Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Немировский, Р. Г. Шафиков, Униформизация строго псевдовыпуклых областей. I, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 6, 115–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/im668>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:19:15

УДК 517.55

С. Ю. Немировский, Р. Г. Шафиков

Униформизация строго псевдовыпуклых областей. I

Доказано, что две строго псевдовыпуклые штейновы области с вещественно-аналитическими границами имеют биголоморфные универсальные накрытия при условии, что их границы локально биголоморфно эквивалентны. Это утверждение может рассматриваться как многомерный аналог теоремы униформизации.

Библиография: 27 наименований.

§ 1. Введение

Проблема биголоморфной эквивалентности областей в многомерных комплексных пространствах оказывается весьма сложной. Уже А. Пуанкаре заметил, что единичный шар B в пространстве $\mathbb{C}^2$ биголоморфно не эквивалентен бидиску Δ^2 . Действительно, ситуация может показаться совершенно безнадежной, поскольку практически любые две взятые наугад области в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, будут неэквивалентны. С. И. Пинчук обнаружил, что биголоморфная эквивалентность областей с вещественно-аналитическими границами тесно связана с *локальной* биголоморфной эквивалентностью их границ. Настоящая работа и ее непосредственное продолжение [17] посвящены доказательству следующего общего результата в этом направлении.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть D и D' – штейновы строго псевдовыпуклые области с вещественно-аналитическими границами. Универсальные накрытия областей D и D' биголоморфны тогда и только тогда, когда границы этих областей локально биголоморфно эквивалентны.

В настоящей работе доказывается часть “тогда” основной теоремы. Для этого устанавливается следующая теорема о продолжении, получаемая объединением результатов Пинчука [18]–[20] и Витушкина и других [25], [26] с классической теорией оболочек голоморфности и, в особенности, с результатами Кернера [16] об оболочках голоморфности накрытий.

ТЕОРЕМА А. Пусть D и D' – штейновы строго псевдовыпуклые области с вещественно-аналитическими границами. Тогда любая локальная эквивалентность между их границами продолжается до биголоморфного отображения универсальных накрытий (открытых) областей D и D' .

Теорему А можно подразделить на два различных по сути утверждения. В случае общего положения границы областей несферичны, т. е. нигде локально не эквивалентны единичной сфере в $\mathbb{C}^n$, и имеет место несколько более сильный результат.

Работа первого автора была поддержана грантами РФФИ и INTAS, а также программой Российской академии наук “Теоретическая математика”.

ТЕОРЕМА А.1*. *Если области D и D' в теореме А имеют несферические границы, то любая локальная эквивалентность между ∂D и $\partial D'$ продолжается до биголоморфного отображения универсального накрытия замкнутой области $\overline{D}$ на универсальное накрытие замкнутой области $\overline{D}'$.*

Если границы областей сферичны, т. е. где-то (а следовательно, и всюду по теореме Пинчука [18]) локально эквивалентны сфере, то теорема А по существу эквивалентна следующему многомерному аналогу теоремы униформизации.

ТЕОРЕМА А.2. *Штейнова строго псевдовыпуклая область со сферической границей универсально покрывается единичным шаром.*

В частности, односвязная штейнова область с компактной сферической границей биголоморфна единичному шару. Это утверждение, называемое “теоремой Римана об отображении”, было доказано С. Н. Пинчуком в [18] при более сильном предположении, что граница области односвязна. Двадцать лет спустя С. Черн и С. Жи [5] доказали именно этот результат, но только для областей, лежащих в $\mathbb{C}^n$. Совсем недавно Е. Фалбел [8] заметил, что сделанное Пинчуком предположение на самом деле эквивалентно односвязности самой области, если ее комплексная размерность $n = \dim_{\mathbb{C}} D \geq 3$. (Действительно, по теореме Лефшеца для многообразий Штейна [2], [3] фундаментальная группа штейновой области с гладкой границей комплексной размерности $n \geq 3$ изоморфна фундаментальной группе ее границы; ср. п. 2.3 и п. 4.2.) Отметим, наконец, что вопрос оставался открытым для общих односвязных штейновых областей комплексной размерности два.

В действительности для областей с односвязными границами все сформулированные выше утверждения были доказаны С. Н. Пинчуком и другими авторами (см. §3). В этом случае аналитическое продолжение локальной эквивалентности вдоль границы будет однозначным по теореме о монодромии и доказательство завершается применением стандартной теоремы Хартогса. Наше основное наблюдение состоит в том, что теорема Кернера позволяет непосредственно продолжать многозначные отображения аналогично теореме Хартогса. После этого можно воспользоваться односвязностью (универсального накрытия) области и получить голоморфные отображения с требуемыми свойствами.

Еще одним применением этого подхода является обобщение результата С. М. Ивашковича [13] о продолжении локально биголоморфных отображений вещественных гиперповерхностей с невырожденной знакопеременной формой Леви в $\mathbb{CP}^n$. В роли односвязной области в этом случае выступает само комплексное проективное пространство.

ТЕОРЕМА В. *Пусть M и M' – компактные гиперповерхности в $\mathbb{CP}^n$ с невырожденной знакопеременной формой Леви. Предположим, что M вещественно-аналитична, а M' вещественно-алгебраична. Если M и M' локально эквивалентны, то эта эквивалентность задается автоморфизмом пространства $\mathbb{CP}^n$.*

*Замечание при корректуре. После того как работа была сдана в печать, Ф. Форстнерич сообщил авторам, что теорема А.1 была получена им в 1985 г. в его диссертации “Proper holomorphic mappings in several complex variables”.

Здесь опять же случай односвязной гиперповерхности M был рассмотрен ранее в работе [12]. Кстати, методы этой работы могут быть использованы для обобщения теоремы В на общие псевдovoгнутые CR-подмногообразия большей коразмерности в $\mathbb{CP}^n$ с локально инъективным отображением Сегре.

В настоящей работе §2 содержит изложение общей теории римановых областей над комплексными многообразиями и их оболочек голоморфности. Теорема Кернера и ее типичные приложения к аналитическому продолжению обсуждаются в п. 2.3. Затем в п. 2.4 приводится обобщение теоремы Кернера на области над комплексным проективным пространством $\mathbb{CP}^n$, а в п. 2.5 доказывается вариант результатов Кернера и Ивашковича о продолжении локально биголоморфных отображений. В §3 по существу излагаются известные факты об аналитическом продолжении ростков биголоморфных отображений между вещественно-аналитическими гиперповерхностями. Последний §4 содержит доказательства сформулированных во введении теорем и некоторые дальнейшие следствия и примеры.

Авторы признательны С.М. Ивашковичу и В.В. Шевчину за полезные обсуждения.

§2. Общие результаты об аналитическом продолжении

2.1. Римановы области над комплексными многообразиями. Область над комплексным многообразием X — это пара (D, p_D) , состоящая из связного хаусдорфова топологического пространства D и локально гомеоморфного отображения $p_D: D \rightarrow X$. На пространстве D существует однозначно определенная комплексная структура, относительно которой проекция $p_D: D \rightarrow X$ является локально биголоморфным отображением.

Говорят, что область (D, p_D) содержится в области (G, p_G) , если задано отображение $j: D \rightarrow G$, для которого $p_G \circ j = p_D$. Отметим, что “включение” j а priori будет только локально биголоморфным отображением, т.е. может не быть глобально инъективным.

Например, всякую обыкновенную область (т.е. связное открытое подмножество) $D \subset X$ можно рассматривать как область над X , полагая $p_D = \text{id}$. В этом случае отображение $j: D \rightarrow G$ является инъективным, поскольку $p_G \circ j = \text{id}$.

Область (D, p_D) называется *локально штейновой*, если каждая точка $x \in X$ имеет такую окрестность $V \ni x$, что ее прообраз $p_D^{-1}(V) \subset D$ является многообразием Штейна.

2.2. Оболочки голоморфности. Оболочкой голоморфности области (D, p_D) над многообразием X называется максимальная область $(H(D), p_{H(D)})$ над многообразием X , на которую голоморфно продолжается любая голоморфная на D функция.

Точнее, это определение означает, что задано локально биголоморфное отображение $\alpha = \alpha_D: D \rightarrow H(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $p_{H(D)} \circ \alpha = p_D$ (включение);
- 2) для любой голоморфной функции $f \in \mathcal{O}(D)$ найдется голоморфная функция $F \in \mathcal{O}(H(D))$ со свойством $F \circ \alpha = f$ (продолжение);
- 3) если область $p_G: G \rightarrow X$ и локально биголоморфное отображение $\beta: D \rightarrow G$ удовлетворяют условиям 1) и 2) с заменой $H(D)$ на G , то найдется локально биго-

ломорфное отображение $\gamma: G \rightarrow H(D)$, для которого $\gamma \circ \beta = \alpha$ и $p_{H(D)} \circ \gamma = p_G$ (максимальность).

По теореме Туллена оболочка голоморфности существует и единственна с точностью до естественного изоморфизма. Отметим снова, что отображение $\alpha: D \rightarrow H(D)$ может не быть инъективным. Однако оно будет таковым, если $D \subset X$ – обыкновенная область в многообразии X .

Картан, Туллен и Ока доказали, что область $(H(D), p_{H(D)})$ является *локально штейновой областью* над X . Ока, Докье и Грауэрт показали, что всякая локально штейнова область над многообразием Штейна сама является многообразием Штейна. Следовательно, *оболочка голоморфности любой области над многообразием Штейна является многообразием Штейна*.

Еще одно полезное наблюдение заключается в том, что отображения в штейновы многообразия продолжаются так же, как голоморфные функции.

ЛЕММА 2.1. *Любое голоморфное отображение $f: D \rightarrow Y$ в многообразии Штейна продолжается до голоморфного отображения $F: H(D) \rightarrow Y$ (в том смысле, что $F \circ \alpha_D = f$, где $\alpha_D: D \rightarrow H(D)$ – естественное отображение в оболочку голоморфности).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это практически очевидно. Пусть $i: Y \rightarrow \mathbb{C}^N$ – собственное голоморфное вложение многообразия Y в комплексное евклидово пространство достаточно большой размерности. Компоненты отображения $i \circ f: D \rightarrow \mathbb{C}^N$ суть голоморфные функции на D и потому продолжаются на область $H(D)$. Продолженное таким образом отображение принимает значения в многообразии $Y = i(Y)$ по теореме единственности.

2.3. Накрытия и оболочки над многообразиями Штейна. Пусть (D, p_D) – область над штейновым многообразием X . Пусть $\pi: \hat{D} \rightarrow D$ – универсальное накрытие пространства D . Пара $(\hat{D}, p_{\hat{D}})$, где $p_{\hat{D}} \stackrel{\text{def}}{=} p_D \circ \pi$, является областью над многообразием X . Значит, можно рассмотреть ее оболочку голоморфности $(H(\hat{D}), p_{H(\hat{D})})$.

ТЕОРЕМА 2.2 [16]. *Оболочка голоморфности универсального накрытия области D совпадает с универсальным накрытием оболочки голоморфности области D . Точнее говоря, имеется коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \hat{D} & \xrightarrow{\alpha_{\hat{D}}} & H(\hat{D}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow H(\pi) \\ D & \xrightarrow{\alpha_D} & H(D) \end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки – это естественные отображения в оболочки голоморфности, а вертикальные – универсальные накрытия.

Полезно иметь в виду следующую интерпретацию этой теоремы в терминах вейерштрассовой теории аналитического продолжения. Голоморфная функция на накрытии над областью D соответствует ростку голоморфной функции, который допускает неограниченное аналитическое продолжение вдоль любого пути в области D . (С этой точки зрения, накрытие – это область над многообразием D ,

не имеющая граничных точек; определения граничных точек римановых областей см. в [11].) Теорема 2.2 может быть переформулирована следующим образом: *если росток голоморфной функции продолжается вдоль любого пути в области D , то он продолжается и вдоль любого пути в оболочке голоморфности этой области.*

ПРИМЕР 2.3 (усиленная теорема о монодромии). Классическая теорема о монодромии утверждает, что если росток голоморфной функции неограниченно продолжается в односвязной области, то это продолжение однозначно, т. е. является голоморфной функцией. Из теоремы 2.2 следует, что то же самое заключение справедливо при условии, что односвязна оболочка голоморфности этой области.

ПРИМЕР 2.4 (псевдовыпуклые области). Пусть $D \subset X$ – псевдовыпуклая область с гладкой границей в штейновом многообразии X комплексной размерности $n \geq 2$. Тогда область D штейнова по теореме Ока–Докье–Грауэрта. Пусть $V \subset D$ – пересечение трубчатой окрестности границы области D в многообразии X с самой областью D . Это открытое подмножество области D , которое гомотопически эквивалентно ее границе ∂D . Всякая голоморфная в V функция продолжается на всю область D по теореме Хартогса, примененной к штейновой области D . Отсюда следует, что множество V связно, а его оболочка голоморфности есть в точности область D .

По теореме 2.2 оболочкой голоморфности универсального накрытия $\pi: \hat{V} \rightarrow V$ будет универсальное накрытие области D . Другими словами, если росток голоморфной функции продолжается вдоль любого пути в V , то он продолжается и вдоль любого пути в D . В этой ситуации усиленная теорема о монодромии утверждает, что если область D односвязна, то всякая голоморфная функция $f \in \mathcal{O}(\hat{V})$ есть прообраз $F \circ \pi$ некоторой голоморфной функции $F \in \mathcal{O}(D)$.

С учетом последнего наблюдения имеет смысл сравнить фундаментальные группы областей D и V , или, что то же самое, области D и ее границы ∂D . Стандартное применение теории Морса к многообразиям Штейна (как в [2] или [3]) показывает, что гомоморфизм $\pi_1(V) \rightarrow \pi_1(D)$ является изоморфизмом, если комплексная размерность $n \geq 3$. Значит, в этом случае мы не получаем никакого усиления по сравнению с обычной теоремой о монодромии.

Если $n = 2$, то гомоморфизм $\pi_1(V) \rightarrow \pi_1(D)$ только сюръективен и фундаментальная группа границы может быть заметно больше фундаментальной группы области. Например, Т. том Дик и Т. Петри [6] привели явные примеры таких аффинных алгебраических поверхностей $\Sigma \subset \mathbb{C}^3$, что пересечение поверхности Σ с шаром достаточно большого радиуса является *стягиваемой* строго псевдовыпуклой областью, граница которой имеет *бесконечную* фундаментальную группу.

2.4. Оболочки над комплексным проективным пространством.

Аналитическое продолжение в пространстве $\mathbb{CP}^n$ можно достаточно хорошо описать с помощью следующей теоремы Фуджиты [9] и Такеучи [23]: *локально штейнова область над $\mathbb{CP}^n$ либо штейнова, либо совпадает с самим $\mathbb{CP}^n$.* Особенно элегантное и ясное доказательство этого результата было дано Т. Уэда [24].

В частности, для любой области (D, p_D) над $\mathbb{CP}^n$ ее оболочка голоморфности $H(D)$ является либо штейновой областью над $\mathbb{CP}^n$, либо тавтологической облас-

тью $(\mathbb{CP}^n, \text{id})$. Ясно, что вторая возможность характеризуется условием, что все голоморфные функции в области D постоянны.

ТЕОРЕМА 2.5. *Теорема 2.2 справедлива для любой области (D, p_D) над комплексным проективным пространством $\mathbb{CP}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если оболочка голоморфности $H(D)$ штейнова, то мы можем снабдить область D локально биголоморфным отображением $\alpha_D: D \rightarrow H(D)$ и рассмотреть ее как область над $H(D)$. Следовательно, в этом случае утверждение вытекает непосредственно из теоремы Кернера.

Если $H(D) = \mathbb{CP}^n$, то аналог теоремы 2.2 дается следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Пусть в области (D, p_D) над пространством $\mathbb{CP}^n$ не существует непостоянных голоморфных функций. Тогда то же самое верно для любого накрытия $\pi: \hat{D} \rightarrow D$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай универсального накрытия, так как всякая голоморфная функция на любом накрытии над D может быть поднята на универсальное накрытие.

Предположим, что многообразие $H(\hat{D})$ штейново, и придем к противоречию, повторяя рассуждения Кернера из [16, с. 127–129]. Пусть Δ – группа преобразований скольжения накрытия $\hat{D}$. Действие этой группы на $\hat{D}$ продолжается до собственно разрывного свободного действия некоторой ее факторгруппы $\tilde{\Delta}$ на $H(\hat{D})$. Факторпространство $H(\hat{D})/\tilde{\Delta}$ является областью над $\mathbb{CP}^n$, содержащей область $D = \hat{D}/\Delta$ и накрытой областью $H(\hat{D})$. Лемма 1 (Hilfssatz 1) из работы [16] позволяет заключить, что эта область локально штейнова. Однако она не может быть штейновой, так как в этом случае существовали бы непостоянные голоморфные функции на области D . Итак, $H(\hat{D})/\tilde{\Delta} = \mathbb{CP}^n$ по теореме Фуджиты. Но пространство $\mathbb{CP}^n$ односвязно, значит, $H(\hat{D}) = \mathbb{CP}^n$ вопреки сделанному предположению.

Поскольку нам понадобится рассматривать также и продолжение мероморфных функций, введем понятие *оболочки мероморфности* $(M(D), p_{M(D)})$ области (D, p_D) над комплексным многообразием X . Определение совершенно аналогично голоморфному случаю. А именно, $(M(D), p_{M(D)})$ есть максимальная содержащая (D, p_D) область над X , в которую мероморфно продолжается всякая мероморфная функция на D . Существование и единственность оболочки мероморфности следуют из теоремы типа Туллена. Теорема Леви о продолжении мероморфных функций и непрямая теорема Ока гарантируют, что оболочка мероморфности любой области есть локально штейнова область над X .

Можно показать, что оболочка мероморфности любой области над комплексным проективным пространством совпадает с оболочкой голоморфности этой области, но нам понадобится только следующий частный случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Пусть (D, p_D) – область над $\mathbb{CP}^n$, все голоморфные функции в которой постоянны. Тогда любая мероморфная функция на D представляется в виде $f \circ p_D$ для некоторой рациональной функции f на $\mathbb{CP}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо показать, что оболочка мероморфности области (D, p_D) совпадает с $\mathbb{CP}^n$. Тогда всякая мероморфная функция на D будет прообразом мероморфной функции на $\mathbb{CP}^n$, которая, в свою очередь, будет рациональной по теореме GAGA, доказанной Серром.

Предположим, от противного, что оболочка мероморфности не равна $\mathbb{CP}^n$. Поскольку она локально штейнова, то по теореме Фуджиты она должна быть штейновой. Но отсюда следует, что область (D, p_D) содержится в штейновой области и, следовательно, допускает непостоянные голоморфные функции, что противоречит сделанному предположению.

ПРИМЕР 2.8 (гиперповерхности со знакопеременной формой Леви в $\mathbb{CP}^n$). Пусть $M \subset \mathbb{CP}^n$ – гладкая замкнутая вещественная гиперповерхность, форма Леви которой невырождена и неопределена (т. е. имеет в каждой точке как положительные, так и отрицательные собственные значения). Рассмотрим связную окрестность $U \supset M$, и пусть $H(U)$ и $M(U)$ обозначают ее оболочку голоморфности и мероморфности соответственно. Заметим, что ни одна из этих оболочек не является штейновой, поскольку гиперповерхность M не может лежать в многообразии Штейна. Итак, $H(U) = M(U) = \mathbb{CP}^n$ по теореме Фуджиты. Другими словами, любая голоморфная функция в области U постоянна, а любая мероморфная функция рациональна.

Далее, пусть $\pi: \hat{U} \rightarrow U$ – какое-нибудь накрытие окрестности U . Тогда любая голоморфная функция на $\hat{U}$ постоянна по предложению 2.6 и, следовательно, любая мероморфная функция на $\hat{U}$ есть прообраз рациональной функции в силу предложения 2.7. Значит, $H(\hat{U}) = M(\hat{U}) = \mathbb{CP}^n$.

2.5. Продолжение локально биголоморфных отображений. Изложенная в этом параграфе теория оболочек голоморфности и мероморфности позволяет дать единообразное изложение (и некоторое обобщение) результатов о голоморфном продолжении локально биголоморфных отображений, полученных Кернером [15] и Ивашковичем [13].

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть X и Y – комплексные многообразия, каждое из которых биголоморфно либо многообразию Штейна, либо комплексному проективному пространству $\mathbb{CP}^n$. Пусть (D, p_D) – область над X и $(H(D), p_{H(D)})$ – ее оболочка голоморфности. Тогда всякое локально биголоморфное отображение $f: D \rightarrow Y$ продолжается до локально биголоморфного отображения $F: H(D) \rightarrow Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с простого общего замечания. Пусть $A \subset H(D)$ – нетривиальная комплексная гиперповерхность (комплексное аналитическое подмножество чистой коразмерности один). Тогда A пересекает образ $\alpha_D(D)$ области D в ее оболочке голоморфности. Действительно, дополнение $H(D) \setminus A$ является собственным локально штейновым открытым подмножеством в $H(D)$ и потому штейново по теоремам Ока–Докье–Грауэрта (если $H(D)$ штейново) и Фуджиты (если $H(D) = \mathbb{CP}^n$). Следовательно, найдется голоморфная функция, скажем $g \in \mathcal{O}(H(D) \setminus A)$, которая не может быть голоморфно продолжена на $H(D)$. Если пересечение $\alpha_D(D) \cap A$ пусто, то функция $g \circ \alpha_D \in \mathcal{O}(D)$ не будет продолжаться на $H(D)$, что противоречит определению оболочки голоморфности.

Предположим сначала, что многообразие Y штейново. Тогда отображение $f: D \rightarrow Y$ продолжается до голоморфного отображения $F: H(D) \rightarrow Y$ по лемме 2.1. Рассмотрим множество ветвления отображения F , т. е. комплексную гиперповерхность в $H(D)$, образованную теми точками, в которых $\text{rank}_{\mathbb{C}}(F) < n =$

$\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y$. Эта гиперповерхность не пересекает $\alpha_D(D)$ и, следовательно, пуста по сделанному выше наблюдению. Значит, отображение F локально биголоморфно.

Случай $Y = \mathbb{CP}^n$ разбивается на два случая. Предположим сперва, что в области D существует непостоянная голоморфная функция. Поскольку отображение $f: D \rightarrow \mathbb{CP}^n$ локально биголоморфно, мы можем рассмотреть пару (D, f) как область над многообразием Y . Обозначим через $(\tilde{D}, \tilde{f})$ оболочку голоморфности этой области над Y . (Мы используем другое обозначение для оболочек над Y , чтобы избежать путаницы.) Пусть $\beta: D \rightarrow \tilde{D}$ – естественное отображение области в ее оболочку. Напомним, что $\tilde{f} \circ \beta = f$. Поскольку $\mathcal{O}(D) \neq \mathbb{C}$, оболочка голоморфности $\tilde{D}$ является многообразием Штейна по теореме Фуджиты. Как мы уже убедились, отображение $\beta: D \rightarrow \tilde{D}$ продолжается до локально биголоморфного отображения $V: H(D) \rightarrow \tilde{D}$ такого, что $V \circ \alpha_D = \beta$. Композиция отображений $F \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f} \circ V$ является требуемым продолжением отображения f на область $H(D)$. Действительно,

$$F \circ \alpha_D = \tilde{f} \circ V \circ \alpha_D = \tilde{f} \circ \beta = f.$$

Наконец, рассмотрим случай, когда $\mathcal{O}(D) = \mathbb{C}$. Это возможно, только если $X = \mathbb{CP}^n$. Таким образом, можно применить предложение 2.7 к компонентам отображения f относительно какой-либо аффинной системы координат на $Y = \mathbb{CP}^n$. Значит, существует рациональное отображение $F: \mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n$ такое, что $F \circ \alpha_D = f$. Точно так же, как и раньше, мы получаем, что множество ветвления отображения F (определяемое как замыкание в топологии Зариского множества точек, в которых ранг отображения F меньше максимального) должно быть пусто. Следовательно, отображение F локально биголоморфно на дополнении к своему множеству неопределенности I . Однако множество I имеет комплексную коразмерность как минимум два, и мы можем применить предыдущий случай теоремы в штейновой окрестности любой точки из множества I и заключить, что отображение F в действительности локально биголоморфно всюду.

Локально биголоморфное отображение $\mathbb{CP}^n$ в себя – это просто линейный автоморфизм. Итак, мы получаем следствие (ср. с [13] и [12]).

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Пусть (D, p_D) – область над $\mathbb{CP}^n$, в которой не существуют непостоянные голоморфные функции. Тогда любое локально биголоморфное отображение $f: D \rightarrow \mathbb{CP}^n$ имеет вид $L \circ p_D$ для линейного автоморфизма $L \in \text{Aut}(\mathbb{CP}^n)$.

Как подсказывает доказательство теоремы 2.9, голоморфное, но не локально биголоморфное отображение $f: D \rightarrow \mathbb{CP}^n$ может не иметь голоморфного продолжения на $H(D)$. Например, квадратичное преобразование $Q: \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ представляет собой бирациональное отображение с тремя точками неопределенности. Очевидно, что если область D – это проколота окрестность одной из этих точек, то отображение Q голоморфно в D , но не может быть голоморфно продолжено в $H(D)$. Это замечание было сделано С. М. Ивашковичем в [14] и послужило отправной точкой для его глубоких результатов о мероморфном продолжении (см., например, [14]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.11. Т. Уэда [24] обобщил теорему Фуджиты на многообразия Грассмана $\text{Gr}_{\mathbb{C}}(m, n)$. Отсюда следует, что теорема 2.9 и следствие 2.10 остаются справедливыми, если в их формулировке заменить $\mathbb{CP}^n$ на любой комплексный грассманиан.

§ 3. Аналитическое продолжение вдоль вещественных гиперповерхностей

3.1. Продолжение локальных эквивалентностей между вещественными гиперповерхностями. Говорят, что вещественные гиперповерхности M и M' в $\mathbb{C}^n$ *локально биголоморфно эквивалентны* (или просто *эквивалентны*) в точках $p \in M$ и $p' \in M'$, если существуют связные открытые окрестности $U \ni p$ и $U' \ni p'$ в $\mathbb{C}^n$ и биголоморфное отображение $f: U \rightarrow U'$ такое, что $f(M \cap U) = M' \cap U'$ и $f(p) = p'$. Важным свойством локальных эквивалентностей между вещественно-аналитическими гиперповерхностями в многомерных комплексных многообразиях является возможность их продолжения вдоль путей. Первый результат такого типа был получен С. И. Пинчуком.

ТЕОРЕМА 3.1 [18]. Пусть $M \subset \mathbb{C}^n$ – связная строго псевдовыпуклая вещественно-аналитическая гиперповерхность, которая локально эквивалентна единичной сфере $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ в некоторой точке $p \in M$. Тогда росток отображения, осуществляющего эту эквивалентность, продолжается вдоль любого пути в M как локально биголоморфное отображение, переводящее гиперповерхность M в сферу S^{2n-1} .

Этот результат позволяет определить *сферические* гиперповерхности как связные строго псевдовыпуклые вещественно-аналитические гиперповерхности, эквивалентные сфере S^{2n-1} в какой-то (а значит, в любой) своей точке. Из теоремы Пинчука немедленно следует, что компактная односвязная сферическая гиперповерхность M в произвольном комплексном многообразии X биголоморфна стандартной сфере. Поэтому в формулировке теоремы 3.1 можно заменить сферу любой замкнутой односвязной сферической гиперповерхностью M' . Этот результат перестанет быть верным, если отказаться от требования односвязности гиперповерхности M' и предполагать ее просто компактной и сферической (см. [4]).

С. И. Пинчук доказал в [19], что условия компактности достаточно в *несферическом* случае, т. е. если заменить сферу S^{2n-1} на компактную строго псевдовыпуклую гиперповерхность $M' \subset \mathbb{C}^n$, которая не эквивалентна сфере ни в одной точке. Это утверждение было впоследствии обобщено на гиперповерхности в произвольных комплексных многообразиях [25].

ТЕОРЕМА 3.2 [20], [25], [26]. Пусть X и X' – комплексные многообразия, $\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} X' = n$, и пусть $M \subset X$ и $M' \subset X'$ – вещественно-аналитические строго псевдовыпуклые несферические гиперповерхности, причем M связна, а M' компактна. Если гиперповерхности M и M' локально эквивалентны в точках $p \in M$ и $p' \in M'$, то росток ${}_p f$ осуществляющего эту эквивалентность отображения продолжается вдоль любого пути в M как локально биголоморфное отображение, переводящее гиперповерхность M в гиперповерхность M' .

Существенно меньше известно об отображениях гиперповерхностей, не являющихся строго псевдовыпуклыми. Примеры, построенные В. К. Белошапкой и В. В. Ежовым, позволяют предположить, что распространить на этот случай теорему 3.2 едва ли возможно. С другой стороны, лежащий в основе доказательства теоремы 3.1 принцип симметрии по-прежнему можно использовать в его геометрической форме при условии, что гиперповерхность в образе вещественно-алгебраична (см. [21], [22]). Для гиперповерхностей с невырожденной знакопеременной формой Леви этот подход влечет следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.3 [12]. *Пусть M – связная вещественно-аналитическая невырожденная по Леви гиперповерхность в комплексном многообразии X , и пусть M' – компактная вещественно-алгебраическая невырожденная по Леви гиперповерхность в комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$. Предположим, что гиперповерхности M и M' локально эквивалентны в точках $p \in M$ и $p' \in M'$. Тогда росток ${}_p f$ осуществляющего эту эквивалентность отображения продолжается вдоль любого пути в M как локально биголоморфное отображение, переводящее M в M' .*

В работе [12] с помощью этого результата была доказана теорема В для односвязной гиперповерхности $M \subset \mathbb{CP}^n$. Отметим еще, что если обе гиперповерхности M и M' вещественно-алгебраичны, то теорема 3.3 по существу следует из известного результата Вебстера [27]: если M и M' – вещественно-алгебраические гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$, локально эквивалентные в точках $p \in M$ и $p' \in M'$, причем точки p и p' не являются точками вырождения формы Леви, то осуществляющее эту эквивалентность отображение алгебраично, т. е. его график содержится в алгебраическом подмножестве прямого произведения $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

3.2. Аналитическое продолжение в окрестность. Если гиперповерхность M неодносвязна, то аналитическое продолжение ростка ${}_p f: M \rightarrow M'$ вдоль негомоторных путей, соединяющих точку $p \in M$ с какой-то точкой $q \in M$, может приводить к различным отображениям, которые а priori могут иметь различные радиусы сходимости в точке q . Для отображений несферических строго псевдовыпуклых гиперповерхностей этого не происходит в силу результата Витушкина (см. [26, п. 8.1]). В общем случае продолжение в некоторое фиксированное открытое множество можно получить с помощью теории, изложенной в § 2.

ЛЕММА 3.4. *Пусть $M \subset X$ – компактная строго псевдовыпуклая гиперповерхность и D' – штейнова строго псевдовыпуклая область. Предположим, что росток ${}_p f: M \rightarrow \partial D'$ локально биголоморфного отображения продолжается вдоль любого пути в M как локально биголоморфное отображение, переводящее M в границу $\partial D'$. Тогда существует такая окрестность $U \subset X$ гиперповерхности M , что росток ${}_p f$ продолжается как локально биголоморфное отображение со значениями в D' вдоль любого пути в строго псевдовыпуклой односторонней окрестности U^- гиперповерхности M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для любой точки $q \in M$ найдется такая окрестность $U_q \subset X$, что всякое голоморфное отображение g , полученное аналитическим продолжением ростка ${}_p f$, продолжается в строго псевдовыпуклую часть U_q . Пусть V – такая окрестность точки q , что пересечение $M \cap V$ односвязно. Тогда g продолжается до локально биголоморфного отображения из некоторой

окрестности множества $M \cap V$. С псевдовыпуклой стороны гиперповерхности M это отображение принимает значения в области D' . В силу строгой псевдовыпуклости гиперповерхности M существует такая окрестность $U_q \subset X$ точки q , что всякая функция, голоморфная в произвольной односторонней окрестности множества $M \cap V$, голоморфно продолжается в U_q^- , псевдовыпуклую часть U_q . По теореме 2.9 это же утверждение справедливо и для локально биголоморфных отображений в штейново многообразии D' . По построению окрестность U_q не зависит от отображения g .

ЛЕММА 3.5 [13]. *Пусть $M \subset X$ – компактная гиперповерхность с невырожденной знакопеременной формой Леви. Предположим, что росток ${}_p\mathbf{f}: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ локально биголоморфного отображения в комплексное проективное пространство продолжается как локально биголоморфное отображение вдоль любого пути в M . Тогда существует такая окрестность $U \subset X$ гиперповерхности M , что росток ${}_p\mathbf{f}$ продолжается как локально биголоморфное отображение вдоль любого пути в этой окрестности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждение аналогично предыдущему. Пусть $V \ni q$ – координатная окрестность точки $q \in M$, для которой пересечение $M \cap V$ односвязно. По теореме Х. Леви найдется такая окрестность $U_q \subset V$ точки q , что всякая функция, голоморфная в окрестности множества $M \cap V$, голоморфно продолжается в U_q . По теореме 2.9 тем же свойством обладают локально биголоморфные отображения со значениями в $\mathbb{CP}^n$. Следовательно, любое голоморфное отображение, полученное продолжением ростка ${}_p\mathbf{f}$, продолжается до локально биголоморфного отображения $U_q \rightarrow \mathbb{CP}^n$.

§ 4. Глобальное продолжение локальных отображений

4.1. Общая постановка и доказательство теоремы А в несферическом случае. Пусть D и D' – штейновы строго псевдовыпуклые области с существенно-аналитическими границами. Предположим, что гиперповерхности ∂D и $\partial D'$ локально эквивалентны в точках $p \in \partial D$ и $p' \in \partial D'$. Обозначим через ${}_p\mathbf{f}: \partial D \rightarrow \partial D'$ росток биголоморфного отображения, осуществляющего эту эквивалентность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Если росток ${}_p\mathbf{f}$ может быть продолжен как локально биголоморфное отображение, переводящее ∂D в $\partial D'$, вдоль любого пути в ∂D , то он продолжается как локально биголоморфное отображение со значениями в $\bar{D}'$ вдоль любого пути в $\bar{D}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.4 существует такая окрестность $U \supset \partial D$, что росток ${}_p\mathbf{f}$ продолжается вдоль любого пути в $V = U \cap D$ как локально биголоморфное отображение со значениями в D' . Это продолжение задает локально биголоморфное отображение $f: \hat{V} \rightarrow D'$, определенное на универсальном накрытии $\hat{V} \rightarrow V$.

По теореме Хартогса оболочкой голоморфности области V является область D (см. пример 2.4). Следовательно, по теореме Кернера оболочкой голоморфности универсального накрытия $\hat{V} \rightarrow V$ будет универсальное накрытие $\pi: \hat{D} \rightarrow D$. Из теоремы 2.9 следует, что отображение $f: \hat{V} \rightarrow D'$ продолжается до локально биголоморфного отображения $F: \hat{D} \rightarrow D'$.

Пусть $\bar{\pi}: \bar{Y} \rightarrow \bar{D}$ – универсальное накрытие замыкания области D . Тогда $\bar{Y}$ является комплексным многообразием с (вообще говоря, некомпактным) краем $\partial Y = \bar{\pi}^{-1}(\partial D)$ и внутренностью $Y = \bar{Y} - \partial Y = \hat{D}$. По построению вблизи всякой граничной точки $q \in \partial Y$ отображение $F: Y \rightarrow D'$ совпадает с некоторым подъемом продолжения ростка ${}_p f$. Значит, это отображение продолжается до локально биголоморфного отображения $\bar{F}: \bar{Y} \rightarrow \bar{D}'$ комплексных многообразий с краем. Другими словами, росток ${}_p f$ продолжается как локально биголоморфное отображение со значениями в $\bar{D}'$ вдоль любого пути в $\bar{D}$.

Теперь можно доказать усиленный вариант теоремы А для несферических областей – теорему А.1. Действительно, пусть росток ${}_p f: \partial D \rightarrow \partial D'$ соответствует локальной эквивалентности границ. По теореме 3.2 этот росток продолжается вдоль любого пути в ∂D . Следовательно, он продолжается как локально биголоморфное отображение вдоль любого пути в $\bar{D}$ по предложению 4.1. Такое же утверждение справедливо и для ростка обратного отображения ${}_p f^{-1}: \partial D' \rightarrow \partial D$. Значит, из теоремы о монодромии следует, что продолжение ростка ${}_p f$ определяет биголоморфизм универсального накрытия замыкания области D на универсальное накрытие замыкания области D' .

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть D и D' – штейновы строго псевдовыпуклые области с локально эквивалентными несферическими границами. Если фундаментальная группа области D конечна, то конечна и фундаментальная группа области D' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фундаментальная группа компактного многообразия с краем (например, замкнутой области $\bar{D}$) конечна тогда и только тогда, когда его универсальное накрытие компактно.

4.2. Униформизация штейновых областей со сферической границей.

Всякая локальная эквивалентность между сферическими гиперповерхностями факторизуется через сферу. Следовательно, остается доказать теорему А в случае, когда область D' – единичный шар $B \subset \mathbb{C}^n$. Обозначим через $S = \partial B$ единичную сферу. По теореме 3.1 и предложению 4.1 всякий росток локальной эквивалентности ${}_p f: \partial D \rightarrow S$ продолжается до локально биголоморфного отображения многообразий с краем $\bar{F}: \bar{Y} \rightarrow \bar{B}$ из универсального накрытия замкнутой области $\bar{D}$ в замкнутый единичный шар.

Отображение $\bar{F}$ можно рассматривать как продолжение введенного Бернсом и Шнайдером [4] “развертывающего отображения” границы на универсальное накрытие области. В частности, это отображение наследует следующее важное свойство эквивариантности.

ЛЕММА 4.3. Пусть $\Gamma = \pi_1(D) = \pi_1(\bar{D})$ – группа преобразований скольжения универсального накрытия $\bar{\pi}: \bar{Y} \rightarrow \bar{D}$. Существует такое представление $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(B)$, что $\rho(\gamma) \circ \bar{F}(x) = \bar{F} \circ \gamma(x)$ для всех $x \in \bar{Y}$ и $\gamma \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как заметили Бернс и Шнайдер [4, § 1], существование представления ρ , для которого требуемое соотношение выполнено во всех точках $x \in \partial Y$, сразу следует из теоремы Пуанкаре–Александера [1]. То же соотношение выполнено всюду на $\bar{Y}$ по теореме единственности.

Из примеров, приведенных в работе [4], следует, что росток обратного отображения $p_*f^{-1}: S \rightarrow \partial D$ может не продолжаться вдоль любого пути в сфере S . С другой стороны, обратное отображение продолжается вдоль любого пути в *открытом* шаре B . Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 4.4. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что любая точка $x \in Y$ имеет окрестность $V \subset Y$ со следующими свойствами:*

- 1) *ограничение отображения $F|_V: V \rightarrow F(V)$ биголоморфно;*
- 2) *$F(V)$ содержит шар радиуса ε с центром в точке $F(x)$ в метрике Пуанкаре единичного шара B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h – стандартная евклидова метрика в $\mathbb{C}^n$. Метрика Пуанкаре мажорирует евклидову метрику в шаре B . В частности, евклидов шар радиуса $R > 0$ с центром в точке $b \in B$ содержит шар в метрике Пуанкаре того же радиуса с центром в b .

Обозначим через $\bar{F}^*h$ прообраз евклидовой метрики на многообразии с краем $\bar{Y}$. Пусть $\Phi \subset Y$ – фундаментальная область для действия группы Γ на многообразии Y . Заметим, что Φ является относительно компактным подмножеством в $\bar{Y}$. Следовательно, существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки $x \in \Phi$ отображение $\bar{F}$ биголоморфно отображает шар радиуса ε с центром в x относительно метрики $\bar{F}^*h$ на пересечение евклидова шара того же радиуса с центром в точке $\bar{F}(x)$ с замкнутым единичным шаром $\bar{B}$. Поскольку евклидов шар с центром во внутренней точке шара B содержит шар того же радиуса и с тем же центром, но в метрике Пуанкаре, мы получаем, что любая точка из области Φ действительно имеет окрестность, удовлетворяющую условиям 1) и 2).

Пусть теперь $x \in Y$ – произвольная точка. По определению фундаментальной области найдется преобразование скольжения $\gamma \in \Gamma$, для которого $\gamma(x) \in \Phi$. Пусть W – построенная только что окрестность точки $\gamma(x)$, и пусть $V = \gamma^{-1}(W)$. По лемме 4.3 выполнено тождество

$$F = \rho(\gamma)^{-1} \circ F \circ \gamma.$$

Отсюда следует, что отображение F биголоморфно в V тогда и только тогда, когда оно биголоморфно в W . Кроме того, образ $F(V) = \rho(\gamma)^{-1}(F(W))$ окрестности V содержит шар в метрике Пуанкаре радиуса ε с центром $F(x)$, поскольку $F(W)$ содержит шар этого же радиуса с центром в точке $F(\gamma(x))$, а автоморфизм $\rho(\gamma)^{-1}$ является изометрией метрики Пуанкаре.

В силу односвязности шара B отображение открытых многообразий $F: Y \rightarrow B$ будет биголоморфно. Тем самым доказательство теоремы А и теоремы А.2 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5 (граничное поведение, I). Зная, что отображение F биголоморфно, легко доказать, что отображение $\bar{F}$ инъективно на крае ∂Y многообразия $\bar{Y}$. Значит, отображение $\bar{F}$ биголоморфно отображает многообразие с краем $\bar{Y}$ на множество $\bar{B} \setminus A$, где $A = S \setminus \bar{F}(\partial Y)$ – некоторое замкнутое подмножество единичной сферы. Другими словами, замыкание области D униформируется множеством $\bar{B} \setminus A$. При этом подмножество A зависит от области D и его возможная структура остается достаточно загадочной.

Теорема об униформизации налагает сильные ограничения на топологию областей со сферическими границами.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Пусть D – штейнова строго псевдовыпуклая область со сферической границей. Тогда высшие гомотопические группы $\pi_k(D)$ тривиальны для всех $k \geq 2$. Если область D не биголоморфна шару, то ее фундаментальная группа бесконечна и не содержит нетривиальных конечных подгрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем чисто топологический вывод этого утверждения. Высшие гомотопические группы тривиальны, поскольку универсальное накрытие области D стягиваемо. Допустим, что в группе $\pi_1(D)$ существует нетривиальный элемент конечного простого порядка $p > 0$. Пусть $\tilde{D}$ – накрытие области D , соответствующее подгруппе, порожденной этим элементом. Тогда $\pi_1(\tilde{D}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и $\pi_k(\tilde{D}) = 0$ для всех $k \geq 2$. По теореме Гуревича–Эйленберга–Маклейна группы когомологий пространства $\tilde{D}$ с любыми коэффициентами изоморфны группам когомологий его фундаментальной группы. Однако $H^k(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \neq 0$ для всех $k \geq 0$ (см., например, [7, с. 28]), в то время как пространство $\tilde{D}$, являющееся конечномерным многообразием, не может иметь нетривиальные группы когомологий во всех положительных размерностях. Из этого противоречия следует, что любая конечная подгруппа в $\pi_1(D)$ тривиальна.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7 (граничное поведение, II). Из теоремы Лефшеца для многообразий Штейна [2], [3] следует, что гомоморфизм $\pi_k(\partial D) \rightarrow \pi_k(D)$ является изоморфизмом при любом $k \leq n - 2$ и сюръекцией при $k = n - 1$, где $n = \dim_{\mathbb{C}} D$. В частности, $\pi_1(\partial D)$ сюръективно отображается на $\pi_1(D)$ при любом $n \geq 2$, т. е. мы получаем результат Бернса и Шнайдера [4] о том, что компактная сферическая гиперповерхность, ограничивающая штейнову область, отличную от шара, имеет бесконечную фундаментальную группу.

Если комплексная размерность $n \geq 3$, то $\pi_1(\partial D) = \pi_1(D)$. Следовательно, во-первых, группа $\pi_1(\partial D)$ также не имеет нетривиальных конечных подгрупп, и, во-вторых, накрытие $\partial Y \rightarrow \partial D$ является универсальным накрытием границы. С другой стороны, в работе [10] имеются примеры строго псевдовыпуклых штейновых факторов единичного шара в $\mathbb{C}^2$ с нетривиальным кручением в группе $\pi_1(\partial D)$. Эти же примеры показывают, что в двумерном случае накрытие $\partial Y \rightarrow \partial D$ не будет, вообще говоря, универсальным накрытием границы.

4.3. Доказательство теоремы В. Рассуждение следует уже знакомой схеме. Пусть ${}_p\mathbf{f}: M \rightarrow M'$ – росток отображения, осуществляющего локальную эквивалентность вещественно-аналитических гиперповерхностей с невырожденной знакопеременной формой Леви в $\mathbb{CP}^n$. Если гиперповерхность M' вещественно-алгебраическая, то по теореме 3.3 этот росток продолжается как локально биголоморфное отображение вдоль любого пути в гиперповерхности M . Поэтому достаточно доказать приводимое ниже обобщение следствия 2 из работы [13] на случай многозначных отображений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Пусть $M \subset \mathbb{CP}^n$ – компактная гиперповерхность с невырожденной знакопеременной формой Леви. Если росток локально биголоморфного отображения ${}_p\mathbf{f}: M \rightarrow \mathbb{CP}^n$ продолжается как локально биголо-

морфное отображение вдоль любого пути в гиперповерхности M , то ${}_p\mathbf{f} = {}_p\mathbf{L}$ для некоторого автоморфизма $L \in \text{Aut}(\mathbb{CP}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Росток ${}_p\mathbf{f}$ продолжается как локально биголоморфное отображение вдоль любого пути в окрестности $U \supset M$, существующей по лемме 3.5. Это продолжение задает локально биголоморфное отображение $F: \widehat{U} \rightarrow \mathbb{CP}^n$, определенное на универсальном накрытии окрестности U .

Теперь мы находимся в ситуации, рассмотренной в примере 2.8. В частности, любая голоморфная функция на $\widehat{U}$ постоянна. Значит, по следствию 2.10 отображение $F: \widehat{U} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ является поднятием автоморфизма $L \in \text{Aut}(\mathbb{CP}^n)$, что эквивалентно утверждению предложения о равенстве ростков.

ПРИМЕР 4.9. Покажем, что существует много топологически различных примеров вещественно-алгебраических гиперповерхностей с невырожденной знакопеременной формой Леви в $\mathbb{CP}^n$. Заметим, что достаточно доказать существование гладких невырожденных по Леви гиперповерхностей, а затем приблизить их алгебраическими гиперповерхностями, которые будут тем самым иметь ту же сигнатуру формы Леви и ту же топологию.

Пусть $Z \subset \mathbb{CP}^n$ – комплексное подмногообразие размерности $k \geq 0$. По известной теореме, восходящей к работам Грауэрта, из положительности нормального расслоения к Z следует, что граница $M = \partial U$ подходящей трубчатой окрестности $U \supset Z$ имеет форму Леви сигнатуры $(n - k - 1, k)$. Здесь $n - 1 - k$ положительных направлений “перпендикулярны” подмногообразию Z , а k отрицательных ему “параллельны.” Например, точка ($k = 0$) имеет строго псевдовыпуклую окрестность, а комплексная гиперповерхность ($k = n - 1$) – строго псевдогогнутую. Стандартные вещественные гиперквадрики могут быть получены с помощью этой конструкции из линейных подпространств $Z \subset \mathbb{CP}^n$ подходящей (ко)размерности.

Топологически многообразие M представляет собой $S^{2(n-k)-1}$ -расслоение над Z . Поэтому фундаментальные группы M и Z изоморфны, если комплексная ко-размерность Z не меньше двух. Например, если Z – вложенная комплексная кривая рода $g > 0$ в $\mathbb{CP}^3$, то M будет гиперповерхностью с невырожденной формой Леви сигнатуры $(1, 1)$ и бесконечной фундаментальной группой.

Список литературы

1. Alexander H. Holomorphic mappings from the ball and polydisc // Math. Ann. 1974. V. 209. P. 249–256.
2. Andreotti A., Frankel T. The Lefschetz theorem on hyperplane sections // Ann. of Math. 1959. V. 69. № 2. P. 713–717.
3. Bott R. On a theorem of Lefschetz // Michigan Math. J. 1959. V. 6. P. 211–216.
4. Burns D., Shnider S. Spherical hypersurfaces in complex manifolds // Invent. Math. 1976. V. 33. P. 223–246.
5. Chern S. S., Ji S. On the Riemann mapping theorem // Ann. of Math. (2) 1996. V. 144. № 2. P. 421–439.
6. Tom Dieck T., Petrie T. Contractible affine surfaces of Kodaira dimension one // Japan. J. Math. (N.S.). 1990. V. 16. P. 147–169.
7. Evens L. The cohomology of groups. N. Y.: Oxford Univ. Press, 1991.
8. Falbel E. A simple proof of the Riemann mapping theorem for domains with spherical boundary // Complex Var. Theory Appl. 2003. V. 48. P. 277–282.

9. *Fujita R.* Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe // J. Math. Soc. Japan. 1963. V. 15. P. 443–473.
10. *Goldman W., Kapovich M., Leeb B.* Complex hyperbolic manifolds homotopy equivalent to a Riemann surface // Comm. Anal. Geom. 2001. V. 9. P. 61–95.
11. *Grauert H., Remmert R.* Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie // Comment. Math. Helv. 1956. V. 31. P. 152–183.
12. *Hill C. D., Shafikov R.* Holomorphic correspondences between CR manifolds // Indiana Math. J. 2005. V. 54. P. 417–442.
13. *Ивашкович С. М.* Продолжение локально биголоморфных отображений областей в комплексное проективное пространство // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 197–206.
14. *Ivashkovich S.* The Hartogs-type extension theorem for meromorphic maps into compact Kähler manifolds // Invent. Math. 1992. V. 109. P. 47–54.
15. *Kerner H.* Über die Fortsetzung holomorpher Abbildungen // Arch. Math. 1960. V. 11. P. 44–49.
16. *Kerner H.* Überlagerungen und Holomorphiehüllen // Math. Ann. 1961. V. 144. P. 126–134.
17. *Немировский С. Ю., Шафиков Р. Г.* Униформизация строго псевдовыпуклых областей. II // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. № 6. С. 131–138.
18. *Пинчук С. И.* Об аналитическом продолжении голоморфных отображений // Матем. сб. 1975. Т. 98. № 3. С. 416–435.
19. *Пинчук С. И.* О голоморфных отображениях вещественно-аналитических гиперповерхностей // Матем. сб. 1978. Т. 105. № 4. С. 574–593.
20. *Пинчук С. И.* Аналитическое продолжение голоморфных отображений и проблемы голоморфной классификации многомерных областей // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 2. С. 301–314.
21. *Shafikov R.* Analytic continuation of germs of holomorphic mappings between real hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$ // Michigan Math. J. 2000. V. 47. P. 133–149.
22. *Shafikov R.* Analytic continuation of holomorphic correspondences and equivalence of domains in $\mathbb{C}^n$ // Invent. Math. 2003. V. 152. P. 665–682.
23. *Takeuchi A.* Domaines pseudoconvexes infinis et la metrique riemannienne dans un espace projectif // J. Math. Soc. Japan. 1964. V. 16. P. 159–181.
24. *Ueda T.* Pseudoconvex domains over Grassmann manifolds // J. Math. Kyoto Univ. 1980. V. 20. P. 391–394.
25. *Витушкин А. Г., Ежов В. В., Кружилин Н. Г.* Продолжение локальных отображений псевдовыпуклых поверхностей // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 2. С. 271–274.
26. *Витушкин А. Г.* Вещественно-аналитические гиперповерхности в комплексных многообразиях // УМН. 1985. Т. 40. № 2. С. 3–31.
27. *Webster S.* On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces // Invent. Math. 1977. V. 43. P. 53–68.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
 Department of Mathematics, the University of Western Ontario
E-mail: stefan@mi.ras.ru
 shafikov@uwo.ca

Поступило в редакцию
 10.03.2005