Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Серёгин, Двумерные вариационные задачи теории пластичности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 1, 175–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/im67>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 04:21:10

УДК 519.6+536.3

Г. А. Серёгин

Двумерные вариационные задачи теории пластичности

В работе даны явные критерии локальной непрерывности тензора напряжений, являющегося минимайзером некоторой двумерной вариационной задачи (принцип Хаара–Кармана). Локальная непрерывность тензора деформаций выводится из соотношений двойственности, отражающих тот факт, что вектор перемещений и тензор напряжений являются седловой точкой некоторого лагранжиана.

Библиография: 30 наименований.

§ 1. Введение

Целью данной работы является исследование дифференциальных свойств минимайзеров (максимайзеров) вариационных функционалов, возникающих в механике упругопластического тела. В рамках деформационной теории пластичности соответствующая классическая краевая задача, описывающая статическое равновесие идеального упругопластического тела, формулируется следующим образом. Требуется найти поле перемещений $u = (u_i) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ и тензор напряжений $\sigma = (\sigma_{ij}) : \Omega \rightarrow \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n}$, которые удовлетворяют трем группам соотношений (см., например, [1], [2]).

Уравнения равновесия в напряжениях:

$$\operatorname{div} \sigma(x) + f(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad \sigma(x)\nu(x) = F(x), \quad x \in \partial_2 \Omega. \quad (1.1)$$

Кинематические соотношения:

$$\varepsilon(u(x)) = \frac{1}{2} \left(\nabla u(x) + (\nabla u(x))^T \right), \quad x \in \Omega; \quad u = u_0 \quad \text{на} \quad \partial_1 \Omega. \quad (1.2)$$

Уравнения состояния:

$$\begin{aligned} \varepsilon(u(x)) &= \varepsilon_{\text{упр}}(x) + \varepsilon_{\text{пл}}(x), \quad x \in \Omega; \quad \mathcal{F}(\sigma(x)) \leq 0, \quad x \in \Omega; \\ \varepsilon_{\text{упр}}(x) &= \frac{1}{n^2 K_0} \mathbf{1} \operatorname{tr} \sigma(x) + \frac{1}{2\mu} \sigma^D(x), \quad x \in \Omega; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$\varepsilon_{\text{пл}}(x) : (\tau - \sigma(x)) \leq 0$ для $\forall \tau \in \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n}$ такого, что $\mathcal{F}(\tau) \leq 0, x \in \Omega$.

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ или $n = 3$), граница $\partial\Omega$ которой непрерывна по Липшицу, $\partial_1 \Omega$ и $\partial_2 \Omega$ – непересекающиеся измеримые части $\partial\Omega$, причем $\partial\Omega = \overline{\partial_1 \Omega} \cup \overline{\partial_2 \Omega}$, $\nabla u = (u_{i,j})$ – градиент векторного поля u , $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$, тензор $(\nabla u)^T$ получается из ∇u транспонированием, $\operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j})$ – дивергенция тензора σ (принимается соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам, изменяющимся от 1 до n), $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F : \partial_2 \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ – заданные объемное и поверхностное усилия, $u_0 : \partial_1 \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ – заданное перемещение,

The research described in this publication was made possible in part by Grant № MLR 000 from the International Science Foundation.

$\nu = (\nu_i)$ – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $\varepsilon(u)$ – тензор деформаций, соответствующий полю перемещений u , $\varepsilon_{\text{упр}}$ и $\varepsilon_{\text{пл}}$ – упругая и пластическая составляющие тензора деформаций, K_0 и μ – положительные постоянные, характеризующие упругие свойства деформируемого тела. Символом σ^D обозначается девиатор тензора σ , т.е.

$$\sigma^D = \sigma - \frac{1}{n} \operatorname{tr} \sigma \mathbf{1},$$

где $\mathbf{1}$ – единичный тензор, $\operatorname{tr} \sigma$ – след тензора σ . Далее, через $\mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n}$ обозначается пространство всех вещественных симметричных матриц порядка n и используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon : \sigma &= \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}, & \varepsilon &= (\varepsilon_{ij}), & \sigma &= (\sigma_{ij}) \in \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n}, & |\varepsilon| &= \sqrt{\varepsilon : \varepsilon}, \\ v \cdot u &= v_i u_i, & v &= (v_i), & u &= (u_i) \in \mathbb{R}^n, & |v| &= \sqrt{v \cdot v}, \\ v \otimes u &= (v_i u_j), & \sigma \nu &= (\sigma_{ij} \nu_j), & i, j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Наконец, выпуклая функция $\mathcal{F} : \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ задает поверхность текучести в пространстве напряжений

$$\mathcal{F}(\sigma) = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) называется *условием текучести*, поскольку необходимым условием того, что $|\varepsilon_{\text{пл}}(x)| \neq 0$, является равенство $\mathcal{F}(\sigma(x)) = 0$. В данной работе мы ограничиваемся лишь условием текучести Мизеса, полагая

$$\mathcal{F}(\tau) = |\tau^D| - \sqrt{2} k_*, \quad \tau \in \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n}, \quad (1.5)$$

где k_* – положительная постоянная. Модель пластичности, описываемая соотношениями (1.1)–(1.3), (1.5), называется *пластичностью Генки–Ильюшина*.

Первая серьезная проблема, с которой мы сталкиваемся при изучении краевой задачи (1.1)–(1.3), (1.5), связана с ее корректной функциональной формулировкой, обеспечивающей существование ее решения. Действительно, первоначальный вариант функциональной формулировки, основанный на предположении о суммируемости тензора деформаций, сводит задачу (1.1)–(1.3), (1.5) к решению следующей минимаксной задачи. Требуется найти пару $(u, \sigma) \in (V_0 + u_0) \times K$, которая является седловой точкой лагранжиана $(v, \tau) \mapsto l(v, \tau)$ на множестве $(V_0 + u_0) \times K$, т.е.

$$l(u, \tau) \leq l(u, \sigma) \leq l(v, \sigma) \quad \forall v \in V_0 + u_0, \quad \forall \tau \in K, \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} l(v, \tau) &= \int_{\Omega} (\varepsilon(v) : \tau - g^*(\tau) - f \cdot v) dx - \int_{\partial_2 \Omega} F \cdot v dl, \\ V_0 &= \{v \in D^{2,1}(\Omega) : v = 0 \quad \text{на} \quad \partial_1 \Omega\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

– множество кинематически допустимых полей перемещений,

$$K = \{\tau \in \Sigma : \mathcal{F}(\tau(x)) \leq 0 \quad \text{для п.в.} \quad x \in \Omega\}$$

– множество допустимых тензоров напряжений,

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n} \ni \tau &\mapsto g^*(\tau) = \frac{1}{2n^2 K_0} \text{tr}^2 \tau + g_0^*(|\tau^D|), \\ \mathbb{R} \ni t &\mapsto g_0^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{4\mu} t^2, & |t| \leq \sqrt{2} k_*, \\ +\infty, & |t| > \sqrt{2} k_*, \end{cases} \\ D^{2,1}(\Omega) &= \left\{ v \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n) : \right. \\ &\quad \left. \|v\|_{2,1} = \|\text{div } v\|_{L^2(\Omega)} + \| |v| + |\varepsilon^D(v)| \|_{L^1(\Omega)} < +\infty \right\}, \\ \Sigma &= \left\{ \tau = (\tau_{ij}) : \|\tau\|_{\Sigma} = \|\text{tr } \tau\|_{L^2(\Omega)} + \| |\tau^D| \|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \right\}\end{aligned}$$

– пространства допустимых полей перемещений и тензоров напряжений, $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $W_q^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ – известные пространства Лебега и Соболева вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^m$.

Предполагается, что

$$f \in L^n(\Omega; \mathbb{R}^n), \quad F \in L^\infty(\partial_2 \Omega; \mathbb{R}^n), \quad u_0 \in W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^n). \quad (1.8)$$

Условия на функции f и F согласуются с непрерывностью вложения пространства $D^{2,1}(\Omega)$ в пространства Лебега $L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и $L^1(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ (см. [3], [4]).

К сожалению, минимаксная задача (1.6) даже при очень “хороших” внешних данных и при некоторых дополнительных естественных предположениях, которые будут сделаны ниже, вообще говоря, не имеет решения по следующим причинам. Лагранжиан l порождает две вариационные задачи, находящиеся в двойственности. В первой из них определяется поле перемещений $u \in V_0 + u_0$ такое, что

$$I(u) = \inf \{ I(v) : v \in V_0 + u_0 \}, \quad (1.9)$$

где

$$V_0 + u_0 \ni v \mapsto I(v) = \sup \{ l(v, \tau) : \tau \in K \} = \int_{\Omega} g(\varepsilon(v)) dx - M(v), \quad (1.10)$$

$g: \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ – преобразование Юнга–Фенхеля функции g^* , которое выражается через преобразование Юнга–Фенхеля для g_0^* следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n} \ni \varkappa &\mapsto g(\varkappa) = \sup \{ \varkappa : \tau - g^*(\tau) : \tau \in \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n} \} = \frac{K_0}{2} \text{tr}^2 \varkappa + g_0(|\varkappa^D|), \\ R \ni t &\mapsto g_0(t) = \sup \{ ts - g_0^*(s) : s \in \mathbb{R} \}, \quad M(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\partial_2 \Omega} F \cdot v dl.\end{aligned}$$

В случае пластичности Генки–Ильюшина функция g_0 имеет вид

$$g_0(t) = \begin{cases} \mu t^2, & |t| \leq t_0 = \frac{k_*}{\sqrt{2}\mu}, \\ k_* \left(\sqrt{2} t - \frac{k_*}{2\mu} \right), & |t| > t_0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Во второй вариационной задаче, которая называется *вариационным принципом Хаара–Кармана*, определяется тензор напряжений $\sigma \in Q_f \cap K$ из условия

$$R(\sigma) = \sup\{R(\tau) : \tau \in Q_f \cap K\}, \quad (1.12)$$

где

$$Q_f \cap K \ni \tau \mapsto R(\tau) = l(u_0, \tau) \quad (1.13)$$

– функционал задачи,

$$Q_f = \left\{ \tau \in \Sigma : \int_{\Omega} \tau : \varepsilon(v) dx = M(v) \quad \forall v \in V_0 \right\}$$

– множество тензоров напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия в напряжениях (1.1) в слабом смысле.

Нетрудно показать, что задача (1.12) имеет единственное решение, если $K \cap Q_f \neq \emptyset$. Более того, если выполнено условие безопасной нагрузки, т.е.

$$\exists \sigma^1 \in Q_f \text{ и } \exists \delta_1 > 0 : \mathcal{F}(\sigma^1) \leq -\delta_1 \text{ п.в. в } \Omega, \quad (1.14)$$

то справедливы следующие утверждения (см. [5]–[7]):

$$\inf\{I(v) : v \in V_0 + u_0\} = R(\sigma), \quad (1.15)$$

$$(u, \sigma) \in (V_0 + u_0) \times K - \text{решение задачи (1.6)}$$

$$\Leftrightarrow u \in V_0 + u_0 - \text{решение задачи (1.9) и} \quad (1.16)$$

$$\sigma \in Q_f \cap K - \text{решение задачи (1.12)}.$$

Таким образом, согласно (1.16) разрешимость задачи (1.6) сводится к разрешимости задачи (1.9). Однако несмотря на то, что выпуклый функционал I непрерывен на $D^{2,1}(\Omega)$ и коэрцитивен на $V_0 + u_0$, т.е. $I(v) \rightarrow +\infty$, если $\|v\|_{2,1} \rightarrow +\infty$ и $v \in V_0 + u_0$, мы не можем доказать теорему существования минимайзера задачи (1.9) прямыми методами вариационного исчисления. Дело в том, что нерелексивное пространство $D^{2,1}(\Omega)$ имеет те же “неприятные” свойства, что и классы L^1 и W_1^1 . Более того, примеры показывают, что минимизирующие последовательности в некотором слабом смысле сходятся к вектор-функциям, которые описывают разрывы типа скольжений (остается непрерывной нормальная составляющая к поверхности разрыва), допустимым в механике идеально упругопластического тела.

Итак, для того чтобы иметь теорему существования решения задачи (1.9), а следовательно, и решения задачи (1.6), мы должны расширить пространство $D^{2,1}(\Omega)$ допустимых полей перемещений до класса, содержащего разрывные векторные поля, и продолжить на него функционал I и лагранжиан l . В случае пластичности Генки эта проблема независимо и разными методами исследовалась в работах [8]–[11], а в случае функционалов I более общего вида (функция $\varkappa \mapsto g(\varkappa)$ имеет линейный рост относительно девиатора тензора $\varkappa$) – в работе [11]. Отметим, в частности, что подходящим классом допустимых полей перемещений является

пространство $BD(\Omega)$, состоящее из всех суммируемых вектор-функций, тензор деформаций которых есть ограниченная мера (см. [12]–[15]). Норма в пространстве $BD(\Omega)$ определяется так:

$$\|v\|_{BD(\Omega)} = \int_{\Omega} (|v| dx + |\varepsilon(v)|),$$

$$\int_{\Omega} |\varepsilon(v)| = \sup \left\{ - \int_{\Omega} v \cdot \operatorname{div} \tau dx : \tau \in C_0^1(\Omega; \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n}), \quad |\tau| \leq 1 \text{ в } \Omega \right\}.$$

В данной работе мы будем рассматривать более общие модели пластичности, чем пластичность Генки–Ильюшина. Предполагается, что четная выпуклая функция $t \mapsto g_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, класса C^1 удовлетворяет условию

$$g_0'(t) \rightarrow \sqrt{2} k_* \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty, \quad (1.17)$$

а функции g , g^* и g_0^* вычисляются через g_0 по формулам

$$g(\kappa) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}^2 \kappa + g_0(|\kappa^D|), \quad \kappa \in \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n},$$

$$g^*(\tau) = \sup \{ \tau : \kappa - g(\kappa) : \kappa \in \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n} \}$$

$$= \frac{1}{2n^2 K_0} \operatorname{tr}^2 \tau + g_0^*(|\tau^D|), \quad \tau \in \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n}, \quad (1.18)$$

$$g_0^*(s) = \sup \{ st - g_0(t) : t \in \mathbb{R} \}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что в силу (1.17) $g_0^*(s) = +\infty$ при $|s| > \sqrt{2} k_*$.

Из общей теории двойственности (см. [6], [11]) следует, что при выполнении условий (1.8), (1.14) утверждения (1.15), (1.16) о связи задач (1.6), (1.9), (1.12) сохраняются, если функция g_0 удовлетворяет условию (1.17), а функционалы l , I и R вычисляются по формулам (1.7), (1.10), (1.13) и (1.18).

Коротко опишем вариационное расширение задач (1.6) и (1.9), следуя общей схеме, изложенной в работе [11]. Основная идея расширения заключается в том, что вторая компонента седловой точки лагранжиана l , тензор напряжений σ , принадлежит более узкому классу, чем множество K , а именно $\sigma \in Q_f \cap K$. Это позволяет сузить множество допустимых значений второй компоненты седловой точки и за счет этого расширить множество, в котором разыскивается первая компонента, вектор перемещений u .

Введем классы функций

$$D(A^*) = \left\{ \{\tau, b\} \in \Sigma \times L^\infty(\partial_2 \Omega; \mathbb{R}^n) : \operatorname{div} \tau \in L^n(\Omega; \mathbb{R}^n), \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} (\varepsilon(v) : \tau + v \cdot \operatorname{div} \tau) dx = \int_{\partial_2 \Omega} b \cdot v dl \quad \forall v \in V_0 \right\},$$

$$Q = \left\{ \tau \in \Sigma : \{\tau, F\} \in D(A^*) \right\}.$$

Очевидно, что решение σ задачи (1.12) принадлежит множеству Q . Теперь мы можем ввести расширение V_+ множества $V_0 + u_0$ и расширенный лагранжиан L :

$$V_+ = \left\{ v \in L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega; \mathbb{R}^n) : \sup \left\{ - \int_{\partial_2 \Omega} b \cdot u_0 \, dl + \int_{\Omega} [\tau : \varepsilon(u_0) + (u_0 - v) \cdot \operatorname{div} \tau] \, dx : \{\tau, b\} \in D(A^*), \quad \|\tau\|_{\Sigma} + \|b\|_{L^\infty(\partial_2 \Omega)} \leq 1 \right\} < +\infty \right\},$$

$$V_+ \times (Q \cap K) \ni (v, \tau) \mapsto L(v, \tau) = - \int_{\partial_2 \Omega} F \cdot u_0 \, dl + \int_{\Omega} [\tau : \varepsilon(u_0) + (u_0 - v) \cdot \operatorname{div} \tau - g^*(\tau) - f \cdot v] \, dx.$$

Прямо из определения класса V_+ следует, что $V_+ \subset BD(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 1.1 [11]. Пусть выполнены условия (1.8) и (1.14); тогда существует седловая точка $(u, \sigma) \in V_+ \times (Q \cap K)$ лагранжиана L на множестве $V_+ \times (Q \cap K)$, т.е.

$$L(u, \tau) \leq L(u, \sigma) \leq L(v, \sigma) \quad \forall v \in V_+, \quad \forall \tau \in Q \cap K. \quad (1.19)$$

Более того, σ является некоторым решением задачи (1.12), а u есть решение следующей вариационной задачи:

$$\Phi(u) = \inf \{ \Phi(v) : v \in V_+ \}, \quad \Phi(v) = \sup \{ L(v, \tau) : \tau \in Q \cap K \}, \quad v \in V_+, \quad (1.20)$$

и выполнено равенство

$$\Phi(u) = \inf \{ I(v) : v \in V_0 + u_0 \} = L(u, \sigma) = R(\sigma).$$

Пара $(u, \sigma) \in V_+ \times (Q \cap K)$ – решение минимаксной задачи (1.19) $\Leftrightarrow u \in V_+$ – решение задачи (1.20), $\sigma \in Q_f \cap K$ – решение задачи (1.12).

Для всякого $v \in V_0 + u_0$ справедливо неравенство

$$\Phi(v) \leq I(v),$$

а если, например, выполнено условие

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt{2} k_* - g'_0(t)) \, dt < +\infty,$$

то

$$\Phi(v) = I(v) \quad \text{для всех} \quad v \in V_0 + u_0.$$

Наконец, всякая минимизирующая последовательность задачи (1.9) содержит подпоследовательность, которая сходится сильно в $L^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ и слабо в $L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ к некоторому решению задачи (1.20).

Утверждения теоремы 1.1 позволяют назвать пару $(u, \sigma) \in V_+ \times (Q \cap K)$ слабым решением минимаксной задачи (1.6), а функцию $u \in V_+$ слабым решением вариационной задачи (1.9).

Полагая $t_0 = \sup \{ t > 0 : g'_0(t) < \sqrt{2} k_* \}$, мы будем предполагать в дальнейшем, что

$$g_0 - \text{функция класса } C^2 \text{ на }] - t_0, t_0[, \quad g''_0 > 0 \text{ на }] - t_0, t_0[. \quad (1.21)$$

При этих условиях, как показано в работе [16], функция g_0 будет строго выпуклой и, следовательно, задача (1.12) будет иметь единственное решение.

§ 2. Основной результат

Относительно взаимного расположения $\partial_1\Omega$ и $\partial_2\Omega$ на $\partial\Omega$ мы потребуем, чтобы

$$V_0 \cap W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \text{ плотно в } V_0 \text{ по норме} \\ \text{пространства } D^{2,1}(\Omega). \quad (2.1)$$

Условие плотности (2.1) выполнено, в частности, если $\partial_1\Omega = \partial\Omega$ или $\partial_2\Omega = \partial\Omega$ (см. [17]).

В случае идеальной пластичности один из первых результатов по регулярности (мы оставляем в стороне задачи упругопластического кручения – см., например, [18]–[20]) состоит в том, что если f локально липшицева и

$$\exists c_* > 0 : g_0''(t) \leq c_* g_0'(t)/t, \quad 0 < t < t_0, \quad (2.2)$$

то максимайзер σ задачи (1.12) принадлежит классу $W_{2,\text{loc}}^1$ (см. [21], [22]). Условие (2.2) имеет место, например, в случае, характерном для теории пластичности, когда функция $t \mapsto g_0'(t)$ выпукла вверх при $t > 0$. На самом деле, что непосредственно вытекает из результатов работ [21], [22] (см. также ниже доказательство леммы 4.1), это утверждение справедливо и при более слабых ограничениях на f , а именно:

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия (1.8), (1.14), (1.17), (1.21), (2.1) и (2.2), и пусть

$$|f| + |\varepsilon(f)| \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega). \quad (2.3)$$

Тогда

$$\sigma \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{M}_{\text{sym}}^{n \times n}). \quad (2.4)$$

Впервые утверждение типа (2.4) было доказано в работе [23] для случая $n = 2$, $f = 0$ и $\partial_2\Omega = \partial\Omega$.

Другой результат в этом направлении, полученный в работах [24], [25] при условии, что $f \in W_{q,\text{loc}}^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ($q > n$) и функция g_0 удовлетворяет, например, дополнительному неравенству

$$\left| \frac{t}{g_0'(t)} - \frac{s}{g_0'(s)} \right| \leq \frac{|t-s|}{\sqrt{2} k_*}, \quad 0 < t, s < +\infty, \quad (2.5)$$

заключается в следующем. Существует открытое множество Ω_0 , на котором тензор напряжений σ непрерывен по Гёльдеру, такое, что $\mathcal{F}(\sigma(x)) < 0$ для всех $x \in \Omega_0$ и $\mathcal{F}(\sigma(x)) = 0$ для п.в. $x \in \Omega \setminus \Omega_0$. В случае пластичности Генки–Ильюшина множество Ω_0 естественно назвать *упругой областью*, поскольку пара (u, σ) удовлетворяет там системе дифференциальных уравнений линейной упругости. Если же функция g_0 строго выпукла, т.е. $t_0 = 0$, то n -мерная мера Лебега множества $\Omega \setminus \Omega_0$ равна нулю (см. [16] и лемму 2.1 ниже), и мы получаем частичную регулярность слабого решения (u, σ) , т.е. регулярность на открытом множестве полной меры.

В данной статье для случая $n = 2$ мы намереваемся улучшить результаты работ [24], [22] по следующим направлениям. Во-первых, доказать их при более мягких ограничениях на f , а во-вторых, получить дополнительную информацию о поведении слабых решений на множестве $\Omega \setminus \Omega_0$. При этом, в отличие от работ [24], [22], мы будем использовать “прямой” метод исследования дифференциальных свойств нелинейных эллиптических систем (терминологию см. в монографии [25]), главным элементом которого в данном случае является так называемый

“hole-filling trick” (см. [26], [27]), что позволяет рассматривать теоремы 5.1 и 5.2 как достаточные условия принадлежности точки x_0 множеству Ω_0 с явно вычисляемыми константами.

Здесь и всюду в дальнейшем мы считаем, что $n = 2$ и выполнены условия (1.8), (1.14), (1.17), гарантирующие существование слабых решений, а также условия (1.21) и (2.1).

Прежде чем формулировать основные результаты данной работы, введем следующие обозначения: $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$, $B(x_0, R)$ – двумерный шар радиуса R с центром в точке x_0 , $T(x_0, R) = B(x_0, R) \setminus B(x_0, R/2)$,

$$(f)_{x_0, R} = \oint_{T(x_0, R)} f \, dx = \frac{1}{|T(x_0, R)|} \int_{T(x_0, R)} f \, dx$$

– среднее значение суммируемой по двумерной мере Лебега dx функции f на торе $T(x_0, R)$.

Пусть $B(x_0, R) \Subset \Omega$. Тогда если выполнены условия (2.2) и (2.3), то в силу теоремы 2.1 можно определить функцию

$$\Phi(x_0, R) = \int_{B(x_0, R)} |\nabla \sigma|^2 \, dx,$$

где σ – решение задачи (1.12). Введем два множества:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left\{ x_0 \in \Omega : \lim_{R \rightarrow 0} |(\sigma^D)_{x_0, R}| = \sqrt{2} k_* \right\}, \\ \Sigma_2 &= \left\{ x_0 \in \Omega : \limsup_{R \rightarrow 0} \frac{\Phi^{1/2}(x_0, R) \ln \left(\frac{1}{R} \right)}{\ln \left(\frac{1}{\Phi(x_0, R) + R^2} \right)} > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Главным следствием доказываемых ниже утверждений является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнены условия (2.2), (2.3) и (2.5), и пусть

$$\text{функция } x \mapsto \varepsilon^D(f(x)) \text{ непрерывна в } \Omega. \quad (2.6)$$

Тогда множество $\Omega_0 = \Omega \setminus \Sigma$, где $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, открыто. Более того, тензор σ – непрерывная функция на Ω_0 и

$$\mathcal{F}(\sigma(x)) < 0 \quad \text{для всех } x \in \Omega_0. \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что двумерная мера Лебега множества Σ_2 равна нулю, т.е. $|\Sigma_2| = 0$. Однако, используя φ -меру Хаусдорфа, можно дать более тонкие оценки множества Σ_2 . Пусть φ – некоторая неубывающая положительная функция на отрезке $[0, 1]$, Σ – произвольное множество в $\mathbb{R}^2$. Положим

$$\mathcal{H}(E, \varphi) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_i \varphi(r_i) : E \subset \bigcup_i B_i, \quad r_i < \delta \right\}.$$

Здесь $\{B_i\}$ – произвольное счетное покрытие множества E открытыми шарами B_i с радиусами $r_i < \delta$. Используя известные рассуждения (см., например, [25]), можно показать

$$\mathcal{H}(\Sigma_2, \varphi) = 0, \quad \varphi(t) = \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{-2}. \quad (2.8)$$

Если обозначить $\mathcal{H}(E, \varphi)$ при $\varphi(t) = t^m$ через $\mathcal{H}^m(E)$, то (2.8) влечет $\mathcal{H}^m(E) = 0$ для любого $0 < m \leq 2$ и, следовательно, хаусдорфова размерность множества Σ_2 равна нулю.

Отметим два важных следствия теоремы 2.2. Для произвольного множества $\Omega_1 \Subset \Omega_0$ положим $d = \sup\{|\sigma^D(x)| : x \in \bar{\Omega}_1\}$. В силу теоремы 2.2 $d < \sqrt{2}k_*$ и, таким образом, $\mathcal{F}(\sigma + \gamma\kappa) < 0$ для произвольных $0 \leq \gamma < (\sqrt{2}k_* - d)/2$ и $\kappa \in C_0^1(\Omega_1; \mathbb{M})$, удовлетворяющих условию $|\kappa| \leq 1$. Но тогда неравенство (1.19) при $\tau = \sigma + \gamma\kappa$ дает

$$-\int_{\Omega_1} u \cdot \operatorname{div} \tau \, dx \leq \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega_1} [g^*(\sigma + \gamma\kappa) - g^*(\sigma)] \, dx. \quad (2.9)$$

На множествах $\{\kappa \in \mathbb{M} : |\kappa^D| < t_0\}$ и $]-t_0, t_0[$ преобразования Юнга–Фенхеля g^* и g_0^* (см. (1.18)) совпадают с преобразованиями Лежандра для функций g и g_0 соответственно и, следовательно, имеют место формулы

$$g^*(\tau) = \kappa : \tau - g(\kappa), \quad \tau = \frac{\partial g}{\partial \kappa}(\kappa), \quad |\kappa^D| < t_0, \quad (2.10)$$

или

$$g(\kappa) = \kappa : \tau - g^*(\tau), \quad \kappa = \frac{\partial g^*}{\partial \tau}(\tau), \quad \mathcal{F}(\tau) < 0,$$

а также

$$g_0^*(s) = st - g_0(t), \quad s = g_0'(t), \quad |t| < t_0, \quad (2.11)$$

или

$$g_0(t) = st - g_0^*(s), \quad t = (g_0^*)'(s), \quad |s| < \sqrt{2}k_*.$$

Таким образом, переходя к пределу при $\gamma \rightarrow 0$ в неравенстве (2.9), получаем

$$\varepsilon(u) = \frac{\partial g^*}{\partial \tau}(\sigma) \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{\partial g}{\partial \kappa}(\varepsilon(u)) \quad \text{в} \quad \Omega_1. \quad (2.12)$$

Подводя итог, сформулируем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $u \in V_+$ – слабое решение вариационной задачи (1.9), т.е. пара $(u, \sigma) \subset V_+ \times (Q \cap K)$ – седловая точка лагранжиана L на множестве $V_+ \times (Q \cap K)$. Тогда тензор деформаций $\varepsilon(u)$ непрерывен на Ω_0 и, более того, вектор перемещений u удовлетворяет в Ω_0 следующей системе дифференциальных уравнений эллиптического типа:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial g}{\partial \kappa}(\varepsilon(u)) \right) + f = 0.$$

Таким образом, дальнейшая регулярность u на Ω_0 может быть установлена по известной схеме (см. [25]) и определяться лишь свойствами функций g_0 и f .

Сформулируем еще одно утверждение, доказательство которого будет дано в §3 (см. также [16]).

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнены два условия:

$$\text{функция } t \mapsto g'_0(t) \text{ выпукла вверх при } t \geq t_* > 0 \quad (2.13)$$

и

$$t_0 = +\infty. \quad (2.14)$$

Тогда $|\{x \in \Omega : \mathcal{F}(\sigma(x)) = 0\}| = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.2 и леммы 2.1. Тогда $|\Omega \setminus \Omega_0| = 0$, и мы имеем частичную регулярность слабого решения, т.е. регулярность на открытом множестве полной меры.

§ 3. Аппроксимация

Рассмотрим следующую вариационную задачу, зависящую от параметра $\delta \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned} &\text{найти вектор-функцию } u^\delta \in V_* + u_0 \text{ такую, что} \\ &I_\delta(u^\delta) = \inf \{I_\delta(v) : v \in V_* + u_0\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $V_* = V_0 \cap W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ и $I_\delta(v) = \frac{\delta}{2} \int_\Omega |\varepsilon^D(v)|^2 dx + I(v)$.

Задача (3.1) имеет единственный минимайзер u^δ , который удовлетворяет нелинейной системе дифференциальных уравнений эллиптического типа

$$\begin{aligned} \sigma^\delta &= \delta \varepsilon^D(u^\delta) + \frac{\partial g}{\partial \varkappa}(\varepsilon(u^\delta)) \\ &= \delta \varepsilon^D(u^\delta) + K_0 \operatorname{div} u^\delta \mathbf{1} + g'_0(|\varepsilon^D(u^\delta)|) \frac{\varepsilon^D(u^\delta)}{|\varepsilon^D(u^\delta)|}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\int_\Omega \sigma^\delta : \varepsilon(v) dx = M(v) \quad \forall v \in V_*, \quad (3.3)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{div} \sigma^\delta + f = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (3.4)$$

в смысле распределений.

Справедливы следующие утверждения (см. также [16], [22], [17], [28]).

ЛЕММА 3.1. Для всех $\delta \in]0, 1]$ имеют место оценки

$$\sqrt{\delta} \|\varepsilon^D(u^\delta)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\operatorname{div} u^\delta\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\varepsilon^D(u^\delta)\|_{L^1(\Omega)}, \quad \|u^\delta\|_{L^2(\Omega)} < C, \quad (3.5)$$

где постоянная C зависит только от $\|f\|_{L^2(\Omega)}$, $\|F\|_{L^\infty(\partial_2 \Omega)}$, $\|u_0\|_{W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^2)}$, $\|\sigma^1\|_\Sigma$, δ_1 .

Более того, существуют подпоследовательности u^δ и σ^δ , за которыми сохраняются прежние обозначения, такие, что

$$u^\delta \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^2(\Omega; \mathbb{R}^2), \quad (3.6_1)$$

$$u^\delta \rightarrow u \quad \text{в} \quad L^r(\Omega; \mathbb{R}^2), \quad 1 \leq r < 2, \quad (3.6_2)$$

$$\int_{\Omega} \tau : \varepsilon^D(u^\delta) dx \rightarrow \int_{\Omega} \tau : \varepsilon^D(u) dx \quad \forall \tau \in C_0(\Omega; \mathbb{M}), \quad (3.6_3)$$

$$\operatorname{div} u^\delta \rightharpoonup \operatorname{div} u \quad \text{в} \quad L^2(\Omega), \quad (3.6_4)$$

$$\delta \int_{\Omega} |\varepsilon^D(u^\delta)|^2 dx \rightarrow 0, \quad (3.6_5)$$

$$\sigma^\delta \rightharpoonup \sigma \quad \text{в} \quad L^2(\Omega; \mathbb{M}), \quad (3.6_6)$$

$$\sigma^{\delta D} - \delta \varepsilon^D(u^\delta) \overset{*}{\rightharpoonup} \sigma^D \quad \text{в} \quad L^\infty(\Omega; \mathbb{M}), \quad (3.6_7)$$

где σ – единственное решение задачи (1.12), а u – некоторое решение задачи (1.20).

При формулировке леммы символами $\rightarrow$ и $\rightharpoonup$ были обозначены соответственно сильная и слабая сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы получить оценки (3.5), воспользуемся условиями (1.14) и (1.17) следующим образом. Выберем число $t_1 > 0$ из равенства $g'_0(t_1) = \sqrt{2}k_* - \frac{1}{2}\delta_1$; тогда

$$g_0(t) \geq g_0(t) + \left(\sqrt{2}k_* - \frac{1}{2}\delta_1 \right) (t - t_1) \quad \text{для всех} \quad t.$$

Таким образом, в силу (1.14) мы будем иметь

$$\begin{aligned} I(v) &\geq \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} K_0 \operatorname{div}^2 v + \left(\sqrt{2}k_* - \frac{1}{2}\delta_1 \right) (|\varepsilon^D(v)| - t_1) \right] dx - M(v) \\ &= \left[g_0(t_1) - \left(\sqrt{2}k_* - \frac{1}{2}\delta_1 \right) t_1 \right] |\Omega| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} K_0 \operatorname{div}^2 v dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \sigma^1 : \varepsilon(v) dx - M(u_0) + \int_{\Omega} \sigma^1 : \varepsilon(u_0) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} [K_0 \operatorname{div}^2 v + \operatorname{tr} \sigma^1 \operatorname{div} v + \delta_1 |\varepsilon^D(v)|] dx - M(u_0) \\ &\quad + \int_{\Omega} \sigma^1 : \varepsilon(u_0) dx + \left[g_0(t_1) - \left(\sqrt{2}k_* - \frac{1}{2}\delta_1 \right) t_1 \right] |\Omega| \end{aligned}$$

для всех $v \in V_0 + u_0$. Отсюда и из теорем вложения получаем оценки (3.5).

Далее, из (3.2) следует, что последовательности $\{\sigma^\delta\}$ и $\{\sigma^{\delta D} - \delta \varepsilon^D(u^\delta)\}$ ограничены в $L^2(\Omega; \mathbb{M})$ и $L^\infty(\Omega; \mathbb{M})$ соответственно. Таким образом, в силу (3.5) мы можем считать доказанными утверждения (3.6₁)–(3.6₄), (3.6₆), (3.6₇). Осталось установить, что u и σ – решения задач (1.20) и (1.12) соответственно, и доказать соотношение (3.6₅).

Поскольку $\tau^\delta = \sigma^\delta - \delta \varepsilon^D(u^\delta) \in K$, а множество K слабо замкнуто в $L^2(\Omega; \mathbb{M})$, то $\sigma \in K$. Затем, переходя к пределу в тождестве (3.3) и пользуясь условием плотности (2.1), получаем, что $\sigma \in Q_f$.

С другой стороны, соотношения двойственности дают

$$\tau^\delta : \varepsilon(u^\delta) - g(\varepsilon(u^\delta)) - g^*(\tau^\delta) = 0 \quad \text{п.в. в } \Omega.$$

Но тогда в силу (3.2) будем иметь

$$\begin{aligned} I_\delta(u^\delta) &= \frac{\delta}{2} \int_\Omega |\varepsilon^D(u^\delta)|^2 dx + \int_\Omega (\tau^\delta : \varepsilon(u^\delta) - g(\tau^\delta)) dx - M(u^\delta) \\ &= -\frac{\delta}{2} \int_\Omega |\varepsilon^D(u^\delta)|^2 dx - \int_\Omega g^*(\tau^\delta) dx + \int_\Omega \sigma^\delta : \varepsilon(u_0) dx - M(u_0). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sup\{R(\tau) : \tau \in Q_f \cap K\} &= \inf\{I(v) : v \in V_0 + u_0\} \leq I(u^\delta) \\ &\leq I_\delta(u^\delta) = -\frac{\delta}{2} \int_\Omega |\varepsilon^D(u^\delta)|^2 dx + \int_\Omega (\sigma^\delta : \varepsilon(u_0) - g^*(\tau^\delta)) dx - M(u_0). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве и пользуясь полунепрерывностью сверху функционала $\tau \mapsto -\int_\Omega g^*(\tau) dx$, получаем

$$\sup\{R(\tau) : \tau \in Q_f \cap K\} \leq R(\sigma) + \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left[-\frac{\delta}{2} \int_\Omega |\varepsilon^D(u^\delta)|^2 dx \right]. \quad (3.8)$$

Так как $\sigma \in Q_f \cap K$, то неравенство (3.8) означает, что σ – решение задачи (1.12) и что выполнено утверждение (3.6₅). Принимая во внимание соотношения (3.7) и (3.8), заключаем, что u – минимизирующая последовательность задачи (1.9). Требуемый результат вытекает из теоремы 1.1. Лемма 3.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Положим $\psi^\delta = \max\{t_*, |\varepsilon^D(u^\delta)|\}$. В силу оценок (3.5) существует положительная ограниченная мера Радона μ такая, что

$$\int_\Omega \varphi \psi^\delta dx \rightarrow \int_\Omega \varphi \mu \quad \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

Пусть C – замкнутый куб в Ω ; тогда

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \int_C \psi^\delta dx \leq \mu(C). \quad (3.9)$$

Далее,

$$\int_C |\tau^{\delta D}| dx \leq \int_C g'_0(|\varepsilon^D(u^\delta)|) dx \leq \int_C g'_0(\psi^\delta) dx.$$

Принимая во внимание условие (2.13) и неравенство Йенсена, будем иметь

$$\int_C |\tau^{\delta D}| dx \leq g'_0 \left(\int_C \psi^\delta dx \right). \quad (3.10)$$

В силу (3.9), (3.10) и утверждений леммы 3.1 получаем

$$\begin{aligned} \int_C |\sigma^D| dx &\leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_C |\tau^{\delta D}| dx \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} g'_0 \left(\int_C \psi^\delta dx \right) \\ &\leq g'_0 \left(\limsup_{\delta \rightarrow 0} \int_C \psi^\delta dx \right) \leq g'_0 \left(\frac{\mu(C)}{|C|} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Пусть $x \in \Omega$ является центром куба. Функция

$$x \mapsto \frac{d\mu}{dx}(x) = \lim_{|C| \rightarrow 0} \frac{\mu(C)}{|C|}$$

интегрируема по мере Лебега в $\mathbb{R}^2$ (см. [29, теорема 6, с. 234]) и, таким образом, почти всюду конечна по этой же мере. Но из (3.11) вытекает, что

$$|\sigma^D(x)| \leq g'_0 \left(\frac{d\mu}{dx}(x) \right) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega,$$

и согласно (2.14) $|\sigma^D| < \sqrt{2} k_*$ п.в. в Ω . Лемма 2.1 доказана.

§ 4. Две основные оценки слабого решения

Обозначим через $V_\times(\omega)$ конечномерное пространство жестких смещений, т.е.

$$V_\times(\omega) = \{v \in L^1(\omega; \mathbb{R}^2) : \varepsilon(v) = 0 \text{ в } \omega\}.$$

ЛЕММА 4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2, и пусть пара (u, σ) – слабое решение задачи (1.6). Тогда если $B(x_0, R) \subset \Omega_1 \Subset \Omega$, то*

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, R/2) &\equiv \int_{B(x_0, R/2)} |\nabla \sigma|^2 dx \\ &\leq -\frac{\sqrt{2} k_* c_1}{\mathcal{F}(\sigma^0)} \left[R^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega_1)}^2 + R^4 \|\varepsilon(f)\|_{L^\infty(\Omega_1)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{T(x_0, R)} |\sigma - \sigma^0|^2 dx \right]^{1/2} \int_{B(x_0, R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx \\ &\quad + c_2 \int_{T(x_0, R)} |\sigma - \sigma^0|^2 dx, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx &= \frac{1}{|B(x_0, R)|} \int_{B(x_0, R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx \\ &= \frac{1}{|B(x_0, R)|} \sup \left\{ - \int_{B(x_0, R)} [u - \varepsilon^0(x - x_0)] \cdot \operatorname{div} \tau dx : \right. \\ &\quad \left. \tau \in C_0^1(B(x_0, R); \mathbb{M}), \quad |\tau| \leq 1 \text{ в } B(x_0, R) \right\}, \end{aligned}$$

положительные постоянные c_1 и c_2 зависят соответственно только от c_* и K_0 , а матрицы σ^0 и ε^0 из $\mathbb{M}$ удовлетворяют условиям

$$\mathcal{F}(\sigma^0) < 0, \quad (4.2)$$

$$\varepsilon^0 = \frac{\partial g^*}{\partial \tau}(\sigma^0) \quad \left(\Leftrightarrow \sigma^0 = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(\varepsilon^0) \right). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия леммы относительно функции f гарантируют включения

$$u^\delta \in W_2^2(\Omega_1; \mathbb{R}^2), \quad \sigma^\delta \in W_2^1(\Omega_1; \mathbb{M}) \quad (4.4)$$

для всех $\delta \in]0, 1]$.

Введем две билинейные формы

$$\begin{aligned} E(\tau; \varepsilon, \varkappa) &= \left(\frac{\partial^2 g_0(|\tau|)}{\partial \tau^2} \varepsilon \right) : \varkappa \\ &= \frac{g'_0(|\tau|)}{|\tau|} \varepsilon : \varkappa + \left(g''_0(|\tau|) - \frac{g'_0(|\tau|)}{|\tau|} \right) \frac{\tau : \varepsilon \tau : \varkappa}{|\tau|^2}, \\ E^\delta(\tau; \varepsilon, \varkappa) &= \delta \varepsilon : \varkappa + K_0 \operatorname{tr} \varepsilon \operatorname{tr} \varkappa + E(\tau; \varepsilon, \varkappa), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где ε и $\varkappa$ из $\mathbb{M}$ – переменные, а $\tau \in \mathbb{M}$ – тензорный параметр. Для квадратичной формы $\varepsilon \mapsto E(\tau; \varepsilon, \varepsilon)$ справедливы оценки (см. условие (2.2))

$$h_- (|\tau|) |\varepsilon|^2 \leq E(\tau; \varepsilon, \varepsilon) \leq h_+ (|\tau|) |\varepsilon|^2 \leq \frac{g'_0(|\tau|)}{|\tau|} \max\{1, c_*\} |\varepsilon|^2, \quad (4.6)$$

в которых

$$h_-(t) = \min\{g''_0(t), g'_0(t)/t\}, \quad h_+(t) = \max\{g''_0(t), g'_0(t)/t\}, \quad t > 0.$$

Кроме того, поскольку

$$\sigma_{,k}^\delta = \delta \varepsilon^D(u_{,k}^\delta) + K_0 \operatorname{div} u_{,k}^\delta \mathbf{1} + \frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau^2} (|\varepsilon^D(u^\delta)|) \varepsilon^D(u_{,k}^\delta), \quad (4.7)$$

то

$$\sigma_{,k}^\delta : \varkappa = E^\delta(\varepsilon^D(u^\delta); \varepsilon^D(u_{,k}^\delta), \varkappa) \quad \forall \varkappa \in \mathbb{M}. \quad (4.8)$$

Положим $\bar{\sigma}^\delta = \sigma^\delta - \sigma^0$, $\bar{u}^\delta = u^\delta - \varepsilon^0(x - x_0) - v_{\times R}$. Здесь жесткое смещение $v_{\times R} \in V_{\times}(B(x_0, R))$ выбрано так, чтобы

$$\left(\int_{B(x_0, R)} |u - \varepsilon^0(x - x_0) - v_{\times R}|^2 dx \right)^{1/2} \leq c_3 R \int_{B(x_0, R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx. \quad (4.9)$$

Принимая во внимание тождество (3.3), включения (4.4), для произвольной функции $\varphi \in C_0^3(\Omega_1)$ получаем равенство

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Omega} \varphi^6 \sigma_{,k}^\delta : \varepsilon(u_{,k}^\delta) dx \\ &= \int_{\Omega} [-\sigma_{ij,k}^\delta \varphi_{,i}^6 \bar{u}_{j,k}^\delta + \varphi^6 \nabla f \cdot \nabla \bar{u}^\delta] dx = J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= -2 \int_{\Omega} \sigma_{ij,k}^\delta \varphi_{,i}^6 \varepsilon_{jk}(\bar{u}^\delta) dx, \quad J_2 = \int_{\Omega} \sigma_{ij,k}^\delta \varphi_{,i}^6 \bar{u}_{k,j}^\delta dx, \\ J_3 &= \int_{\Omega} \varphi^6 \nabla f \cdot \nabla \bar{u}^\delta dx. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon(\bar{u}^\delta) = \varepsilon^D(\bar{u}^\delta) + \frac{1}{2}\mathbf{1} \operatorname{div} \bar{u}^\delta$ и $\bar{\sigma}^\delta = \bar{\sigma}^{\delta D} + \frac{1}{2}\mathbf{1} \operatorname{tr} \bar{\sigma}^\delta$, то в силу (3.4) приходим к соотношению

$$\begin{aligned} J_1 &= -2 \int_{\Omega} \sigma_{ij,k}^\delta \varphi_{,i} \varepsilon_{jk}^D(\bar{u}^\delta) dx - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^\delta \varphi_{,i} \operatorname{div} \bar{u}^\delta dx \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{tr} \sigma_{,k}^\delta \varphi_{,i} \varepsilon_{ik}^D(\bar{u}^\delta) dx - 2 \int_{\Omega} \sigma_{ij,k}^\delta \varphi_{,i} \varepsilon_{jk}^D(\bar{u}^\delta) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} f \cdot \nabla \varphi^6 \operatorname{div} \bar{u}^\delta dx = 2 \int_{\Omega} (f_k + \sigma_{ks,s}^{\delta D}) \varphi_{,i} \varepsilon_{jk}^D(\bar{u}^\delta) dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \sigma_{ij,k}^{\delta D} \varphi_{,i} \varepsilon_{jk}^D(\bar{u}^\delta) dx + \int_{\Omega} f \cdot \nabla \varphi^6 \operatorname{div} \bar{u}^\delta dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \varepsilon(\bar{u}^\delta) : (f \otimes \nabla \varphi^6) dx + 12 \int_{\Omega} \varphi^5 \sigma_{,k}^{\delta D} : S^{(k)} dx, \end{aligned} \quad (4.11)$$

в котором матрицы $S^{(k)}$, $k = 1, 2$, определяются следующим образом:

$$S^{(k)} = (\delta_{ik} \varphi_{,s} \varepsilon_{js}^D(\bar{u}^\delta) - \varphi_{,i} \varepsilon_{jk}^D(\bar{u}^\delta)), \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Отметим равенства

$$\begin{aligned} S^{(k)} : S^{(k)} &= |\nabla \varphi|^2 |\varepsilon^D(\bar{u}^\delta)|^2, \quad \sigma_{,k}^{\delta D} : S^{(k)} = \frac{1}{2} \sigma_{,k}^{\delta D} : (S^{(k)} + (S^{(k)})^T) \\ &= \frac{\delta}{4} (S^{(k)} + (S^{(k)})^T) : (S^{(k)} + (S^{(k)})^T) + E(\varepsilon^D(u^\delta); \varepsilon^D(u_{,k}^\delta), S^{(k)}), \end{aligned}$$

из которых, а также из (4.5)–(4.8) и неравенства Коши–Буняковского, вытекает оценка

$$\sigma_{,k}^{\delta D} : S^{(k)} \leq |\nabla \varphi| \left[\delta + \max\{1, c_*\} \frac{g'_0(|\varepsilon^D(u^\delta)|)}{|\varepsilon^D(u^\delta)|} \right]^{1/2} |\varepsilon^D(\bar{u}^\delta)| [\sigma_{,k}^{\delta D} : \varepsilon^D(u_{,k}^\delta)]^{1/2}.$$

Таким образом, (4.11) и последнее неравенство дают

$$\begin{aligned} J_1 &\leq 2 \int_{\Omega} \varepsilon(\bar{u}^\delta) : (f \otimes \nabla \varphi^6) dx + 12 J^{1/2} \left(\int_{\Omega} \varphi^4 |\nabla \varphi|^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\delta + \max\{1, c_*\} \frac{g'_0(|\varepsilon^D(u^\delta)|)}{|\varepsilon^D(u^\delta)|} \right] |\varepsilon^D(u^\delta)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
J_2 &= - \int_{\Omega} [\bar{\sigma}_{ij}^{\delta} \varphi_{,ik}^6 \bar{u}_{k,j}^{\delta} + \bar{\sigma}_{ij}^{\delta} \varphi_{,j}^6 \operatorname{div} u_{,i}^{\delta}] dx \\
&= - \int_{\Omega} [(f \otimes \bar{u}^{\delta}) : \nabla^2 \varphi^6 + f \cdot \nabla \varphi^6 \operatorname{div} \bar{u}^{\delta}] dx \\
&\quad + \int_{\Omega} [\bar{\sigma}_{ij}^{\delta} \varphi_{,ijk}^6 \bar{u}_k^{\delta} + \bar{\sigma}^{\delta} : \nabla^2 \varphi^6 \operatorname{div} \bar{u}^{\delta}] dx, \\
J_3 &= \int_{\Omega} [2\varepsilon(f) : \varepsilon(\bar{u}^{\delta}) \varphi^6 - f_{i,k} \varphi_{,i}^6 \bar{u}_{k,i}^{\delta}] dx \\
&= \int_{\Omega} [2\varepsilon(f) : \varepsilon(\bar{u}^{\delta}) \varphi^6 + f_i \varphi_{,k}^6 \bar{u}_{k,i}^{\delta} + f_i \varphi^6 \operatorname{div} u_{,i}^{\delta}] dx \\
&= \int_{\Omega} [2\varphi^6 \varepsilon^D(f) : \varepsilon^D(\bar{u}^{\delta}) - \nabla^2 \varphi^6 : (f \otimes \bar{u}^{\delta}) \\
&\quad - \operatorname{div} f \nabla \varphi^6 \cdot \bar{u}^{\delta} - f \cdot \nabla \varphi^6 \operatorname{div} \bar{u}^{\delta}] dx.
\end{aligned}$$

Итак, (4.10), (4.12) и два последних равенства приводят к оценке

$$\begin{aligned}
J &\leq 144 \int_{\Omega} \varphi^4 |\nabla \varphi|^2 \left[\delta + \max\{1, c_*\} \frac{g'_0(|\varepsilon^D(u^{\delta})|)}{|\varepsilon^D(u^{\delta})|} \right] |\varepsilon^D(\bar{u}^{\delta})|^2 dx \\
&\quad + 2 \int_{\Omega} [2\varepsilon(\bar{u}^{\delta}) : (f \otimes \nabla \varphi^6) + 2\varphi^6 \varepsilon^D(f) : \varepsilon^D(\bar{u}^{\delta}) - 2\nabla^2 \varphi^6 : (f \otimes \bar{u}^{\delta}) \\
&\quad - 2f \cdot \nabla \varphi^6 \operatorname{div} \bar{u}^{\delta} - \operatorname{div} f \nabla \varphi^6 \cdot \bar{u}^{\delta}] dx \\
&\quad + 2 \int_{\Omega} [\bar{\sigma}_{ij}^{\delta} \varphi_{,ijk}^6 \bar{u}_k^{\delta} + \bar{\sigma}^{\delta} : \nabla^2 \varphi^6 \operatorname{div} \bar{u}^{\delta}] dx. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Оценки (4.13), (3.5), условие (1.17) и произвольность функции φ позволяют утверждать, что последовательность $\{\sigma^{\delta}\}$ равномерно ограничена в $W_2^1(\Omega_1; \mathbb{M})$ и, следовательно,

$$\bar{\sigma}^{\delta} \rightarrow \bar{\sigma} = \sigma - \sigma^0 \quad \text{в} \quad L^2(\Omega_1; \mathbb{M}). \tag{4.14}$$

Для оценки первого слагаемого в правой части неравенства (4.13) воспользуемся тождеством (3.3), условиями (4.2), (4.3) и (2.5) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varphi^4 |\nabla \varphi|^2 \bar{\sigma}^{\delta} : \varepsilon(\bar{u}^{\delta}) dx &= \int_{\Omega} [\varphi^4 |\nabla \varphi|^2 f \cdot \bar{u}^{\delta} - \bar{\sigma}^{\delta} : (\bar{u}^{\delta} \otimes \nabla(\varphi^4 |\nabla \varphi|^2))] dx \\
&= \int_{\Omega} \varphi^4 |\nabla \varphi|^2 \left[\frac{1}{4K_0} \operatorname{tr}^2 \bar{\sigma}^{\delta} + \delta |\varepsilon^D(\bar{u}^{\delta})|^2 + \delta \varepsilon^0 : \varepsilon^D(\bar{u}^{\delta}) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{g'_0(|\varepsilon^D(u^{\delta})|)}{|\varepsilon^D(u^{\delta})|} \varepsilon^D(u^{\delta}) - \frac{g'_0(|\varepsilon^{0D}|)}{|\varepsilon^{0D}|} \varepsilon^{0D} \right) : (\varepsilon(u^{\delta}) - \varepsilon^0) \right] dx \\
&\geq \int_{\Omega} \varphi^4 |\nabla \varphi|^2 \left[\delta |\varepsilon^D(\bar{u}^{\delta})|^2 + \frac{g'_0(|\varepsilon^D(u^{\delta})|)}{|\varepsilon^D(u^{\delta})|} |\varepsilon^D(\bar{u}^{\delta})|^2 + \delta \varepsilon^0 : \varepsilon^D(\bar{u}^{\delta}) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{g'_0(|\varepsilon^D(u^{\delta})|)}{|\varepsilon^D(u^{\delta})|} - \frac{g'_0(|\varepsilon^{0D}|)}{|\varepsilon^{0D}|} \right) \varepsilon^{0D} : \varepsilon^D(\bar{u}^{\delta}) \right] dx \\
&\geq \int_{\Omega} \varphi^4 |\nabla \varphi|^2 \left\{ \left[\delta - \frac{\mathcal{F}(\sigma^0)}{\sqrt{2} k_*} \frac{g'_0(|\varepsilon^D(u^{\delta})|)}{|\varepsilon^D(u^{\delta})|} \right] |\varepsilon^D(\bar{u}^{\delta})|^2 + \delta \varepsilon^0 : \varepsilon^D(\bar{u}^{\delta}) \right\} dx. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Комбинируя (4.13) и (4.15), получим

$$\begin{aligned}
 J \leq & -\frac{\sqrt{2}k_*144\max\{1, c_*\}}{\mathcal{F}(\sigma^0)} \\
 & \times \int_{\Omega} [\varphi^4 |\nabla \varphi|^2 (f \cdot \bar{u}^\delta - \delta \varepsilon^0 : \varepsilon^D(\bar{u}^\delta)) - \bar{\sigma}^\delta : (\bar{u}^\delta \otimes \nabla(\varphi^4 |\nabla \varphi|^2))] dx \\
 & + 2 \int_{\Omega} \left[\bar{\sigma}_{ij}^\delta \varphi_{,ijk}^6 \bar{u}_k^\delta + \frac{1}{2K_0} \bar{\sigma}^\delta : \nabla^2 \varphi^6 \operatorname{tr} \bar{\sigma}^\delta \right] dx \\
 & + 2 \int_{\Omega} [2\varepsilon(\bar{u}^\delta) : (f \otimes \nabla \varphi^6) + 2\varepsilon^D(f) : \varepsilon^D(\bar{u}^\delta) \varphi^6 - 2\nabla^2 \varphi^6 : (f \otimes \bar{u}^\delta) \\
 & - 2f \cdot \nabla \varphi^6 \operatorname{div} \bar{u}^\delta - \operatorname{div} f \nabla \varphi^6 \cdot \bar{u}^\delta] dx. \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание условия (2.3), (2.6), утверждения леммы 3.1 и (4.14), перейдем к пределу в (4.16) при $\delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \varphi^6 |\nabla \sigma|^2 dx \leq & -\frac{\sqrt{2}k_*144\max\{1, c_*\}}{\mathcal{F}(\sigma^0)} \\
 & \times \int_{\Omega} [\varphi^4 |\nabla \varphi|^2 f \cdot \bar{u} - \bar{\sigma} : (\bar{u} \otimes \nabla(\varphi^4 |\nabla \varphi|^2))] dx \\
 & + 2 \int_{\Omega} \left[\bar{\sigma}_{ij} \varphi_{,ijk}^6 \bar{u}_k + \frac{1}{2K_0} \bar{\sigma} : \nabla^2 \varphi^6 \operatorname{tr} \bar{\sigma} \right] dx \\
 & + 4 \int_{\Omega} (f \otimes \nabla \varphi^6) : (\varepsilon(u) - \varepsilon^0) dx + 4 \int_{\Omega} \varphi^6 \varepsilon^D(f) : (\varepsilon^D(u) - \varepsilon^{0D}) dx \\
 & - 2 \int_{\Omega} [2\nabla^2 \varphi^6 : (f \otimes \bar{u}) + 2f \cdot \nabla \varphi^6 \operatorname{div} \bar{u} + \operatorname{div} f \nabla \varphi^6 \cdot \bar{u}] dx. \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\sigma} = \sigma - \sigma^0$, $\bar{u} = u - \varepsilon^0(x - x_0) - v_{\times R}$. Выберем функцию φ так, чтобы $0 \leq \varphi \leq 1$ в Ω_1 , $\operatorname{spt} \varphi \subset B(x_0, R)$, $\varphi = 1$ в $B(x_0, R/2)$, $|\nabla^i \varphi| \leq CR^{-i}$, $i = 1, 2, 3$, воспользуемся неравенством (4.9) и после применения неравенства Гёльдера и элементарных преобразований придем к требуемой оценке (4.1). Лемма 4.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $B(x_0, R) \subset \Omega_1 \Subset \Omega$ и

$$\mathcal{F}((\sigma)_{x_0, R}) < 0. \tag{4.19}$$

Тогда существует положительная постоянная c_4 , зависящая только от c_* , K_0 , $\|f\|_{L^\infty(\Omega_1)}$, $\|\varepsilon(f)\|_{L^\infty(\Omega_1)}$, $\operatorname{diam} \Omega_1$, такая, что

$$\begin{aligned}
 \Phi(x_0, R/2) \leq & c_4 \left\{ -\frac{\sqrt{2}k_*}{\mathcal{F}((\sigma)_{x_0, R})} [R^2 + \Phi(x_0, R) - \Phi(x_0, R/2)]^{1/2} \Psi(x_0, R) \right. \\
 & \left. + \Phi(x_0, R) - \Phi(x_0, R/2) \right\}, \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

где

$$\Psi(x_0, R) = \int_{\bar{B}(x_0, R)} |\varepsilon(u) - (\varepsilon)^{x_0, R}| dx, \quad (\varepsilon)^{x_0, R} = \frac{\partial g^*}{\partial \tau}((\sigma)_{x_0, R}). \tag{4.21}$$

Действительно, условие (4.19), соотношения (4.21) и лемма 4.1 для $\sigma^0 = (\sigma)_{x_0, R}$ и $\varepsilon^0 = (\varepsilon)_{x_0, R}$ вместе с неравенством Пуанкаре (см. [30])

$$\begin{aligned} \left(\int_{T(x_0, R)} |\sigma - (\sigma)_{x_0, R}|^2 dx \right)^{1/2} &\leq c_5 \left(\int_{T(x_0, R)} |\nabla \sigma|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= c_5 (\Phi(x_0, R) - \Phi(x_0, R/2))^{1/2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

приводят к оценке (4.20).

Для произвольного тензора $\tau \in \mathbb{M}$, удовлетворяющего условию $\mathcal{F}(\tau) < 0$, введем билинейную форму

$$\begin{aligned} E^*(\tau^D; \sigma, \varkappa) &= \left(\frac{\partial^2 g_0^*}{\partial \tau^2} (|\tau^D|) \sigma \right) : \varkappa = \frac{(g_0^*)'(|\tau^D|)}{|\tau^D|} \sigma^D : \varkappa^D \\ &\quad + \left((g_0^*)''(|\tau^D|) - \frac{(g_0^*)'(|\tau^D|)}{|\tau^D|} \right) \frac{\tau^D : \sigma \tau^D : \varkappa}{|\tau^D|^2}, \quad \sigma, \varkappa \in \mathbb{M}. \end{aligned}$$

Для соответствующей квадратичной формы мы имеем оценки

$$h_-^*(|\tau^D|) |\sigma^D|^2 \leq E^*(\tau^D; \sigma, \sigma) \leq h_+^*(|\tau^D|) |\sigma^D|^2, \quad (4.23)$$

где

$$h_-^*(s) = \min \left\{ \frac{(g_0^*)'(s)}{s}, (g_0^*)''(s) \right\}, \quad h_+^*(s) = \max \left\{ \frac{(g_0^*)'(s)}{s}, (g_0^*)''(s) \right\}$$

и $|s| < \sqrt{2} k_*$.

Поскольку функция $g_0^* :] - \sqrt{2} k_*, \sqrt{2} k_*[\rightarrow \mathbb{R}^2$ является C^2 -преобразованием Лежандра функции $g_0 :] - t_0, t_0[\rightarrow \mathbb{R}$ (см. формулы (2.11)), то $(g_0^*)''(s) = 1/g_0''(t)$ при $s = g_0'(t) (\Leftrightarrow t = (g_0^*)'(s))$ и, следовательно,

$$h_+^*(g_0'(t)) = \max \left\{ \frac{t}{g_0'(t)}, \frac{1}{g_0''(t)} \right\}, \quad |t| < t_0.$$

Учитывая условие (2.2), получим

$$h_+^*(s) = h_+^*(g_0'(t)) \leq \max\{1, c_*\} \frac{1}{g_0''(t)}, \quad |t| < t_0.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$h_+^*(s) \leq \max\{1, c_*\} (g_0^*)''(s), \quad |s| < \sqrt{2} k_*. \quad (4.24)$$

Пусть $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ – произвольная фиксированная функция, удовлетворяющая условию $0 \leq \varphi \leq 1$, и пусть $\varkappa \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{M})$, причем $\mathcal{F}(\varkappa) \leq 0$ в Ω ; тогда $\tau = \sigma + \varphi(\varkappa - \sigma) \in Q \cap K$. Подставляя эту функцию в (1.19) и пользуясь выпуклостью g^* , получим

$$- \int_{\Omega} [\varphi u \cdot \operatorname{div}(\varkappa - \sigma) + (u \otimes \nabla \varphi) : (\varkappa - \sigma) + \varphi(g^*(\varkappa) - g^*(\sigma))] dx \leq 0, \quad (4.25)$$

где пара (u, σ) – слабое решение задачи (1.6).

Введем также вспомогательные функции

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni t \mapsto H_d(t) &= \begin{cases} \frac{t^2}{2d}, & |t| \leq d, \\ |t| - \frac{d}{2}, & |t| > d, \end{cases} \\ [0, \sqrt{2} k_*] \ni t \mapsto \nu_+(t) &= \max \left\{ \frac{1}{2K_0}, \max\{1, c_*\} \max_{s \in [0, t]} (g_0^*)''(s) \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

ЛЕММА 4.2. Пусть выполнены все условия теоремы 2.2 и пара (u, σ) – слабое решение задачи (1.6). Пусть, далее, матрицы ε^0 и σ^0 удовлетворяют условиям (4.2) и (4.3). Тогда существует положительная постоянная c_6 , не зависящая от данных задачи, такая, что

$$H_d \left(\int_{\overline{B}(x_0, R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx \right) \leq -\frac{c_6}{\sqrt{2} k_*} \left[R \| |f| \|_{L^\infty(\Omega_1)} + \left(\int_{T(x_0, 2R)} |\sigma - \sigma^0|^2 dx \right)^{1/2} \right] \int_{B(x_0, 2R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx \quad (4.27)$$

при

$$d = -\frac{1}{2} \mathcal{F}(\sigma^0) \nu_+ \left(\frac{\sqrt{2} k_* + |\sigma^{0D}|}{2} \right) \quad (4.28)$$

и

$$B(x_0, 2R) \subset \Omega_1 \Subset \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\bar{u} = u - \varepsilon^0(x - x_0) - u_{\times 2R}$, где жесткое смещение $u_{\times 2R} \in V_\times(B(x_0, 2R))$ выбирается из условия

$$\frac{1}{2R} \left(\int_{B(x_0, 2R)} |\bar{u}|^2 dx \right)^{1/2} \leq c_3 \int_{B(x_0, 2R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx. \quad (4.29)$$

Принимая во внимание выпуклость функции g_0^* и равенство $\operatorname{div} \sigma + f = 0$, выводим из (4.25)

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left\{ \varphi \bar{u} \cdot \operatorname{div}(\kappa - \sigma^0) + (\bar{u} \otimes \nabla \varphi) : (\kappa - \sigma^0) + \varphi [g^*(\kappa) - g^*(\sigma^0) - \varepsilon^0 : (\kappa - \sigma^0)] \right\} dx \leq - \int_{\Omega} \left\{ \varphi \bar{u} \cdot \operatorname{div}(\sigma - \sigma^0) \right. \\ & \quad \left. + (\bar{u} \otimes \nabla \varphi) : (\sigma - \sigma^0) + \varphi [g^*(\sigma) - g^*(\sigma^0) - \varepsilon^0 : (\sigma - \sigma^0)] \right\} dx \\ & \leq \int_{\Omega} [\varphi \bar{u} \cdot f - (\bar{u} \otimes \nabla \varphi) : (\sigma - \sigma^0)] dx. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Пусть $\gamma \in]0, 1/4]$, а функция φ удовлетворяет условиям

$$\varphi = 1 \text{ в } B(x_0, (1 + \gamma)R), \quad \varphi = 0 \text{ вне } B(x_0, 2R), \quad |\nabla \varphi| \leq C/R.$$

Рассмотрим неравенство (4.30) для $\kappa = \sigma^0 + \frac{\sqrt{2} k_* - |\sigma^{0D}|}{2} \tau$, где $\tau \in C_0^1(B(x_0, (1 + \gamma)R))$ и $|\tau| \leq 1$. Ясно, что в этом случае

$$|\kappa^D| \leq \frac{\sqrt{2} k_* + |\sigma^{0D}|}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
g^*(\varkappa) - g^*(\sigma^0) - \varepsilon^0 : (\sigma - \sigma^0) &= \frac{1}{8K_0} \operatorname{tr}^2(\varkappa - \sigma^0) \\
&+ \int_0^1 (1 - \theta) E^*(\sigma^{0D} + \theta(\varkappa^D - \sigma^{0D}); \varkappa^D - \sigma^{0D}, \varkappa^D - \sigma^{0D}) d\theta \\
&\stackrel{(4.21), (4.24)}{\leq} \frac{\operatorname{tr}^2(\varkappa - \sigma^0)}{8K_0} + \max\{1, c_*\} \\
&\quad \times \int_0^1 (1 - \theta) (g_0^*)''(|\sigma^D + \theta(\varkappa^D - \sigma^{0D})|) |\varkappa^D - \sigma^{0D}|^2 d\theta \\
&\leq \frac{\operatorname{tr}^2(\varkappa - \sigma^0)}{8K_0} + \frac{1}{2} \max\{1, c_*\} \max\left\{(g_0^*)''(t) : t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}k_* + |\sigma^{0D}|}{2}\right]\right\} \\
&\quad \times |\varkappa^D - \sigma^{0D}|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}k_* - |\sigma^{0D}|}{2}\right) d|\tau|^2.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.30) получаем

$$\begin{aligned}
& - \int_{B(x_0, (1+\gamma)R)} \left[\bar{u} \cdot \operatorname{div} \tau + \frac{d}{2} |\tau|^2 \right] dx \\
& \leq \frac{2}{\sqrt{2}k_* - |\sigma^{0D}|} \left\{ \| |f| \|_{L^\infty(\Omega_1)} \int_{B(x_0, 2R)} |\bar{u}| dx \right. \\
& \quad \left. + \frac{C}{R} \left(\int_{T(x_0, 2R)} |\sigma - \sigma^0|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{B(x_0, 2R)} |\bar{u}|^2 dx \right)^{1/2} \right\}.
\end{aligned}$$

Переходя к верхней точной грани по всем $\tau \in C_0^1(B(x_0, (1+\gamma)R); \mathbb{M})$, удовлетворяющим условию $|\tau| \leq 1$, и учитывая неравенство (4.29), будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_{B(x_0, (1+\gamma)R)} H_d(|\varepsilon(\bar{u})|) \\
& = \sup \left\{ - \int_{B(x_0, (1+\gamma)R)} \left[\bar{u} \cdot \operatorname{div} \tau + \frac{d}{2} |\tau|^2 \right] dx : \right. \\
& \quad \left. \tau \in C_0^1(B(x_0, (1+\gamma)R); \mathbb{M}), |\tau| \leq 1 \right\} \\
& \leq - \frac{CR^2}{\mathcal{F}(\sigma^0)} \left[R \| |f| \|_{L^\infty(\Omega_1)} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{T(x_0, 2R)} |\sigma - \sigma^0|^2 dx \right)^{1/2} \right] \int_{B(x_0, 2R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx. \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Оценка (4.27) выводится из (4.31) и неравенства Йенсена следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & H_d \left(\oint_{\overline{B}(x_0, R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx \right) \\
 &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} H_d \left(\frac{1}{|B(x_0, (1+\gamma)R)|} \int_{\overline{B}(x_0, R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx \right) \\
 &\leq \lim_{\gamma \rightarrow 0} H_d \left(\oint_{B(x_0, (1+\gamma)R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx \right) \leq \\
 &\leq \lim_{\gamma \rightarrow 0} \oint_{B(x_0, (1+\gamma)R)} H_d(|\varepsilon(u) - \varepsilon^0| dx).
 \end{aligned}$$

Лемма 4.2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $B(x_0, 2R) \subset \Omega_1 \Subset \Omega$ и выполнены условия (4.19) и

$$\mathcal{F}((\sigma)_{x_0, 2R}) < 0. \quad (4.32)$$

Тогда существует положительная постоянная c_7 , зависящая только от $\|f\|_{L^\infty(\Omega_1)}$, такая, что

$$\begin{aligned}
 H_{d_R}(\Psi(x_0, R)) &\leq -\frac{c_7}{\mathcal{F}((\sigma)_{x_0, R})} \{ [R^2 + \Phi(x_0, 2R) - \Phi(x_0, R/2)]^{1/2} \Psi(x_0, 2R) \\
 &+ \nu_+ (\max\{ |(\sigma^D)_{x_0, R}|, |(\sigma^D)_{x_0, 2R}| \}) [R^2 + \Phi(x_0, 2R) - \Phi(x_0, R/2)] \}, \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

где

$$d_R = -\frac{1}{2}\nu_+ \left(\frac{\sqrt{2}k_* + |(\sigma^D)_{x_0, R}|}{2} \right) \mathcal{F}((\sigma)_{x_0, R}). \quad (4.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу условия (4.19) мы можем применить лемму 4.2 для $\sigma^0 = (\sigma)_{x_0, R}$ и $\varepsilon^0 = (\varepsilon)^{x_0, R}$; тогда, учитывая (4.32) и неравенство Пуанкаре, получим

$$\begin{aligned}
 H_{d_R}(\Psi(x_0, R)) &\leq -\frac{c_6}{\mathcal{F}((\sigma)_{x_0, R})} [R \|f\|_{L^\infty(\Omega_1)} + c_5 (\Phi(x_0, 2R) - \Phi(x_0, R/2))^{1/2} \\
 &+ |(\sigma)_{x_0, 2R} - (\sigma)_{x_0, R}|] [\Psi(x_0, 2R) + |(\varepsilon)^{x_0, 2R} - (\varepsilon)^{x_0, R}|]. \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Еще раз используя (4.22), устанавливаем

$$\begin{aligned}
 |(\sigma)_{x_0, 2R} - (\sigma)_{x_0, R}| &\leq \left(\oint_{T(x_0, 2R)} |\sigma - \sigma^0|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\leq c_8 \left(\int_{B(x_0, 2R) \setminus B(x_0, R/2)} |\nabla \sigma|^2 dx \right)^{1/2} = c_8 (\Phi(x_0, 2R) - \Phi(x_0, R/2))^{1/2}. \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Для оценки величины $|(\varepsilon)^{x_0, 2R} - (\varepsilon)^{x_0, R}|$ используем, как и при доказательстве леммы 4.2, оценки (4.23), (4.24) и определение функции ν_+ . Имеем

$$\begin{aligned}
|(\varepsilon)^{x_0, 2R} - (\varepsilon)^{x_0, R}| &= \left| \frac{1}{4K_0} \mathbf{1} \operatorname{tr}((\sigma)_{x_0, 2R} - (\sigma)_{x_0, R}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(g_0^*)'(|(\sigma^D)_{x_0, 2R}|)}{|(\sigma^D)_{x_0, 2R}|} (\sigma^D)_{x_0, 2R} - \frac{(g_0^*)'(|(\sigma^D)_{x_0, R}|)}{|(\sigma^D)_{x_0, R}|} (\sigma^D)_{x_0, R} \right| \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{4K_0} |\operatorname{tr}((\sigma)_{x_0, 2R} - (\sigma)_{x_0, R})| \\
&\quad + \int_0^1 h_+^*(|(\sigma^D)_{x_0, R} + \theta((\sigma^D)_{x_0, 2R} - (\sigma^D)_{x_0, R})|) d\theta |(\sigma^D)_{x_0, 2R} - (\sigma^D)_{x_0, R}| \\
&\leq \sqrt{2} \max \left\{ \frac{1}{2K_0}, \int_0^1 h_+^*(|(\sigma^D)_{x_0, R} + \theta((\sigma^D)_{x_0, 2R} - (\sigma^D)_{x_0, R})|) d\theta \right\} \\
&\quad \times |(\sigma)_{x_0, 2R} - (\sigma)_{x_0, R}|
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
h_+^*(|(\sigma^D)_{x_0, R} + \theta((\sigma^D)_{x_0, 2R} - (\sigma^D)_{x_0, R})|) \\
\leq \max\{1, c_*\} \max \left\{ (g_0^*)''(s) : s \in [0, \max\{|(\sigma^D)_{x_0, 2R}|, |(\sigma^D)_{x_0, R}|\}] \right\}.
\end{aligned}$$

Итак, из двух последних неравенств следует

$$\begin{aligned}
|(\varepsilon)^{x_0, 2R} - (\varepsilon)^{x_0, R}| &\leq c_8 \nu_+ (\max\{|(\sigma^D)_{x_0, 2R}|, |(\sigma^D)_{x_0, R}|\}) \\
&\quad \times (\Phi(x_0, 2R) - \Phi(x_0, R/2))^{1/2}.
\end{aligned}$$

Отсюда, из (4.35) и (4.36) вытекает требуемая оценка (4.33).

§ 5. Доказательство теоремы 2.2

Доказательству теоремы 2.2 предположим две леммы, предполагая, что все условия теоремы 2.2 выполнены.

ЛЕММА 5.1. Пусть α — фиксированное число из $]0, \frac{2}{3}\sqrt{2}k_*]$. Пусть $B(x_0, 2R) \subset \Omega_1 \Subset \Omega$, и предположим, что выполнены следующие условия:

$$\mathcal{F}((\sigma)_{x_0, R}) < -(3/2)\alpha, \quad (5.1)$$

$$\Psi(x_0, 2R) < d_\alpha = \frac{k_*}{\sqrt{2}} \nu_+ \left(\sqrt{2}k_* - \frac{\alpha}{2} \right), \quad (5.2)$$

$$c_7 [R^2 + \Phi(x_0, 2R)]^{1/2} < \alpha/4, \quad (5.3)$$

$$R^2 + \Phi(x_0, 2R) < \min \left\{ 1, \frac{\alpha d_\alpha}{4c_7 \nu_+ (\sqrt{2}k_* - \alpha)} \right\}, \quad (5.4)$$

$$c_8 (R^2 + \Phi(x_0, 2R))^{1/10} B_0^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} i^{-21/20} < \alpha/4, \quad (5.5)$$

где

$$B_0 = 1 + 2 \sup \left\{ t^{21/20} \left[\frac{c_9(1 + t^{21/22})}{1 + c_9(1 + t^{21/22})} \right]^t : 0 \leq t < +\infty \right\},$$

$$c_9 = c_4 \max \left\{ 1, \frac{2k_* d_\alpha}{\alpha} \left(\frac{c_7}{\alpha} d_\alpha + \nu_+(\sqrt{2}k_* - \alpha) \right)^{1/2} \right\}.$$

Тогда для любого натурального числа k верны неравенства

$$\Psi \left(x_0, \frac{2R}{2^k} \right) < d_\alpha, \quad (5.6)$$

$$|(\sigma^D)_{x_0, 2R/2^k} - (\sigma^D)_{x_0, R}| < \alpha/4, \quad (5.7)$$

$$\Phi \left(x_0, \frac{R}{2^k} \right) \leq B_0 \left(\frac{2}{k} \right)^{21/10} (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{1/5}. \quad (5.8)$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. В условиях леммы 5.1 справедлива оценка

$$\Phi(x_0, \rho) \leq B_0 \left(\frac{4 \ln 2}{\ln(R/\rho)} \right)^{21/10} (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{1/5} \leq B_0 \left(\frac{4 \ln 2}{\ln(R/\rho)} \right)^{21/10} \quad (5.9)$$

для всех $0 < \rho \leq R/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1. Отметим, что в силу неравенств (4.36) и условий (5.1) и (5.5) мы имеем

$$|(\sigma^D)_{x_0, 2R} - (\sigma^D)_{x_0, R}| < \frac{\alpha}{4} \Rightarrow |(\sigma^D)_{x_0, 2R}| < \sqrt{2}k_* - \alpha. \quad (5.10)$$

Поэтому, принимая во внимание следствия 4.1 и 4.2, можно написать следующие оценки:

$$\begin{aligned} \Phi \left(x_0, \frac{R}{2} \right) &\leq c_4 \left\{ \frac{\sqrt{2}k_*}{\alpha} \left[R^2 + \Phi(x_0, 2R) - \Phi \left(x_0, \frac{R}{2} \right) \right]^{1/2} \Psi(x_0, R) \right. \\ &\quad \left. + \Phi(x_0, 2R) - \Phi \left(x_0, \frac{R}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

и

$$\begin{aligned} H_{d_R}(\Psi(x_0, R)) &\leq \frac{c_7}{\alpha} \left\{ \left[R^2 + \Phi(x_0, 2R) - \Phi \left(x_0, \frac{R}{2} \right) \right]^{1/2} \Psi(x_0, 2R) \right. \\ &\quad \left. + \nu_+(\sqrt{2}k_* - \alpha) \left[R^2 + \Phi(x_0, 2R) - \Phi \left(x_0, \frac{R}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Кроме того, $d_R \leq d_\alpha$, поэтому вместо последней оценки будем иметь

$$\begin{aligned} H_{d_\alpha}(\Psi(x_0, R)) &\leq \frac{c_7}{\alpha} \left\{ \left[R^2 + \Phi(x_0, 2R) - \Phi \left(x_0, \frac{R}{2} \right) \right]^{1/2} \Psi(x_0, 2R) \right. \\ &\quad \left. + \nu_+(\sqrt{2}k_* - \alpha) \left[R^2 + \Phi(x_0, 2R) - \Phi \left(x_0, \frac{R}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Будем доказывать лемму по индукции относительно k . Очевидно, что утверждение (5.7) при $k = 1$ и утверждение (5.8) при $k = 1$ или $k = 2$ выполнены. Таким образом, для того чтобы иметь базу индукции, необходимо доказать (5.6) для $k = 1$. В силу условий (5.2)–(5.4) получаем из (5.12)

$$H_{d_\alpha}(\Psi(x_0, R)) < \frac{d_\alpha}{4} + \frac{d_\alpha}{4} = \frac{d_\alpha}{2} \Rightarrow \quad (5.6).$$

Допустим теперь, что при $s = 1, 2, \dots, k-1$ верны утверждения

$$\Psi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) < d_\alpha, \quad (5.13_1)$$

$$|(\sigma^D)_{x_0, 2R/2^s} - (\sigma^D)_{x_0, R}| < \frac{\alpha}{4} \left(\Rightarrow \mathcal{F}((\sigma)_{x_0, 2R/2^s}) < -\alpha \right), \quad (5.13_2)$$

$$\Phi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) \leq B_0 \left(\frac{2}{s}\right)^{21/10} (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{1/5}. \quad (5.13_3)$$

Согласно (4.36) и (5.13₃) имеем

$$\begin{aligned} |(\sigma^D)_{x_0, 2R/2^k} - (\sigma^D)_{x_0, R}| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} |(\sigma^D)_{x_0, 2R/2^{i+1}} - (\sigma^D)_{x_0, 2R/2^i}| \\ &\leq c_8 \sum_{i=1}^{k-1} \Phi^{1/2}\left(x_0, \frac{2R}{2^i}\right) \leq c_8 B_0^{1/2} (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{1/10} \sum_{i=1}^{\infty} i^{-21/20} < \frac{\alpha}{4}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Итак, (5.7) доказано. Принимая во внимание (5.13₂), (5.7) и следствие 4.2, получим

$$\begin{aligned} d_{2R/2^s} &\leq d_\alpha, \quad H_{d_\alpha}\left(\Psi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right)\right) \\ &\leq \frac{c_7}{\alpha} \left\{ \left[\left(\frac{2R}{2^s}\right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{4R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) \right]^{1/2} \Psi\left(x_0, \frac{2R}{2^{s-1}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \nu_+(\sqrt{2}k_* - \alpha) \left[\left(\frac{2R}{2^s}\right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{4R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) \right] \right\}, \quad s = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Рассматривая последнее неравенство при $s = k$ и учитывая неравенства (5.2), (5.13₁) и условия (5.3), (5.4), придем к оценке

$$H_{d_\alpha}\left(\Psi\left(x_0, \frac{2R}{2^k}\right)\right) < \frac{1}{4}d_\alpha + \frac{1}{4}d_\alpha = \frac{1}{2}d_\alpha,$$

из которой следует (5.6).

Для доказательства (5.8) воспользуемся неравенствами (5.13₁), (5.13₂), (5.7). Из (5.15), в частности, вытекает

$$\begin{aligned} \Psi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) &\leq \sqrt{2}k_* \left(\frac{c_7}{\alpha} d_\alpha + \nu_+(\sqrt{2}k_* - \alpha) \right)^{1/2} \left[\left(\frac{2R}{2^s}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \Phi\left(x_0, \frac{4R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) \right]^{1/4}, \quad s = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Далее, следствие 4.1 и (5.13₂), (5.7) гарантируют выполнение оценок

$$\begin{aligned} \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) &\leq c_4 \left\{ \frac{\sqrt{2} k_*}{\alpha} \left[\left(\frac{2R}{2^s} \right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{4R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) \right]^{1/2} \Psi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) \right. \\ &\quad \left. + \Phi\left(x_0, \frac{4R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) \right\}, \quad s = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Наконец, объединяя (5.16) и (5.17), устанавливаем

$$\begin{aligned} \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) &\leq c_9 \left\{ \left[\left(\frac{2R}{2^s} \right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{4R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{2R}{2^s} \right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{4R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) \right]^{3/4} \right\}, \quad s = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Увеличивая c_9 , если это необходимо, мы можем считать, что $c_9 \geq 1$.

Рассмотрим случай, когда $k = 2t - 1$. Положим $s = 2i - 1$, где $i = 1, 2, \dots, t$,

$$R_i = \frac{2R}{2^{2i-1}}, \quad \Phi_i = \Phi(x_0, 2R_i).$$

Тогда из (5.18) следует

$$\Phi_{i+1} \leq c_9 \left\{ [R_i^2 + \Phi_i - \Phi_{i+1}] + [R_i^2 + \Phi_i - \Phi_{i+1}]^{3/4} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, t. \quad (5.19)$$

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ применим в (5.19) неравенство Юнга ($a^{3/4} \leq \varepsilon^{-1}a + \varepsilon^{11/5}a^{1/5}$) и получим

$$\Phi_{i+1} \leq c_9(1 + \varepsilon^{-1})[\Phi_i - \Phi_{i+1} + R_i^2] + \varepsilon^{11/5}(\Phi_i + R_i^2)^{1/5}, \quad i = 1, 2, \dots, t,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1} &\leq \theta[\Phi_i + R_i^2] + \frac{\varepsilon^{11/5}}{1 + c_9(1 + \varepsilon^{-1})}[\Phi_i + R_i^2]^{1/5} \\ &\leq \theta[\Phi_i + R_i^2] + \frac{\varepsilon^{11/5}}{1 + c_9(1 + \varepsilon^{-1})}[\Phi_1 + R_1^2]^{1/5}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $\theta = \frac{c_9(1 + \varepsilon^{-1})}{1 + c_9(1 + \varepsilon^{-1})}$ и $i = 1, 2, \dots, t$. Итерируя (5.20), будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1} &\leq \theta^t \Phi_1 + \theta^t R_1^2 + \theta^{t-1} R_2^2 + \dots + \theta R_t^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon^{11/5}}{1 + c_9(1 + \varepsilon^{-1})}(1 + \theta + \dots + \theta^{t-1})(\Phi_1 + R_1^2)^{1/5} \leq \theta^t \Phi_1 \\ &\quad + \theta^t R_1^2 \left(1 + \frac{1}{4\theta} + \dots + \left(\frac{1}{4\theta} \right)^{t-1} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^{11/5}}{(1 - \theta)(1 + c_9(1 + \varepsilon^{-1}))}(\Phi_1 + R_1^2)^{1/5}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Далее,

$$4\theta > \frac{4c_9}{1+c_9} \geq 2, \quad (1-\theta)(1+c_9(1+\varepsilon^{-1})) = 1.$$

Отсюда и из (5.21) выводим

$$\Phi_{t+1} \leq \theta^t [\Phi_1 + 2R_1^2] + \varepsilon^{11/5} (\Phi_1 + R_1^2)^{1/5} \leq (2\theta^t + \varepsilon^{11/5}) (\Phi_1 + R_1^2)^{1/5}.$$

Полагая $\varepsilon = t^{-21/22}$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_{t+1} &\leq \left\{ 2 \exp \left(t \ln \left(\frac{c_9(1+t^{21/22})}{1+c_9(1+t^{21/22})} \right) \right) + t^{-21/10} \right\} (\Phi_1 + R_1^2)^{1/5} \\ &\leq B_0 t^{-21/10} (\Phi_1 + R_1^2)^{1/5}. \end{aligned}$$

Так как $k < 2t$, то последнее неравенство влечет (5.8) при нечетных k . Для случая четных k неравенство (5.8) доказывается аналогично. Лемма 5.1 доказана.

ЛЕММА 5.2. Пусть $0 < \alpha < k_*/\sqrt{2}$ и $0 < \beta < 1$ – фиксированные числа. Пусть $B(x_0, 2R) \subset \Omega_1$. Предположим, что выполнены условия (5.4) и

$$\mathcal{F}((\sigma)_{x_0, R}) < -2\alpha, \quad (5.22)$$

$$c_7 [R^2 + \Phi(x_0, 2R)]^{(1-\beta)/2} < \alpha/8, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} c_8 (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{1/2} \\ &\times \left\langle 1 + 8c_{11} + \frac{1}{\ln(1/A)} \max\{0, \ln(\Psi(x_0, 2R)A)\} \right\rangle < \frac{\alpha}{4}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{8} (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{2\beta}, \quad c_{11} = 1 + c_{10} \left(1 + \frac{6}{7} d_\alpha \right), \\ c_{10} &= c_4 \max \left\{ \frac{2\sqrt{2} k_* c_7}{\alpha^2}, \frac{2\sqrt{2} k_* c_7}{\alpha^2} \nu_+ (\sqrt{2} k_* - \alpha) + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Тогда если

$$\Psi \left(x_0, \frac{R}{2^s} \right) \geq d_\alpha, \quad s = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (5.25)$$

то

$$|(\sigma^D)_{x_0, R/2^{j+1}} - (\sigma^D)_{x_0, R}| < \frac{\alpha}{4} \left(\Rightarrow \mathcal{F}((\sigma)_{x_0, R/2^{j+1}}) < -\frac{3}{2}\alpha \right) \quad (5.26)$$

и

$$\Psi \left(x_0, \frac{R}{2^j} \right) \leq \frac{6}{7} d_\alpha + A^{j+1} \Psi(x_0, 2R), \quad (5.27)$$

где $j = 0, 1, \dots, k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем по индукции относительно k . Пусть $k = 0$. Согласно (4.36), (5.22) и (5.24) будем иметь

$$\begin{aligned} |(\sigma^D)_{x_0, R/2} - (\sigma^D)_{x_0, R}| &\leq c_8 \Phi^{1/2}(x_0, R) \leq c_8 \Phi^{1/2}(x_0, 2R) < \alpha/4, \\ |(\sigma^D)_{x_0, 2R} - (\sigma^D)_{x_0, R}| &\leq c_8 \Phi^{1/2}(x_0, 2R) < \frac{\alpha}{4} \left(\Rightarrow \mathcal{F}((\sigma)_{x_0, 2R}) < -\frac{3}{2}\alpha \right) \end{aligned}$$

и, следовательно, в силу (5.22), (5.23), (5.25), (5.4) и следствия 4.2

$$d_R \leq d_\alpha = \frac{k_*}{\sqrt{2}} \nu_+ \left(\sqrt{2} k_* - \frac{\alpha}{2} \right)$$

и

$$\begin{aligned} H_{d_\alpha}(\Psi(x_0, R)) &= \Psi(x_0, R) - \frac{d_\alpha}{2} \leq \frac{c_7}{\alpha} \left\{ 8(R^2 + \Phi(x_0, 2R))^{(1-\beta)/2} A\Psi(x_0, 2R) \right. \\ &\quad \left. + \nu_+(\sqrt{2}k_* - \alpha)[R^2 + \Phi(x_0, 2R)] \right\} < A\Psi(x_0, 2R) + \frac{d_\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Итак, база индукции установлена. Пусть неравенства

$$\Psi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) \geq d_\alpha, \quad s = 0, 1, \dots, k-1, \quad (5.28)$$

влекут оценки

$$|(\sigma^D)_{x_0, R/2^{j+1}} - (\sigma^D)_{x_0, R}| < \alpha/4, \quad (5.29)$$

$$\Psi\left(x_0, \frac{R}{2^j}\right) \leq \frac{6}{7}d_\alpha + A^{j+1}\Psi(x_0, 2R), \quad (5.30)$$

где $j = 0, 1, \dots, k-1$. Покажем, что тогда из неравенств (5.25) следуют оценки (5.26) и (5.27).

Итак, пусть выполнены неравенства (5.25). Тогда, в частности, имеют место неравенства (5.28) и по индуктивному предположению (см. (5.29)) мы получаем

$$|(\sigma^D)_{x_0, R/2^{j+1}}| < \sqrt{2}k_* - \frac{7}{4}\alpha, \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (5.31)$$

Принимая во внимание неравенства (5.22), (5.31), (5.25) и следствия 4.1 и 4.2, устанавливаем следующие серии оценок:

$$\begin{aligned} d_{R/2^s} &\leq d_\alpha, \quad s = 0, 1, \dots, k, \\ \frac{1}{2}\Psi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) &\leq H_{d_\alpha}\left(\Psi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right)\right) = \Psi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) - \frac{d_\alpha}{2} \\ &\leq \frac{c_7}{\alpha} \left\{ \left[\left(\frac{R}{2^s}\right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) \right]^{1/2} \Psi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \nu_+(\sqrt{2}k_* - \alpha) \left[\left(\frac{R}{2^s}\right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.32_1)$$

$$\begin{aligned} \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) &\leq c_7 \left\{ \frac{\sqrt{2}k_*}{\alpha} \left[\left(\frac{R}{2^s}\right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) \right]^{1/2} \Psi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) + \Phi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.32_2)$$

Условия (5.4), (5.23) позволяют привести оценки (5.32₁) к виду

$$\Psi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right) \leq \frac{3}{4}d_\alpha + A\Psi\left(x_0, \frac{R}{2^{s-1}}\right), \quad s = 0, 1, \dots, k. \quad (5.33)$$

Итерируя соотношения (5.33) с учетом того, что $A < 1/8$, придем к (5.27). Осталось доказать неравенство (5.26) при $j = k$. С этой целью выразим $\Psi\left(x_0, \frac{R}{2^s}\right)$ из неравенства (5.32₁) и подставим результат в (5.32₂). Тогда в силу (5.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) &\leq c_7 \left\{ \frac{\sqrt{2}k_*}{\alpha} \left[\left(\frac{R}{2^s}\right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \times \frac{2c_7}{\alpha} \left\langle \left[\left(\frac{R}{2^s}\right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) \right]^{1/2} \Psi\left(x_0, \frac{R}{2^{s-1}}\right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu_+(\sqrt{2}k_* - \alpha) \left[\left(\frac{R}{2^s}\right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) \right] \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \Phi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) \right\} \leq c_4 \left[\left(\frac{R}{2^s}\right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) \right. \\ &\quad \left. - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) \right] \left[\frac{2\sqrt{2}k_*c_7}{\alpha^2} \left(\Psi\left(x_0, \frac{R}{2^{s-1}}\right) + \nu_+(\sqrt{2}k_* - \alpha) \right) + 1 \right] \\ &\leq c_{10} \left(1 + \Psi\left(x_0, \frac{R}{2^{s-1}}\right) \right) \left[\left(\frac{R}{2^s}\right)^2 + \Phi\left(x_0, \frac{2R}{2^s}\right) - \Phi\left(x_0, \frac{R}{2^{s+1}}\right) \right], \quad (5.34) \end{aligned}$$

где $s = 0, 1, \dots, k$.

Полагая

$$R_s = R/2^s, \quad \Phi_s = \Phi(x_0, R_s), \quad \Psi_s = \Psi(x_0, 2R_s), \quad s = 0, 1, \dots, k,$$

перепишем неравенства (5.34) следующим образом:

$$\Phi_{s+1} \leq \theta_s(\Phi_{s-1} + R_s^2), \quad s = 0, 1, \dots, k, \quad (5.35)$$

где

$$\theta_s = \frac{c_{10}(1 + \Psi_s)}{1 + c_{10}(1 + \Psi_s)}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = 2r$. Тогда для $s = 2i$, $i = 0, 1, \dots, r$, получим из (5.35)

$$\Phi_{2i+1} \leq \theta_{2i}(\Phi_{2i-1} + R_{2i}^2), \quad i = 0, 1, \dots, r,$$

и, следовательно, в результате итераций будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi_{2t+1} &\leq \left(\prod_{i=0}^t \theta_{2i} \right) \Phi_{-1} + \sum_{i=0}^t R_{2i}^2 \left(\prod_{s=i}^t \theta_{2s} \right) \\ &= Q_{2t+1} \left(\Phi_{-1} + \sum_{i=0}^t \frac{R_{2i}^2}{\theta_0 \theta_1 \dots \theta_{2(i-1)}} \right), \quad t = 0, 1, \dots, r, \quad (5.36) \end{aligned}$$

где

$$Q_{2t+1} = \prod_{i=0}^t \theta_{2i}.$$

Увеличивая c_{10} , если это необходимо, мы можем считать, что $c_{10} \geq 1$. Следовательно, $\theta_{2i} \geq 1/2$ и

$$\sum_{i=0}^t \frac{R_{2i}^2}{\theta_0 \theta_1 \dots \theta_{2i-2}} = R^2 \left[1 + \frac{1}{16\theta_0} + \dots + \frac{1}{16^t \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{2t-2}} \right] \leq 2R^2.$$

Таким образом, (5.36) дает

$$\Phi_{2t+1} \leq Q_{2t+1}(\Phi_{-1} + 2R^2), \quad t = 0, 1, \dots, r. \quad (5.37)$$

Если $k = 2r + 1$, то из (5.35) при $s = 2i + 1$, $i = 0, 1, \dots, r$, получаем

$$\Phi_{2i+2} \leq \theta_{2i+1}(\Phi_{2i} + R_{2i+1}^2), \quad i = 0, 1, \dots, r.$$

Повторяя рассуждения для случая, когда k четное, будем иметь

$$\Phi_{2t+2} \leq Q_{2t+2} \left(\Phi_0 + \frac{1}{2} R^2 \right) \leq Q_{2t+2}(\Phi_{-1} + 2R^2), \quad (5.38)$$

где $t = 0, 1, \dots, r$ и

$$Q_{2t+2} = \prod_{i=0}^t \theta_{2i+1}.$$

Наконец, объединяя оценки (5.37) и (5.38), приходим к следующей серии неравенств:

$$\Phi_s \leq Q_s(\Phi_{-1} + 2R^2), \quad s = 0, 1, \dots, k-1, \quad (5.39)$$

где

$$Q_0 = 1, \quad Q_{2t} = \prod_{i=0}^{t-1} \theta_{2i+1}, \quad Q_{2t-1} = \prod_{i=0}^{t-1} \theta_{2i}, \quad t \geq 1.$$

Неравенства (4.36) позволяют написать оценку

$$\begin{aligned} \left| (\sigma^D)_{x_0, R/2^{k+1}} - (\sigma^D)_{x_0, R} \right| &\leq \sum_{i=0}^k \left| (\sigma^D)_{x_0, R/2^{i+1}} - (\sigma^D)_{x_0, R/2^i} \right| \\ &\leq c_8 \sum_{i=0}^k \Phi^{1/2} \left(x_0, \frac{R}{2^i} \right) \leq \sqrt{2} c_8 (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{1/2} \sum_{i=0}^k Q_i^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Для того чтобы оценить сумму, стоящую в правой части последнего неравенства, воспользуемся уже доказанными оценками (5.27), согласно которым

$$\Psi_s \leq \frac{6}{7} d_\alpha + A^s \Psi_0, \quad s = 1, 2, \dots, k+1. \quad (5.41)$$

Тогда, например, для $2t + 1 < k$ из (5.41) мы получаем

$$\begin{aligned}
 Q_{2t+1} &= \prod_{i=0}^t \theta_{2i} = \exp \left\{ \sum_{i=0}^t \ln \theta_{2i} \right\} \\
 &\leq \exp \left\{ - \sum_{i=0}^t (1 - \theta_{2i}) \right\} = \exp \left\{ - \sum_{i=0}^t \frac{1}{1 + c_{10}(1 + \Psi_{2i})} \right\} \\
 &\leq \exp \left\{ - \sum_{i=0}^t \left(1 + c_{10} \left(1 + \frac{6}{7} d_\alpha \right) + c_{10} A^{2i} \Psi_0 \right)^{-1} \right\} \\
 &\leq \exp \left\{ - \frac{1}{c_{11}} \sum_{i=0}^t \frac{1}{1 + A^{2i} \Psi_0} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^t \frac{1}{1 + A^{2i} \Psi_0} &= \int_0^{t+1} \frac{dx}{1 + A^{2[x]} \Psi_0} \geq \int_0^1 \frac{dx}{1 + A^{2x} \Psi_0} \\
 &= \frac{1}{2 \ln A} \ln \left(\frac{1 + \Psi_0}{A^{-2t-2} + \Psi_0} \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.42) выводим оценку

$$Q_s \leq \exp \left\{ - \frac{1}{2c_{11} \ln A} \ln \left(\frac{1 + \Psi_0}{A^{-s-1} + \Psi_0} \right) \right\} \tag{5.43}$$

при $s = 2t + 1 \leq k$, $t \geq 0$. Аналогично устанавливается оценка для четных s , которая имеет вид

$$Q_s \leq \exp \left\{ - \frac{1}{2c_{11} \ln A} \ln \left(\frac{A^{-1} + \Psi_0}{A^{-s-1} + \Psi_0} \right) \right\} \tag{5.44}$$

при $s = 2t \leq k$, $t \geq 1$. Объединяя оценки (5.43) и (5.44), получим

$$Q_s \leq \left[\frac{A^{-s-1} + \Psi_0}{A^{-1} + \Psi_0} \right]^{\frac{1}{2c_{11} \ln A}}, \tag{5.45}$$

где $1 \leq s \leq k$.

Итак, из (5.45) следует

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^k Q_i^{1/2} &= 1 + \sum_{i=1}^k Q_i^{1/2} \leq 1 + \sum_{i=1}^k \left[\frac{A^{-i} + \Psi_0 A}{1 + \Psi_0 A} \right]^{\frac{1}{4c_{11} \ln A}} \\
 &\leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{A^{-i} + \Psi_0 A}{1 + \Psi_0 A} \right]^{\frac{1}{4c_{11} \ln A}} = 1 + \int_1^{+\infty} \left[\frac{A^{-[x]} + \Psi_0 A}{1 + \Psi_0 A} \right]^{\frac{1}{4c_{11} \ln A}} dx \\
 &\leq 1 + \int_1^{+\infty} \left[\frac{A^{-x+1} + \Psi_0 A}{1 + \Psi_0 A} \right]^{\frac{1}{4c_{11} \ln A}} dx = [A^{-x+1} = t] \\
 &= 1 - \frac{1}{\ln A} \int_1^{+\infty} \left[\frac{1 + \Psi_0 A}{t + \Psi_0 A} \right]^{\frac{1}{4c_{11} \ln(1/A)}} \frac{dt}{t} = 1 + I.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

При оценке последнего интеграла в (5.46) рассмотрим два случая. В первом из них $\Psi_0 A \leq 1$ и, следовательно,

$$t \geq \frac{1}{2}(t+1) \geq \frac{1}{2}(t + \Psi_0 A).$$

Но тогда мы имеем оценку

$$I \leq 2[1 + \Psi_0 A]^{\frac{1}{4c_{11} \ln(1/A)}} \int_1^{+\infty} (t + \Psi_0 A)^{-1 - \frac{1}{4c_{11} \ln(1/A)}} dt = 8c_{11}.$$

Во втором случае можно написать

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{\ln A} \left[\int_1^{\Psi_0 A} \dots + \int_{\Psi_0 A}^{+\infty} \dots \right] \\ &\leq \frac{\ln(\Psi_0 A)}{\ln(1/A)} + 8c_{11} \left[\frac{1 + \Psi_0 A}{2\Psi_0 A} \right]^{\frac{1}{4c_{11} \ln(1/A)}} \leq \frac{\ln(\Psi_0 A)}{\ln(1/A)} + 8c_{11}. \end{aligned}$$

Из двух последних оценок, а также из (5.24), (5.40) и (5.46) получаем

$$\begin{aligned} |(\sigma^D)_{x_0, R/2^{k+1}} - (\sigma^D)_{x_0, R}| &\leq \sqrt{2} c_8 (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{1/2} \left(1 + 8c_{11} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\ln(1/A)} \max\{0, \ln(A\Psi(x_0, 2R))\} \right) < \frac{\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Лемма 5.2 доказана.

Следующая теорема содержит основной критерий локальной регулярности слабого решения.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены все условия теоремы 2.2. Пусть, далее, $0 < \alpha < \sqrt{2} k_*/2$, $0 < \beta < 1$ – фиксированные числа. Предположим, что $B(x_0, 2R) \subset \Omega_1 \Subset \Omega$ и выполнены условия (5.22), (5.4), (5.23), (5.5) и (5.24). Тогда существуют положительные числа $R_0 \leq R$ и $r \leq R$ такие, что

$$\sigma \in C(\overline{B}(x_0, r); \mathbb{M}), \quad (5.47)$$

$$\mathcal{F}(\sigma(x)) < -\alpha \quad \forall x \in \overline{B}(x_0, r), \quad (5.48)$$

$$\Phi(x_0, \rho) \leq B_0 \left(\frac{4 \ln 2}{\ln(R_0/\rho)} \right)^{21/10} \quad (5.49)$$

для всех $x \in \overline{B}(x_0, r)$ и всех $0 < \rho \leq R_0/2$.

При доказательстве теоремы 5.1 нам понадобится следующий факт.

ЛЕММА 5.3. Пусть $B(z, R) \Subset \Omega$ и $\mathcal{F}((\sigma)_{z, R}) < 0$. Пусть, далее, $z^m \in \Omega$ и $z^m \rightarrow z$. Тогда

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \Psi(z^m, R) \leq \Psi(z, R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\mathbb{M} \ni \varepsilon^m = \frac{\partial g^*}{\partial \tau}((\sigma)_{z^m, R}), \quad \mathbb{M} \ni \varepsilon = \frac{\partial g^*}{\partial \tau}((\sigma)_z, R).$$

Тогда

$$\Psi(z^m, R) = \int_{\overline{B}(z^m, R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^m dx|, \quad \Psi(z, R) = \int_{\overline{B}(z, R)} |\varepsilon(u) - \varepsilon dx|.$$

Так как $u \in BD(\Omega)$, то $\mu = |\varepsilon(u) - \varepsilon dx|$ — положительная ограниченная мера Радона, которая обладает следующим свойством:

$$\mu(\overline{B}(z, R)) = \mu\left(\bigcap_{k=k_0}^{+\infty} B\left(z, R + \frac{1}{k}\right)\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu\left(B\left(z, R + \frac{1}{k}\right)\right). \quad (5.50)$$

Фиксируем $k \geq k_0$ и находим число $N(k)$ такое, что

$$\overline{B}(z^m, R) \subset B\left(z, R + \frac{1}{k}\right) \quad \text{при} \quad m \geq N. \quad (5.51)$$

Тогда при $m \geq N$ мы имеем

$$\begin{aligned} \Psi(z^m, R) &\leq \frac{1}{\pi R^2} \int_{B(z, R+1/k)} |\varepsilon(u) - \varepsilon^m dx| \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \sup \left\{ - \int_{B(z, R+1/k)} (u - \varepsilon^m(x-z)) \cdot \operatorname{div} \tau dx : \right. \\ &\quad \left. \tau \in C_0^1\left(B\left(z, R + \frac{1}{k}\right); \mathbb{M}\right), |\tau| \leq 1 \right\} \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \sup \left\{ - \int_{B(z, R+1/k)} (u - \varepsilon(x-z)) \cdot \operatorname{div} \tau dx : \right. \\ &\quad \left. \tau \in C_0^1\left(B\left(z, R + \frac{1}{k}\right); \mathbb{M}\right), |\tau| \leq 1 \right\} \\ &\quad + \frac{(R+1/k)^2}{R^2} |\varepsilon^m - \varepsilon| = \frac{1}{\pi R^2} \mu\left(B\left(z, R + \frac{1}{k}\right)\right) + \frac{\left(R + \frac{1}{k}\right)^2}{R^2} |\varepsilon^m - \varepsilon|. \end{aligned}$$

Устремляя m к бесконечности, получаем

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \Psi(z^m, R) \leq \frac{1}{\pi R^2} \mu\left(B\left(z, R + \frac{1}{k}\right)\right).$$

Утверждение леммы вытекает теперь из (5.50). Лемма 5.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Если выполнено условие (5.2), то положим $R_0 = R$ и отметим, что пара x_0 и R_0 удовлетворяет всем условиям леммы 5.1. Если $\Psi(x_0, 2R) \geq d_\alpha$, а $\Psi(x_0, R) < d_\alpha$, то полагаем $R_0 = R/2$. В силу (4.36), (5.22), (5.5) имеем

$$|(\sigma^D)_{x_0, R_0} - (\sigma^D)_{x_0, R}| \leq c_8 \Phi^{1/2}(x_0, R) < \frac{\alpha}{4} \left(\Rightarrow \mathcal{F}((\sigma)_{x_0, R_0}) < -\frac{3}{2}\alpha \right)$$

и, следовательно, пара x_0 и R_0 удовлетворяет всем условиям леммы 5.1. Далее, пусть число k_0 определяется из условия

$$\Psi(x_0, R/2^s) \geq d_\alpha, \quad s = 0, 1, \dots, k_0 - 1, \quad \Psi\left(x_0, \frac{R}{2^{k_0}}\right) < d_\alpha.$$

В силу леммы 5.2 число k_0 конечно. Положим $R_0 = R/2^{k_0+1}$ и покажем, что пара x_0 и R_0 удовлетворяет всем условиям леммы 5.1. Действительно, согласно лемме 5.2 мы имеем

$$|(\sigma^D)_{x_0, 2R_0} - (\sigma^D)_{x_0, R}| < \frac{\alpha}{4} \left(\Rightarrow \mathcal{F}((\sigma)_{x_0, 2R_0}) < -\frac{7}{4}\alpha \right). \quad (5.52)$$

Снова применяем неравенство (4.36) с учетом (5.52), (5.22) и (5.5)

$$\begin{aligned} |(\sigma^D)_{x_0, 2R_0} - (\sigma^D)_{x_0, R_0}| &\leq c_8 \Phi^{1/2}(x_0, 2R_0) \leq c_8 \Phi^{1/2}(x_0, 2R) < \frac{\alpha}{4} \\ &\Rightarrow \mathcal{F}((\sigma)_{x_0, R_0}) < -\frac{3}{2}\alpha. \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что существует число $R_0 \in]0, R]$ такое, что пара x_0 и R_0 удовлетворяет всем условиям леммы 5.1.

В силу леммы 5.3 существует положительное число r_1 такое, что пара x и R_0 удовлетворяет всем условиям леммы 5.1 при любом $x \in B(x_0, r_1)$. Но тогда условие (5.4) и следствие 5.1 дают

$$\Phi(x, \rho) \leq B_0 \left(\frac{4 \ln 2}{\ln(R_0/\rho)} \right)^{21/10} \quad (5.53)$$

для всех $0 < \rho < R_0/2$ и всех $x \in B(x_0, r_1)$. Используя логарифмический критерий непрерывности (см. [27]), получаем утверждения (5.47), (5.49) при $r = r_1/2$. Наконец, оценка (5.48) вытекает из леммы 5.1 (см. (5.1) и (5.7)) и того факта, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sigma^D)_{x, \rho} = \sigma^D(x) \quad \forall x \in \overline{B}(x_0, r).$$

Теорема 5.1 доказана.

Предположим, что $B(x_0, 2R) \subset \Omega_1 \Subset \Omega$ и

$$\mathcal{F}((\sigma)_{x_0, 2R}) \leq -\alpha. \quad (5.54)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\Psi(x_0, 2R) &= \int_{\overline{B}(x_0, 2R)} \left| \varepsilon(u) - \frac{\partial g^*}{\partial \tau}((\sigma)_{x_0, 2R}) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\overline{B}(x_0, 2R)} |\varepsilon(u)| + \frac{\sqrt{2}}{4K_0} |\operatorname{tr}(\sigma)_{x_0, 2R}| + (g_0^*)'(|(\sigma^D)_{x_0, 2R}|) \\
&\leq \frac{1}{4\pi R^2} \left[\int_{\overline{\Omega}_1} |\varepsilon(u)| + \frac{\sqrt{2}}{4K_0} \int_{\Omega_1} |\operatorname{tr} \sigma| dx \right] \\
&\quad + \max\{(g_0^*)'(t) : 0 < t \leq \sqrt{2} k_* - \alpha\} \leq \frac{c_{12}}{R^2}, \\
c_{12} &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\overline{\Omega}_1} |\varepsilon(u)| + \frac{\sqrt{2}}{4K_0} \int_{\Omega_1} |\operatorname{tr} \sigma| dx \right] \\
&\quad + \operatorname{diam}^2 \Omega_1 \max\{(g_0^*)'(t) : 0 < t \leq \sqrt{2} k_* - \alpha\}. \tag{5.55}
\end{aligned}$$

Таким образом, из (5.54) и (5.55) можно вывести следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть выполнены все условия теоремы 2.2. Пусть, далее, $0 < \alpha < k_*/\sqrt{2}$, $0 < \beta < 1$ — фиксированные числа. Предположим, что $B(x_0, 2R) \subset \Omega_1 \Subset \Omega$ и выполнены условия (5.22), (5.4), (5.23), (5.5), а также

$$\sqrt{2} c_8 (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{1/2} \left[1 + 8c_{11} + \frac{1}{\ln(1/A)} \max \left\{ 0, \ln \left(\frac{Ac_{12}}{R^2} \right) \right\} \right] < \frac{\alpha}{4}. \tag{5.56}$$

Тогда верны все утверждения теоремы 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Пусть $x_0 \in \Omega_0$; тогда

$$\liminf_{R \rightarrow 0} |(\sigma^D)_{x_0, 2R}| < \sqrt{2} k_* \tag{5.57}$$

и

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\Phi^{1/2}(x_0, R) \ln(1/R)}{\ln \left(\frac{1}{\Phi(x_0, R) + R^2} \right)} = 0. \tag{5.58}$$

Покажем, что (5.58) влечет

$$I = 0,$$

где

$$I = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{(\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{1/2} \ln(Ac_{12}/R^2)}{\ln(1/A)}, \quad A = \frac{1}{8} (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{\frac{1}{2}\beta}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{R \rightarrow 0} (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{1/2} \frac{\left[\ln A + \ln 4c_{12} + 2 \ln \frac{1}{2R} \right]}{\ln(1/A)} \\
&= \frac{4}{\beta} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\Phi^{1/2}(x_0, 2R) \ln \left(\frac{1}{2R} \right)}{\ln \left(\frac{1}{\Phi(x_0, 2R) + R^2} \right)} \leq \frac{4}{\beta} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\Phi^{1/2}(x_0, 2R) \ln \left(\frac{1}{2R} \right)}{\ln \left(\frac{1}{\Phi(x_0, 2R) + (2R)^2} \right)} = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали

$$\lim_{R \rightarrow 0} \sqrt{2} c_8 (\Phi(x_0, 2R) + R^2)^{1/2} \times \left[1 + 8c_{11} + \frac{1}{\ln(1/A)} \max \left\{ 0, \ln \left(\frac{Ac_{12}}{R^2} \right) \right\} \right] = 0. \quad (5.59)$$

Выберем и зафиксируем число $0 < \beta < 1$ и открытое множество Ω_1 так, чтобы $x_0 \in \Omega_1 \Subset \Omega$. В силу (5.57) существуют число $0 < \alpha < k_*/\sqrt{2}$ и последовательность положительных чисел $R_k \rightarrow 0$ такие, что

$$B(x_0, 2R_k) \subset \Omega_1 \Subset \Omega, \quad |(\sigma^D)_{x_0, R_k}| < \sqrt{2} k_* - \alpha. \quad (5.60)$$

Принимая во внимание равенство (5.59), выберем k настолько большим, чтобы условия (5.4), (5.23), (5.5) и (5.56) выполнялись при $R = R_k$. Тогда по теореме 5.2 найдутся числа $0 < R_0 \leq R_k$ и $0 < r \leq R_k$ такие, что

$$\sigma \in C(\overline{B}(x_0, r); \mathbb{M}), \quad (5.61)$$

$$\mathcal{F}(\sigma(x)) < -\alpha \quad \forall x \in \overline{B}(x_0, r), \quad (5.62)$$

$$\Phi(x, \rho) \leq B_0 \left[\frac{4 \ln 2}{\ln(R_0/\rho)} \right]^{\frac{21}{10}} \quad \forall x \in \overline{B}(x_0, r), \quad 0 < \rho \leq R_0/2. \quad (5.63)$$

В частности, (5.61) и (5.62) влекут

$$\lim_{R \rightarrow 0} |(\sigma^D)_{x, R}| = |\sigma^D(x)| < \sqrt{2} k_*, \quad x \in \overline{B}(x_0, r), \quad (5.64)$$

а (5.63) дает для достаточно малых ρ оценку

$$0 \leq \Phi^{1/2}(x, \rho) \ln \left(\frac{1}{\rho} \right) \leq B_0^{1/2} \left(\frac{4 \ln 2}{\ln(R_0/\rho)} \right)^{21/20} \ln \frac{1}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \quad (5.65)$$

при всех $x \in \overline{B}(x_0, r)$. Но соотношения (5.64) и (5.65) означают, во-первых, что множество Ω_0 открыто, а во-вторых, что в каждой точке x множества Ω_0 выполнено неравенство $\mathcal{F}(\sigma(x)) < 0$. Теорема 2.2 доказана.

Список литературы

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
2. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.
3. Мосолов П.П., Мясников В.П. О корректности краевых задач в механике сплошных сред // Матем. сб. 1972. Т. 88. № 4. С. 256–287.

4. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.
5. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1983.
6. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Наука, 1979.
7. Temam R., Strang G. Duality and relaxations in the variational problems in plasticity // J. Mécanique. 1980. V. 19. P. 1–35.
8. Anzellotti G., Giaquinta M. On the existence of the fields of stresses and displacements for an elasti-perfectly plastic body in static equilibrium // J. Math. Pures Appl. 1982. V. 61. P. 219–244.
9. Kohn R., Temam R. Dual spaces of stresses and strains with applications to Hencky plasticity // Appl. Math. Optim. 1983. V. 10. P. 1–35.
10. Hardt R., Kinderlehrer D. Elastic-plastic deformation // Appl. Math. Optim. 1983. V. 10. P. 203–246.
11. Серёгин Г. А. Вариационно-разностные схемы для задач механики идеально-упруго-пластических сред // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25. № 2. С. 237–253.
12. Mathies H., Strang G., Christiansen E. The saddle point of a differential program // Energy Methods in Finite Element Analysis, volume dedicated to Professor Fraeys de Veubeke / Eds. R. Glowinski, E. Rodin, O. C. Zienkiewicz. New York: Wiley, 1979.
13. Suquet P. Existence et régularité des solutions des équations de la plasticité parfaite: Thèse de 3e Cycle, Université de Paris-VI, 1978. Also C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. D. 1978. V. 286. P. 1201–1204.
14. Temam R., Strang G. Functions of bounded deformation // Arch. Rational Mech. Anal. 1980/1981. V. 75. P. 7–21.
15. Temam R. Problèmes mathématiques en plasticité. Paris: Gauthier-Villars, 1965.
16. Серёгин Г. А. Дифференциальные свойства решений вариационных задач для функционалов линейного роста // Проблемы матем. анализа. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. Вып. 11. С. 51–79.
17. Серёгин Г. А. О регулярности минимайзеров некоторых вариационных задач теории пластичности // Алгебра и Анализ. 1992. Т. 4. № 5. С. 181–218.
18. Brezis H., Stampacchia G. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques // Bull. Soc. Math. France. 1968. V. 96. P. 153–180.
19. Caffarelli L. A., Riviere N. M. On the Lipschitz character of the stress tensor when twisting an elastic-plastic bar // Arch. Rational Mech. Anal. 1979. V. 69. P. 31–36.
20. Friedman A. Variational Principles and free-boundary problems. New York: Wiley-Interscience, 1982.
21. Серёгин Г. А. О дифференцируемости экстремалей вариационных задач механики идеально-упругопластических сред // Дифф. уравн. 1987. Т. 23. № 11. С. 1981–1991.
22. Серёгин Г. А. О регулярности слабых решений вариационных задач теории пластичности // Алгебра и Анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 121–140.
23. Evans L. C., Knerr B. Elastic-plastic plane stress problem // Appl. Math. Optim. 1979. V. 5. P. 331–348.
24. Серёгин Г. А. О дифференциальных свойствах экстремалей вариационных задач, возникающих в теории пластичности // Дифф. уравн. 1990. Т. 26. № 6. С. 1033–1044.
25. Giaquinta M. Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems // Ann. Math. Studies. № 105. Princeton–N. Y.: Princeton Univ. Press, 1983.
26. Widman K. O. Hölder continuity of solutions of elliptic systems // Manuscripta Math. 1971. V. 5. P. 299–308.
27. Frehse J. Two-dimensional variational problems with thin obstacles // Math. Z. 1975. V. 143. P. 279–288.
28. Серёгин Г. А. Локальная оценка типа неравенства Каччопполи для экстремалей вариационных задач пластичности Генки // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1988. С. 127–138.
29. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т.1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
30. Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.