamma'_1, \Gamma''_1 \subset T_1, \dots, \Gamma'_4, \Gamma''_4 \subset T_4$. Каждая пара кривых $\Gamma'_i, \Gamma''_i \subset T_i, i = 1, \dots, 4$, разбивает тор T_i на два цилиндра Π'_i, Π''_i . После склейки краев этих цилиндров из них получаются топологические торы T'_i, T''_i , которые пересекаются по кривой $\Gamma_i \subset \mathbb{R}C$, полученной из компонент Γ'_i, Γ''_i после их отождествления.

В конце §2 доказывается, что если вещественная алгебраическая кривая (C, τ) является M -кривой, то вещественная алгебраическая поверхность (F_0, τ) будет M -поверхностью.

В начале §3 приводится набросок доказательства теоремы 0.1. Эта теорема используется при доказательстве теоремы 0.2, поэтому для удобства читателя изложены основные идеи ее доказательства. В §3 с помощью результатов первых двух параграфов вычисляется топологический тип вещественной части $\mathbb{R}F$ поверхности Фано F неособой M -кубики V , т. е. доказывается теорема 0.2. Попутно в этом параграфе доказывается существование неособых M -кубик. Здесь используется схема вычисления топологии комплексной поверхности Фано F неособой кубики V [3], но только эта схема применяется в вещественной ситуации. Изложим кратко соответствующую конструкцию.

Данная неособая кубика V может быть включена в линейное семейство кубик $V_t, t \in \mathbb{P}^1$, которое представляет собой пучок гиперплоских сечений неособой четырехмерной кубики $Z \subset \mathbb{P}^5$, причем особые сечения содержат только одну простую двойную точку, а других особых точек нет. Это семейство образовано сечениями гиперплоскостей, проходящих через фиксированное трехмерное проективное пространство $R \subset \mathbb{P}^5$. Если исходная кубика V вещественная, то существует аналогичное вещественное линейное семейство V_t , содержащее данную кубика. Это означает, что оно определено над полем вещественных чисел, а поэтому имеет отображение комплексного сопряжения $\tau: V_t \rightarrow V_{\tau(t)}$. В частности, если точка t вещественная, т. е. $t \in \mathbb{RP}^1$, то кубика V_t вещественная, а также справедливо обратное утверждение. Мы можем считать, что при $t = 1$ получаем исходную неособую кубика V , а ближайшая вещественная особая кубика получается при $t = 0$, где t – аффинная координата на $\mathbb{P}^1$. Выберем такое малое число $0 < \varepsilon < 1$, чтобы многообразия V_t были неособые при $0 < |t| < 2\varepsilon$. Заметим, что многообразия $(V_1, \tau), (V_\varepsilon, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны. Поэтому кубика (V_1, τ) будет тогда и только тогда M -многообразием, когда такой является кубика (V_ε, τ) . Семейство кубик V_t порождает семейство поверхностей Фано F_t , причем если кубика V_t неособая, то и поверхность Фано F_t неособая. Поэтому поверхности Фано $(F_1, \tau), (F_\varepsilon, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны. Следовательно, теорему 0.2 достаточно доказать

для кубики (V_ε, τ) . Обозначим кубики $V_{\pm\varepsilon}$ кратко через $V_\pm$. Мы показываем, что если неособая кубика (V_+, τ) является M -многообразием, то особая кубика (V_0, τ) также будет M -многообразием. Доказательство этого утверждения несложное; оказывается, что более трудно доказать аналог обратного утверждения: если особая кубика (V_0, τ) является M -многообразием, то одна из неособых кубик $(V_\pm, \tau)$ будет M -многообразием, а другая не будет. Заметим, что из этого утверждения вытекает существование неособых M -кубик.

Семейство кубик V_t порождает семейство поверхностей Фано F_t , причем полное тело этого семейства

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{t \in \mathbb{P}^1} F_t$$

неособое (см. [3]). Рассмотрим соответствующую функцию $f: \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{P}^1$, которая отображает поверхность F_t в точку $t \in \mathbb{P}^1$. Ограничим эту функцию на вещественные точки $f_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}\mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{RP}^1$. Эта функция не является функцией Морса, так как все точки из кривой $\mathbb{R}C \subset \mathbb{R}F_0$ критические. Однако нормальное расслоение к кривой $\mathbb{R}C$ в $\mathbb{R}\mathfrak{F}$ тривиально, а кривая C является простой двойной кривой на F_0 , поэтому окрестность кривой $\mathbb{R}C$ в $\mathbb{R}\mathfrak{F}$ является тривиальным расслоением на диски, причем на каждом из этих дисков функция $f_{\mathbb{R}}$ имеет невырожденную особую точку. Необходимо показать, что $\mathbb{R}F_\varepsilon = (f_{\mathbb{R}})^{-1}(\varepsilon)$ имеет топологический тип ${}_5S^2 \sqcup 15T^2$, а мы уже знаем, как устроена особая поверхность $\mathbb{R}F_0 = (f_{\mathbb{R}})^{-1}(0)$. Тогда неособая поверхность $\mathbb{R}F_\varepsilon$ получается из особой $\mathbb{R}F_0$ с помощью стандартных перестроек, причем из максимальности поверхности (F_ε, τ) вытекает, что такие перестройки однозначно определены. Оказывается, что в случае, когда квадрата $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом, перестройки поверхности $\mathbb{R}F_0 = \mathbb{R}C^{(2)} \sqcup \mathbb{R}C$ устроены следующим образом: компоненты из $\mathbb{R}C^{(2)}$ не меняются, а каждая компонента кривой $\mathbb{R}C$ заменяется на тор. В случае, когда квадрата $\mathbb{R}Q$ является гиперболоидом, эти перестройки разводят поверхности Π_1, Π_2 , а также торы T'_i, T''_i , $i = 1, \dots, 4$, т.е. делают их непересекающимися, а неособые компоненты поверхности $\mathbb{R}F_0$ не меняются. Следовательно, в каждом случае поверхность $\mathbb{R}F_\varepsilon$ имеет топологический тип ${}_5S^2 \sqcup 15T^2$.

§1. Симметрический квадрат кривой

Пусть C – связная компактная риманова поверхность рода $g > 0$, а $C^{(2)}$ – ее симметрический квадрат. Вычислим группы когомологий комплексной поверхности $C^{(2)}$. Прежде всего заметим, что группа $H^*(C^{(2)}, \mathbb{Z})$ свободная (см., например, [9]). Пусть $\sigma: C^2 \rightarrow C^{(2)}$ – инволюция, переставляющая сомножители. Тогда $C^{(2)} = C^2/\sigma$ – факторпространство, поэтому выполняется равенство для групп когомологий с рациональными коэффициентами

$$H^p(C^{(2)}, \mathbb{Q}) = H^p(C^2, \mathbb{Q})^\sigma,$$

где $H^p(C^2, \mathbb{Q})^\sigma$ – подпространство инвариантных относительно σ элементов из $H^p(C^2, \mathbb{Q})$. Группа $H^1(C^2, \mathbb{Q})$ состоит из сумм $p_1^*(a_1) + p_2^*(a_2)$, где $a_1, a_2 \in$

$H^1(C, \mathbb{Q})$, $p_1, p_2: C^2 \rightarrow C$ – проекции. Тогда инволюция $\sigma^*: H^1(C^2, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(C^2, \mathbb{Q})$ действует по правилу

$$\sigma^*(p_1^*(a_1) + p_2^*(a_2)) = p_2^*(a_1) + p_1^*(a_2).$$

Из этого равенства вытекает, что для поверхности $C^{(2)}$ имеем при $p = 1, 3$ равенства

$$\dim H^p(C^{(2)}, \mathbb{F}_2) = \dim H^p(C^{(2)}, \mathbb{Q}) = 2g.$$

Группа $H^2(C^2, \mathbb{Q})$ состоит из сумм

$$p_1^*(a_1) + p_2^*(a_2) + \sum_i p_1^*(b'_i) \cup p_2^*(b''_i),$$

где $a_1, a_2 \in H^2(C, \mathbb{Q})$, $b'_i, b''_i \in H^1(C, \mathbb{Q})$, а инволюция $\sigma^*: H^2(C^2, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(C^2, \mathbb{Q})$ действует по правилу

$$\sigma^*\left(p_1^*(a_1) + p_2^*(a_2) + \sum_i p_1^*(b'_i) \cup p_2^*(b''_i)\right) = p_2^*(a_1) + p_1^*(a_2) + \sum_i p_2^*(b'_i) \cup p_1^*(b''_i).$$

Следовательно,

$$\dim H^2(C^{(2)}, \mathbb{F}_2) = \dim H^2(C^{(2)}, \mathbb{Q}) = 2g^2 - g + 1.$$

1.1. Симметрический квадрат M -кривой. Если на комплексной кривой C определена вещественная структура, т.е. антиголоморфная инволюция $\tau: C \rightarrow C$, то на симметрическом квадрате $C^{(2)}$ индуцируется вещественная структура по правилу

$$\tau(p_1 + p_2) = \tau(p_1) + \tau(p_2),$$

где точка на $C^{(2)}$ записывается в виде формальной суммы $p_1 + p_2$ двух точек p_1, p_2 из кривой C . Множество вещественных точек $\mathbb{R}C$ комплексной кривой C представляет собой, в терминах топологии, несвязное объединение k окружностей, где число k удовлетворяет неравенству Гарнака

$$k \leq g + 1.$$

При $k = g + 1$ кривая C называется M -кривой. В этом пункте мы опишем топологическое строение множества вещественных точек $\mathbb{R}C^{(2)}$ симметрического квадрата $C^{(2)}$.

Рассмотрим сначала случай, когда множество $\mathbb{R}C$ пустое. Тогда множество $\mathbb{R}C^{(2)}$ состоит из сумм вида $p + \tau(p)$, где p – произвольная точка кривой C . Следовательно, в этом случае множество вещественных точек $\mathbb{R}C^{(2)}$ гомеоморфно неориентируемой факторповерхности $\bar{C} = C/\tau$ и выполняется равенство

$$\dim H^1(\mathbb{R}C^{(2)}, \mathbb{F}_2) = g + 1,$$

т.е. $\mathbb{R}C^{(2)} = {}_{g+1}S^2$.

Рассмотрим теперь случай, когда множество $\mathbb{R}C$ непустое. Пусть оно состоит из топологических окружностей $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$. Тогда множество вещественных точек $\mathbb{R}C^{(2)}$ декартова квадрата C^2 представляет собой несвязную сумму торов $\Sigma_i \times \Sigma_j$, где $1 \leq i, j \leq k$. Симметрический квадрат $C^{(2)}$ кривой C получается из декартова квадрата C^2 с помощью факторизации по инволюции $\sigma: C^2 \rightarrow C^2$, переставляющей сомножители. Пусть $i < j$, тогда после факторизации два тора $\Sigma_i \times \Sigma_j$, $\Sigma_j \times \Sigma_i$ отождествляются в один тор, который будем обозначать через T_{ij} . Торы T_{ij} , $i < j$, будут входить во множество вещественных точек $\mathbb{R}C^{(2)}$ симметрического квадрата $C^{(2)}$. Из каждого тора $\Sigma_i \times \Sigma_i$, $i = 1, \dots, k$, после факторизации получается лист Мёбиуса M_i . Эти листы Мёбиуса также входят во множество $\mathbb{R}C^{(2)}$. Кроме того, в него входят точки вида $p + \tau(p)$, которые образуют множество, гомеоморфное факторповерхности $\overline{C} = C/\tau$. Она представляет собой поверхность с краем, причем край состоит из k компонент, каждая из которых является краем одного листа Мёбиуса M_i . Таким образом, объединение $\Pi = \overline{C} \cup M_1 \cup \dots \cup M_k$ представляет собой связную компактную дифференцируемую поверхность, которая гомеоморфна поверхности, полученной из факторповерхности $\overline{C} = C/\tau$ с помощью заклеивания дыр листами Мёбиуса. Поверхность Π неориентируема и гомеоморфна $_{g+1}S^2$. В итоге получаем, что множество вещественных точек $\mathbb{R}C^{(2)}$ в случае, когда множество $\mathbb{R}C$ состоит из k компонент, представляет собой объединение:

$$\mathbb{R}C^{(2)} = \bigcup_{i < j} T_{ij} \cup \Pi,$$

где Π – неориентируемая поверхность рода $g + 1$ без края, т. е. $\Pi = _{g+1}S^2$. Из этого соотношения вытекает равенство

$$\dim H^*(\mathbb{R}C^{(2)}, \mathbb{F}_2) = 2k(k-1) + g + 3,$$

которое выполняется и в случае пустого множества $\mathbb{R}C$. С другой стороны, имеем

$$\dim H^*(C^{(2)}, \mathbb{F}_2) = 2g^2 + 3g + 3.$$

Таким образом, только при $k = g + 1$ выполняется равенство

$$\dim H^*(\mathbb{R}C^{(2)}, \mathbb{F}_2) = \dim H^*(C^{(2)}, \mathbb{F}_2).$$

Тем самым доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Симметрический квадрат $(C^{(2)}, \tau)$ будет тогда и только тогда M -многообразием, когда кривая (C, τ) является M -кривой.*

1.2. Симметрический квадрат канонической кривой рода 4. Напомним, что неособая кривая $C \subset \mathbb{P}^3$ рода 4 называется *канонической*, если существует базис голоморфных форм $\omega_1, \dots, \omega_4$ на C такой, что отображение вложения $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ задается равенством

$$[Y_1, \dots, Y_4] = [\omega_1(p), \dots, \omega_4(p)],$$

где $Y_1, \dots, Y_4$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^3$, p – переменная точка на C . Каждая такая кривая является неособым полным пересечением квадрики и кубики в $\mathbb{P}^3$, причем квадрика определяется кривой C однозначно, будем ее обозначать через $Q(C)$. Также верно обратное утверждение. Таким образом, степень канонической кривой в $\mathbb{P}^3$ равна 6. Обозначим через $\mathcal{H}_{6,4,3}$ схему Гильберта кривых в $\mathbb{P}^3$ степени 6 и рода 4. Тогда множество канонических кривых образует на схеме Гильберта открытое множество в топологии Зариского, которое будем обозначать через $\mathcal{C}$. Таким образом, $\mathcal{C}$ – это пространство канонических кривых рода 4 в $\mathbb{P}^3$. Все точки из $\mathcal{C}$ неособые. Это вытекает из равенства $H^1(C, \mathcal{N}) = 0$, где $\mathcal{N}$ – пучок ростков нормального расслоения к канонической кривой C в $\mathbb{P}^3$.

Пусть Q – квадрика в трехмерном комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}_Y^3$ с однородными координатами $Y_1, \dots, Y_4$. Тогда она определяется уравнением

$$q(Y) = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij} Y_i Y_j = 0,$$

где $A_Q = (a_{ij})$ – ненулевая симметрическая матрица размера 4×4 . Пространство таких квадрик обозначим через $\mathcal{Q}$. Коэффициенты матрицы A_Q определяют изоморфизм $\mathcal{Q} \cong \mathbb{P}_W^9$, где $\mathbb{P}_W^9$ – проективное пространство, ассоциированное с векторным пространством симметрических матриц A размера 4×4 , а W_{ij} – однородные координаты в нем, причем предполагается, что выполняется равенство $W_{ji} = W_{ij}$. Обозначим через $\mathcal{Q}_k$ пространство квадрик Q , для которых ранг матрицы A_Q равен k . Тогда имеем разложение на непересекающиеся неособые квазипроjektивные многообразия:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_4 \cup \mathcal{Q}_3 \cup \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{Q}_1.$$

Здесь $\mathcal{Q}_4$ – пространство неособых квадрик, $\mathcal{Q}_3$ – пространство квадратичных конусов, $\mathcal{Q}_2$ – пространство пар плоскостей, $\mathcal{Q}_1$ – пространство двойных плоскостей. Объединение $\mathcal{Q}_4 \cup \mathcal{Q}_3$ будем обозначать через $\mathcal{Q}_{\geq 3}$, оно является открытым множеством в топологии Зариского на пространстве всех квадрик $\mathcal{Q} = \mathbb{P}_W^9$.

Правило $C \mapsto Q(C)$ задает регулярное отображение $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Q}$. Образ этого отображения состоит из квадрик Q , для которых соответствующая квадратичная форма $q(Y)$ имеет ранг не менее 3, т.е. $\pi(\mathcal{C}) = \mathcal{Q}_{\geq 3}$. Прообраз $\pi^{-1}(Q)$, где $Q \in \mathcal{Q}_{\geq 3}$, является открытым множеством в топологии Зариского в 15-мерном проективном пространстве $\mathbb{P}(\Gamma(Q, \mathcal{O}_Q(3)))$. На самом деле, многообразие $\mathcal{C}$ является открытым множеством в топологии Зариского расслоения со слоем $\mathbb{P}^{15}$ на пространстве квадрик $\mathcal{Q}_{\geq 3}$, которое мы сейчас опишем. В произведении $(\mathcal{Q}_{\geq 3}) \times \mathbb{P}_Y^3$ полное тело квадрик

$$\Omega = \bigcup_{w \in \mathcal{Q}_{\geq 3}} Q \times w,$$

где $Q \subset \mathbb{P}_Y^3$ – квадрика, отвечающая точке $w \in \mathcal{Q}_{\geq 3}$, образует неособую гиперповерхность. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathcal{Q}_{\geq 3}$ – проекция. Тогда пучок $\mathcal{E} = f_*(\mathcal{O}_\Omega(3))$ локально свободный, поэтому имеем локально тривиальное расслоение $\pi: \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{Q}_{\geq 3}$ со слоем $\mathbb{P}^{15}$. Многообразие канонических кривых $\mathcal{C}$ является открытым множеством в топологии Зариского в $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

Пусть каноническая кривая C лежит на неособой квадрике Q ; тогда через каждую точку $p \in C$ проходят две прямые L'_p, L''_p из двух семейств прямых на квадрике Q . Заметим, что индексы пересечения $(C, L'_p), (C, L''_p)$ равны 3, т.е. кривая C на квадрике Q имеет бистепень $(3, 3)$. Поэтому определены канонические отображения

$$\lambda': C \rightarrow C^{(2)}, \quad \lambda'': C \rightarrow C^{(2)}, \quad (1.1)$$

которые устроены следующим образом. Прямые L'_p, L''_p имеют с кривой C , кроме общей точки p , еще по две точки (с учетом кратности пересечений), т.е. для циклов пересечения имеем равенства

$$C \cdot L'_p = p + p'_1 + p'_2, \quad C \cdot L''_p = p + p''_1 + p''_2.$$

Тогда по определению полагаем

$$\lambda'(p) = p'_1 + p'_2, \quad \lambda''(p) = p''_1 + p''_2.$$

Образы отображений (1.1) обозначим через C', C'' соответственно. Тогда кривые C', C'' не пересекаются и отображения

$$\lambda': C \rightarrow C', \quad \lambda'': C \rightarrow C''$$

являются изоморфизмами комплексных алгебраических кривых.

На конусе $\mathcal{Q}_0$ имеется только одно семейство прямых L_p . Оно задает отображение

$$\lambda_0: C_0 \rightarrow (C_0)^{(2)},$$

причем отображение на образ $\lambda_0: C_0 \rightarrow \lambda_0(C_0)$ является изоморфизмом комплексных алгебраических кривых.

Пусть $C_t, 0 \leq t \leq 1$, – дифференцируемое семейство канонических кривых, где $Q(C_t) \in \mathcal{Q}_4$ при $t > 0$ и $Q(C_0) \in \mathcal{Q}_3$. Тогда получаем два дифференцируемых семейства регулярных отображений:

$$\lambda'_t: C_t \rightarrow (C_t)^{(2)}, \quad \lambda''_t: C_t \rightarrow (C_t)^{(2)},$$

которые совпадают с отображением λ_0 при $t = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть каноническая кривая C лежит на неособой квадрике Q . Тогда отображения (1.1) гомотопны в классе дифференцируемых отображений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в пространстве канонических кривых $\mathcal{C}$ дифференцируемый путь C_t , $0 \leq t \leq 1$, где $C_1 = C$, $Q(C_t) \in \mathcal{Q}_4$ при $t > 0$ и $Q(C_0) \in \mathcal{Q}_3$. Такой путь существует, так как пространство канонических кривых $\mathcal{C}$ связное. Семейство канонических кривых C_t задает тривиальное дифференцируемое расслоение над отрезком $[0, 1]$ со слоем C . Зафиксируем тривиализацию $c_t: C_t \rightarrow C$ этого расслоения, где $c_1: C_1 = C \rightarrow C$ – тождественное отображение. Это семейство диффеоморфизмов определяет семейство диффеоморфизмов симметрических квадратов $(c_t)^{(2)}: (C_t)^{(2)} \rightarrow C^{(2)}$. Рассмотрим теперь два дифференцируемых семейства дифференцируемых отображений:

$$\Lambda'_t = (c_t)^{(2)} \circ \lambda'_t \circ c_t^{-1}: C \rightarrow C^{(2)}, \quad \Lambda''_t = (c_t)^{(2)} \circ \lambda''_t \circ c_t^{-1}: C \rightarrow C^{(2)},$$

где $\lambda'_0 = \lambda''_0 = \lambda_0$. Эти семейства отображений задают гомотопии отображения

$$\Lambda_0 = (c_0)^{(2)} \circ \lambda_0 \circ c_0^{-1}: C \rightarrow C^{(2)}$$

с отображениями (1.1). Предложение доказано.

Пусть $Q(C) \in \mathcal{Q}_4$ и $c \in C$ – фиксированная точка. Тогда рассмотрим отображения Абеля–Якоби

$$\begin{aligned} \alpha: C &\rightarrow J, & \alpha(p) &= [p - c], \\ \alpha^{(2)}: C^{(2)} &\rightarrow J, & \alpha^{(2)}(p_1 + p_2) &= \alpha(p_1) + \alpha(p_2) = [p_1 + p_2 - 2c], \end{aligned}$$

где $[p - c], [p_1 + p_2 - 2c] \in J$ – классы линейной эквивалентности дивизоров нулевой степени на кривой C , а многообразие Якоби J отождествляется с многообразием Пикара $\text{Pic}^0(C)$. Композиции отображений

$$\alpha^{(2)} \circ \lambda': C \rightarrow J, \quad \alpha^{(2)} \circ \lambda'': C \rightarrow J$$

будем обозначать через α', α'' соответственно.

Если выполняются равенства для дивизоров

$$C \cdot L'_c = c + c'_1 + c'_2, \quad C \cdot L''_c = c + c''_1 + c''_2,$$

то переменный дивизор $p + p'_1 + p'_2$ на C линейно эквивалентен дивизору $c + c'_1 + c'_2$, а дивизор $p + p''_1 + p''_2$ линейно эквивалентен дивизору $c + c''_1 + c''_2$. Поэтому выполняются равенства для классов линейной эквивалентности дивизоров

$$\begin{aligned} [p'_1 + p'_2 - 2c] &= [c - p] + [c'_1 + c'_2 - 2c], \\ [p''_1 + p''_2 - 2c] &= [c - p] + [c''_1 + c''_2 - 2c]. \end{aligned}$$

Следовательно, для отображений $\alpha': C \rightarrow J$, $\alpha'': C \rightarrow J$ справедливы равенства

$$\alpha'(p) = -\alpha(p) + \alpha'(c), \quad \alpha''(p) = -\alpha(p) + \alpha''(c).$$

Из этих равенств вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть A – абелева группа; тогда при каждом q отображения групп гомологий

$$(\alpha')_*: H_q(C, A) \rightarrow H_q(J, A), \quad (\alpha'')_*: H_q(C, A) \rightarrow H_q(J, A)$$

совпадают и равны гомоморфизму $(-\alpha)_*: H_q(C, A) \rightarrow H_q(J, A)$, а поэтому мономорфны.

Применим предложение 1.2, тогда получим

СЛЕДСТВИЕ 1.4. При каждом q отображения групп гомологий

$$(\lambda')_*: H_q(C, A) \rightarrow H_q(C^{(2)}, A), \quad (\lambda'')_*: H_q(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(C^{(2)}, A)$$

совпадают и мономорфны.

В случае, когда каноническая кривая C лежит на квадратичном конусе Q_0 , имеем одно отображение $\alpha_0: C \rightarrow J$, которое равно композиции $\alpha^{(2)} \circ \lambda_0$. Для него справедливо равенство

$$\alpha_0(p) = -\alpha(p) + \alpha_0(c).$$

Из данного равенства вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Если кривая C лежит на квадратичном конусе, то при каждом q отображение гомологий

$$(\alpha_0)_*: H_q(C, A) \rightarrow H_q(J, A)$$

равно гомоморфизму

$$(-\alpha)_*: H_q(C, A) \rightarrow H_q(J, A),$$

а поэтому мономорфно.

Из этого предложения получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Если кривая C лежит на квадратичном конусе, то при каждом q отображение гомологий

$$(\lambda_0)_*: H_q(C, A) \rightarrow H_q(C^{(2)}, A)$$

мономорфно.

1.3. Пространство вещественных канонических M -кривых. Далее в этом пункте (C, τ) – неособая M -кривая в проективном пространстве $\mathbb{P}_Y^3$ с однородными координатами (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) , которая является неособым полным пересечением квадрики $Q \subset \mathbb{P}_Y^3$, заданной уравнением с вещественными коэффициентами

$$q(Y) \equiv \sum_{1 \leq i, j \leq 4} a_{ij} Y_i Y_j = 0,$$

и кубики, заданной уравнением с вещественными коэффициентами

$$c(Y) \equiv \sum_{1 \leq i, j, k \leq 4} b_{ijk} Y_i Y_j Y_k = 0.$$

Вещественная часть $\mathbb{R}C$ кривой C состоит из пяти компонент связности $\Gamma_0, \dots, \Gamma_4$, так как (C, τ) является M -кривой, а род кривой C равен 4. Будем предполагать, что фиксированная точка $c \in C$ принадлежит компоненте Γ_0 . Обозначим через MC_Q пространство канонических M -кривых на квадрике Q . Вещественная часть $\mathbb{R}Q$ квадрики Q может быть эллипсоидом, гиперboloидом или квадратичным конусом. Если $\mathbb{R}Q$ – эллипсоид, то пространство MC_Q состоит из одной компоненты связности, а если $\mathbb{R}Q$ – гиперboloид или квадратичный конус, то пространство MC_Q состоит из двух компонент связности (см. [4], [5]). Через MC обозначим пространство всех вещественных канонических M -кривых. Тогда имеем отображение $\pi: MC \rightarrow \mathbb{R}Q$, заданное правилом $\pi(C) = Q(C)$.

Рассмотрим теперь пространство вещественных квадрик $\mathbb{R}Q$. Оно состоит из квадрик $Q \in \mathcal{Q}$, заданных уравнениями с вещественными коэффициентами a_{ij} . Для вещественных квадрик $Q \in \mathbb{R}Q_k$ определена сигнатура (p, n) , где p, n – число положительных и отрицательных квадратов в каноническом представлении квадратичной формы

$$q(Y) = \sum_{i, j=1}^4 a_{ij} Y_i Y_j.$$

Чтобы сигнатура была определена однозначно, будем полагать, что выполняется неравенство $p \geq n$, в противном случае форму $q(Y)$ нужно умножить на -1 . Через $\mathcal{Q}_n^p$ будем обозначать пространство вещественных квадрик $Q \in \mathbb{R}Q_k$ с сигнатурой (p, n) , где $k = p + n$. Каждое из открытых множеств $\mathcal{Q}_n^p \subset \mathbb{R}Q_{p+n}$ является связным, т. е. является одной из связных компонент в евклидовой топологии квази-проективного многообразия $\mathbb{R}Q_{p+n}$. Компоненты $\mathcal{Q}_n^p$ классифицируются по множествам вещественных точек квадрики $Q \in \mathcal{Q}_n^p$. Если $Q \in \mathcal{Q}_0^4$, то множество $\mathbb{R}Q$ пустое. Если $Q \in \mathcal{Q}_1^3$, то множество $\mathbb{R}Q$ – эллипсоид. Если $Q \in \mathcal{Q}_2^2$, то множество $\mathbb{R}Q$ – гиперboloид. Если $Q \in \mathcal{Q}_3^1$, то множество $\mathbb{R}Q$ состоит из одной точки. Если $Q \in \mathcal{Q}_4^0$, то множество $\mathbb{R}Q$ – обычный конус. Если $Q \in \mathcal{Q}_0^2$, то множество $\mathbb{R}Q$ состоит из одной прямой. Если $Q \in \mathcal{Q}_1^1$, то множество $\mathbb{R}Q$ состоит из двух плоскостей. Если $Q \in \mathcal{Q}_0^1$, то множество $\mathbb{R}Q$ состоит из одной плоскости. Заметим еще, что компонента $\mathcal{Q}_s^r$ лежит в границе компоненты $\mathcal{Q}_n^p$, если выполняются следующие условия: $r \leq p$, $s \leq n$ и $r + s < p + n$.

Таким образом, отображение $\pi: MC \rightarrow \pi(MC)$ удовлетворяет следующим свойствам: образ $\pi(MC)$ равен связному открытому множеству $\mathcal{Q}_1^3 \cup \mathcal{Q}_2^2 \cup \mathcal{Q}_1^2 \subset \mathbb{R}Q$; прообраз $\pi^{-1}(Q)$ состоит из одной компоненты связности, если квадратика Q принадлежит открытому множеству $\mathcal{Q}_1^3$, в противном случае прообраз $\pi^{-1}(Q)$ состоит из двух компонент связности. Через MC_n^p будем обозначать пространство вещественных канонических M -кривых на квадриках из пространства $\mathcal{Q}_n^p$. Тогда получим три локально тривиальных расслоения

$$\pi: MC_1^3 \rightarrow \mathcal{Q}_1^3, \quad \pi: MC_2^2 \rightarrow \mathcal{Q}_2^2, \quad \pi: MC_1^2 \rightarrow \mathcal{Q}_1^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. *Топологические пространства MC_1^3 , MC_2^2 , MC_1^2 , MC связные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как локально тривиальное расслоение $\pi: MC_1^3 \rightarrow Q_1^3$ имеет связную базу и связный слой, то пространство расслоения MC_1^3 тоже связное.

Расслоение $\pi: MC_2^2 \rightarrow Q_2^2$ имеет связную базу, но слой MC_Q , где $Q \in Q_2^2$, состоит из двух компонент связности. Эти компоненты имеют следующее описание. На гиперboloиде $\mathbb{R}Q$ имеются два семейства прямых. Выберем по представителю l', l'' из этих семейств и зафиксируем на них ориентацию. Упорядоченный набор ориентированных прямых l', l'' определяет ориентацию на гиперboloиде. На компонентах $\Gamma_0, \dots, \Gamma_4$ кривой $\mathbb{R}C$, где $C \in MC_Q$, также зафиксируем ориентацию. Тогда определены индексы пересечения (Γ_i, l') , (Γ_i, l'') . Упорядоченная пара этих чисел $((\Gamma_i, l'), (\Gamma_i, l''))$ составляет бистепень компоненты Γ_i . Если ориентации прямых l', l'' зафиксированы, то при изменении ориентации компоненты Γ_i ее бистепень умножается на -1 . Поэтому можем считать, что первое число в бистепени компоненты неотрицательно. Тогда оказывается, что для M -кривой справедливо утверждение (см. [5]): одна компонента имеет бистепень $(1, \pm 1)$, а четыре другие компоненты имеют бистепень $(0, 0)$, причем компоненты бистепени $(0, 0)$ не образуют гнезд, т.е. содержатся вне друг друга. Будем предполагать, что компонента Γ_0 имеет бистепень $(1, \pm 1)$. Тогда компоненты слоя MC_Q характеризуются бистепенью компоненты Γ_0 : функция $C \mapsto (\Gamma_0, l'')$ различает компоненты слоя MC_Q .

Чтобы доказать связность пространства MC_2^2 , достаточно для фиксированной квадрики $Q \in Q_2^2$ и фиксированной канонической кривой $C \in MC_Q$ построить путь $C(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве MC_2^2 такой, что $C(0) = C$, а кривая $C_1 = C(1)$ принадлежит слою MC_Q , но лежит в другой компоненте связности этого слоя. Мы можем считать, что квадратика Q определяется уравнением $Y_1 Y_3 + Y_2 Y_4 = 0$, а прямые l', l'' на гиперboloиде $\mathbb{R}Q$ задаются системами уравнений

$$l': Y_1 = Y_2 = 0, \quad l'': Y_1 = Y_4 = 0.$$

Рассмотрим путь $g(t)$ в группе $\mathrm{PGL}_4 \mathbb{R}$, заданный семейством матриц

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ 0 & 0 & -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix}.$$

Тогда путь $C(t) = g(t)(C)$ в пространстве MC_2^2 будет искомым путем.

Доказательство связности пространства MC_1^2 проводится аналогично. В [4] имеется описание компонент слоя MC_Q , где $Q \in MC_1^2$. На конусе $\mathbb{R}Q$ имеется одно семейство прямых, выберем одну из них, зафиксируем на ней ориентацию и обозначим ее через l . Тогда только для одной из компонент Γ_i , $0 \leq i \leq 4$, индекс пересечения (Γ_i, l) равен ± 1 (знак зависит от выбора ориентации компоненты Γ_i и ориентации конуса), а для остальных компонент он равен нулю. Будем предполагать, что $(\Gamma_0, l) = \pm 1$. Пусть $O \in \mathbb{R}Q$ – вершина конуса, тогда компонента Γ_0 и вершина O разбивают конус на две части, причем оказывается, что все остальные компоненты

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ содержатся в одной части конуса. Две компоненты слоя MC_Q характеризуются расположением компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ относительно компоненты Γ_0 : они могут все располагаться до компоненты Γ_0 , если двигаться по направлению прямой l от вершины O , а могут располагаться после компоненты Γ_0 . Чтобы доказать связность пространства MC_1^2 , достаточно для фиксированной квадрики $Q \in \mathcal{Q}_1^2$ и фиксированной канонической кривой $C \in MC_Q$ построить путь $C(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в пространстве MC_1^2 такой, что $C(0) = C$, а кривая $C_1 = C(1)$ принадлежит слою MC_Q , но лежит в другой компоненте связности этого слоя. Мы можем считать, что квадрика Q определяется уравнением $Y_2^2 + Y_3^2 - Y_4^2 = 0$. Рассмотрим путь $g(t)$ в группе $\mathrm{PGL}_4 \mathbb{R}$, заданный семейством матриц $G(t)$. Тогда путь $C(t) = g(t)(C)$ в пространстве MC_1^2 будет искомым путем.

Для того чтобы установить связность всего пространства канонических M -кривых MC , зафиксируем кривую $C_0 \in MC_1^2$ и построим путь $C(t)$, $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, в пространстве MC такой, что $C(0) = C_0$, $C(\varepsilon) \in MC_2^2$, $C(-\varepsilon) \in MC_1^3$. Из связности пространств MC_1^2 , MC_2^2 , MC_1^3 следует, что из существования такого пути $C(t)$ вытекает связность пространства всех канонических M -кривых.

Пусть кривая C_0 задается системой уравнений

$$\begin{aligned} q_0(Y) &= \sum_{i,j} a_{ij} Y_i Y_j = 0, \\ c(Y) &= \sum_{i,j,k} b_{ijk} Y_i Y_j Y_k = 0. \end{aligned}$$

Пусть $Q_0 = Q(C_0)$, т.е. квадрика Q_0 задана уравнением $q_0(Y) = 0$. Тогда рассмотрим путь $Q(t)$, $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$, в пространстве $\mathbb{R}Q$, проходящий трансверсально к $\mathcal{Q}_1^2$ через точку Q_0 при $t = 0$, причем $Q(t) \in \mathcal{Q}_1^3$ при $t < 0$ и $Q(t) \in \mathcal{Q}_2^2$ при $t > 0$. Мы можем считать, что семейство квадрик $Q(t)$ задается уравнением

$$q_t(Y) = \sum_{i,j} a_{ij}(t) Y_i Y_j = 0,$$

где коэффициенты $a_{ij}(t)$ – регулярные функции от t , причем $a_{ij}(0) = a_{ij}$. Тогда искомым путь $C(t)$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} q_t(Y) &= \sum_{i,j} a_{ij}(t) Y_i Y_j = 0, \\ c(Y) &= \sum_{i,j,k} b_{ijk} Y_i Y_j Y_k = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Предложение доказано.

1.4. Симметрический квадрат канонической M -кривой на гиперболоиде. Пусть (C, τ) – каноническая кривая из MC_2^2 . Тогда отображения

$$\lambda': (C, \tau) \rightarrow (C^{(2)}, \tau), \quad \lambda'': (C, \tau) \rightarrow (C^{(2)}, \tau)$$

вещественные, т.е. эквивариантные относительно инволюции τ . Действительно, если $C \in MC_2^2$ и $Q = Q(C)$, то $\mathbb{R}Q$ – гиперболоид. В этом случае каждая комплексная прямая L из какого-либо семейства на квадрике Q под действием комплексного

сопряжения $\tau: Q \rightarrow Q$ переходит в прямую $\tau(L)$ этого же семейства. Поэтому имеем равенства

$$\begin{aligned} C \cdot L'_p &= p + p'_1 + p'_2, & C \cdot L'_{\tau(p)} &= \tau(p) + \tau(p'_1) + \tau(p'_2), \\ C \cdot L''_p &= p + p''_1 + p''_2, & C \cdot L''_{\tau(p)} &= \tau(p) + \tau(p''_1) + \tau(p''_2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda'(\tau(p)) = \tau(p'_1) + \tau(p'_2) = \tau(\lambda'(p)), \quad \lambda''(\tau(p)) = \tau(p''_1) + \tau(p''_2) = \tau(\lambda''(p)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. *Отображения (1.3) гомотопны в классе эквивариантных дифференцируемых отображений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим путь $C(t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, в пространстве MC , заданный системой уравнений (1.2). Гладко продолжим это путь в пространстве MC_2^2 при $\varepsilon \leq t \leq 1$, чтобы получить путь, соединяющий точку $C_0 \in MC_1^2$ с точкой $C \in MC_2^2$. Далее нужно повторить рассуждения, используемые при доказательстве предложения 1.2. Предложение доказано.

При комплексном сопряжении кривые C' , C'' переходят в себя, т.е. кривые C' , C'' вещественные, а также отображения $\lambda': C \rightarrow C'$, $\lambda'': C \rightarrow C''$ вещественные. Через Γ'_i , Γ''_i , $i = 0, \dots, 4$, обозначим образы компонент Γ_i при отображениях λ' , λ'' .

Рассмотрим отображения

$$\lambda'_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}C^{(2)}, \quad \lambda''_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}C^{(2)},$$

которые являются ограничениями на вещественные точки отображений

$$\lambda': C \rightarrow C^{(2)}, \quad \lambda'': C \rightarrow C^{(2)}.$$

Из предложения 1.8 следует, что $\lambda'_{\mathbb{R}}$, $\lambda''_{\mathbb{R}}$ гомотопны, поэтому каждая компонента связности Γ_i , $i = 0, \dots, 4$, при отображениях $\lambda'_{\mathbb{R}}$, $\lambda''_{\mathbb{R}}$ переходит в одну и ту же компоненту связности множества $\mathbb{R}C^{(2)}$. Следовательно, каждая пара компонент Γ'_i , Γ''_i , $i = 0, \dots, 4$, лежит в одной и той же компоненте множества $\mathbb{R}C^{(2)}$. Так как компонента Γ_0 имеет на гиперboloиде $\mathbb{R}Q$ бистепень $(1, \pm 1)$, а компоненты $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ имеют бистепень $(0, 0)$, то компоненты Γ'_0 , Γ''_0 лежат на неориентируемой поверхности $\Pi = {}_5S^2$, а каждая пара компонент Γ'_i , Γ''_i , $i = 1, \dots, 4$, лежит на торе T_{0i} . Действительно, если $p \in \Gamma_0$ и $C \cdot L'_p = p + p'_1 + p'_2$, то точки p'_1 , p'_2 либо комплексно-сопряженные, либо принадлежат одной из компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$. В любом случае сумма $p'_1 + p'_2 = \lambda'(p)$ принадлежит компоненте Π . Следовательно, кривая $\Gamma'_0 = \lambda'(\Gamma_0)$ лежит на этой компоненте. Аналогично доказывается утверждение для компоненты Γ''_0 . Если $p \in \Gamma_1$ и $C \cdot L'_p = p + p'_1 + p'_2$, то одна из точек p'_1 , p'_2 должна принадлежать компоненте Γ_0 , а другая – компоненте Γ_1 . Поэтому кривая $\Gamma'_1 = \lambda'(\Gamma_1)$ лежит на торе T_{01} . Аналогично доказывается утверждение для компоненты Γ''_1 , а также для компонент Γ'_i , Γ''_i при $i > 1$.

Поскольку (C, τ) является M -кривой, то компоненты $\Gamma_0, \dots, \Gamma_4$ разбивают топологическую поверхность C на две половинки. Выберем одну из этих половинок,

тогда ее ориентация определит ориентацию сразу всех компонент $\Gamma_0, \dots, \Gamma_4$. Поэтому определены классы гомологий

$$[\Gamma_0], \dots, [\Gamma_4] \in H_1(C, A),$$

где A – абелева группа. Для них выполнено только одно соотношение

$$[\Gamma_0] + \dots + [\Gamma_4] = 0.$$

Ориентация компоненты Γ_i , $i = 0, \dots, 4$, индуцирует ориентацию на компонентах Γ'_i, Γ''_i , поэтому определены классы гомологий

$$[\Gamma'_i], [\Gamma''_i] \in H_1(\mathbb{R}C^{(2)}, A), \quad i = 0, \dots, 4.$$

В силу предложения 1.8 отображения

$$\lambda'_\mathbb{R}: \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}C^{(2)}, \quad \lambda''_\mathbb{R}: \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}C^{(2)}$$

гомотопны, поэтому классы гомологий $[\Gamma'_i], [\Gamma''_i]$ совпадают. Поскольку классы гомологий

$$[\Gamma_i] \in H_1(C, A), \quad i = 0, \dots, 4,$$

не равны нулю, то из следствия 1.4 вытекает, что также не равны нулю классы гомологий

$$[\Gamma'_i], [\Gamma''_i] \in H_1(\mathbb{R}C^{(2)}, A), \quad i = 0, \dots, 4.$$

В итоге доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. *Справедливы утверждения:*

1) *отображения*

$$\lambda'_\mathbb{R}: \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}C^{(2)}, \quad \lambda''_\mathbb{R}: \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}C^{(2)}$$

гомотопны;

2) *отображения групп гомологий*

$$(\lambda'_\mathbb{R})_*: H_q(\mathbb{R}C, \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(\mathbb{R}C^{(2)}, A), \quad (\lambda''_\mathbb{R})_*: H_q(\mathbb{R}C, \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(\mathbb{R}C^{(2)}, A)$$

совпадают и мономорфны при каждом q .

Топологические кривые Γ'_0, Γ''_0 разделяют поверхность $\Pi = {}_5S^2$ на две части, так как они гомологичны друг другу, но не гомологичны нулю. Обозначим части поверхности ${}_5S^2 = \Pi$, на которые она разбивается кривыми Γ'_0, Γ''_0 , через Π', Π'' . Попробуем выяснить топологический тип этих поверхностей с краем. Так как кривые Γ'_0, Γ''_0 гомотопны, то одна из поверхностей Π', Π'' должна быть цилиндром, т. е. произведением окружности на отрезок. Будем считать, что поверхность Π' – цилиндр. Покажем, что поверхность Π'' неориентируемая. Действительно, край поверхности Π'' состоит из двух окружностей, а эйлерова характеристика $\chi(\Pi'')$ равна -3 , поэтому поверхность Π'' неориентируемая. Следовательно, поверхность Π'' является неориентируемой поверхностью рода 3 с двумя дырами. Топологические кривые Γ'_i, Γ''_i , $i = 1, \dots, 4$, разделяют тор T_{0i} на два цилиндра Π'_i, Π''_i , так как кривые $\Gamma'_i, \Gamma''_i \subset T_{0i}$ гомологичны друг другу, но не гомологичны нулю.

Таким образом, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. *Топологические кривые Γ'_i, Γ''_i , $i = 1, \dots, 4$, разделяют тор T_{0i} на два цилиндра Π'_i, Π''_i . Топологические кривые Γ'_0, Γ''_0 разделяют поверхность $\Pi = {}_5S^2$ на две части Π', Π'' , первая из которых гомеоморфна цилиндру, а вторая является неориентируемой поверхностью рода 3 с двумя дырами.*

§ 2. Кубика с особой двойной точкой и ее поверхность Фано

Пусть теперь V_0 – трехмерное особое комплексное алгебраическое многообразие в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^4$, заданное уравнением

$$P_0(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) = 0, \quad (2.1)$$

где $P_0(X) = P_0(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ – однородный многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами. Будем предполагать, что точка $p_0 = [1, 0, 0, 0, 0]$ – единственная особая точка многообразия V_0 . В аффинных координатах

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_0}, \quad Y_2 = \frac{X_2}{X_0}, \quad Y_3 = \frac{X_3}{X_0}, \quad Y_4 = \frac{X_4}{X_0}$$

уравнение многообразия V_0 примет вид

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 4} a_{ij} Y_i Y_j + \sum_{1 \leq i, j, k \leq 4} b_{ijk} Y_i Y_j Y_k = 0.$$

Мы предполагаем, что особая точка p_0 является простой двойной точкой. Тогда матрица (a_{ij}) невырожденная. Можно считать, что гиперплоскость $X_0 = 0$ не касается многообразия V_0 , в противном случае необходимо сделать замену координат, причем такую, что точка p_0 сохранит координаты $[1, 0, 0, 0, 0]$. Тогда пересечение многообразия V_0 с этой гиперплоскостью является неособой кубической поверхностью S . Гиперплоскость $X_0 = 0$ будем обозначать через Y . Поверхность S содержится в проективном пространстве Y с однородными координатами Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 и задается однородным уравнением

$$\sum_{1 \leq i, j, k \leq 4} b_{ijk} Y_i Y_j Y_k = 0.$$

Рассмотрим центральную проекцию многообразия V_0 с центром в точке p_0 на проективное пространство Y . Прямая в $\mathbb{P}^4$, проходящая через точку p_0 , либо пересекает многообразие V_0 еще в одной точке, отличной от p_0 , либо точка p_0 является тройной общей точкой прямой и многообразия V_0 , либо прямая целиком лежит на многообразии V_0 . Каждая такая прямая пересекает проективное пространство Y в одной точке.

Пусть C – кривая в Y , которая является пересечением квадрики $Q \subset Y$, заданной уравнением

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 4} a_{ij} Y_i Y_j = 0,$$

и кубики S , заданной уравнением

$$\sum_{1 \leq i, j, k \leq 4} b_{ijk} Y_i Y_j Y_k = 0.$$

Тогда кривая C является неособым полным пересечением квадрики и кубики, т. е. C – каноническая кривая рода 4. Это утверждение вытекает из единственности особой точки p_0 в многообразии V_0 . Каждая прямая в $\mathbb{P}^4$, проходящая через точку p_0 и произвольную точку на кривой C , целиком содержится в многообразии V_0 . Также верно обратное утверждение: если прямая, проходящая через точку p_0 , целиком содержится на многообразии V_0 , то она пересекает кривую C в некоторой точке. Каждая прямая в $\mathbb{P}^4$, проходящая через точку p_0 и произвольную точку на $Q \setminus C$, имеет тройную общую точку с многообразием V_0 , а также верно обратное утверждение.

Заметим, что тройка (Y, Q, C) может быть определена инвариантным образом, т. е. без введения координат. В качестве проективного пространства Y необходимо взять множество прямых в $\mathbb{P}^4$, проходящих через точку p_0 . Касательный конус к кубике V_0 дает квадрику $Q \subset Y$, а кривая $C \subset Q$ состоит из прямых на кубике V_0 , проходящих через точку p_0 .

Центральная проекция многообразия V_0 с центром в точке p_0 на проективное пространство Y определяет бирациональное отображение $\pi: V_0 \dashrightarrow Y$. Отображение проекции π не определено в точке $p_0 \in V_0$, а обратное отображение π^{-1} не определено в точках из кривой $C \subset Y$. Пусть $\sigma_{p_0}: \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^4$ – раздутие с центром в точке p_0 , т. е. σ -процесс с центром p_0 . Обозначим через $\tilde{V}_0$ собственный прообраз особого многообразия V_0 при отображении $\sigma_{p_0}: \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^4$. Тогда при отображении $\sigma_{p_0}: \tilde{V}_0 \rightarrow V_0$ прообразом точки p_0 является квадрика. Если теперь мы рассмотрим σ -процесс $\sigma_C: \tilde{Y} \rightarrow Y$ с центром в кривой C , то продолженное отображение $\tilde{\pi}: \tilde{V}_0 \rightarrow \tilde{Y}$ будет изоморфизмом. При раздутии $\sigma_{p_0}: \tilde{V}_0 \rightarrow V_0$ точка p_0 раздувается в квадрику, а эта квадрика при регулярном отображении $\tilde{\pi}$ отображается на собственный прообраз квадрики Q при раздутии $\sigma_C: \tilde{Y} \rightarrow Y$. Таким образом, если $\tilde{Q} \subset \tilde{Y}$ – собственный прообраз квадрики Q , то его можно стянуть в простую двойную точку, а полученное многообразие изоморфно многообразию V_0 .

Опишем группы гомологий многообразий, которые появились выше. Род кривой C равен 4. Многообразие $\tilde{Y}$ получается из проективного пространства Y раздутием кривой C , поэтому

$$H_1(\tilde{Y}, \mathbb{Z}) = H_5(\tilde{Y}, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_2(\tilde{Y}, \mathbb{Z}) = H_4(\tilde{Y}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2, \quad H_3(\tilde{Y}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^8.$$

Заметим, что если L', L'' – прямые на квадрике $\tilde{Q}$ из двух разных семейств прямых, то вложение $\tilde{Q} \hookrightarrow \tilde{Y}$ индуцирует точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \cdot [L'' - L'] \rightarrow H_2(\tilde{Q}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\tilde{Y}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Многообразие V_0 получается из многообразия $\tilde{Y}$ стягиванием в точку квадрики $\tilde{Q}$, поэтому при $q > 0$ выполняются равенства

$$H_q(V_0, \mathbb{Z}) = H_q(V_0, \{p_0\}; \mathbb{Z}) = H_q(\tilde{Y}, \tilde{Q}; \mathbb{Z}).$$

Следовательно, из длинной точной последовательности гомологий пары $(\tilde{Y}, \tilde{Q})$ вытекают равенства

$$H_1(V_0, \mathbb{Z}) = H_5(V_0, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_2(V_0, \mathbb{Z}) = H_4(V_0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_3(V_0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^9.$$

Поскольку уравнение (2.1) имеет вещественные коэффициенты, то определено множество вещественных решений $\mathbb{R}V_0$ этого уравнения. Особая точка p_0 принадлежит этому множеству, потому что она единственная. После σ -процесса получаем неособое многообразие $\mathbb{R}\tilde{V}_0$. Оно бирегулярно изоморфно многообразию $\mathbb{R}\tilde{Y}$, где многообразие $\mathbb{R}\tilde{Y}$ получается из вещественного проективного пространства $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{R}Y$ с помощью раздутия кривой $\mathbb{R}C$. Если множество $\mathbb{R}Q$ пустое, то множество $\mathbb{R}V_0$ состоит из многообразия, диффеоморфного проективному пространству $\mathbb{R}Y$, и изолированной точки p_0 , а многообразия $\mathbb{R}\tilde{X}_0, \mathbb{R}\tilde{Y}$ состоят из одной компоненты связности, которая диффеоморфна проективному пространству. Если множество $\mathbb{R}Q$ непустое, а множество $\mathbb{R}C$ пустое, то множество $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом, многообразия $\mathbb{R}\tilde{V}_0, \mathbb{R}\tilde{Y}$ диффеоморфны проективному пространству, а множество $\mathbb{R}V_0$ получается стягиванием эллипсоида $\mathbb{R}\tilde{Q} \subset \mathbb{R}\tilde{Y}$ в точку. Будем предполагать теперь, что кривая $\mathbb{R}C$ непустая, тогда квадрика $\mathbb{R}Q$ может быть или гиперboloидом, или эллипсоидом.

Заметим, что класс гомологий $[\mathbb{R}\tilde{Q}] \in H_2(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю в отличие от класса гомологий $[\mathbb{R}Q] \in H_2(\mathbb{R}Y, \mathbb{F}_2)$. Действительно, полный прообраз квадрики $\mathbb{R}Q$ гомологичен нулю на $\mathbb{R}\tilde{Y}$, но он состоит из собственного прообраза $\mathbb{R}\tilde{Q}$ и линейчатой поверхности $(\sigma_C)^{-1}(\mathbb{R}C)$. Таким образом, квадрика $\mathbb{R}\tilde{Q}$ гомологична линейчатой поверхности $(\sigma_C)^{-1}(\mathbb{R}C)$, которая не гомологична нулю.

Рассмотрим сначала случай, когда квадрика $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом. Вычислим группы гомологий $H_*(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2)$. Так как тело $\mathbb{R}V_0$ получается из тела $\mathbb{R}\tilde{Y}$ стягиванием в точку квадрики $\mathbb{R}\tilde{Q}$, то рассмотрим длинную точную последовательность групп гомологий пары $(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{R}\tilde{Q})$

$$\dots \rightarrow H_{q+1}(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{R}\tilde{Q}; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_q(\mathbb{R}\tilde{Q}, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_q(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_q(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{R}\tilde{Q}; \mathbb{F}_2) \rightarrow \dots$$

Заметим, что при $q = 0, 3$ выполняется равенство $H_q(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$. При $q = 0$ оно следует из связности тела $\mathbb{R}V_0$, а при $q = 3$ оно следует из того факта, что квадрика $\mathbb{R}\tilde{Q}$ не гомологична нулю на $\mathbb{R}\tilde{Y}$. Поскольку при $q = 1, 2$ выполняются равенства

$$H_q(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{R}\tilde{Q}; \mathbb{F}_2) = H_q(\mathbb{R}V_0, \{p_0\}; \mathbb{F}_2) = H_q(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2),$$

то достаточно вычислить группы $H_q(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{R}\tilde{Q}; \mathbb{F}_2)$ при $q = 1, 2$. Группа $H_1(\mathbb{R}\tilde{Q}, \mathbb{F}_2)$ равна $(\mathbb{F}_2)^2$ и порождается двумя прямыми l', l'' на гиперboloиде $\mathbb{R}\tilde{Q}$. Сумма этих прямых $l' + l''$ гомологична нулю на теле $\mathbb{R}\tilde{Y}$, а каждая из них не гомологична нулю. Поэтому из точной последовательности гомологий получаем равенства

$$\dim H_1(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \dim H_1(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{R}\tilde{Q}; \mathbb{F}_2) = \dim H_1(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{F}_2) - 1.$$

Квадрика $\mathbb{R}\tilde{Q}$ не гомологична нулю на теле $\mathbb{R}\tilde{Y}$, поэтому из точной последовательности получаем

$$\dim H_2(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{R}\tilde{Q}; \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{F}_2).$$

Таким образом, в случае, когда квадрака $\mathbb{R}\tilde{Q}$ является гиперboloидом, выполняется равенство

$$\dim H_*(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \dim H_*(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{F}_2) - 1. \quad (2.2)$$

Пусть теперь квадрака $\mathbb{R}\tilde{Q}$ является эллипсоидом. Тогда из точной последовательности вытекают равенства

$$\dim H_1(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \dim H_1(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{F}_2), \quad \dim H_2(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{F}_2) - 1.$$

Следовательно, и в этом случае справедливо равенство (2.2).

Покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Вещественное алгебраическое многообразие (V_0, τ) тогда и только тогда будет M -многообразием, когда вещественная алгебраическая кривая (C, τ) является M -кривой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо проверить, что выполнение равенства

$$\dim H_*(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \dim H_*(V_0, \mathbb{F}_2)$$

равносильно выполнению равенства

$$\dim H_*(\mathbb{R}C, \mathbb{F}_2) = \dim H_*(C, \mathbb{F}_2).$$

Поскольку $\dim H_*(V_0, \mathbb{F}_2) = 13$, $\dim H_*(C, \mathbb{F}_2) = 10$, то нужно показать, что выполнение равенства

$$\dim H_*(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = 13$$

равносильно выполнению равенства

$$\dim H_*(\mathbb{R}C, \mathbb{F}_2) = 10.$$

Из соотношения (2.2) имеем

$$\dim H_*(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \dim H_*(\mathbb{R}C, \mathbb{F}_2) + 3,$$

откуда вытекает утверждение о равносильности равенств. Предложение доказано.

Если кубика (V_0, τ) является M -многообразием, то гомоморфизм

$$\tau_*: H_q(V_0, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_q(V_0, \mathbb{F}_2) \quad (2.3)$$

будет тождественным отображением для каждого q . Это общее свойство M -многообразий. Для произвольной кубики (V_0, τ) гомоморфизм (2.3) всегда будет тождественным отображением при $q \neq 3$. Если же он будет тождественным отображением и при $q = 3$, то гомоморфизм

$$\tau_*: H_1(C, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(C, \mathbb{F}_2)$$

будет тождественным отображением. Поэтому из предложения 2.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если гомоморфизм (2.3) будет тождественным отображением при $q = 3$, то особая кубика (V_0, τ) становится M -многообразием.

Заметим, что аналогичное утверждение справедливо и для неособой кубики (V, τ) (см., например, [7]).

Далее мы опишем поверхность Фано $F_0 = F_{V_0}$, которая параметризует множество прямых на кубике V_0 . Комплексная поверхность Фано описана в [3], мы будем использовать данное описание. Для этого сохраним все обозначения из § 1. Имеется каноническое вложение $i: C \hookrightarrow F_0$. По определению, если $p \in C$, то $i(p) = \overline{p_0 p}$, где $\overline{p_0 p}$ – прямая в $\mathbb{P}^4$, проходящая через точки p_0, p . Так как прямая $\overline{p_0 p}$ лежит на многообразии V_0 , то $\overline{p_0 p} \in F_0$. Мы будем отождествлять образ вложения $i: C \hookrightarrow F_0$ с кривой C . Существует каноническое регулярное отображение $\lambda: C^{(2)} \rightarrow F_0$. Оно устроено следующим образом. Пусть $p_1 + p_2 \in C^{(2)}$. Проведем через точки $p_1, p_2 \in \mathbb{P}^4$ прямую $\overline{p_1 p_2}$, причем если точки p_1, p_2 совпадают и равны точке p , то прямая $\overline{p_1 p_2}$ – касательная к кривой C в точке p . Через точку p_0 и прямую $\overline{p_1 p_2}$ проведем плоскость $\overline{p_0 p_1 p_2} \subset \mathbb{P}^4$. Эта плоскость пересекает кубик V_0 по трем прямым, две из них – это прямые $\overline{p_0 p_1}, \overline{p_0 p_2}$ (если $p_1 = p_2 = p$, то плоскость $\overline{p_0 p_1 p_2}$ касается многообразия V_0 по прямой $\overline{p_0 p}$), а третью прямую обозначим через $\lambda(p_1, p_2)$. Построенное отображение $\lambda: C^{(2)} \rightarrow F_0$ обладает следующими свойствами:

- 1) отображение $\lambda: C^{(2)} \setminus \lambda^{-1}(C) \rightarrow F_0 \setminus C$ является изоморфизмом;
- 2) прообраз $\lambda^{-1}(C)$ кривой C состоит из двух непересекающихся кривых C', C'' , причем отображения $\lambda: C' \rightarrow C$, $\lambda: C'' \rightarrow C$ являются изоморфизмами;
- 3) кривые C', C'' совпадают с одноименными кривыми, рассмотренными в § 1, причем обратные отображения к отображениям $\lambda: C' \rightarrow C$, $\lambda: C'' \rightarrow C$ совпадают с отображениями $\lambda': C \rightarrow C'$, $\lambda'': C \rightarrow C''$;
- 4) кривая $C \subset F_0$ является обыкновенной двойной кривой и обратное рациональное отображение $\lambda^{-1}: F_0 \dashrightarrow C^{(2)}$ – это нормализация поверхности F_0 .

Таким образом, поверхность Фано F_0 получается из симметрического квадрата $C^{(2)}$ с помощью отождествления кривых C', C'' , которое производится с помощью отображения

$$\lambda'' \circ (\lambda')^{-1}: C' \rightarrow C''.$$

Группа гомологий $H_*(F_0, \mathbb{Z})$ свободная (см., например, [9]), и выполняются равенства (см. [3])

$$H_0(F_0, \mathbb{Z}) = H_4(F_0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(F_0, \mathbb{Z}) = H_3(F_0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^9, \quad H_2(F_0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{37}.$$

Теперь мы можем описать, как устроена вещественная часть $\mathbb{R}F_0$ поверхности Фано особой кубики. Сначала рассмотрим случай, когда квадрика $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом. В этом случае кривые C', C'' на симметрическом квадрате $C^{(2)}$ не имеют вещественных точек, причем $\tau(C') = C''$. Поэтому выполняется равенство $\mathbb{R}F_0 = \mathbb{R}C^{(2)} \sqcup \mathbb{R}C$. В случае, когда квадрика $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом, будем применять предложение 1.10. Тогда после склейки кривых $\Gamma'_i, \Gamma''_i \subset T_{0i}$, $i = 1, \dots, 4$, из них получится двойная кривая $\Gamma_i \subset \mathbb{R}C \subset \mathbb{R}F_0$, а из двух цилиндров $\Pi'_i, \Pi''_i \subset T_{0i}$ образуются два тора T'_i, T''_i , пересекающихся по кривой Γ_i . Возникнут именно торы, так как склейка происходит с сохранением ориентаций

гомологичных кривых Γ'_i, Γ''_i . Каждый тор T_{0i} , $i = 1, \dots, 4$, преобразуется в поверхность $\bar{T}_{0i}$ с трансверсальным самопересечением по кривой Γ_i . После склейки кривых $\Gamma'_0, \Gamma''_0 \subset \Pi$ из них получается двойная кривая $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}C \subset \mathbb{R}F_0$, а из поверхностей $\Pi', \Pi'' \subset \Pi$ – две поверхности Π_1, Π_2 , пересекающиеся по кривой Γ_0 . Поверхность Π_1 образуется из цилиндра Π' склейкой его двух краев Γ'_0, Γ''_0 согласно их ориентации, поэтому поверхность Π_1 будет тором. Поверхность Π_2 образуется из неориентируемой поверхности Π'' склейкой ее двух краев Γ'_0, Γ''_0 также согласно их ориентации. Поскольку поверхность Π'' имеет род 3, то поверхность Π_2 гомеоморфна ${}_5S^2$. Из всей поверхности Π после склейки получится поверхность $\bar{\Pi}$ с трансверсальным самопересечением по кривой Γ_0 . Таким образом, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть (C, τ) – M -кривая; тогда справедливы утверждения:

- 1) если квадра $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом, то вещественная часть $\mathbb{R}F_0$ поверхности Фано F_0 гомеоморфна несвязной сумме $\mathbb{R}C^{(2)} \sqcup \mathbb{R}C$;
- 2) если квадра $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом, то поверхность $\mathbb{R}F_0$ получается из поверхности $\mathbb{R}C^{(2)}$ склейкой кривых $\mathbb{R}C', \mathbb{R}C''$ с помощью отображения

$$\lambda''_{\mathbb{R}} \circ (\lambda'_{\mathbb{R}})^{-1}: \mathbb{R}C' \rightarrow \mathbb{R}C''.$$

После склейки кривых $\Gamma'_i, \Gamma''_i \subset T_{0i}$, $i = 1, \dots, 4$, из них получается двойная кривая $\Gamma_i \subset \mathbb{R}C \subset \mathbb{R}F_0$, а из тора T_{0i} получается поверхность $\bar{T}_{0i}$ с трансверсальным самопересечением по кривой Γ_i , причем поверхность $\bar{T}_{0i}$ состоит из двух топологических торов T'_i, T''_i , пересекающихся по Γ_i . После склейки кривых $\Gamma'_0, \Gamma''_0 \subset \Pi$ из них получается двойная кривая $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}C \subset \mathbb{R}F_0$, а из поверхности Π – поверхность $\bar{\Pi}$ с трансверсальным самопересечением по кривой Γ_0 , причем поверхность $\bar{\Pi}$ состоит из двух топологических поверхностей Π_1, Π_2 , пересекающихся по кривой Γ_0 , где поверхность Π_1 гомеоморфна тору T^2 , а поверхность Π_2 гомеоморфна неориентируемой поверхности ${}_5S^2$.

Покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Если кривая (C, τ) является M -кривой, то поверхность Фано (F_0, τ) будет M -поверхностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что если квадра $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом, то предложение справедливо. В этом случае выполняется равенство $\mathbb{R}F_0 = \mathbb{R}C^{(2)} \sqcup \mathbb{R}C$. Следовательно, имеем равенство для групп гомологий

$$\dim H_*(\mathbb{R}F_0, \mathbb{F}_2) = \dim H_*(\mathbb{R}C^{(2)}, \mathbb{F}_2) + \dim H_*(\mathbb{R}C, \mathbb{F}_2), \quad (2.4)$$

т. е.

$$\dim H_*(\mathbb{R}F_0, \mathbb{F}_2) = 2k^2 + 7,$$

где k – число компонент связности множества $\mathbb{R}C$. С другой стороны, имеем равенство

$$\dim H_*(F_0, \mathbb{F}_2) = 57.$$

Таким образом, равенство

$$\dim H_*(\mathbb{R}F_0, \mathbb{F}_2) = \dim H_*(F_0, \mathbb{F}_2)$$

будет выполняться тогда и только тогда, когда $k = 5$, т.е. когда кривая (C, τ) является M -кривой. Перейдем к случаю, когда квадрика $\mathbb{R}Q$ – гиперboloид. Заметим прежде всего, что достаточно доказать равенство (2.4). Существует длинная точная последовательность гомологий, ассоциированная с отображением $\lambda: \mathbb{R}C^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}F_0$:

$$\dots \rightarrow H_q(\mathbb{R}C, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\Lambda_*} H_q(\mathbb{R}C^{(2)}, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\lambda_*} H_q(\mathbb{R}F_0, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_{q-1}(\mathbb{R}C, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\Lambda_*} \dots, \quad (2.5)$$

где гомоморфизм Λ_* равен разности $(\lambda'_\mathbb{R})_* - (\lambda''_\mathbb{R})_*$. Эта точная последовательность получается из длинной точной последовательности гомологий пары $(W, \mathbb{R}C^{(2)})$, где W – пространство, полученное из $\mathbb{R}C^{(2)}$ приклеиванием к нему цилиндра $\mathbb{R}C \times [0, 1]$: нижнее основание $\mathbb{R}C \times 0$ приклеивается отображением $\lambda'_\mathbb{R}: \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}C^{(2)}$, а верхнее основание $\mathbb{R}C \times 1$ – отображением $\lambda''_\mathbb{R}: \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}C^{(2)}$ (см. построение аналогичной точной последовательности для отображения $\lambda: C^{(2)} \rightarrow F_0$ в [3]). Но в силу предложения 1.9 гомоморфизмы

$$(\lambda'_\mathbb{R})_*, (\lambda''_\mathbb{R})_*: H_q(\mathbb{R}C, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_q(\mathbb{R}C^{(2)}, \mathbb{F}_2)$$

совпадают при любом q . Тогда получим, что гомоморфизмы Λ_* в точной последовательности (2.5) равны нулю, поэтому из этой последовательности будет вытекать равенство (2.4). Следовательно, предложение доказано.

§ 3. Неособая кубика и ее поверхность Фано

Сначала мы изложим идеи доказательства теоремы 0.1. При этом будем использовать эквивариантные когомологии Гротендика $H^q(F, G; \mathbb{F}_2)$, где $G = \{1, \tau\}$ – группа второго порядка. Для них существуют две спектральные последовательности, вторая из которых имеет вид (см. [6])

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(F, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(F, G; \mathbb{F}_2).$$

Если эта спектральная последовательность вырождается и инволюция

$$\tau^*: H^*(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(F, \mathbb{F}_2)$$

тривиальна, то поверхность Фано (F, τ) является M -поверхностью (см., например, [7]). Поскольку множество $\mathbb{R}F$ непустое, то с помощью $\cup$ -умножения и двойственности Пуанкаре устанавливается, что для вырождения второй спектральной последовательности поверхности достаточно обращения в нуль дифференциалов (см., например, [8])

$$d_2^{0,3}: \Pi_2^{0,3} \rightarrow \Pi_2^{2,2}, \quad d_3^{0,3}: \Pi_3^{0,3} \rightarrow \Pi_3^{3,1}.$$

Мы будем использовать несколько утверждений о кольце когомологий поверхности Фано, которые фактически доказаны в [3]. Первое утверждение из [3] формулируется следующим образом.

ЛЕММА 3.1. *Существует канонический изоморфизм пространств когомологий*

$$H^1(F, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H^3(V, \mathbb{F}_2),$$

сохраняющий инволюцию τ^ .*

Второе утверждение из [3] формулируется следующим образом.

ЛЕММА 3.2. *Размерность ядра гомоморфизма $\mathbb{F}_2$ -пространств когомологий*

$$h: \Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(F, \mathbb{F}_2),$$

заданного $\cup$ -произведением, равна 1, причем имеет место разложение

$$H^2(F, \mathbb{F}_2) = h(\Lambda^2 H^1(F, \mathbb{F}_2)) \oplus \mathbb{F}_2 \cdot [K]^*,$$

где K – канонический дивизор.

Третье утверждение из [3] формулируется следующим образом.

ЛЕММА 3.3. *Гомоморфизм пространств когомологий*

$$\Lambda^3 H^1(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(F, \mathbb{F}_2),$$

заданный $\cup$ -произведением, эпиморфен.

Кубика (V, τ) будет M -многообразием тогда и только тогда, когда инволюция

$$\tau^*: H^3(V, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(V, \mathbb{F}_2)$$

тривиальна (см., например, [7]). Поэтому из леммы 3.1 вытекает, что для доказательства теоремы 0.1 достаточно установить следующее утверждение: если инволюция

$$\tau^*: H^1(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(F, \mathbb{F}_2)$$

тривиальна, то поверхность Фано является M -поверхностью. Для доказательства этого утверждения нужно применить леммы 3.2, 3.3. Из них вытекает, что инволюция

$$\tau^*: H^*(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(F, \mathbb{F}_2)$$

тривиальна, а из леммы 3.3 следует, что дифференциалы

$$d_2^{0,3}: \Pi_2^{0,3} \rightarrow \Pi_2^{2,2}, \quad d_3^{0,3}: \Pi_3^{0,3} \rightarrow \Pi_3^{3,1}$$

равны нулю, так как равны нулю дифференциалы

$$d_2^{0,1}: \Pi_2^{0,1} \rightarrow \Pi_2^{2,0}, \quad d_3^{0,1}: \Pi_3^{0,1} \rightarrow \Pi_3^{3,-1}.$$

На этом мы заканчиваем набросок доказательства теоремы 0.1, подробное доказательство изложено в [9]. Перейдем к доказательству теоремы 0.2.

Данная неособая кубика V включается в линейное семейство кубик V_t , $t \in \mathbb{P}^1$, которое представляет собой пучок гиперплоских сечений неособой четырехмерной кубики $Z \subset \mathbb{P}^5$, причем особые сечения содержат только одну простую двойную точку, а других особых точек нет. Это семейство образовано сечениями гиперплоскостей, проходящих через фиксированное трехмерное проективное пространство $R \subset \mathbb{P}^5$. Если исходная кубика V вещественная, то существует вещественное линейное семейство V_t , содержащее данную кубику. Отсюда следует, что оно определено над полем вещественных чисел, а поэтому имеется отображение комплексного сопряжения $\tau: V_t \rightarrow V_{\tau(t)}$. В частности, если точка t вещественная, т. е. $t \in \mathbb{RP}^1$, то кубика V_t вещественная, а также справедливо обратное утверждение. Мы можем считать, что при $t = 1$ получаем исходную неособую кубику V ,

а ближайшая вещественная особая кубика получается при $t = 0$, где t – аффинная координата на $\mathbb{P}^1$, в противном случае необходимо сделать соответствующую замену координаты t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Если неособая кубика (V, τ) является M -многообразием, то особая кубика (V_0, τ) будет также M -многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку кубика (V, τ) является M -многообразием, то гомоморфизм $\tau_*: H_3(V, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_3(V, \mathbb{F}_2)$ будет тождественным отображением, а нам достаточно показать, что и гомоморфизм $\tau_*: H_3(V_0, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_3(V_0, \mathbb{F}_2)$ является тождественным отображением. Это вытекает из следствия 2.2. Существует непрерывное отображение $\varrho: V \rightarrow V_0$, удовлетворяющее свойствам (см., например, [11], [1]):

- 1) прообраз особой точки p_0 гомеоморфен трехмерной сфере Σ ;
- 2) отображение $\varrho: V \setminus \Sigma \rightarrow V_0 \setminus \{p_0\}$ является гомеоморфизмом;
- 3) отображение $\varrho: V \rightarrow V_0$ эквивариантно, т.е. коммутирует с комплексным сопряжением.

Тогда имеет место короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow H_3(\Sigma, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_3(V, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\varrho_*} H_3(V_0, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0.$$

Из этой точной последовательности вытекает нужное нам утверждение. Предложение доказано.

Сферу $\Sigma \subset V$ будем называть *исчезающей сферой*. Она инвариантна относительно инволюции τ . Выберем такое малое число $0 < \varepsilon < 1$, чтобы многообразия V_t были неособые при $0 < |t| < 2\varepsilon$. Заметим, что многообразия $(V_1, \tau), (V_\varepsilon, \tau)$ эквивариантно диффеоморфны. Обозначим кубики $V_{\pm\varepsilon}$ кратко через $V_\pm$, а исчезающие сферы на них – через $\Sigma_\pm$. Эти сферы можно задать в специальных координатах уравнениями. Пусть $\sigma_R: \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^5$ – σ -процесс с центром в пространстве R , а $\tilde{Z}$ – собственный прообраз четырехмерной кубики Z при этом преобразовании. Тогда четырехмерное многообразие $\tilde{Z}$ образует тотальное многообразие семейства V_t . В окрестности W точки $p_0 \in \tilde{Z}$ существуют голоморфные координаты w_1, w_2, w_3, w_4 такие, что пересечение $V_t \cap W$ задается уравнением

$$\pm w_1^2 \pm w_2^2 \pm w_3^2 \pm w_4^2 = t,$$

где знаки $\pm$ определяются сигнатурой квадратичной формы

$$\sum_{1 \leq k, l \leq 4} a_{kl} y_k y_l,$$

причем координаты

$$w_1 = u_1 + iv_1, \quad w_2 = u_2 + iv_2, \quad w_3 = u_3 + iv_3, \quad w_4 = u_4 + iv_4$$

являются вещественными в обобщенном смысле, т.е. удовлетворяют условию

$$w_k(\tau(p)) = \overline{w_k(p)}, \quad k = 1, \dots, 4,$$

где черта означает комплексное сопряжение. Таким образом, можно считать, что пересечение $V_t \cap W$ задается одним из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} (4, 0) & \quad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = t, \\ (3, 1) & \quad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - w_4^2 = t, \\ (2, 2) & \quad w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 - w_4^2 = t, \\ (1, 3) & \quad w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 - w_4^2 = t, \\ (0, 4) & \quad -w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 - w_4^2 = t, \end{aligned}$$

где нумерация производится с помощью значения сигнатуры, которая состоит из двух чисел, первое означает число плюсов, а второе – минусов. В каждом из этих случаев исчезающая сфера Σ_+ на $V_+ = V_\varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} (4, 0)_+ & \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \varepsilon, \quad v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0, \\ (3, 1)_+ & \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_4^2 = \varepsilon, \quad v_1 = v_2 = v_3 = u_4 = 0, \\ (2, 2)_+ & \quad u_1^2 + u_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \varepsilon, \quad v_1 = v_2 = u_3 = u_4 = 0, \\ (1, 3)_+ & \quad u_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \varepsilon, \quad v_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0, \\ (0, 4)_+ & \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \varepsilon, \quad u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0. \end{aligned}$$

В этих случаях множество вещественных точек Σ_+^T может быть: трехмерной сферой; двумерной сферой; одномерной сферой, т.е. окружностью; нульмерной сферой, т.е. состоять из двух точек; пустым множеством. Соответственно, исчезающая сфера Σ_- на $V_- = V_{-\varepsilon}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} (4, 0)_- & \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \varepsilon, \quad u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0, \\ (3, 1)_- & \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + u_4^2 = \varepsilon, \quad u_1 = u_2 = u_3 = v_4 = 0, \\ (2, 2)_- & \quad v_1^2 + v_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \varepsilon, \quad u_1 = u_2 = v_3 = v_4 = 0, \\ (1, 3)_- & \quad v_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \varepsilon, \quad u_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0, \\ (0, 4)_- & \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \varepsilon, \quad v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0. \end{aligned}$$

В этих случаях множество вещественных точек Σ_-^T может быть: пустым множеством; нульмерной сферой, т.е. состоять из двух точек; одномерной сферой, т.е. окружностью; двумерной сферой; трехмерной сферой.

Если особая точка $p_0 \in V_0$ является изолированной точкой множества вещественных точек $\mathbb{R}V_0$, то вещественная исчезающая сфера $\Sigma_\pm^T$ представляет собой или пустое множество, или совпадает со всей сферой $\Sigma_\pm$. Заметим, что если (V_0, τ) является M -многообразием, то точка p_0 не является изолированной точкой множества вещественных точек $\mathbb{R}V_0$, в этом случае вещественная исчезающая сфера $\Sigma_\pm^T$ представляет собой или две точки, или окружность, или двумерную сферу.

Оказывается, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Если особая кубика (V_0, τ) является M -многообразием, то одна из неособых кубик $(V_{\pm}, \tau)$ будет также M -многообразием, причем другая неособая кубика уже не может быть M -многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть два случая, когда вещественная исчезающая сфера Σ_+^{τ} является двумерной сферой или окружностью. Сначала докажем предложение в случае, когда вещественная исчезающая сфера Σ_+^{τ} является двумерной сферой. Заметим, что тогда квадрика $\mathbb{R}Q$ – эллипсоид. Покажем, что в этом случае многообразие (V_+, τ) является M -многообразием, а многообразие (V_-, τ) не является. Для доказательства первого утверждения рассмотрим спектральную последовательность Лере отображения $\varrho: \mathbb{R}V_+ \rightarrow \mathbb{R}V_0$:

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{R}V_0, R^q \varrho_*(\mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbb{R}V_+, \mathbb{F}_2).$$

Поскольку

$$R^q \varrho_*(\mathbb{F}_2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{при } q = 0, \\ (\mathbb{F}_2)|_{p_0} & \text{при } q = 2, \\ 0 & \text{при } q \neq 0, 2, \end{cases}$$

то выполняются равенства

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) & \text{при } q = 0, \\ \mathbb{F}_2 & \text{при } p = 0, \quad q = 2, \\ 0 & \text{при остальных } p, q. \end{cases}$$

Поверхность $\mathbb{R}\tilde{Q}$ не гомологична нулю на теле $\mathbb{R}\tilde{Y}$, поэтому выполняются равенства

$$H^3(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = H^3(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{R}\tilde{Q}; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2.$$

Следовательно, дифференциал $d_3^{0,2}$ равен нулю, а поэтому

$$\dim H^*(\mathbb{R}V_+, \mathbb{F}_2) = \dim H^*(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) + 1.$$

Тогда из равенств

$$\dim H^*(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \dim H^*(V_0, \mathbb{F}_2), \quad \dim H^*(V_+, \mathbb{F}_2) = \dim H^*(V_0, \mathbb{F}_2) + 1$$

вытекает выполнение требуемого равенства

$$\dim H^*(\mathbb{R}V_+, \mathbb{F}_2) = \dim H^*(V_+, \mathbb{F}_2).$$

Таким образом, в случае, когда множество вещественных точек Σ_+^{τ} является сферой, кубика (V_+, τ) является M -многообразием. Покажем, что в этом случае кубика (V_-, τ) уже не может быть M -многообразием. Аналогично рассмотрим спектральную последовательность Лере для отображения $\varrho: \mathbb{R}V_- \rightarrow \mathbb{R}V_0$. Тогда имеем следующие равенства: $R^q \varrho_*(\mathbb{F}_2) = 0$ при $q > 0$, $R^0 \varrho_*(\mathbb{F}_2) = \mathcal{F}$, где для пучка $\mathcal{F}$ на $\mathbb{R}V_0$ имеет место точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{F}_2|_{p_0} \rightarrow 0.$$

Поэтому имеем равенства для размерностей пространств когомологий:

$$\begin{aligned}\dim H^2(\mathbb{R}V_-, \mathbb{F}_2) &= \dim H^2(\mathbb{R}V_0, \mathcal{F}) \\ &= \dim H^2(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \dim H^2(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{F}_2) - 1 = 5.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dim H^*(\mathbb{R}V_-, \mathbb{F}_2) = 12 < 14 = \dim H^*(V_-, \mathbb{F}_2).$$

Переходим к случаю, когда вещественная исчезающая сфера Σ_+^T является окружностью. Заметим, что тогда Σ_-^T – тоже окружность и рассуждения, которые применялись в предыдущем случае, уже не достаточны. Отметим также, что в этом случае множество вещественных точек $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом. Прежде всего опишем перестройку, с помощью которой из особого многообразия $\mathbb{R}V_0$ получаются неособые многообразия $\mathbb{R}V_\pm$ (см., например, [10]). Удалим из особого многообразия $\mathbb{R}V_0$ точки, удовлетворяющие неравенству

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 < 2r^2,$$

где r – малое положительное число, причем $\varepsilon \ll r$. Полученное многообразие с краем обозначим через M . Так как в окрестности точки $p_0 \in \mathbb{R}V_0$ особое многообразие $\mathbb{R}V_0$ задается в координатах u_1, u_2, u_3, u_4 с помощью уравнения $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0$, то край многообразия M является тором T , заданным системой уравнений

$$\begin{aligned}u_1^2 + u_2^2 &= r^2, \\ u_3^2 + u_4^2 &= r^2.\end{aligned}$$

Обозначим через $T_\pm$ полнотории в пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами u_1, u_2, u_3, u_4 , заданные соответственно системами

$$\begin{aligned}T_+ : \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = r^2 \\ u_3^2 + u_4^2 \leq r^2, \end{cases} \\ T_- : \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 \leq r^2 \\ u_3^2 + u_4^2 = r^2. \end{cases}\end{aligned}$$

Тогда многообразия $\mathbb{R}V_\pm$ гомеоморфны топологическим многообразиям, которые получаются из многообразия с краем M с помощью объединения соответственно с полноторием $T_\pm$. Полученные из M с помощью объединения с полноториями топологические многообразия будем обозначать через $M_\pm$. Заметим, что они получаются из особого многообразия $\mathbb{R}V_0$ заменой конуса

$$K : \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \leq 2r^2 \\ u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0 \end{cases}$$

полноториями $T_{\pm}$. При отождествлении многообразий $\mathbb{R}V_{\pm}$ с топологическими многообразиями $M_{\pm}$ вещественные исчезающие сферы $\Sigma_{\pm}^{\tau}$ отождествляются с окружностями

$$S_+^1 : \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = r^2 \\ u_3 = u_4 = 0, \end{cases}$$

$$S_-^1 : \begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3^2 + u_4^2 = r^2. \end{cases}$$

Необходимо показать, что один из классов гомологий

$$[\Sigma_+^{\tau}] \in H_1(\mathbb{R}V_+, \mathbb{F}_2), \quad [\Sigma_-^{\tau}] \in H_1(\mathbb{R}V_-, \mathbb{F}_2)$$

равен нулю, а другой не равен. Если применить произведенные отождествления, то достаточно проверить, что один из классов гомологий

$$[S_+^1] \in H_1(M_+, \mathbb{F}_2), \quad [S_-^1] \in H_1(M_-, \mathbb{F}_2)$$

равен нулю, а другой не равен. Введем еще две окружности на крае многообразия M

$$s_1 : \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = r^2 \\ u_3 = r, u_4 = 0, \end{cases}$$

$$s_2 : \begin{cases} u_1 = r, u_2 = 0 \\ u_3^2 + u_4^2 = r^2. \end{cases}$$

Эти окружности лежат на торе T и задают образующие группы $H_1(T, \mathbb{F}_2)$. Тор T является общей границей полноториев $T_{\pm}$, причем окружность s_1 является параллелью полнотория T_+ и меридианом полнотория T_- , а окружность s_2 является параллелью полнотория T_- и меридианом полнотория T_+ . Поэтому равенство нулю класса гомологий $[S_+^1] \in H_1(M_+, \mathbb{F}_2)$ равносильно равенству нулю класса гомологий $[s_1] \in H_1(M, \mathbb{F}_2)$, а равенство нулю класса гомологий $[S_-^1] \in H_1(M_-, \mathbb{F}_2)$ равносильно равенству нулю класса гомологий $[s_2] \in H_1(M, \mathbb{F}_2)$. Следовательно, нам достаточно показать, что один из классов гомологий $[s_1], [s_2] \in H_1(M, \mathbb{F}_2)$ равен нулю, а другой не равен. Тогда соответственно один из классов гомологий

$$[S_+^1] \in H_1(M_+, \mathbb{F}_2), \quad [S_-^1] \in H_1(M_-, \mathbb{F}_2)$$

будет равен нулю, а другой не равен. Для проверки этого утверждения рассмотрим длинную точную гомологическую последовательность пары (M, T)

$$0 \rightarrow H_2(M, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_2(M, T; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(T, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(M, \mathbb{F}_2) \rightarrow \dots$$

Заметим теперь, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} \dim H_2(M, T; \mathbb{F}_2) &= \dim H_2(\mathbb{R}V_0, \{p_0\}; \mathbb{F}_2) \\ &= \dim H_2(\mathbb{R}V_0, \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{F}_2) = 6, \end{aligned}$$

а так как класс гомологий $[\mathbb{R}\tilde{Q}] \in H_2(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{F}_2)$ не равен нулю, то выполняются следующие равенства:

$$\dim H_2(M, \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{R}V_0 \setminus \{p_0\}, \mathbb{F}_2) = \dim H_2(\mathbb{R}\tilde{Y} \setminus \mathbb{R}\tilde{Q}, \mathbb{F}_2) = 5.$$

Поэтому из точной последовательности следует, что линейно зависимы элементы $[s_1], [s_2] \in H_1(M, \mathbb{F}_2)$, причем имеется только одно соотношение. В принципе, таким соотношением может быть только одно из следующих:

$$[s_1] = 0, \quad [s_2] = 0, \quad [s_1] + [s_2] = 0.$$

Мы должны показать, что третье соотношение не выполняется. Для доказательства этого утверждения прежде всего заметим, что имеется каноническое отображение

$$\pi: T \rightarrow \mathbb{R}\tilde{Q},$$

которое является двулиственным накрытием. Оно устроено следующим образом. Квадрика $\mathbb{R}\tilde{Q}$ – это множество прямых, удовлетворяющих однородному уравнению

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 = 0.$$

Если теперь $u \in T$, то прямая $\overline{Ou}$ определяет точку $\pi(u) \in \mathbb{R}\tilde{Q}$. Непосредственно проверяются равенства

$$\pi_*([s_1]) = [l'] + [l''], \quad \pi_*([s_2]) = [l'] + [l''].$$

Заметим также, что $\pi^{-1}(\pi(u)) = \pm u$, поэтому если на краю многообразия M , т. е. на торе T , произвести отождествление симметричных точек, т. е. отождествить точки $\pm u \in T$, то получим пару топологических пространств, гомеоморфную паре $(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{R}\tilde{Q})$. Будем обозначать полученную пару пространств через $(\bar{M}, \bar{T})$. Заметим, что имеется канонический гомеоморфизм $\mathbb{R}\tilde{Q} \xrightarrow{\sim} \bar{T}$, который продолжается до гомеоморфизма пар $(\mathbb{R}\tilde{Y}, \mathbb{R}\tilde{Q}) \xrightarrow{\sim} (\bar{M}, \bar{T})$. Естественное отображение пар $(M, T) \rightarrow (\bar{M}, \bar{T})$, индуцированное отождествлением точек, задает коммутативную диаграмму из точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc} H_2(M, T; \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(T, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(M, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(M, T; \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \approx & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \approx & & \\ H_2(\bar{M}, \bar{T}; \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(\bar{T}, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(\bar{M}, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H_1(\bar{M}, \bar{T}; \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Пусть $\bar{l}', \bar{l}''$ – кривые на торе $\bar{T}$, которые являются образами прямых l', l'' на квадрике $\mathbb{R}\tilde{Q}$ при каноническом отображении $\mathbb{R}\tilde{Q} \rightarrow \bar{T}$. Тогда каждый класс гомологий $[s_1], [s_2]$ при гомоморфизме $H_1(T, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(\bar{T}, \mathbb{F}_2)$ отображается в класс гомологий $[\bar{l}'] + [\bar{l}'']$. Так как прямые l', l'' гомологичны друг другу на многообразии $\mathbb{R}\tilde{Y}$, а сами не гомологичны нулю, то класс гомологий $[\bar{l}'] + [\bar{l}''] \in H_1(\bar{M}, \mathbb{F}_2)$ равен нулю, а классы гомологий $[\bar{l}'], [\bar{l}''] \in H_1(\bar{M}, \mathbb{F}_2)$ не равны нулю. Поэтому класс гомологий $[\bar{l}'] + [\bar{l}''] \in H_1(\bar{T}, \mathbb{F}_2)$ лежит в образе гомоморфизма $H_2(\bar{M}, \bar{T}; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(\bar{T}, \mathbb{F}_2)$. Тогда из коммутативной диаграммы вытекает, что класс гомологий $[s_1] + [s_2] \in H_1(T, \mathbb{F}_2)$ не может лежать в образе гомоморфизма $H_2(M, T; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(T, \mathbb{F}_2)$, следовательно, соотношение $[s_1] + [s_2] = 0$ не выполняется. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Из доказательства предложения 3.5 видно, когда при выполнении условий предложения кубика (V_+, τ) будет M -многообразием, а именно справедливы следующие утверждения:

- 1) если квадрака $\mathbb{R}Q$ – эллипсоид и исчезающая сфера Σ_+^τ двумерная, то кубика (V_+, τ) всегда будет M -многообразием;
- 2) если квадрака $\mathbb{R}Q$ – гиперboloид и исчезающая окружность Σ_+^τ не гомологична нулю, то кубика (V_+, τ) будет M -многообразием; исчезающая окружность Σ_+^τ не гомологична нулю, если топологическое многообразие V_+ получается из V_0 заменой конуса K на полноторие T_+ таким образом, что окружность s_2 , гомологичная нулю на многообразии с краем $M = V_0 \setminus \overset{\circ}{K}$, становится меридианом полнотория T_+ .

В основе доказательства теоремы 0.2 лежит описание устройства вещественной части $\mathbb{R}F_0$ поверхности Фано особой кубики, изложенное в § 2. Согласно этому описанию поверхность $\mathbb{R}F_0$ получается из поверхности $\mathbb{R}C^{(2)}$ склейкой кривых $\mathbb{R}C'$, $\mathbb{R}C''$ с помощью диффеоморфизма $\lambda''_{\mathbb{R}} \circ (\lambda'_{\mathbb{R}})^{-1}$. Предложение 2.3 показывает, какая после склейки получается поверхность. Из семейства кубик V_t получается семейство поверхностей Фано F_t . В [3] показано, что полное тело, составленное из этих поверхностей, т. е. множество

$$\mathfrak{F} = \{(L, t) \in F_Z \times \mathbb{P}^1 : L \subset V_t\},$$

будет неособым многообразием. Здесь F_Z – многообразие Фано, параметризующее прямые на четырехмерной кубике Z .

Кривые $C', C'' \subset C^{(2)}$ не пересекаются, а классы гомологий $[C'], [C''] \in H_2(C^{(2)}, \mathbb{Z})$ равны в силу следствия 1.4. Обозначим $\pi': N' \rightarrow C'$, $\pi'': N'' \rightarrow C''$ нормальные комплексные расслоения к кривым C', C'' в $C^{(2)}$. Тогда эти расслоения тривиальны в категории дифференцируемых комплексных векторных расслоений, так как индексы пересечений $(C', C') = (C'', C'') = (C', C'')$ равны нулю. Обозначим через N_C нормальное расслоение к C в $\mathfrak{F}$ и покажем, что выполняется равенство

$$N_C = (\lambda')^*(N') \oplus (\lambda'')^*(N'').$$

Расслоения $(\lambda')^*(N')$, $(\lambda'')^*(N'')$ будем обозначать через N'_C , N''_C соответственно, тогда предыдущее равенство запишется следующим образом:

$$N_C = N'_C \oplus N''_C. \quad (3.1)$$

Пусть U', U'' – замкнутые окрестности кривых C', C'' в $C^{(2)}$. Образы этих окрестностей при отображении $\lambda: C^{(2)} \rightarrow F_0$ обозначим через U'_C, U''_C соответственно и назовем *ветвями* поверхности F_0 . Заметим, что C – это кривая самопересечения особой поверхности F_0 , через эту кривую проходят трансверсально две неособые ветви U'_C, U''_C поверхности F_0 , а расслоения N'_C, N''_C являются нормальными расслоениями к кривой C на этих ветвях. Эти ветви трансверсально пересекаются в $\mathfrak{F}$ по кривой C , поэтому выполняется равенство (3.1). Расслоение N_C тривиально в категории дифференцируемых комплексных векторных расслоений,

так как расслоения N'_C, N''_C тривиальны. На расслоении N_C имеется вещественная структура $\varphi: N_C \rightarrow N_C$. Это антилинейная инволюция, которая индуцирована антилинейной инволюцией касательных расслоений $\tau_*: T\mathfrak{F} \rightarrow T\mathfrak{F}$, для нее коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N_C & \xrightarrow{\varphi} & N_C \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\tau} & C. \end{array}$$

Таким образом, пара (N_C, φ) является *вещественным* расслоением в терминологии статьи [2]. Через $\mathbb{R}N_C$ обозначим вещественную часть расслоения N_C , т. е. множество неподвижных точек расслоения N_C относительно инволюции φ . Тогда $\mathbb{R}N_C$ является нормальным расслоением к кривой $\mathbb{R}C$ на теле $\mathbb{R}\mathfrak{F}$.

ЛЕММА 3.7. *Расслоение $\mathbb{R}N_C$ является тривиальным расслоением в категории дифференцируемых вещественных расслоений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда квадра $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом, утверждение леммы следует из равенства

$$\mathbb{R}N_C = \mathbb{R}N'_C \oplus \mathbb{R}N''_C$$

и тривиальности расслоений $\mathbb{R}N'_C, \mathbb{R}N''_C$, тривиальность которых устанавливается так же, как была установлена тривиальность расслоений N'_C, N''_C . Действительно, кривые $\mathbb{R}C', \mathbb{R}C'' \subset \mathbb{R}C^{(2)}$ не пересекаются, а классы гомологий $[\mathbb{R}C']$, $[\mathbb{R}C''] \in H_2(\mathbb{R}C^{(2)}, \mathbb{F}_2)$ равны в силу предложения 1.9.

В случае, когда квадра $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом, мы будем доказывать, что даже вещественное расслоение (N_C, φ) тривиально. Для этого нужно показать, что расслоение (N_C, φ) изоморфно расслоению $(C \times \mathbb{C}^2, \varphi)$, на котором инволюция

$$\varphi: C \times \mathbb{C}^2 \rightarrow C \times \mathbb{C}^2$$

задается правилом $\varphi(p, z) = (\tau(p), \bar{z})$, черта означает комплексное сопряжение. Касательное отображение $\tau_*: T\mathfrak{F} \rightarrow T\mathfrak{F}$ переводит расслоение N'_C на расслоение N''_C , а также расслоение N''_C на расслоение N'_C . Выберем какую-нибудь тривиализацию $\nu': N'_C \rightarrow C \times \mathbb{C}$. Пусть $\theta: C \times \mathbb{C} \rightarrow C \times \mathbb{C}$ – антилинейное отображение, заданное правилом $\theta(p, z) = (\tau(p), \bar{z})$, где черта означает комплексное сопряжение. Тогда в качестве тривиализации расслоения N''_C возьмем отображение $\nu'': N''_C \rightarrow C \times \mathbb{C}$, где $\nu'' = \theta \circ \nu' \circ \tau_*$. Положим теперь $\nu = \sigma \circ (\nu' \oplus \nu'')$, где отображение $\sigma: C \times \mathbb{C}^2 \rightarrow C \times \mathbb{C}^2$ задается правилом $\sigma(p, (z_1, z_2)) = (p, (z_2, z_1))$, т. е. переставляет координаты. Тогда непосредственно проверяется, что отображение $\nu: N_C \rightarrow C \times \mathbb{C}^2$ является искомой тривиализацией. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Вещественное расслоение (N_C, φ) тривиально и в случае, когда квадра $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом.

Из леммы 3.7 вытекает, что замкнутая окрестность кривой $\mathbb{R}C$ на теле $\mathbb{R}\mathfrak{F}$ представляет собой произведение $\mathbb{R}C \times D$, где $D = \{x^2 + y^2 \leq r\}$ – двумерный замкнутый диск. Окрестность $\mathbb{R}C \times D$ кривой $\mathbb{R}C$ является объединением непересекающихся окрестностей $\Gamma_i \times D$ кривых Γ_i , $i = 0, \dots, 4$. Рассмотрим функцию

$f: \mathbb{R}\mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{RP}^1$, заданную правилом $\mathbb{R}\mathfrak{F} \ni (L, t) \mapsto t \in \mathbb{RP}^1$. Ее ограничение на диск $D_p = p \times D$, где $p \in \mathbb{R}C$, имеет единственную невырожденную критическую точку $p = (p, 0)$. Можно выбрать такую замкнутую окрестность кривой Γ_i и построить на ней такую структуру прямого произведения $\Gamma_i \times D$, что функция f на этой окрестности примет вид $f = \pm x^2 \pm y^2$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 0.2. Сначала рассмотрим случай, когда квадрика $\mathbb{R}Q$ является эллипсоидом. Из первой части предложения 2.3 следует, что критическая точка $p = (p, 0) \in D_p$ функции $f|_{D_p}$ является точкой минимума или максимума. Поэтому для всех точек $p \in \Gamma_i$ при фиксированном номере $i = 0, \dots, 4$ пересечение

$$f^{-1}(\varepsilon) \cap D_p = \mathbb{R}F_\varepsilon \cap D_p$$

должно быть или окружностью, или пустым множеством. В первом случае пересечение

$$f^{-1}(\varepsilon) \cap \Gamma_i \times D = \mathbb{R}F_\varepsilon \cap \Gamma_i \times D$$

представляет собой тор, а во втором случае это пересечение является пустым множеством. Таким образом, особая поверхность $\mathbb{R}F_0 = \mathbb{R}C^{(2)} \cup \mathbb{R}C$ перестраивается в неособую поверхность $\mathbb{R}F_\varepsilon$ следующим образом: компоненты из $\mathbb{R}C^{(2)}$ не меняются, а каждая кривая $\Gamma_i \subset \mathbb{R}C$ или заменяется на тор, или исчезает. Поскольку особая и неособая поверхности Фано (F_0, τ) , (F_ε, τ) являются M -поверхностями, то выполняются равенства

$$\begin{aligned} \dim H_*(\mathbb{R}F_0, \mathbb{F}_2) &= \dim H_*(F_0, \mathbb{F}_2) = 57, \\ \dim H_*(\mathbb{R}F_\varepsilon, \mathbb{F}_2) &= \dim H_*(F_\varepsilon, \mathbb{F}_2) = 67. \end{aligned}$$

Следовательно, перестройки должны повысить размерность $\dim H_*(\mathbb{R}F_0, \mathbb{F}_2)$ на 10, а это возможно, только если все перестройки заменяют кривые Γ_i , $i = 0, \dots, 4$, на торы. Поэтому поверхность $\mathbb{R}F$ имеет следующий топологический тип: $\mathbb{R}C^{(2)} \sqcup 5T^2$. Остается заметить, что поверхность $\mathbb{R}C^{(2)}$ гомеоморфна поверхности ${}_5S^2 \sqcup 5T^2$.

Рассмотрим теперь случай, когда квадрика $\mathbb{R}Q$ является гиперboloидом. В этом случае перестройка особой поверхности $\mathbb{R}F_0$ в неособую поверхность $\mathbb{R}F_\varepsilon$ происходит следующим образом. Пересечение $\mathbb{R}F_0 \cap \Gamma_i \times D$ представляет собой произведение кривой Γ_i на крест $\{x^2 - y^2 = 0\} \cap D$. Это произведение заменяется на произведение кривой Γ_i и двух дуг гиперболы $\{x^2 - y^2 = \pm \varepsilon\} \cap D$. Поэтому все торы T_{ij} при $1 \leq i < j \leq 4$ не меняются. Особая поверхность $\bar{T}_{0i}$ с трансверсальным самопересечением по кривой Γ_i , $i = 1, \dots, 4$, может перестроиться двумя способами: или два тора T'_i, T''_i преобразуются в один тор T_{0i} , или расходятся и становятся непересекающимися. Эти преобразования назовем соответственно перестройками *первого* и *второго* типа. Аналогичные перестройки возможны с особой поверхностью $\bar{\Pi}$, которая имеет самопересечение по кривой Γ_0 : или две поверхности Π_1, Π_2 преобразуются в одну поверхность Π , или поверхности Π_1, Π_2 расходятся и становятся непересекающимися. Но так как поверхности Фано (F_0, τ) , (F_ε, τ) являются M -поверхностями, то возможны только перестройки второго типа. Поэтому поверхность $\mathbb{R}F_\varepsilon$ имеет топологический тип ${}_5S^2 \sqcup 15T^2$. Теорема 0.2 полностью доказана.

Список литературы

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотика интегралов. М.: Наука, 1984.
2. Atiyah M. F. *K*-theory and reality // Quart. J. Math. Oxford. 1966. V. 17. № 2. P. 165–193.
3. Clemens C. H., Griffiths P. A. The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Ann. Math. 1972. V. 95. P. 281–356.
4. Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V. Real Enriques surfaces // Lect. Not. Math. V. 1746. N. Y.: Springer-Verlag, 2000.
5. Дегтярев А. И., Звонилов В. И. Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени $(3, 3)$ на квадраках // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 810–815.
6. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
7. Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
8. Краснов В. А. Вещественные алгебраические GM-многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 39–66.
9. Краснов В. А. О поверхности Фано вещественной трехмерной M -кубики // Матем. заметки. 2005. Т. 78. № 5. С. 710–717.
10. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
11. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.

Ярославский государственный университет
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
27.01.2005