Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнёв, Д. В. Падучих, Об одном классе кореберно регулярных графов,
Изв. РАН. Сер. матем., 2005, том 69, выпуск 6, 95–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/im667>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:34:32

УДК 519.14

А. А. Махнёв, Д. В. Падучих

Об одном классе кореберно регулярных графов

Изучаются графы, в которых $\lambda(a, b) = \lambda_1, \lambda_2$ для любого ребра $\{a, b\}$ и любой μ -подграф является 2-кликкой. Получено описание связных реберно регулярных графов при $k \geq (b_1^2 + 3b_1 - 4)/2$. В частности, n -угольник, граф икосаэдра, граф из $MP(6)$ и дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{x, x-1, 4, 1; 1, 2, x-1, x\}$, являющийся антиподальным 3-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $((x+2)(x+3)/6, x, 0, 6)$, подтверждают точность границы $k > b_1(b_1+3)/2$, при которой имеет место сильная регулярность графа.

Библиография: 5 наименований.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i от вершины a в графе Γ . В случае $i = 1$ индекс не пишется, подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиусом 1 и центром a . Для графа Ω через $|\Omega|$ обозначается число вершин в Ω .

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметром 2 называется *сильно регулярным графом*. Граф Γ называется *сильным с параметрами (λ, μ)* , если каждое ребро из Γ лежит точно в λ треугольниках и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем λ -подграфом (μ -подграфом). Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметром d называется *дистанционно регулярным* с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ зависят только от расстояния i между вершинами u, w . Такой граф является регулярным с $k = a_i + b_i + c_i$, где a_i – степень графа $\Gamma_i(u)$. Граф диаметром d

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00046) и Программы фундаментальных исследований отделения математических наук РАН.

называется *антиподальным*, если бинарное отношение, состоящее в том, что пары вершин либо совпадают, либо находятся на расстоянии d , является отношением эквивалентности. *Антиподальным частным графом* Γ' называется факторграф антиподального графа Γ , вершинами которого являются указанные классы эквивалентности, и два класса *смежны*, если некоторая вершина одного класса смежна с вершиной другого. Если все классы эквивалентности состоят из r вершин, то Γ называется r -накрытием графа Γ' .

Для четного натурального числа ω через $MP(\omega)$ обозначим класс реберно регулярных графов Γ с параметрами $b_1 = 3\omega/2 - 3$, $k = \omega^2 - 3\omega/2$, $\lambda = \omega^2 - 3\omega + 2$, $v = \omega^2$, содержащих пару непересекающихся подграфов Ω_1 и Ω_2 , изоморфных $K_{\omega \times \omega/2}$, причем любая вершина из Ω_1 (из Ω_2) несмежна с единственной вершиной в каждой доле из Ω_2 (из Ω_1) и для любого ребра $\{d, e\}$ из Ω_1 подграф $\Gamma - (d^\perp \cup e^\perp)$ является ребром из Ω_2 . Любой граф класса $MP(2)$ состоит из двух изолированных ребер, а граф класса $MP(4)$ изоморфен графу Клебша (сильно регулярному графу с параметрами $(16, 10, 6, 6)$). По аналогии с листом Мёбиуса m -трапом *Мёбиуса* назовем граф, полученный из графа вершин и ребер боковой поверхности m -призмы разрезанием по боковому ребру, поворотом правой стороны на 180° и склеиванием. *Частичным четырехугольником* $PQ(s, t, \mu)$ называется система инцидентности, состоящая из точек и прямых, в которой каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (две прямые пересекаются не более чем в одной точке), для любых двух несмежных вершин пересечение их окрестностей содержит точно μ вершин и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется не более одной прямой, проходящей через a и пересекающей L . Точечный граф частичного четырехугольника $PQ(s, t, \mu)$ сильно регулярен при $k = s(t + 1)$ и $\lambda = s - 1$.

Подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с малыми значениями параметров λ и μ имеют жестко заданное строение. Так, непустой подграф неподвижных точек автоморфизма графа Мура является графом Мура или звездой (см. [1, лемма 1]). Для изучения подграфов неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярных графов с $\mu = 2$ используется следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Δ – граф, в котором $\lambda(a, b) = \lambda_1$ или $\lambda(a, b) = \lambda_2$ для любого ребра $\{a, b\}$, и $[u] \cap [w]$ является 2-кликкой для любых двух несмежных вершин u, w . Тогда либо Δ – сильно регулярный граф, либо выполняются следующие утверждения:

1) граф Δ регулярен степени k , окрестность любой вершины в Δ является объединением x изолированных $(\lambda_1 + 1)$ -клик и y изолированных $(\lambda_2 + 1)$ -клик, число $(\lambda_1 + 2)$ -клик в Δ равно

$$\frac{v(2(v - k - 1) - k(k - \lambda_2 - 1))}{(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + 2)(\lambda_2 - \lambda_1)};$$

2) для связной компоненты Σ графа Λ^1 , определенного на множестве вершин графа Δ , в котором вершины a, b смежны, только если они смежны в Δ и $|[a] \cap [b]| = \lambda_1$, выполняются утверждения:

(i) если $x > 1$, то Σ является вполне регулярным графом с параметрами $(v_\Sigma, x(\lambda_1 + 1), \lambda_1, 2)$;

- (ii) если Σ содержит геодезический 4-путь $abcde$, то $x \geq 4$ и для $u \in \Sigma \cap [a] - \Sigma(a)$ имеем $d_{\Sigma}(a, u) \geq 4$;
- (iii) если $x = 2$, то Σ является $((\lambda_1 + 2) \times (\lambda_1 + 2))$ -решеткой, а если $x = 3$, то Σ является графом диаметра 3;
- (iv) если Σ – сильно регулярный граф, то любая связная компонента графа Λ^1 изоморфна Σ , граф Δ^* , определенный на множестве $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_s\}$ связных компонент графа Λ^1 , $s = v/v_{\Sigma}$, в котором вершины Σ_i и Σ_j смежны, если $j \neq i$, и некоторая вершина из Σ_i смежна с единственной вершиной из Σ_j , является сильно регулярным с параметрами $(s, y(\lambda_2 + 1), \lambda_2 + 2(v_{\Sigma} - k_{\Sigma} - 1), 2v_{\Sigma})$;
- 3) если $y = 1$, то либо $x = 1$ и Δ является $((\lambda_1 + 2) \times (\lambda_2 + 2))$ -решеткой, либо $x > 1$ и выполняются утверждения:
 - (i) множество вершин графа Δ разбивается t кликами $C_1, \dots, C_t$ порядка $\lambda_2 + 2$, где $t = v/(\lambda_2 + 2)$, и граф Δ° , определенный на множестве $\{C_1, \dots, C_t\}$, в котором клики C_i и C_j смежны, если $j \neq i$, и некоторая вершина из C_i смежна с вершиной из C_j , является частичным четырехугольником с параметрами $(t, k - \lambda_2 - 1, \lambda_1, 2\lambda_2 + 4)$;
 - (ii) граф Λ^1 является дистанционно регулярным графом диаметра 4 с массивом пересечений $\{x(\lambda_1 + 1), (x - 1)(\lambda_1 + 1), 2(\lambda_2 + 1), 1; 1, 2, (x - 1)(\lambda_1 + 1), x(\lambda_1 + 1)\}$, и если $\lambda_1 > 0$, то $\lambda_1^2 + 4x(\lambda_1 + 1)$ является квадратом.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для связной компоненты Ω графа Λ^2 , определенного на множестве вершин графа Δ , в котором вершины a, b смежны, только если они смежны в Δ и $|[a] \cap [b]| = \lambda_2$, выполняются утверждения, аналогичные сформулированным в теореме 1. В случае $x = 1$ выполняется аналог утверждения 3), полученный заменой (y, λ_2) на (x, λ_1) и обратной заменой (x, λ_1) на (y, λ_2) .

В [2, теорема 1.4.3] доказано, что если Γ – связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором $\lambda \geq k + 1/2 - \sqrt{2k + 2}$ (равносильно, $k \geq b_1 \times (b_1 + 3)/2 + 1$), то Γ – дополнительный граф для сильно регулярного графа с $\mu \leq 2$. В [3, следствие 2, теорема 2] получено описание связных реберно регулярных графов с $k \geq b_1(b_1 + 3)/2 - 2$. Однако доказательство теоремы 2 в [3] некорректно (допущена ошибка в доказательстве леммы 27), поэтому теорему 2 и следствие 2 из [3] необходимо уточнить.

Приведем новую формулировку теоремы 2 из [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ – связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором $\mu(u, w) = \lambda$ или $\mu(u, w) = k - \gamma$ для любых вершин u, w с $d(u, w) = 2$. Если для каждого ребра $\{a, b\}$ подграф $\Gamma - (a^{\perp} \cup b^{\perp})$ состоит из двух смежных вершин, то выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) диаметр Γ больше 2 и граф Γ получается удалением из полного двудольного графа $K_{k+1, k+1}$ максимального паросочетания;
- 2) граф Γ сильно регулярен;
- 3) для вершины $u \in \Gamma$ подграф $\{w \in \Gamma_2(u) \mid \mu(u, w) = k - \gamma\}$ является полным многодольным графом $K_{y \times s}$, $s = b_1 + 2 - \gamma$, $1 \leq \gamma \leq b_1$, и для графа Λ^1 , определенного на множестве вершин графа Γ , в котором две вершины a, b смежны, только если они несмежны в Γ и $\mu(a, b) = \lambda$, верны утверждения:

- (i) если $y = 1$, то Λ^1 является дистанционно регулярным графом диаметра 4 с массивом пересечений $\{x, x-1, 2s, 1; 1, 2, x-1, x\}$, где $x = b_1 + 2 - ys$, множество вершин графа Γ разбивается t кокликами $C_1, \dots, C_t$ (антиподальными классами) порядка $s+1$, где $t = v/(s+1)$, и антиподальное частное Γ' является частичным четырехугольником с параметрами $(t, b_1 + 2 - s, 0, 2s + 2)$;
- (ii) если граф Λ^1 имеет связную компоненту диаметра 2, то каждая его связная компонента является сильно регулярным графом с параметрами $((x^2 + x + 2)/2, x, 0, 2)$, где $x = b_1 + 2 - ys = t^2 + 1$ для некоторого t , не кратного 4, и граф Γ^* , определенный на множестве $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_l\}$ связных компонент графа Λ^1 , $l = 2v/(x^2 + x + 2)$, в котором вершины Σ_i и Σ_j смежны, если $j \neq i$, и некоторая вершина из Σ_i смежна с единственной вершиной из Σ_j , является сильно регулярным с параметрами $(l, rs, s - 1 + x(x-1)/2, x^2 + x + 2)$.

Если выполняется утверждение 3), (i) и Γ' является полным двудольным графом, то $\Gamma \in \text{MP}(\omega)$, $\omega \geq 6$, $b_1 = 3\omega/2 - 3$, $k = \omega^2 - 3\omega/2$, $s = \omega/2 - 1$ и $v = \omega^2$.

Приведем скорректированную формулировку следствия 2 из [3].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Γ – неполный связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) . Если $\lambda \geq k + 1/2 - \sqrt{2k + 8}$ (равносильно, $2k \geq b_1^2 + 3b_1 - 4$), то выполнено одно из трех следующих утверждений:

1) граф Γ является n -угольником, $n \geq 6$, тривалентным графом без треугольников, реберным графом тривалентного графа без треугольников, графом икосаэдра, треугольным графом $T(6)$ или графом Клебша (во всех этих графах $b_1 \leq 3$);

2) граф Γ является дополнительным к сильно регулярному графу с $\bar{\mu} \leq 2$;

3) либо граф Γ принадлежит $\text{MP}(\omega)$, $\omega = 6, 8$, либо для графа $\Delta = \bar{\Gamma}$ выполняется одно из следующих утверждений:

(i) граф Δ разбивается дополнительными графами для 4-трапов Мёбиуса $\Phi_1, \dots, \Phi_r$, где $r = v/8$, и граф Δ^* на множестве вершин $\{\Phi_1, \dots, \Phi_r\}$, в котором вершины Φ_i и Φ_j смежны, если некоторая вершина из Φ_i смежна с вершиной из Φ_j в графе Δ , является сильно регулярным с параметрами $(v/8, t^2 - 9, 6, 16)$ и $t = 12, 36$;

(ii) граф Δ разбивается (3×3) -решетками $\Omega_1, \dots, \Omega_s$, где $s = v/9$, и граф Δ° на множестве вершин $\{\Omega_1, \dots, \Omega_s\}$, в котором вершины Ω_i и Ω_j смежны, если некоторая вершина из Ω_i смежна с вершиной из Ω_j в графе Δ , является сильно регулярным с параметрами $(v/9, t^2 - 7, 8, 18)$ и $t = 7, 14, 28$;

(iii) граф Λ на множестве вершин графа Δ , в котором вершины u и w смежны, если они смежны в Δ и $|\Delta(u) \cap \Delta(w)| = 0$, – дистанционно регулярный граф диаметра 4, либо имеющий массив пересечений $\{136, 135, 6, 1; 1, 2, 135, 136\}$ и являющийся антиподальным 4-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(2432, 136, 0, 8)$, либо имеющий массив пересечений $\{x, x-1, 4, 1; 1, 2, x-1, x\}$ и являющийся антиподальным 3-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $((x+2)(x+3)/6, x, 0, 6)$.

В случае $k = (b_1^2 + 3b_1)/2$ условиям следствия удовлетворяют n -угольник, граф икосаэдра, граф из $\text{MP}(6)$ и дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{x, x-1, 4, 1; 1, 2, x-1, x\}$, являющийся антиподальным 3-накрытием

сильно регулярного графа с параметрами $((x+2)(x+3)/6, x, 0, 6)$, которые подтверждают точность границы $k > b_1(b_1+3)/2$, влекущей сильную регулярность графа.

Отметим, наконец, что в лемме 5 получено описание связных вполне регулярных графов с параметрами $(v, 6, 1, 2)$.

§ 1. Предварительные результаты

В настоящем параграфе помещены вспомогательные леммы, используемые при доказательстве теорем 1, 2 и следствия. Леммы 4 и 5 имеют также самостоятельное значение.

ЛЕММА 1. Пусть Γ – сильно регулярный граф, имеющий параметры (v, k, λ, μ) . Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n - t$, $-t$ графа Γ – целые числа, где $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$, $n - \lambda + \mu = 2t$ и кратность собственного значения $n - t$ равна $k(t-1)(k+t)/(\mu n)$. Далее, если t – целое число, большее 1, то $t-1$ делит $k - \lambda - 1$ и

$$\mu = \lambda + 2 + (t-1) - \frac{k - \lambda - 1}{t-1}, \quad n = t-1 + \frac{k - \lambda - 1}{t-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [3, лемма 1.3].

ЛЕММА 2. Пусть сильно регулярный граф Γ с параметрами (v, k, λ, μ) и собственными значениями $k = \theta_0 > \theta_2 > \theta_4$ имеет r -накрытие Δ , являющееся дистанционно регулярным графом диаметра 4. Тогда корни θ_1 и θ_3 квадратного уравнения $x^2 - \lambda x - k = 0$ – это два новых собственных значения Δ кратностей $m_1 = v(r-1)\theta_3/(\theta_3 - \theta_1)$ и $m_3 = v(r-1) - m_1$, в частности $\lambda = 0$ или $\lambda^2 + 4k$ является квадратом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [2, следствие 4.2.5].

ЛЕММА 3. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, являющийся антиподальным r -накрытием n -клики. Тогда $n-2-\lambda = (r-1)\mu$ и Γ имеет новые собственные значения θ и τ , являющиеся корнями квадратного уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - (n-1) = 0$, и кратность θ есть

$$m_\theta = \frac{n(n-1)(r-1)}{n-1+\theta^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [2, следствие 4.2.6].

ЛЕММА 4. Пусть Γ – связный граф, в котором $[u] \cap [w]$ является 2-кликкой для любых двух несмежных вершин u, w . Тогда граф Γ регулярен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a, b – смежные вершины из Γ . Положим $A = [a] - b^\perp$, $B = [b] - a^\perp$. Для любой вершины $x \in A$ подграф $[x] \cap [b]$ содержит a и единственную вершину x' из B . Обратно, $[x'] \cap [a]$ содержит b и единственную вершину x

из A . Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между A и B . Отсюда

$$k_a = 1 + \lambda(a, b) + |A| = 1 + \lambda(a, b) + |B| = k_b.$$

Ввиду связности графа получим, что Γ является регулярным графом степени k .

ЛЕММА 5. Пусть Ω – вполне регулярный граф диаметра 3 с параметрами $(v, 6, 1, 2)$. Тогда для любой вершины $a \in \Omega$ подграф $\Omega_3(a)$ содержит единственную вершину b , $|\Omega| = 20$ и $\Omega_2(a) \cap \Omega_2(b)$ является объединением двух изолированных треугольников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вершины $a \in \Omega$ получим $|[a]| = 6$, $|\Omega_2(a)| = 12$ и каждая вершина из $[a]$ смежна с двумя ребрами из $\Omega_2(a)$. Далее, $\Omega_3(a) \cap [c]$ является i -кликкой, $i \leq 2$, для любой вершины $c \in \Omega_2(a)$. В частности, подграф $\Omega_3(a)$ является μ -замкнутым, и по лемме 4 подграф $\Omega_3(a)$ регулярен.

Пусть $d \in \Omega_3(a)$ и $b \in [a] \cap \Omega_2(d)$. Тогда $[b] \cap [d]$ содержит две несмежные вершины s, s' , причем s, s' смежны с разными вершинами f, f' из $[a] - \{b\}$. Если степень d в графе $\Omega_3(a)$ не меньше 3, то $[f] \cap [f']$ содержит единственную вершину g из $[d]$ и $[d] \cap \Omega_3(a)$ является 3-кликкой.

Если $\Omega_3(a)$ – граф степени 3, то $\Omega_3(a)$ – куб и $v = 27$. Пусть $b \in \Omega_3(a)$, $\{c_1, c_2, c_3\} = [b] \cap \Omega_3(a)$, и для $x \in \Omega_3(a)$ через x^* обозначим антипод x в графе $\Omega_3(a)$. Тогда $\Omega_2(a) \cap [b] = \{d_1, d_2, d_3\}$, причем можно считать, что d_i смежна с c_i . Положим $\Omega_2(a) \cap [c_i] = \{d_i, e_i\}$. Тогда $[b] \cap [c_i^*]$ содержит две вершины из $\Omega_3(a)$, поэтому $[c_2] \cap [c_1^*]$ содержит вершину e_2 . Аналогично, $[c_2] \cap [c_3^*]$ содержит вершину e_2 . Противоречие с тем, что $[e_2]$ содержит три вершины из $\Omega_3(a)$.

Если $\Omega_3(a)$ – граф степени 2 и для некоторой вершины $b \in \Omega_3(a)$ подграф $\Omega_3(a) \cap [b]$ содержит несмежные вершины d, e , то $\Omega_3(a)$ является четырехугольником и $v = 23$. Пусть $[a]$ содержит три ребра $\{b_1, b_2\}$, $\{b_3, b_4\}$ и $\{b_5, b_6\}$. Через c_{ij} обозначим вершину из $\Omega_2(a)$, смежную с b_i, b_j . Без ограничения общности, $\{a, b_3, b_5, c_{35}\} = \Omega_3(e)$ и $\Omega_2(a) \cap [d]$ содержит ребро $\{c_{16}, c_{24}\}$ и вершины c_{14}, c_{26} . Число 2-путей с началом c_{35} и концом в $\Omega_2(a) \cap [d]$ равно 8. Если $[c_{35}] \cap \Omega_3(a) = \{e\}$, то все указанные пути лежат в $\Omega_2(a)$ и некоторая вершина x из $\Omega_2(a) \cap [c_{35}]$ смежна с тремя вершинами из $\Omega_2(a) \cap [d]$. Если же $|[c_{35}] \cap \Omega_3(a)| = 2$, то три из этих путей пересекают $\Omega_3(a)$, но $|\Omega_2(a) \cap [c_{35}]| = 2$ и снова некоторая вершина x из $\Omega_2(a) \cap [c_{35}]$ смежна с тремя вершинами из $\Omega_2(a) \cap [d]$. В любом случае имеем противоречие с тем, что степень вершины x в $\Omega_2(a)$ не больше 3.

Допустим, что $\Omega_3(a)$ содержит две вершины d, e , находящиеся на расстоянии 3 в Ω . Если $\Omega_3(a)$ – граф степени 1, то для $d' \in [d] \cap \Omega_3(a)$ подграф $[d] \cup [d']$ содержит девять вершин из $\Omega_2(a)$. Противоречие с тем, что одна из этих вершин смежна с e . Значит, $\Omega_3(a)$ – клика, $\Omega_2(a) = [d] \cup [e]$, и $v = 21$. Если Ω является дистанционно регулярным антиподальным 3-накрытием 7-клики, то по лемме 3 граф Ω имеет собственные значения θ и τ такие, что $\theta + \tau = -1$, $\theta\tau = -6$. Отсюда $\theta = -3$ и $\tau = 2$. Далее, кратность θ равна $(7 \cdot 6 \cdot 2)/(6 + 9)$. Противоречие. Значит, можно считать, что для некоторой вершины $b \in [a]$ подграф $\Omega_3(b) = \{f, g\}$ является кликой. Тогда для $c \in [f] \cap [g]$ подграф $\Omega_3(c)$ является 2-кликкой из $[b]$. Если $\Omega_2(b) \cap [c] = \{u, w\}$, то $[u] \cap [w]$ не пересекает $[b]$. Тогда $[u] \cap [w]$ содержит вершину h из $[f] \cup [g]$. Противоречие с тем, что $\mu(h, c) = 3$.

Итак, $\Omega_3(a)$ является кликой. Если $\Omega_3(a) = \{d\}$, то $\Omega_2(a) \cap \Omega_2(d)$ является регулярным графом степени 2 на шести вершинах. Если $\Omega_2(a) \cap \Omega_2(d)$ является шестиугольником, то этот подграф будет геодезическим в Ω . Поэтому в $\Omega_2(a) \cap \Omega_2(d)$ имеется шесть пар вершин, находящихся на расстоянии 2. Противоречие с тем, что каждая вершина из $[a] \cup [d]$ смежна с одной из указанных пар. Итак, в случае $|\Omega_3(a)| = 1$ выполняется утверждение леммы.

Допустим, что $\Omega_3(a) = \{d, e\}$. Тогда $[d] \cap [e]$ содержит вершину c из $\Omega_2(a)$ и $|\Omega_2(a) - ([d] \cup [e])| = 3$. Заметим, что вершина из $\Omega_2(a)$ попадает в треугольник из $\Omega_2(a)$ тогда и только тогда, когда она не смежна с вершинами из $\Omega_3(a)$. Поэтому вершины из $\Omega_2(a) - ([a] \cup [b])$ образуют треугольник. Противоречие с тем, что вершина c смежна с двумя вершинами этого треугольника.

Допустим, что $\Omega_3(a)$ содержит треугольник $\{d, e, f\}$. Тогда каждая вершина из $\Omega_2(a)$ смежна с единственной вершиной из $\{d, e, f\}$ и $\Omega_2(a)$ – граф без треугольников степени 3 на 12 вершинах. В этом случае граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{6, 4, 1; 1, 2, 4\}$ на 22 вершинах. В силу [2, предложение 5.6.3] граф Ω является обобщенным нечетным графом, т.е. дистанционно регулярным графом диаметра d с $a_1 = \dots = a_{d-1} = 0$ и $a_d \neq 0$. Противоречие. Лемма доказана.

§ 2. Графы с двумя значениями λ , в которых μ -подграфы являются 2-кликками

Все утверждения настоящего параграфа получены при предположении, что Δ – связный граф, в котором $[u] \cap [w]$ является 2-кликкой для любых двух несмежных вершин u, w и $\lambda(a, b) = \lambda_1, \lambda_2$ для любого ребра $\{a, b\}$, $\lambda_1 < \lambda_2$ (если $\lambda_1 = \lambda_2$, то по теореме Боуза–Дулинга [2, предложение 1.1.2] граф Δ является сильно регулярным). По лемме 4 граф Δ регулярен степени k .

Максимальную клику из Δ порядка $\lambda_1 + 2$ (порядка $\lambda_2 + 2$) назовем *тонкой* (*толстой*). Аналогично, ребро графа Δ , лежащее в максимальной тонкой (толстой) клике, назовем *тонким* (*толстым*).

ЛЕММА 6. *Выполняются следующие утверждения:*

- 1) *окрестность любой вершины графа Δ разбивается x кликами порядка $\lambda_1 + 1$ и y кликами порядка $\lambda_2 + 1$;*
- 2) $x = (2(v - k - 1) - k(k - \lambda_2 - 1)) / ((\lambda_1 + 1)(\lambda_2 - \lambda_1))$, $y = (2(v - k - 1) - k(k - \lambda_1 - 1)) / ((\lambda_2 + 1)(\lambda_1 - \lambda_2))$;
- 3) *число тонких клик в Δ равно*

$$\frac{v(2(v - k - 1) - k(k - \lambda_2 - 1))}{(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + 2)(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что окрестность любой вершины в графе Δ является объединением изолированных $(\lambda_1 + 1)$ - и $(\lambda_2 + 1)$ -клик. Пусть $a \in \Delta$, $[a]$ является объединением x изолированных $(\lambda_1 + 1)$ - и y изолированных $(\lambda_2 + 1)$ -клик. Тогда $k = x(\lambda_1 + 1) + y(\lambda_2 + 1)$.

Число ребер между $[a]$ и $\Delta_2(a)$ равно $x(\lambda_1 + 1)(k - \lambda_1 - 1) + y(\lambda_2 + 1)(k - \lambda_2 - 1) = 2(v - k - 1)$. Подставив $y(\lambda_2 + 1) = k - x(\lambda_1 + 1)$, получим

$$k(k - \lambda_2 - 1) + x(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 - \lambda_1) = 2(v - k - 1).$$

Отсюда $x = (2(v - k - 1) - k(k - \lambda_2 - 1)) / ((\lambda_1 + 1)(\lambda_2 - \lambda_1))$. Таким образом, значение x не зависит от выбора вершины a . Утверждения 1) и 2) доказаны.

Поскольку число тонких клик в Δ равно $vx / (\lambda_1 + 2)$, то выполняется утверждение 3).

ЛЕММА 7. *Противоположные ребра любого четырехугольника имеют одинаковые типы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{a, b; c, d\}$ – четырехугольник, $\Sigma = \Delta_2(a)$. Тогда Σ – регулярный граф диаметра 2 и степени $k - 2$. Для вершины $b \in \Sigma$ имеем $|\Sigma_2(b)| = v - 2k$ и подграф $\Sigma(b)$ является объединением:

- (p) либо двух λ_1 -клик, $x - 2$ клик порядка $\lambda_1 + 1$ и y клик порядка $\lambda_2 + 1$;
- (q) либо λ_1 -клики, λ_2 -клики, $x - 1$ клик порядка $\lambda_1 + 1$ и $y - 1$ клик порядка $\lambda_2 + 1$;
- (r) либо двух λ_2 -клик, $y - 2$ клик порядка $\lambda_2 + 1$ и x клик порядка $\lambda_1 + 1$.

Пусть $\{c, d\} = [a] \cap [b]$, $[c]$ содержит u вершин из $\Sigma_2(b)$ и $[d]$ содержит w вершин из $\Sigma_2(b)$. Тогда число ребер между $\Sigma(b)$ и $\Sigma_2(b)$ равно $(u + w) + 2(v - 2k - u - w)$. С другой стороны, указанное число ребер равно в случае (p)

$$\rho_p = 2\lambda_1(k - 2 - \lambda_1) + (x - 2)(\lambda_1 + 1)(k - 3 - \lambda_1) + y(\lambda_2 + 1)(k - 3 - \lambda_2),$$

в случае (q)

$$\begin{aligned} \rho_q = & \lambda_1(k - 2 - \lambda_1) + (x - 1)(\lambda_1 + 1)(k - 3 - \lambda_1) + \lambda_2(k - 2 - \lambda_2) \\ & + (y - 1)(\lambda_2 + 1)(k - 3 - \lambda_2) \end{aligned}$$

и в случае (r)

$$\rho_r = 2\lambda_2(k - 2 - \lambda_2) + (y - 2)(\lambda_2 + 1)(k - 3 - \lambda_2) + x(\lambda_1 + 1)(k - 3 - \lambda_1).$$

Отсюда $\rho_q - \rho_p = \rho_r - \rho_q = 2(\lambda_2 - \lambda_1)$. Максимальное значение ρ_r достигается, когда каждое ребро четырехугольника лежит в толстой клике. Минимальное значение ρ_p достигается, когда каждое ребро четырехугольника лежит в тонкой клике. Среднее значение ρ_q достигается, когда два противоположных ребра лежат в толстых кликах, а другие два ребра лежат в тонких кликах. Лемма доказана.

Многоугольник из Δ назовем *тонким*, *толстым* или *смешанным*, если все его ребра тонкие, толстые или обоих типов соответственно. Тонкий пятиугольник назовем *f-стандартным*, если некоторая вершина f графа Δ смежна с тремя его вершинами. Тонкий пятиугольник назовем *стандартным*, если он является f -стандартным для некоторой вершины f .

ЛЕММА 8. *Если $y = 1$, то выполняются следующие утверждения:*

- 1) множество вершин графа Δ разбивается t толстыми кликами $C_1, \dots, C_t$, где $t = v / (\lambda_2 + 2)$;
- 2) если $x = 1$, то Δ является $((\lambda_1 + 2) \times (\lambda_2 + 2))$ -решеткой;
- 3) если $x > 1$, то граф Δ^* , определенный на множестве $\{C_1, \dots, C_t\}$, в котором клики C_i и C_j смежны, если $j \neq i$, и некоторая вершина из C_i смежна с единственной вершиной из C_j , является частичным четырехугольником с параметрами $(t, k - \lambda_2 - 1, \lambda_1, 2\lambda_2 + 4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = 1$. Тогда каждая вершина из Δ содержится в единственной толстой клике. Поэтому множество вершин графа Δ разбивается t толстыми кликами $C_1, \dots, C_t$, где $t = v/(\lambda_2 + 2)$. Утверждение 1) доказано.

Заметим, что если вершина a принадлежит C_i , то a смежна с 0 или 1 вершинами из C_j для $j \neq i$. В последнем случае каждая вершина из C_i смежна с единственной вершиной из C_j .

На множестве $\{C_1, \dots, C_t\}$ определим граф Δ^* , предполагая, что клики C_i и C_j смежны, если $j \neq i$, и некоторая вершина из C_i смежна с единственной вершиной из C_j . Поскольку для различных i, j вершина из C_i смежна не более чем с одной вершиной из C_j , то Δ^* является регулярным графом степени $k - \lambda_2 - 1$. Пусть клики C_i, C_j смежны в Δ^* . Если вершина a из C_i смежна с вершиной b из C_j , то подграф $a^\perp \cap b^\perp$ является тонкой кликой. Пусть клика C_l смежна с C_i, C_j в графе Δ^* . Тогда вершина a смежна с вершиной $c \in C_l$, а b смежна с вершиной $d \in C_l$. Если $c \neq d$, то четырехугольник $\{a, d; b, c\}$ имеет три тонких ребра и одно толстое. Противоречие с леммой 7. Значит, $c = d$, и Δ^* – реберно регулярный граф с $\lambda^* = \lambda_1$, причем окрестность каждой вершины в Δ^* является объединением изолированных $(\lambda_1 + 1)$ -клик.

Если $x = 1$, то Δ^* является кликой и граф Δ является решеткой. В этом случае выполняется утверждение 2).

Покажем, что если $x > 1$, то Δ^* является сильно регулярным графом с параметрами $(t, k - \lambda_2 - 1, \lambda_1, 2\lambda_2 + 4)$. Пусть клики C_i, C_j несмежны в Δ^* . Зафиксируем вершину a из C_i . Если $b \in C_j$, то подграф $[a] \cap [b]$ содержит две вершины c, d , принадлежащие C_p, C_q соответственно. При этом четырехугольник $\{a, d; b, c\}$ является тонким и клики C_p, C_q смежны с C_i, C_j в Δ^* . Если $b' \neq b$ – отличная от b вершина из C_j , то подграф $[a] \cap [b']$ содержит две вершины e, f , принадлежащие C_r, C_s соответственно. Если $r = p$, то a смежна с вершинами c, e из C_p и $e = c$. Противоречие с тем, что c смежна с двумя вершинами b, b' из C_j . Значит, $\{p, q\}$ не пересекает $\{r, s\}$, и клики C_i, C_j смежны с $2(\lambda_2 + 2)$ общими соседями в Δ^* . Поскольку окрестность каждой вершины в Δ^* является объединением изолированных клик, то Δ^* – частичный четырехугольник.

ЛЕММА 9. На множестве вершин графа Δ определим граф Λ^1 , считая вершины a, b смежными, только если они смежны в Δ и $|[a] \cap [b]| = \lambda_1$. Тогда для связной компоненты Σ графа Λ^1 выполняются следующие утверждения:

- 1) если $x > 1$, то Σ является вполне регулярным графом с параметрами $(v_\Sigma, x(\lambda_1 + 1), \lambda_1, 2)$;
- 2) если Σ содержит геодезический 4-путь $abcde$, то число тонких клик в $c^\perp$ не меньше 4; далее, для $u \in \Sigma \cap [a] - \Sigma(a)$ имеем $d_\Sigma(a, u) \geq 4$;
- 3) если $x = 2$, то Σ является $((\lambda_1 + 2) \times (\lambda_1 + 2))$ -решеткой, а если $x = 3$, то Σ является графом диаметра 3;
- 4) если Σ – сильно регулярный граф с отрицательным собственным значением $-t$, то:

- (i) любая связная компонента графа Λ^1 изоморфна Σ ;
- (ii) либо Σ – четырехугольник, либо $(x - t)(\lambda_1 + 1) = (t - 1)(t - 2)$ и $2(\lambda_1 + 2t - 2)$ делит $(t - 1)((t - 1)(t - 2) + t(\lambda_1 + 1))((t - 1)(t - 2) + t(\lambda_1 + 2))$;
- (iii) граф Δ° , определенный на множестве $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_s\}$ связных компонент графа Λ^1 , $s = v/v_\Sigma$, в котором вершины Σ_i и Σ_j смежны, если $j \neq i$,

и некоторая вершина из Σ_i смежна с единственной вершиной из Σ_j , является сильно регулярным графом с параметрами $(s, y(\lambda_2 + 1), \lambda_2 + 2(v_\Sigma - k_\Sigma - 1), 2v_\Sigma)$;

(iv) если $m \leq 5$, то либо $m = 2$ и Σ является $((\lambda_1 + 2) \times (\lambda_1 + 2))$ -решеткой, либо $m = 3$ и Σ – дополнительный граф к графу Клебша, имеющий параметры $(16, 5, 0, 2)$, либо $m = 4$ и Σ имеет параметры $(99, 14, 1, 2)$ или $(56, 10, 0, 2)$, либо $m = 5$ и Σ имеет параметры $(243, 22, 1, 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду лемм 6, 7 связная компонента Σ графа Λ^1 является вполне регулярным графом с параметрами $(v_\Sigma, x(\lambda_1 + 1), \lambda_1, 2)$. Утверждение 1) доказано.

Допустим, что Σ содержит геодезический 4-путь $abcde$. Тогда все ребра четырехугольников $\{a, c\} \cup ([a] \cap [c])$ и $\{c, d\} \cup ([d] \cap [c])$ являются тонкими и число тонких клик в $c^\perp$ не меньше 4.

Допустим, что Σ содержит геодезический 3-путь $abcd$. Тогда $[a] \cap [c]$ содержит вершины b, f из Σ , подграф $[b] \cap [d]$ содержит вершины c, e из Σ и $[f] \cap [d]$ содержит вершины s, g из Σ . Поэтому вершины a, d несмежны и $[a] \cap [d]$ содержит две вершины p, q из Δ . Допустим, что ребро $\{a, p\}$ тонкое. По лемме 7 ребро $\{d, q\}$ также тонкое и расстояние между a и q в графе Σ равно 4. Утверждение 2) доказано.

Пусть Σ – сильно регулярный граф. В половинном случае имеем $\lambda_1 = 1$, $x = 2$ и Σ является (3×3) -решеткой. Пусть Σ имеет целочисленные неглавные собственные значения $n - m$ и $-m$. Если $m = 1$, то Σ – полный многодольный граф степени 2, поэтому Σ – четырехугольник. Если $m > 1$, то по лемме 1 имеем

$$\mu = (\lambda_1 + 2) + (m - 1) - (k - \lambda_1 - 1)/(m - 1), \quad n = (m - 1) + (k - \lambda_1 - 1)/(m - 1).$$

Поскольку $\mu = 2$, то

$$(x - 1)(\lambda_1 + 1) = (m - 1)(\lambda_1 + m - 1), \quad n = \lambda_1 + 2m - 2.$$

Теперь $(x - m)(\lambda_1 + 1) = (m - 1)(m - 2)$ и по условию целочисленности $2(\lambda_1 + 2m - 2)$ делит $(m - 1)((m - 1)(m - 2) + m(\lambda_1 + 1))((m - 1)(m - 2) + m(\lambda_1 + 2))$. Утверждение 4), (ii) доказано.

Если $x = 2$, то Σ является графом без 3-лап, в котором μ -подграфы являются 2-кликками. Ввиду теоремы из [4] граф Σ является $((\lambda_1 + 2) \times (\lambda_1 + 2))$ -решеткой. Заметим, что для $a \in \Sigma$ имеем $|\Sigma_2(a)| = \binom{x}{2}(\lambda_1 + 1)^2$. Если $x = 3$, то ввиду утверждения 2) диаметр графа Σ не больше 3 и для любой вершины d из $\Sigma_3(a)$ четырехугольник $\{a, d; [a] \cap [d]\}$ является толстым. Если Σ – сильно регулярный граф, то по доказанному в предыдущем абзаце получим $(3 - m)(\lambda_1 + 1) = (m - 1) \times (m - 2)$. Противоречие. Утверждение 3) доказано.

Пусть Σ – сильно регулярный граф с собственным значением $-m$ и Φ – другая связная компонента графа Λ^1 . Тогда каждая вершина из Φ смежна не более чем с одной вершиной из Σ . Если вершина $a \in \Sigma$ смежна с вершиной $b \in \Phi$, то для $b' \in \Phi(b)$ четырехугольник $\{a, b'\} \cup ([a] \cap [b'])$ является смешанным и b' смежна с единственной вершиной из $\Sigma(a)$. Таким образом, строится биекция (фактически, даже графовый изоморфизм) Φ на Σ . Утверждение 4), (i) доказано.

Ясно, что Δ° является регулярным степени $y(\lambda_2 + 1)$. Пусть Φ и Ψ – две несмежные вершины графа Δ° , $a \in \Phi$, $b \in \Psi$ и $\{p, q\} = [a] \cap [b]$. Если $b' \in \Psi - \{b\}$,

то вершины из $[a] \cap [b']$ лежат в новых связных компонентах. Варьируя вершины в Ψ , получим $2v_\Sigma$ общих соседей вершин Φ и Ψ . Отметим, наконец, что вариация вершин в Φ не дает новых вершин в Δ° .

Пусть Σ_i и Σ_j – смежные вершины графа Δ° , $a \in \Sigma_i$, $b \in \Sigma_j \cap [a]$. Если Σ_n смежна с Σ_i , Σ_j в графе Δ° , то вершина a смежна с вершиной $c \in \Sigma_n$, а b смежна с вершиной $d \in \Sigma_n$. Если $c \neq d$, то четырехугольник $\{a, d; b, c\}$ имеет три толстых ребра и одно тонкое. Противоречие с леммой 7. Значит, $c = d$. Если $b' \in \Sigma_j(b)$, то $[a] \cap [b']$ содержит по вершине из Σ_i, Σ_j . Если $b' \in \Sigma_j - b^\perp$, то $[a] \cap [b]$ содержит две вершины, не лежащие в $\Sigma_i \cup \Sigma_j$. Таким образом, $\lambda^\circ = \lambda_2 + 2(v_\Sigma - k_\Sigma - 1)$. Утверждение 4), (iii) доказано.

Пусть $m \leq 5$. Если $m = 2$, то по утверждению 4), (ii) имеем $(x - 2)(\lambda_1 + 1) = 0$, $x = 2$ и по утверждению 3) граф Σ является $((\lambda_1 + 2) \times (\lambda_1 + 2))$ -решеткой. Если $m = 3$, то по утверждению 4), (ii) имеем $(x - 3)(\lambda_1 + 1) = 2$ и либо $x = 4$, $\lambda_1 = 1$, либо $x = 5$, $\lambda_1 = 0$. Но в первом случае нарушается условие целочисленности. Значит, Σ имеет параметры $(16, 5, 0, 2)$. Если $m = 4$, то $(x - 4)(\lambda_1 + 1) = 6$ и $2(\lambda_1 + 6)$ делит $3(10 + 4\lambda_1)(14 + 4\lambda_1)$. Поэтому либо $x = 5 = \lambda_1$, либо $x = 6$, $\lambda_1 = 2$, либо $x = 7$, $\lambda_1 = 1$, либо $x = 10$, $\lambda_1 = 0$. Однако в первых двух случаях нарушается условие целочисленности, следовательно, Σ имеет параметры $(99, 14, 1, 2)$ или $(56, 10, 0, 2)$. Если $m = 5$, то $(x - 5)(\lambda_1 + 1) = 12$ и $2(\lambda_1 + 8)$ делит $4(17 + 5\lambda_1)(22 + 5\lambda_1)$. Поэтому $(\lambda_1 + 8)$ делит $2 \cdot 18 \cdot 23$, $x = 11$, $\lambda_1 = 1$ и Σ имеет параметры $(243, 22, 1, 2)$.

ЛЕММА 10. Пусть граф Λ^1 определен, как в лемме 9. Если $y = 1$, $x > 1$ и $\mu = 2\lambda_2 + 4$, то выполняются следующие утверждения:

1) Λ^1 – дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{x(\lambda_1 + 1), (x - 1)(\lambda_1 + 1), 2(\lambda_2 + 1), 1; 1, 2, (x - 1)(\lambda_1 + 1), x(\lambda_1 + 1)\}$, и если $\lambda_1 > 0$, то $\lambda_1^2 + 4x(\lambda_1 + 1)$ является квадратом;

2) если $\lambda_1 = 1$, то $n^2 - m^2 = \mu^2 - 6\mu$ для некоторых нечетных натуральных чисел m, n , и в случае $\mu \leq 26$ имеем $\mu = 18$ и Λ^1 – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{56, 54, 16, 1; 1, 2, 54, 56\}$, являющийся 9-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(225, 56, 1, 18)$;

3) если $\lambda_1 = 2$, то $n^2 - m^2 = \mu^2 - 8\mu$ для некоторых натуральных чисел m, n и $\mu \geq 28$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = 1$. Тогда множество вершин графа Δ разбивается t толстыми кликами $C_1, \dots, C_t$, где $t = v/(\lambda_2 + 2)$.

На множестве $\{C_1, \dots, C_t\}$ определим граф Δ^* , считая клики C_i и C_j смежными, если $j \neq i$, и предполагая, что некоторая вершина из C_i смежна с единственной вершиной из C_j . По лемме 8 либо $x = 1$ и граф Δ^* является решеткой, либо $x > 1$ и Δ^* является частичным четырехугольником с параметрами $(t, x(\lambda_1 + 1), \lambda_1, \mu)$.

Пусть вершина a из C_1 несмежна ни с одной вершиной из C_2 . Тогда для $b \in C_1$, $c \in C_2$ четырехугольник $\{b, c\} \cup ([b] \cap [c])$ является тонким. Поэтому Λ^1 – антиподальный граф диаметра 4, являющийся $(\lambda_2 + 2)$ -накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(t, x(\lambda_1 + 1), \lambda_1, 2\lambda_2 + 4)$. Отсюда Λ^1 – дистанционно регулярный граф с указанным массивом пересечений. По лемме 2 число $\lambda_1^2 + 4x(\lambda_1 + 1)$ является квадратом. Утверждение 1) доказано.

Пусть $\lambda_1 = 1$. Поскольку $\mu^2 - 2\mu + 1 + 4(2x - \mu)$ является квадратом некоторого натурального числа n , то $n^2 = 1 + 8x + \mu^2 - 6\mu$. Далее, по утверждению 1) имеем

$m^2 = 1 + 8x$ для некоторого нечетного натурального числа m и $n^2 - m^2 = \mu^2 - 6\mu$. Допустим, что $\mu \leq 26$. Так как $\mu^2 - 6\mu$ делится на 8, то одно из чисел $n - m$, $n + m$ не делится на 4. Рассмотрим подробно случай $\mu = 18$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Имеем

$$n^2 - m^2 = 18 \cdot 12 = 2^3 3^3.$$

Отсюда $n - m = 2, 6$ или $n + m = 18, 54$. Если $n - m = 2$, то $n = 55$, $m = 53$ и $x = 52 \cdot 54 / 8 = 351$. В этом случае граф Δ^* имеет параметры $(28002, 702, 1, 18)$ и собственные значения 19 и -36 . По условию целочисленности $18 \cdot 55$ делит $35 \cdot 702 \cdot 738$. Противоречие. Если $n - m = 6$, то $n = 21$, $m = 15$ и $x = 14 \cdot 16 / 8 = 28$. В этом случае граф Δ^* имеет параметры $(225, 56, 1, 18)$ и собственные значения 2 и -19 кратностей 200 и 24 соответственно. Граф Λ^1 имеет новые собственные значения 8 и -7 , причем кратность 8 равна 840.

Если $n + m = 18$, то $n = 15$, $m = 3$ и $x = 1$. Противоречие. Если $n + m = 54$, то $n = 29$, $m = 25$ и $x = 78$. В этом случае $\mu = 18$ не делит $k(k - \lambda_1 - 1) = 156 \cdot 154$. Утверждение 2) доказано.

Пусть $\lambda_1 = 2$. Поскольку $\mu^2 - 4\mu + 4 + 4(3x - \mu)$ является квадратом некоторого натурального числа n , то $n^2 = 4 + 12x + \mu^2 - 8\mu$. Далее, по утверждению 1) имеем $m^2 = 4 + 12x$ для некоторого не кратного 3 числа m и $n^2 - m^2 = \mu^2 - 8\mu$. Допустим, что $\mu = 10$. Тогда $n - m = 2$, $n + m = 10$, поэтому $n = 6$, $m = 4$ и $x = 1$. Противоречие. Пусть $10 < \mu \leq 26$. Граф Δ^* имеет допустимые параметры только в случае $\mu = 18$. В этом случае Δ^* имеет параметры $(13364, 483, 2, 18)$ и собственные значения 15 и -31 кратностей 8995 и 4368. Граф Λ^1 имеет новые собственные значения 23 и -21 , причем кратность $\theta_1 = 23$ равна $13364 \cdot 8 \cdot 23 / 44$. Противоречие. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сильно регулярный граф с параметрами $(225, 56, 1, 18)$ не существует, так как для него нарушается условие Крейна.

ЛЕММА 11. Определим граф Λ^2 на множестве вершин графа Δ , в котором вершины смежны, только если они лежат в общей толстой клике. Тогда для связной компоненты Ω графа Λ^2 выполняются следующие утверждения:

1) если $y > 1$, то Ω является вполне регулярным графом с параметрами $(v_\Omega, y(\lambda_2 + 1), \lambda_2, 2)$;

2) если Ω содержит геодезический 4-путь $abcde$, то число толстых клик в $c^\perp$ не меньше 4; далее, для $u \in \Omega \cap [a] - \Omega(a)$ имеем $d_\Omega(a, u) \geq 4$;

3) если $y = 2$, то Ω является $((\lambda_2 + 2) \times (\lambda_2 + 2))$ -решеткой, а если $y = 3$, то Ω является графом диаметра 3; если диаметр Ω равен 2, то граф Δ^* , определенный на множестве $\{\Omega_1, \dots, \Omega_p\}$ связных компонент графа Λ^2 , $p = v/|\Omega|$, в котором вершины Ω_i и Ω_j смежны, если $j \neq i$, и некоторая вершина из Ω_i смежна с единственной вершиной из Ω_j , является сильно регулярным графом с параметрами $(p, x(\lambda_1 + 1), \lambda_1 + 2(v_\Omega - k_\Omega - 1), 2v_\Omega)$;

4) если $x = 1$, $y > 1$, то:

(i) граф Δ разбивается q тонкими кликами $L_1, \dots, L_q$, где $q = v/(\lambda_1 + 2)$, и граф Δ° на множестве тонких клик, в котором клики L_i, L_j смежны, только если вершина из L_i смежна с единственной вершиной из L_j , является частичным четырехугольником с параметрами $(q, y(\lambda_2 + 1), \lambda_2, 2\lambda_1 + 4)$;

- (ii) граф Λ^2 является дистанционно регулярным графом диаметра 4 с массивом пересечений $\{y(\lambda_2 + 1), (y - 1)(\lambda_2 + 1), 2(\lambda_1 + 1), 1; 1, 2, (y - 1) \times (\lambda_2 + 1), y(\lambda_2 + 1)\}$ и $4y(\lambda_2 + 1) + \lambda_2^2$ является квадратом;
- (iii) параметр λ_1 отличен от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1)–3) доказываются, как в лемме 9.

Пусть $x = 1$. Тогда граф Δ разбивается q тонкими кликами $L_1, \dots, L_q$, где $q = v/(\lambda_1 + 2)$. Определим граф Δ° на множестве тонких клик, считая L_i, L_j смежными, только если некоторая вершина из L_i смежна с вершиной из L_j . Как и в лемме 8, убедимся, что граф Δ° является частичным четырехугольником с параметрами $(q, y(\lambda_2 + 1), \lambda_2, 2\lambda_1 + 4)$. Если Δ° – граф в половинном случае, то $\lambda_2 = 2\lambda_1 + 3, y = 2$ и Δ° не является частичным четырехугольником.

Повторив рассуждения из доказательства леммы 10, убедимся, что Λ^2 является дистанционно регулярным графом диаметра 4 с массивом пересечений $\{y(\lambda_2 + 1), (y - 1)(\lambda_2 + 1), 2(\lambda_1 + 1), 1; 1, 2, (y - 1)(\lambda_2 + 1), y(\lambda_2 + 1)\}$. По лемме 2 число $4y(\lambda_2 + 1) + \lambda_2^2$ является квадратом. Утверждения (i) и (ii) доказаны.

Пусть $\lambda_1 = 0$. Тогда Δ° является частичным четырехугольником с параметрами $(q, y(\lambda_2 + 1), \lambda_2, 4)$. По лемме 1 имеем

$$(\lambda_2 - 4)^2 + 4(y\lambda_2 + y - 4) = n^2.$$

По утверждению (ii) получим

$$\lambda_2^2 + 4y\lambda_2 + 4y = m^2.$$

Положим $n = \lambda_2 + t$, $m = n + 2i$. Тогда $4i^2 + 4i(\lambda_2 + t) = 8\lambda_2$, поэтому $i = 1$, $t = \lambda_2 - 1$, $n = 2\lambda_2 - 1$ и $y = 3\lambda_2^2/(4\lambda_2 + 4)$. Отсюда $\lambda_2 = 2$, $y = 1$ и Δ° не является частичным четырехугольником.

ЛЕММА 12. Пусть $x = 3$. Тогда для любых двух вершин b, e , находящихся на расстоянии 2 в графе Λ^1 , подграф $[b] \cap \Lambda_3^1(e)$ является кликой и:

1) либо $\lambda_1 > 0$ и выполняются следующие утверждения:

(i) для любого тонкого четырехугольника $\{a, f; b, e\}$ число вершин из $[b] - (a^\perp \cup f^\perp)$, окрестности которых пересекают $[a] \cap [e]$ и $[e] \cap [f]$, равно числу вершин из $[e] - (a^\perp \cup f^\perp)$, окрестности которых пересекают $[a] \cap [b]$ и $[b] \cap [f]$;

(ii) каждый тонкий 2-путь $eaeb$ в графе Σ лежит точно в $2\lambda_1 + 4 - 2b_2(e, b)$ тонких пятиугольниках и $b_2(e, b) = b_2(b, e)$;

2) либо $\lambda_1 = 0$ и выполняются следующие утверждения:

(i) Σ – куб и найдется единственная связная компонента Σ^* графа Λ^1 такая, что любые два антипода из Σ смежны с двумя антиподами графа Σ^* ;

(ii) определенный в лемме 11 граф Λ^2 является связным графом диаметра 4, $v = 7 + 4y(\lambda_2 + 1) + \binom{y}{2}(\lambda_2 + 1)^2$ делится на 16 и $y \geq 18$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9 если $x = 3$, то Σ – граф диаметра 3, пересекающий каждую толстую клику не более чем по одной вершине.

Пусть $\lambda_1 > 0$, $eaeb$ – геодезический 2-путь из Σ и $\{a, f\} = [e] \cap [b]$. Тогда две клики из $\Sigma(b)$ пересекают $[e]$ и $[b] \cap \Lambda_3^1(e)$ является кликой или пустым графом. Пусть подграф $[a] \cap [e]$ содержит α вершин, смежных с вершинами из $[b] \cap [f]$, и $\lambda_1 - \alpha$

вершин, смежных с вершинами из $[b] - (a^\perp \cup f^\perp)$. Тогда каждой вершине c графа $[b] \cap [f]$, не смежной с вершинами из $[a] \cap [e]$, отвечает f -стандартный пятиугольник $\{a, b, c, d, e\}$. Значит, число f -стандартных пятиугольников, содержащих вершину из $[e] - [f]$, равно $\lambda_1 - \alpha$.

Пусть подграф $[a] \cap [b]$ содержит β вершин, смежных с вершинами из $[e] \cap [f]$, и $\lambda_1 - \beta$ вершин, смежных с вершинами из $[e] - (a^\perp \cup f^\perp)$. Тогда каждой вершине графа $[c] \cap [f]$, не смежной с вершинами из $[a] \cap [b]$, отвечает f -стандартный пятиугольник. Значит, число f -стандартных пятиугольников, содержащих вершину из $[b] - [f]$, равно $\lambda_1 - \beta$.

Если подграф $[e] - (a^\perp \cup f^\perp)$ содержит γ вершин, лежащих в стандартном пятиугольнике и смежных с вершиной из $[a] \cap [b]$, а подграф $[b] - (a^\perp \cup f^\perp)$ содержит δ вершин, лежащих в стандартном пятиугольнике и смежных с вершиной из $[a] \cap [e]$, то число тонких ребер между $[e] - (a^\perp \cup f^\perp)$ и $[b] - (a^\perp \cup f^\perp)$ равно $(\lambda_1 - \alpha - \gamma) + (\lambda_1 - \beta - \gamma) = (\lambda_1 - \beta - \delta) + (\lambda_1 - \alpha - \delta)$, поэтому $\gamma = \delta$. Утверждение 1), (i) доказано.

Далее, $[e] - (a^\perp \cup f^\perp)$ содержит $\alpha + \beta + \gamma + 1 - \lambda_1$ вершин, не смежных с вершинами из $[b] \cap ([a] \cup [f])$, и $b_2(e, b) = \alpha + \beta + \gamma + 1 - \lambda_1$. Отсюда $b_2(e, b) = b_2(b, e)$ для любых вершин b, e , находящихся на расстоянии 2 в Σ . Симметрично, $b_2(a, f) = b_2(f, a)$.

Для 2-пути uwz из Σ подграф $[z] - [w]$ содержит $2(\lambda_1 + 1) - b_2(u, z)$ вершин из $\Lambda_2^1(u)$. Пусть $p \in ([x] - [w]) \cap \Lambda_2^1(u)$, $q \in [u] \cap [c]$. Подграф $\{u, w, z, p, q\}$ не является пятиугольником только в случае $q \in [z] \cup [w]$. Случай $q \in [w]$ встречается λ_1 раз, и p — это единственная отличная от w вершина из $[q] \cap [z]$. Случай $q \in [z]$ означает, что $\{w, q\} = [u] \cap [z]$ и p встречается λ_1 раз. Таким образом, путь uwz лежит точно в $2\lambda_1 + 4 - 2b_2(u, z)$ тонких пятиугольниках. Утверждение 1), (ii) доказано.

Если $\lambda_1 = 0$, то Σ — куб. Пусть Σ^* — связная компонента графа Λ^1 , содержащая вершину b , смежную с $i \geq 2$ вершинами из Σ . Тогда любая вершина из Σ^* смежна точно с i вершинами из Σ . Поэтому число ребер между Σ и Σ^* равно $8i$ и каждая вершина из Σ смежна точно с i вершинами из Σ^* . Если $i = 2$, то любые два антипода из Σ смежны с двумя антиподами Σ^* и определенный в лемме 11 граф Λ^2 индуцирует на $\Sigma \cup \Sigma^*$ четыре изолированных четырехугольника. Поэтому

$$v = 1 + (3 + y(\lambda_2 + 1)) + 3 + 3y(\lambda_2 + 1) + \binom{y}{2}(\lambda_2 + 1)^2$$

делится на 16; в частности, λ_2 четно и $\binom{y}{2}$ сравнимо с 1 по модулю 4. Если y четно, то $\binom{y}{2}$ сравнимо с 1 по модулю 8. Далее, число толстых клик в Δ равно $vy/(\lambda_2 + 2)$ и $\lambda_2 + 2$ делит $y(\binom{y}{2} - 4y + 7)$. Отсюда $y > 6$ и в случае $y = 7$ получим $v = 7(1 + 4(\lambda_2 + 1) + 3(\lambda_2 + 1)^2)$, $\lambda_2 = 4x$ или $\lambda_2 = 4x + 2$, x нечетно и $\lambda_2 \geq 4$.

Пусть Ω — связная компонента графа Λ^2 , содержащая ребро, инцидентное вершине a из Σ и вершине b из Σ^* . Тогда каждая вершина вне Ω смежна не более чем с одной вершиной из Ω . Действительно, пусть вершина c из $\Delta - \Omega$ смежна с $j \geq 2$ вершинами $d_1, \dots, d_j$ из Ω . Тогда диаметр Ω не меньше 3, $y \geq 7$ и $\Omega \subset \cup d_i^\perp$, иначе для $e \in \Omega - \cup d_i^\perp$ подграф $[c] \cap [e]$ содержит две вершины, соединенные тонкими ребрами с вершиной c . Поэтому $|\Omega| = j + jy(\lambda_2 + 1)$. Противоречие с тем, что Ω содержит по крайней мере $j + y(\lambda_2 + 1) + \binom{y}{2}(\lambda_2 + 1)^2$ вершин.

Пусть $d_\Omega(a, c) > 2$. Тогда $[a] \cap [c]$ содержит две вершины d, e . Если четырехугольник $\{a, b; c, d\}$ является тонким, то Ω содержит не менее трех толстых четырехугольников из $\Sigma \cup \Sigma^*$. Если указанный четырехугольник является смешанным,

то Ω содержит не менее двух толстых четырехугольников из $\Sigma \cup \Sigma^*$. В любом случае Λ^2 – связный граф, иначе некоторая вершина из $\Sigma - \Omega$ соединена двумя тонкими ребрами с вершинами из Ω . Итак, либо Λ^2 – связный граф, либо диаметр Ω равен 2. Но в последнем случае Λ^2 имеет четыре связные компоненты и

$$v = 4 \left(1 + y(\lambda_2 + 1) + \binom{y}{2} (\lambda_2 + 1)^2 \right) = 7 + 4y(\lambda_2 + 1) + \binom{y}{2} (\lambda_2 + 1)^2.$$

Отсюда $y = 2$ и $\lambda_2 = 0$. Противоречие.

Итак, Λ^2 – связный граф, $y \geq 7$, и диаметр Λ^2 не меньше 4. Пусть $a \in \Sigma$, $\Sigma(a) = \{b_1, b_2, b_3\}$, a^* – антипод a в кубе Σ и $\Sigma(a^*) = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$, где b_i^* – антипод b_i в Σ . Тогда Λ^2 содержит a , шесть вершин $b_1, b_1^*, \dots, b_3, b_3^*$ из $\Lambda_3^2(a) \cup \Lambda_4^2(a)$, $7y(\lambda_2 + 1)$ вершин из объединения окрестностей в Λ^2 вершин $a, b_1, b_2, b_3, b_1^*, b_2^*, b_3^*$ и $\binom{y}{2}(\lambda_2 + 1)^2$ вершин из $\Lambda_2^2(a)$. Отсюда диаметр Λ^2 равен 4 и $b_1^*, b_2^*, b_3^* \in \Lambda_3^2(a)$.

Через Λ_Σ^2 обозначим $\cap_{u \in \Sigma} \Lambda_2^2(u)$. Тогда

$$|\Lambda_\Sigma^2| = \binom{y}{2} (\lambda_2 + 1)^2 - (1 + 4(y\lambda_2 + y - 2))$$

и для вершины w из Λ_Σ^2 подграф $[w]$ содержит не менее восьми толстых клик. В случае $y = 7$ имеем $|\Lambda_\Sigma^2| = 21(\lambda_2 + 1)^2 - (21 + 28\lambda_2) > 0$. Противоречие. В случае $y = 10$ число $\binom{y}{2} = 45$ не сравнимо с 1 по модулю 8. В случаях $y = 11$ и $y = 14$ число $\binom{y}{2}$ не сравнимо с 1 по модулю 4. Если $y = 15$, то $\lambda_2 + 2$ делит $15 \cdot 52$ и $7 + 60(\lambda_2 + 1) + 105(\lambda_2 + 1)^2$ делится на 16. Отсюда $7\lambda_2^2 + 2\lambda_2 + 4$ делится на 16, $\lambda_2 = 2r$, r нечетно и $7r^2 + r + 1$ делится на 4. Противоречие. Таким образом, $y \geq 18$. Лемма доказана.

Из лемм 6–12 следует теорема 1.

§3. Графы с $\lambda_1 = 0$

В настоящем параграфе Γ – связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) .

В лемме 13 предполагается, что $\mu(u, w) = \lambda$ или $\mu(u, w) = k - \gamma$ для любых вершин u, w с $d(u, w) = 2$ и для каждого ребра $\{x, y\}$ подграф $\Gamma - (x^\perp \cup y^\perp)$ состоит из двух смежных вершин. Положим $b_1 = k - \lambda - 1$. Если диаметр Γ больше 2, то для ребра $\{a, b\}$ и $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp) = \{c, d\}$ можно считать, что $c \in \Gamma_3(a)$, $|[c] \cap [b]| = k - 1$ и $\lambda = 0$. В этом случае Γ получается удалением из полного двудольного графа $K_{k+1, k+1}$ максимального паросочетания.

Пусть диаметр Γ равен 2, но Γ не является сильно регулярным графом. Тогда для любой вершины u подграф $\{w \in \Gamma_2(u) \mid \mu(u, w) = k - \gamma\}$ является полным многодольным графом $K_{y \times s}$ и $\gamma = b_1 + 2 - s$. Дальнейшие рассуждения удобно проводить в дополнительном графе $\Delta = \bar{\Gamma}$. В графе Δ подграф $[u] \cap [w]$ является 2-кликкой для любых двух несмежных вершин u, w и $|[a] \cap [b]| = 0$ или $\lambda_2 = s - 1$ для любых смежных вершин a, b . Таким образом, выполнены условия теоремы 1 с $\lambda_1 = 0$, и $1 \leq \gamma \leq b_1$. Далее, $\Delta(u)$ содержит $x = b_1 + 2 - ys$ изолированных вершин и y изолированных s -клик.

ЛЕММА 13. Для графа Λ^1 , определенного на множестве вершин графа Δ , в котором две вершины a, b смежны, только если они смежны в Δ и $|\Delta(a) \cap \Delta(b)| = 0$, верны утверждения:

1) если $y = 1$, то Λ^1 является дистанционно регулярным графом диаметра 4 с массивом пересечений $\{x, x-1, 2(b_1+2-\gamma), 1; 1, 2, x-1, x\}$, где $x = b_1+2-rs$, множество вершин графа Δ разбивается r кликами $C_1, \dots, C_r$ порядка $s+1$, где $p = v/(s+1)$, и граф Δ° , определенный на множестве $\{C_1, \dots, C_r\}$, в котором клики C_i и C_j смежны, если $j \neq i$, и некоторая вершина из C_i смежна с единственной вершиной из C_j в графе Δ , является частичным четырехугольником с параметрами $(p, b_1+2-s, 0, 2s+2)$;

2) если Λ^1 имеет связную компоненту диаметра 2, то каждая связная компонента графа Λ^1 является сильно регулярным графом с параметрами $((x^2+x+2)/2, x, 0, 2)$, где $x = b_1+2-rs = t^2+1$ для некоторого t , не кратного 4, и граф Δ^* , определенный на множестве $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_l\}$ связных компонент графа Λ^1 , $l = 2v/(x^2+x+2)$, в котором вершины Σ_i и Σ_j смежны, если $j \neq i$, и некоторая вершина из Σ_i смежна с вершиной из Σ_j в графе Δ , является сильно регулярным с параметрами $(l, rs, s-1+x(x-1)/2, x^2+x+2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения леммы следуют из теоремы 1 с учетом того, что $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = s-1$.

Теорема 2 доказана.

Пусть до конца работы граф Γ удовлетворяет условиям следствия, и $u \in \Gamma$. Из лемм 29, 30 работы [3] следует, что либо выполняется заключение следствия, либо $b_1 > 4$, диаметр Γ равен 2 и дополнительный граф $\Delta = \bar{\Gamma}$ является кореберно регулярным степени b_1+2 с $\mu = 2$. Если $\mu(u, w) = \lambda$, то $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$ (и $|\Delta(u) \cap \Delta(w)| = 0$). Для вершины u положим $\Sigma_u = \{w \in \Gamma_2(u) \mid \mu(u, w) > \lambda\}$.

ЛЕММА 14. Выполняются следующие утверждения:

1) для любой вершины u подграф Σ_u является 3-путем или одним из полных многодольных графов $K_{1 \times 3}, K_{y \times 2}$, $y = 1, 2, 3$;

2) для любых двух вершин u, w подграфы Σ_u и Σ_w изоморфны;

3) если Γ содержит вершину u такую, что Σ_u является 3-путем, то:

(i) граф Γ разбивается 4-трапами Мёбиуса $\Phi_1, \dots, \Phi_r$, где $r = v/8$ и $\mu(a, b) = \lambda$ для любых несмежных вершин a, b из разных трапов Мёбиуса;

(ii) граф Γ^* на множестве вершин $\{\Phi_1, \dots, \Phi_r\}$, в котором вершины Φ_i и Φ_j смежны, если некоторая вершина из Φ_i смежна с вершиной из Φ_j в графе Γ , является сильно регулярным с параметрами $(v/8, b_1-2, 6, 16)$;

(iii) $b_1 = t^2 - 7$ и $t = 12, 36$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $2k \geq b_1^2 + 3b_1 - 4$, то число вершин w из $\Gamma_2(u)$ с $\mu(u, w) > \lambda$ не превосходит 6. Если $\mu(u, w) \geq \lambda + 3$, то $|\Delta_2(u) - w^\perp| \geq 3$ и число ребер между $\Delta(u)$ и $\Delta_2(u)$ не меньше $kb_1 + 1$.

Допустим, что $\mu(u, w) = \lambda + 2$. Тогда либо $\mu(u, z) = \lambda + 2$ для любой вершины $z \in \Sigma_u$ и Σ_u является 3-кликкой, либо $\Sigma_u - w^\perp$ содержит вершину z с $\mu(u, z) = \lambda + 1$. Тогда w — единственная вершина из $\Delta - (u^\perp \cup z^\perp)$ и по лемме 1 из [3] имеем

$$\mu(u, w) = \mu(z, w) = \lambda + 2.$$

Поэтому Σ_w является 3-кокликой или геодезическим 3-путем. Если $\mu(u, z) = \lambda + 1$ для любой вершины z из Σ_u , то Σ_u является одним из полных многодольных графов $K_{y \times 2}$, $y = 1, 2, 3$. Утверждение 1) доказано.

Если Γ содержит две вершины u, w с неизоморфными подграфами Σ_u и Σ_w , то $2k = b_1^2 + 3b_1 - 4$ и можно считать, что Σ_u является $K_{2,2}$ -подграфом и Σ_w является 3-путем $abcd$. Как показано в предыдущем абзаце, $\mu(a, c) = \mu(b, d) = \lambda + 1$, поэтому Σ_z является 3-путем для любой вершины $z \in \Sigma_w$. Поскольку дополнительный граф Δ связан, то Σ_z является 3-путем для любой вершины $z \in \Delta$. Утверждение 2) доказано.

Пусть Σ_z является 3-путем для любой вершины $z \in \Gamma$. Зафиксируем 3-путь $abcd$ из $\Gamma_2(u)$. Пусть o – единственная вершина из $[u] - (b^\perp \cup c^\perp)$. Так как $\mu(a, c) = \mu(b, d) = \lambda + 2$, то $\mu(o, b) = \mu(o, c) = \lambda + 1$ и четверка $\{o, u, b, c\}$ однозначно восстанавливается по любой своей вершине. Отсюда v делится на 4. С другой стороны, $k = (b_1^2 + 3b_1 - 4)/2$, $v = (b_1^2 + 5b_1 + 2)/2$ и b_1 сравнимо с 1 или 2 по модулю 8.

Пусть путь $dc'ua'$ индуцирует Σ_b и путь $ab'ud'$ индуцирует Σ_c . Тогда $o = b' = c'$, $\mu(d, a) = \mu(d, a') = \lambda + 1$ и $\mu(a, d) = \mu(a, d') = \lambda + 1$. Далее, путь $ua'ab$ индуцирует Σ_d , и путь $ud'dc$ индуцирует Σ_a . Поэтому для любой вершины w подграфа $\Phi = \{u, o, b, c, a, a', d, d'\}$ обе вершины p, q с $\mu(w, p) = \mu(w, q) = \lambda + 2$ попадают в Φ . Таким образом, подграф Φ однозначно восстанавливается по любой своей вершине w и является 4-трапом Мёбиуса. Поэтому v делится на 8 и b_1 сравнимо с 9 или 2 по модулю 16.

Положим $\Delta = \bar{\Gamma}$ и ребро $\{u, w\}$ графа Δ назовем *толстым*, если $|\Delta(u) \cap \Delta(w)| \geq 1$, и *тонким* в противном случае. Тогда связная компонента графа Δ , индуцированная толстыми ребрами, является 8-вершинным подграфом (изоморфным $\bar{\Phi}$).

Множество вершин графа Γ разбивается 4-трапами Мёбиуса $\Phi_1, \dots, \Phi_r$, где $r = v/8$. Утверждение 3), (i) доказано.

На множестве $\{\Phi_1, \dots, \Phi_r\}$ определим граф Γ^* , считая вершины Φ_i и Φ_j смежными, если некоторая вершина из Φ_i смежна с вершиной из Φ_j в графе Δ . В этом случае каждая вершина из Φ_i смежна с единственной вершиной из Φ_j в графе Δ . Ясно, что Γ^* является кореберно регулярным с $k^* = b_1 - 2$, $\mu^* = 16$. Пусть Φ_i и Φ_j смежны в Γ^* , $d \in \Phi_i$, $e \in \Phi_j \cap [d]$. Тогда объединение подграфов вида $\Delta(d) \cup \Delta(f) - \{e\}$, где $f \in \Phi_j - \{e\}$, содержит $14 - 4$ вершин, так как степень e в графе $\bar{\Phi}_j$ равна 4. Поскольку четыре из этих вершин попадают в Φ_i , то $\lambda^* = 6$. Таким образом, Γ^* – сильно регулярный граф с параметрами $(v/8, b_1 - 2, 6, 16)$. Утверждение 3), (ii) доказано.

Далее, $n^2 = 100 + 4(b_1 - 18)$ и $b_1 + 7 = t^2$ для подходящего натурального числа t . Поскольку b_1 сравнимо с 2 или 9 по модулю 16, то либо t делится на 4, либо t сравнимо с 3 или 5 по модулю 8. По условию целочисленности $32t$ делит $(t + 4)(t^2 - 9)(t^2 + t - 4)$, поэтому t делит $2^4 3^2$, причем t не делится на 8. Таким образом, $t = 12, 36$. Лемма доказана.

До конца параграфа предполагается, что $\Delta = \bar{\Gamma}$ – граф, в котором $|\Delta(a) \cap \Delta(b)| = 0$ или $s - 1$ для любого ребра $\{a, b\}$ и $\Delta(u) \cap \Delta(w)$ является 2-кокликой для любых двух несмежных вершин u, w . По лемме 14 для любой вершины u подграф Σ_u является полным многодольным графом $K_{y \times s}$, где $(y, s) = (1, 3)$ или

$s = 2$ и $y = 1, 2, 3$. По лемме 6 окрестность любой вершины в графе Δ содержит $x = b_1 + 2 - ys$ изолированных вершин и y клик порядка s , поэтому граф Δ регулярен степени $k = x + ys = b_1 + 2$. На множестве вершин графа Δ определим граф Λ^1 , в котором вершины a, b смежны, если они смежны в Δ и $|\Delta(a) \cap \Delta(b)| = 0$.

ЛЕММА 15. *Выполняется одно из утверждений:*

- 1) Δ является $(2 \times (\lambda + 2))$ -решеткой;
- 2) $x > 1$, $y = 1$ и Λ^1 – либо дополнительный граф для графа из $MP(2s + 2)$, либо дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{x, x - 1, 2s, 1; 1, 2, x - 1, x\}$, являющийся антиподальным $(s + 1)$ -накрытием негвудольного сильно регулярного графа с параметрами $(v/(s + 1), x, 0, 2s + 2)$;
- 3) $x, y > 1$ и если граф Λ^1 содержит связную компоненту Σ диаметра 2, то каждая связная компонента графа Λ^1 является сильно регулярным графом с параметрами $((x^2 + x + 2)/2, x, 0, 2)$, $x = t^2 + 1$ для некоторого натурального числа t , не кратного 4, и граф Δ° , определенный в лемме 9, является сильно регулярным с параметрами $(l, ys, s - 1 + 2x(x - 1), x^2 + x + 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 11 если $x = 1$, то $y = 1$. Пусть $y = 1$ и Δ не является $(2 \times (s + 1))$ -решеткой. По лемме 10 граф Λ^1 – дистанционно регулярный граф диаметром 4 с массивом пересечений $\{x, x - 1, 2s, 1; 1, 2, x - 1, x\}$, являющийся антиподальным $(s + 1)$ -накрытием графа с параметрами $(v/(s + 1), x, 0, 2s + 2)$. Положим $\mu = 2s + 2$. Если Λ^1 – покрытие гвудольного графа, то $x = \mu$ и Δ является дополнительным графом для графа из $MP(\mu)$. Если Λ^1 – покрытие негвудольного графа, то $\mu^2 + 4(x - \mu)$ является квадратом некоторого натурального числа n , $n = \mu + 2p$, и по предложению 8.2 из [5] имеем $x = (p + 1)\mu + p^2$ и числа

$$\frac{1}{2} \left(\frac{((p + 1)\mu + p^2)((p + 2)\mu + p^2 - 1)}{\mu} \pm \frac{((p + 1)\mu + p^2)((p + 2)\mu + p^2 - 3)}{\mu + 2p} \right)$$

являются натуральными. В частности, μ делит $p^2(p^2 - 1)$ и $\mu + 2p$ делит $p(p + 1) \times (p + 2)(p + 3)$. Итак, если $x > 1$, $y = 1$, то выполняется утверждение 2) леммы.

Пусть $x, y > 1$. Если граф Σ сильно регулярен, то он имеет параметры $((x^2 + x + 2)/2, x, 0, 2)$ и $x = t^2 + 1$ для некоторого натурального числа t , не кратного 4. По лемме 11 выполняется утверждение 3). Лемма доказана.

В леммах 16–18 предполагается, что $\Gamma = \overline{\Delta}$ является реберно регулярным с параметрами $v = 1 + k + \bar{k}$, $k = \binom{x}{2} + \binom{y}{2}s^2 + xys$, $\lambda = v - 2\bar{k} = k - \bar{k} + 1$ и $k \geq (b_1^2 + 3b_1 - 4)/2$, где $\bar{k} = b_1 + 2$.

ЛЕММА 16. *Выполняются следующие утверждения:*

- 1) $s - 1 \leq 6/(ys)$;
- 2) если $s = 3$, то либо Γ – граф из $MP(8)$, либо Λ^1 – дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{136, 135, 6, 1; 1, 2, 135, 136\}$, являющийся антиподальным 4-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(2432, 136, 0, 8)$;
- 3) если $s - 1 = y = 1$, то либо Γ – граф из $MP(6)$, либо Λ^1 – дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{x, x - 1, 4, 1; 1, 2, x - 1, x\}$, являющийся антиподальным 3-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $((x + 2)(x + 3)/6, x, 0, 6)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$k \geq ((\bar{k} - 2)^2 + 3(\bar{k} - 2) - 4)/2,$$

поэтому

$$x(x - 1) + y(y - 1)s^2 + 2xys \geq (x + ys)^2 - (x + ys) - 6.$$

Отсюда $s \leq 1 + 6/(ys)$. Неравенство 1) доказано.

Пусть $s = 3$. Тогда $y = 1$ и по лемме 15 либо Δ является (2×4) -решеткой (в этом случае $b_1 = 2$), либо Γ – граф из $MP(8)$, либо Λ^1 – дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{x, x - 1, 6, 1; 1, 2, (x - 1), x\}$, являющийся антиподальным 4-накрытием графа с параметрами $((x^2 + 7x + 8)/8, x, 0, 8)$. Положим $\mu = 2s + 2 = 8$. Если Λ^1 – покрытие двудольного графа, то $x = \mu$ и Γ является графом из $MP(8)$. Если Λ^1 – покрытие недвудольного графа, то $\mu^2 + 4(x - \mu)$ является квадратом некоторого натурального числа n , $n = \mu + 2p$, и по предложению 8.2 из [5] имеем $x = (p + 1)\mu + p^2$, μ делит $p^2(p^2 - 1)$ и $\mu + 2p$ делит $p(p + 1)(p + 2)(p + 3)$. Отсюда $p = 8$ и выполняется утверждение 2).

Пусть $s - 1 = 1$. Ввиду неравенства из утверждения 1) имеем $2 \leq 1 + 3/y$. Если $y = 1$, то по лемме 15 либо Δ является (2×3) -решеткой (в этом случае $b_1 = 2$), либо Γ – граф из $MP(6)$, либо Λ^1 – дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{x, x - 1, 4, 1; 1, 2, x - 1, x\}$, являющийся антиподальным 3-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $((x + 2) \times (x + 3)/2, x, 0, 6)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 17. Если $s = y = 2$, то каждая связная компонента графа Λ^2 является (3×3) -решеткой, граф Δ^* , определенный в лемме 11, сильно регулярен с параметрами $(v/9, t^2 - 7, 8, 18)$ и $t = 7, 14, 28$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s = 2$. Если $y = 2$, то по лемме 11 связная компонента Ω графа Λ^2 является (3×3) -решеткой и граф Δ^* , определенный на множестве $\{\Omega_1, \dots, \Omega_s\}$ связных компонент графа Λ^2 , в котором вершины Ω_i и Ω_j смежны, если $j \neq i$, и некоторая вершина из Ω_i смежна с единственной вершиной из Ω_j , является сильно регулярным с параметрами $(v/9, x, 8, 18)$. Поэтому $n^2 = 100 + 4(x - 18)$ и $x + 7 = t^2$ для подходящего натурального числа t .

По условию целочисленности $36t$ делит $(t + 4)(t^2 - 7)(t^2 + t - 2)$, поэтому t делит $2^3 \cdot 7$, причем t не делится на 8. Таким образом, $t = 7, 14, 28$.

ЛЕММА 18. Если $s = 2$, то $y \neq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s = 2$. Если $y = 3$, то $\bar{k} = x + 6$, $k = (x^2 + 11x + 24)/2$ и $v = (x^2 + 13x + 38)/2$.

Пусть Ω_1 – связная компонента графа Λ^2 , определенного в лемме 11. Тогда Ω_1 является вполне регулярным графом с параметрами $(|\Omega_1|, 6, 1, 2)$. По лемме 5 имеем $|\Omega_1| = 20$ и каждая связная компонента графа Λ^2 содержит точно 20 вершин. В этом случае v делится на 20. Противоречие с тем, что $v = (x^2 + 13x + 38)/2$ не делится на 5. Лемма доказана.

Из лемм 14–18 вытекает следствие.

Список литературы

1. *Махнёв А. А., Падучих Д. В.* Об автоморфизмах графа Ашбахера // Алгебра и логика. 2001. Т. 40. № 2. С. 125–134.
2. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
3. *Махнёв А. А.* О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 1. С. 159–182.
4. *Brouwer A. E., Numata M.* A characterization of some graphs which do not contain 3-claws // Discrete Math. 1994. V. 124. P. 49–54.
5. *Cameron P., Van Lint J.* Designs, Graphs, Codes and their Links // London Math. Soc. Student Texts 22. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1981. P. 240.

Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступило в редакцию
25.05.2004