Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Парамонов, О C^m -продолжении субгармонических функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 6, 139–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/im670>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:52:22

УДК 517.5

П. В. Парамонов

О C^m -продолжении субгармонических функций

При $m \in (1, 3)$ для любой (жордановой) B -области D в $\mathbb{R}^2$ доказана возможность продолжения всякой субгармонической в D функции класса $C^m(\overline{D})$ до функции, субгармонической и класса C^m на всем $\mathbb{R}^2$ с оценкой C^{m-1} -нормы ее градиента. При $m \in [0, 1) \cup [3, +\infty)$ аналогичное утверждение не верно даже для кругов. Указанные результаты остаются справедливыми для шаров D в $\mathbb{R}^N$, $N \in \{3, 4, \dots\}$. Получен ряд следствий, а также соответствующие утверждения о Lip^m -продолжении субгармонических функций.

Библиография: 7 наименований.

§ 1. Введение

Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}$, $B_1 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ – единичный круг, $k: \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_1}$ – конформный изоморфизм с условиями $k(\infty) = \infty$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} (k(z)/z) > 0$ (он существует и определен однозначно по теореме Римана). Будем говорить, что D является B -областью, если указанное отображение k билипшицево, т. е. найдется константа $c_1 \in [1, +\infty)$ такая, что

$$c_1^{-1}|z_1 - z_2| \leq |k(z_1) - k(z_2)| \leq c_1|z_1 - z_2| \quad (1.1)$$

при всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. В частности, $|k'(z)| \in [c_1^{-1}, c_1]$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Отметим, что ∂D не обязательно является C^1 -гладкой кривой.

Для открытого множества Ω в $\mathbb{C}$ через $SH(\Omega)$ (соответственно, $H(\Omega)$) обозначается класс всех вещественнозначных субгармонических (соответственно, гармонических) функций в Ω . Основной результат настоящей работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть D является B -областью, $m \in (1, 3)$. Тогда найдется константа $c = c(D, m) > 0$ такая, что для любой функции $f \in C^m(\overline{D}) \cap SH(D)$ существует функция $F \in C^m(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$ с условиями $F|_{\overline{D}} = f$ и

$$\|\nabla F\|_{m-1, \mathbb{C}} \leq c \|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}. \quad (1.2)$$

Далее, в § 2, для всех $m \in [0, +\infty)$ вводятся (банаховы) пространства $BC^m(\Omega)$ (соответственно, $C^m(X)$) комплекснозначных “ m -гладких” функций на открытом

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00720) и программы “Ведущие научные школы РФ” (грант НШ-2040.2003.1).

множестве Ω (соответственно, на компакте X) с нормами $\|f\|_{m,\Omega}$ (соответственно, $\|f\|_{m,X}$). Там же определяются пространства (Фреше) $C^m(\Omega)$.

Аналог теоремы 1.1 при $m = 1$ справедлив при более жестких требованиях, налагаемых на область D (см. [1, теоремы 2.2 и 3.1]). Как показывает следующее простое утверждение, случаи $m \in [0, 1) \cup [3, +\infty)$ в рассматриваемом контексте особого интереса не представляют.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *При $m \in [0, 1) \cup [3, +\infty)$ аналог теоремы 1.1 не верен даже для кругов в $\mathbb{C}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $m \in [0, 1)$. Фиксируем $p \in (m, 1)$ и рассмотрим функцию $f(x) = -(1 - |x|^2)^p$ в B_1 , $f = 0$ на ∂B_1 , так что $f \in C^m(\overline{B}_1)$. Из соотношений

$$\Delta f(x) = (1 - |x|^2)^{p-2} (4p - 4p^2 |x|^2) > 0$$

в B_1 получаем, что $f \in SH(B_1)$, причем $\Delta f(x)$ не интегрируема в B_1 по мере Лебега. С другой стороны, как известно, всякая функция, субгармоническая в области Ω , имеет в Ω обобщенный лапласиан, являющийся локально конечной положительной борелевской мерой в Ω . Поэтому f нельзя продолжить (даже просто субгармонически) ни в какую окрестность компакта $\overline{B}_1$.

Пусть теперь $m \in [3, +\infty)$. Положим $f(x) = |x|^2/4 - |x|^4/16$, $x \in \mathbb{R}^2$. Ввиду равенства $\Delta f(x) = 1 - |x|^2$ имеем

$$f|_{\overline{B}_1} \in C^\infty(\overline{B}_1) \cap SH(B_1).$$

Далее, $\partial(\Delta f(x))/\partial|x| = -2|x| < 0$ на ∂B_1 , поэтому при любом C^3 -продолжении F функции f из $\overline{B}_1$ в какую-либо окрестность множества $\overline{B}_1$ мы будем иметь $\Delta F(x) < 0$ для всех точек x вне $\overline{B}_1$, достаточно близких к ∂B_1 , а значит, F не может быть субгармонической ни в какой окрестности замкнутого круга $\overline{B}_1$.

В §2 вводятся необходимые определения и обозначения.

Доказательство теоремы 1.1 приводится в §3.

В §4 обсуждается ряд следствий: теорема о локализации (для произвольной жордановой области на плоскости), соответствующее (теореме 1.1) утверждение о Lip^m -продолжении субгармонических функций, а также аналогичные утверждения о C^m - и Lip^m -продолжении субгармонических функций с замкнутых шаров в $\mathbb{R}^N$.

В вопросе о точности условий теоремы 1.1 пока ясности нет. Автору известны примеры жордановых областей в $\mathbb{R}^2$ со спрямляемой границей, для которых утверждение теоремы 1.1 не имеет места.

§2. Некоторые определения и обозначения

Пусть E – произвольное непустое множество в $\mathbb{C}$, g – ограниченная комплекснозначная функция на E . Обозначим через $\|g\|_E$ равномерную норму $\sup_{x \in E} |g(x)|$ функции g на E , а при $\mu \in [0, 1]$ определим так называемый μ -модуль непрерывности функции g на E следующим образом:

$$\omega_E^\mu(f, \delta) = \sup \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\mu}, \quad \delta \in (0, +\infty],$$

где указанный супремум (не обязательно конечный) берется по всем $x \in E$ и $y \in E$ таким, что $0 < |x - y| < \delta$.

Всюду далее $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$. Для *открытого* множества Ω в $\mathbb{C}$ и $m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ через $BC^m(\Omega)$ обозначается класс всех (комплекснозначных) функций f , имеющих непрерывные и ограниченные частные производные (по переменным x_1, x_2) в Ω до порядка m включительно. Норма (банахова) в $BC^m(\Omega)$ задается следующим образом:

$$\|f\|_{m,\Omega} = \max_{\{|\beta| \leq m\}} \|\partial^\beta f\|_\Omega,$$

где указанный максимум берется по всем 2-индексам $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ с условием $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leq m$, причем

$$\partial^\beta f(x) = \frac{\partial^{|\beta|} f(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2}}.$$

При $m \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < \mu \leq 1$ положим

$$B \operatorname{Lip}^{m+\mu}(\Omega) = \{f \in BC^m(\Omega) \mid \omega_\Omega^{m,\mu}(f, \infty) < \infty\},$$

где

$$\omega_E^{m,\mu}(f, \delta) = \max\{\omega_E^\mu(\partial^\alpha f, \delta)\}, \quad E \subset \Omega, \quad \delta > 0,$$

а последний максимум берется по всем 2-индексам α с условием $|\alpha| = m$.

При $m \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < \mu < 1$ определим

$$BC^{m+\mu}(\Omega) = \{f \in B \operatorname{Lip}^{m+\mu}(\Omega) \mid \omega_K^{m,\mu}(f, \delta) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0\}$$

(последнее условие выполнено для любого компакта K в Ω).

Норма в $B \operatorname{Lip}^{m+\mu}(\Omega)$ (при $\mu \in (0, 1]$) и в $BC^{m+\mu}(\Omega)$ (при $\mu \in (0, 1)$) определяется по формуле

$$\|f\|_{m+\mu,\Omega} = \max\{\|f\|_{m,\Omega}, \omega_\Omega^{m,\mu}(f, \infty)\}.$$

Для произвольного $m \geq 0$ и открытого множества Ω через $C^m(\Omega)$ (соответственно, $\operatorname{Lip}^m(\Omega)$, $m > 0$) обозначается класс всех функций f в Ω таких, что $f \in BC^m(E)$ (соответственно, $f \in B \operatorname{Lip}^m(E)$) для любого *ограниченного* открытого множества E с условием $\overline{E} \subset \Omega$. Ясно, что $C^{m_1}(\Omega) \subset C^{m_2}(\Omega)$ (и $\operatorname{Lip}^{m_1}(\Omega) \subset \operatorname{Lip}^{m_2}(\Omega)$) для любых $m_1 \geq m_2 \geq 0$. Определим еще $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \geq 0} C^m(\Omega)$. Пространства $C^m(\Omega)$ и $\operatorname{Lip}^m(\Omega)$ стандартным образом наделяются топологиями Фреше. Нетрудно показать (для всех $m > 0$), что $BC^m(\Omega)$ есть замыкание в $B \operatorname{Lip}^m(\Omega)$ подпространства $C^\infty(\Omega) \cap B \operatorname{Lip}^m(\Omega)$. Таким образом, классы $BC^m(\Omega)$ (и ниже классы $C^m(X)$) естественно возникают, например, в задачах аппроксимации гармоническими функциями в нормах $\|\cdot\|_m$.

Мы не будем выписывать индексы m и (или) Ω в обозначениях введенных норм при $m = 0$ и (или) $\Omega = \mathbb{C}$.

Пусть теперь X – компактное множество в $\mathbb{C}$, $m \geq 0$ произвольно. Через $C^m(X)$ (соответственно, $\operatorname{Lip}^m(X)$, $m > 0$) обозначим класс функций f на X ,

которые допускают продолжения до функций класса $BC^m(\mathbb{C})$ (соответственно, $B\text{Lip}^m(\mathbb{C})$). Для $f \in C^m(X)$ (соответственно, $f \in \text{Lip}^m(X)$) определим

$$\|f\|_{m,X} = \inf \|F\|_m,$$

где указанный инфимум берется по всем возможным продолжениям $F \in BC^m(\mathbb{C})$ (соответственно, $F \in B\text{Lip}^m(\mathbb{C})$), $F|_X = f$.

Отметим, что если внутренность X° компакта X плотна в X (т. е. $\overline{X^\circ} = X$, где $\overline{E}$ – замыкание множества E в $\mathbb{C}$), то для всякой $f \in C^m(X)$ однозначно определены функции $\partial^\beta f(x)$ на X , $|\beta| \leq [m]$. В частности, при $m \geq 1$ корректно определен вектор-градиент $\nabla f(x) = \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right\}$ на X с модулем

$$|\nabla f(x)| = \max_{\{1 \leq n \leq 2\}} \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right|;$$

при $m \geq 2$ матрица вторых частных производных

$$\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n'}} \right)_{n,n' \in \{1,2\}}$$

корректно определена на X , причем

$$|\nabla^2 f(x)| = \max_{\{1 \leq n \leq n' \leq 2\}} \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_{n'}} \right|.$$

Если E открыто или компактно (причем в последнем случае потребуем, чтобы $\overline{E^\circ} = E$) и $f \in C^m(E)$, то положим

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_{m-1,E} &= \max_{\{1 \leq n \leq 2\}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\|_{m-1,E} && \text{при } m \geq 1, \\ \|\nabla^2 f\|_{m-2,E} &= \max_{\{1 \leq n \leq n' \leq 2\}} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n'}} \right\|_{m-2,E} && \text{при } m \geq 2 \end{aligned}$$

при условии, что эти полунормы конечны (последнее замечание касается только открытых множеств E).

Общая постановка интересующей нас задачи состоит в следующем.

ЗАДАЧА 2.1. Пусть $m \geq 0$, а X – компакт в $\mathbb{C}$. Каковы условия на m и X , необходимые и достаточные для того, чтобы выполнялось равенство

$$C^m(X) \cap SH(X^\circ) = (C^m(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C}))|_X? \quad (2.1)$$

Дополнительный интерес представляет получение соответствующих оценок для норм найденных продолжений.

Как видно из § 1, в настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением случаев, когда X – замкнутая жорданова область в $\mathbb{C}$.

Аналогичный задаче 2.1 вопрос о Lip^m -продолжении субгармонических функций обсуждается в § 4.

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $B(z_0, r)$ – открытый круг в $\mathbb{C}$ с центром в точке z_0 и радиусом $r > 0$. Через $c, c_2, c_3, \dots$ будут обозначаться положительные константы, которые (в конечном счете) определяются только константой c_1 (см. (1.1)) и параметром m . При этом c может меняться в разных соотношениях, а $c_1, c_2, \dots$ фиксируются. Отметим, что до конца этого параграфа выполнены условия и используются обозначения теоремы 1.1. Фиксируем некоторую точку a в D и число $R \in (0, \text{diam } D)$ такие, что $D \subset B(a, R)$. Через $d(z)$ обозначим расстояние от точки z до компакта $\bar{D}$.

Докажем сначала следующую лемму, сводящую теорему 1.1 при $m \in [2, 3)$ к случаю $f \in C^m(\bar{D}) \cap H(D)$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $m \in [2, 3)$, $f \in C^m(\bar{D}) \cap SH(D)$. Тогда найдется функция $F_1 \in C^m(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$ такая, что:

- а) $f - F_1 \in H(D)$;
- б) $\|F_1\|_{m, \bar{D}} \leq c \|\nabla^2 f\|_{m-2, \bar{D}} \leq c \|f\|_{m, \bar{D}}$;
- в) $\|\nabla F_1\|_{m-1} \leq c \|\nabla^2 f\|_{m-2, \bar{D}} \leq c \|\nabla f\|_{m-1, \bar{D}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая вместо f функцию $f_a^*(x) = f(x) - f(a) - (\nabla f)|_a(x - a)$ (отличающуюся от f на линейную, т.е. гармоническую функцию), мы можем без ограничения общности считать, что $f(a) = |(\nabla f)|_a| = 0$, поскольку

$$\|\nabla^2 f\|_{m-2, \bar{D}} = \|\nabla^2 f_a^*\|_{m-2, \bar{D}}, \quad \|\nabla f_a^*\|_{m-1, \bar{D}} \leq 2\|\nabla f\|_{m-1, \bar{D}}.$$

Важно то, что при $f(a) = |(\nabla f)|_a| = 0$ имеют место оценки

$$\|f\|_{m, \bar{D}} \leq c \|\nabla f\|_{m-1, \bar{D}} \leq c^2 \|\nabla^2 f\|_{m-2, \bar{D}}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим сначала случаи $m \in (2, 3)$. По теореме Уитни [2, гл. 6, § 2.3 и § 4.6] продолжим функцию $\Delta f \in C^{m-2}(\bar{D})$ до функции $h_1 \in C^{m-2}(\mathbb{C})$ с условиями $h_1 \geq 0$ всюду в $\mathbb{C}$, $\text{supp } h_1 \subset B(a, 2R)$ и

$$\|h_1\|_{m-2} \leq c \|\Delta f\|_{m-2, \bar{D}}, \quad (3.2)$$

где $\text{supp } h$ – носитель (обобщенной) функции h . Пусть $\Phi(z) = (2\pi)^{-1} \ln |z|$ – фундаментальное решение для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^2$. Положим $F_1 = \Phi * h_1$, где через $*$ обозначена операция свертки. Проверим, что F_1 – искомая функция. Условия $F_1 \in SH(\mathbb{C})$ и свойство а) очевидны. Определим

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Имеем

$$\partial_z F_1 = (\partial_z \Phi) * h_1 = \frac{1}{4\pi z} * h_1.$$

Поскольку F_1 вещественна, справедливо равенство $|\nabla F_1(x)| = 2|\partial_z F_1|$, так что требуемые оценки для $\|F_1\|_{\bar{D}}$ и $\|\nabla F_1\|$ непосредственно следуют из локальной интегрируемости (по мере Лебега в $\mathbb{R}^2$) логарифмического ядра Φ и ядра Коши $4\partial_z \Phi$. Таким образом, ввиду (3.2) для завершения доказательства неравенств б)

и с) остается оценить C^{m-2} -норму частных производных второго порядка функции F_1 . Поскольку $\Delta F_1 = h_1$ и $\partial_z^2 F_1 = \overline{\partial_z^2 F_1}$, то необходимо получить оценку для $\|\partial_z^2 F_1\|_{m-2}$. Нетрудно показать, что (в обобщенном смысле) справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = -\frac{1}{4\pi z^2} * h_1,$$

поэтому требуемая оценка

$$\|\partial_z^2 F_1\|_{m-2} \leq c \|h_1\|_{m-2}$$

вытекает из хорошо известных свойств непрерывности оператора Кальдерона–Зигмунда с ядром $1/z^2$ (по мере Лебега в $\mathbb{C}$), действующего из пространства $BC_0^\mu(B(a, 2R))$ (функций класса BC^μ с носителем в круге $B(a, 2R)$) в пространство BC^μ при любом фиксированном $\mu \in (0, 1)$ (в рассматриваемом случае $\mu = m - 2$).

Пусть теперь $m = 2$. По указанной выше теореме Уитни продолжим функцию f до функции $F_0 \in BC^2(\mathbb{C})$ с условиями $\text{supp } F_0 \subset B(a, R)$ и $\|F_0\|_2 \leq c \|f\|_{2, \overline{D}}$. Пусть $\Psi_1(x) = \max\{0, -\Delta F_0(x)\}$. Ясно, что Ψ_1 непрерывна и неотрицательна в $\mathbb{R}^2$, причем $\text{supp } \Psi_1 \subset B(a, R) \setminus D$. Пусть $h_1(w) = 0$ при $|w| \leq 1$, а при $|w| > 1$ положим

$$h_1(w) = \max_{\{z: |k(z)|=|w|\}} \Psi_1(z).$$

Функция h_1 также неотрицательна и непрерывна в $\mathbb{R}^2$, имеет компактный носитель и радиально-симметрична: $h_1(w) = h_1(|w|)$. Имеем

$$\|h_1\| = \|\Psi_1\| \leq \|\Delta F_0\| \leq c \|f\|_{2, \overline{D}}. \quad (3.3)$$

Найдем $H_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ с условиями $\Delta H_1 = h_1$ и $H \equiv 0$ в B_1 . Переходя к полярным координатам, легко убедиться, что (единственное) решение последней задачи имеет вид

$$\begin{aligned} H_1(w) = H_1(\rho) &= 0, & |w| = \rho \leq 1, \\ H_1(w) = H_1(\rho) &= \int_1^\rho \frac{dt}{t} \int_1^t \tau h_1(\tau) d\tau, & |w| = \rho > 1. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнее равенство по параметру ρ и используя элементарные соотношения

$$|\nabla H_1(w)| = |H_1'(\rho)|, \quad |\nabla^2 H_1(w)| \leq |H_1''(\rho)| + \frac{1}{\rho} |H_1'(\rho)|,$$

находим, что $H_1 \in C^2(\mathbb{C})$, $H_1(w) = 0$ при $|w| \leq 1$, причем

$$\|\nabla H_1\| \leq c \|h_1\|, \quad \|\nabla^2 H_1\| \leq c \|h_1\|.$$

Пусть $g_1(z) = 0$ при $z \in \overline{D}$ и $g_1(z) = H_1(k(z))$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Из условия (1.1), вещественности функции g_1 и из соотношений (при $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(z)}{\partial z} &= \frac{\partial H_1}{\partial w} \Big|_{k(z)} k'(z), \\ \frac{\partial^2 g_1(z)}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 H_1}{\partial w^2} \Big|_{k(z)} (k'(z))^2 + \frac{\partial H_1}{\partial w} \Big|_{k(z)} k''(z), \\ \Delta g_1(z) &= \Delta H_1|_{k(z)} |k'(z)|^2, \\ |k''(z)| &\leq \frac{c_1}{d(z)}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial w} \Big|_{k(z)} = o(d(z)), \\ \left| \frac{\partial H_1}{\partial w} \Big|_{k(z)} \right| &\leq |H_1'(|k(z)|)| \leq (|k(z)| - 1) \|h_1\| \leq c_1 d(z) \|h_1\| \end{aligned}$$

получаем, что $g_1 \in C^2(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$, $\|\nabla g_1\| \leq c \|h_1\|$ и $\|\nabla^2 g_1\| \leq c \|h_1\|$. Применяя оценки (3.3) и (3.1), получаем, что искомую функцию F_1 можно взять в виде $F_0 + (c_1)^2 g_1$. Лемма доказана.

Остальные этапы доказательства теоремы 1.1 одинаковы для всех $m \in (1, 3)$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $m \in (1, 3)$. Найдутся константы $c > 0$, $c_2 > 0$ и функция $F_2 \in SH(\mathbb{C}) \cap \text{Lip}^m(\mathbb{C}) \cap C^\infty(\mathbb{C} \setminus \partial D)$ такие, что:

- а) $F_2(z) = 0$ при $z \in \overline{D}$;
- б) $\|\nabla F_2\|_{m-1} \leq c$;
- в) $|\Delta F_2(z)| \geq c_2 (d(z))^{m-2}$ при $z \in B(a, 2R) \setminus \overline{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $G_2(w) = 0$ при $|w| \leq 1$, $G_2(w) = (\ln |w|)^m$ при $|w| > 1$. Элементарно проверяется, что G_2 удовлетворяет всем условиям леммы в случае $D = B_1$. В частности, при $|w| > 1$ имеем

$$\begin{aligned} |\nabla G_2(w)| &= m (\ln |w|)^{m-1} |w|^{-1}, \\ |\nabla^2 G_2(w)| &\leq c ((\ln |w|)^{m-2} + (\ln |w|)^{m-1}) |w|^{-2}, \\ \Delta G_2(w) &= m(m-1) (|w|)^{-2} (\ln |w|)^{m-2} > 0, \end{aligned}$$

поэтому найдется $c_3 > 0$ такая, что

$$\Delta G_2(w) \geq c_3 (|w| - 1)^{m-2} \quad (3.4)$$

при $w \in k(B(a, 2R) \setminus \overline{D})$.

Рассмотрим функцию $F_2(z)$, равную нулю при всех $z \in \overline{D}$ и равную $G_2(k(z))$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. При $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ имеем

$$\partial_z F_2 = \overline{\partial_z F_2} = \partial_w G(w)|_{k(z)} k'(z) = m (\ln |k(z)|)^{m-1} (2k(z))^{-1} k'(z), \quad (3.5)$$

откуда легко видеть, что $F_2 \in C^1(\mathbb{C}) \cap C^\infty(\mathbb{C} \setminus \partial D)$ и

$$\|\nabla F_2\| \leq c = c(m, c_1).$$

Далее, при $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ имеем

$$\Delta F_2(z) = 4\partial_z \partial_{\bar{z}} F_2 = \Delta G_2(w)|_{k(z)} |k'(z)|^2 \geq 0. \quad (3.6)$$

Поскольку $F_2 \in SH(\mathbb{C} \setminus \partial D) \cap C^1(\mathbb{C})$ и ∂D спрямляема, можно показать (используя, например, обобщенную формулу Гаусса–Остроградского, как это сделано в конце доказательства теоремы 2.2 работы [1]), что $F_2 \in SH(\mathbb{C})$. Свойство с) (с константой $c_2 = c_3 c_1^{-3}$) непосредственно вытекает из (3.6), (3.4) и (1.1). Остается проверить, что $F_2 \in \text{Lip}^m(\mathbb{C})$, и установить неравенство б). При $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ имеем

$$\partial_z^2 F_2(z) = \overline{\partial_{\bar{z}}^2 F_2(z)} = \partial_w^2 G_2(w)|_{k(z)} (k'(z))^2 + \partial_w G_2(w)|_{k(z)} k''(z), \quad (3.7)$$

откуда нетрудно показать, что при $m \in (2, 3)$ имеем $F_2 \in C^2(\mathbb{C})$ (а при $m = 2$ имеем $F_2 \in \text{Lip}^2(\mathbb{C}) \cap C^\infty(\mathbb{C} \setminus \partial D)$) и справедливы нужные *равномерные* оценки вторых частных производных функции F_2 . В частности, случай $m = 2$ в дальнейшем рассмотрении не нуждается.

Пусть $m = m_0 + \mu$, где m_0 – целая часть m и $\mu \in (0, 1)$. Остается надлежащим образом оценить $\omega_{\mathbb{C}}^{m_0, \mu}(F_2, \infty)$. Мы обсудим только случай $m_0 = 1$, случай $m_0 = 2$ рассматривается аналогично ($\omega_{\mathbb{C}}^\mu$ оценивается отдельно для ΔF_2 и отдельно для каждого слагаемого в правой части формулы (3.7)).

Итак, пусть $m = 1 + \mu$. Возьмем произвольные z_1 и z_2 в $\mathbb{C}$, $|z_1 - z_2| = \delta > 0$. Согласно (3.5) достаточно установить неравенство

$$|\partial_z F_2(z_2) - \partial_z F_2(z_1)| \leq c\delta^\mu.$$

Поскольку $F_2 \in C^1(\mathbb{C})$ и $F_2 = 0$ в $\overline{D}$, достаточно рассмотреть случай, когда обе точки z_1 и z_2 лежат в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Пусть $d_j = d(z_j)$ и $w_j = k(z_j)$ при $j \in \{1, 2\}$. Без ограничения общности предполагаем, что $d_2 \geq d_1$. Согласно (1.1) имеем

$$|w_2 - w_1| \in [c_1^{-1}\delta, c_1\delta], \quad |w_j| - 1 \in [c_1^{-1}d_j, c_1d_j] \quad (3.8)$$

при $j \in \{1, 2\}$.

Рассмотрим два случая. Пусть сначала $\delta \geq d_2/2$, откуда $d_1 \leq d_2 \leq 2\delta$. Ввиду (3.8) и упомянутых выше свойств функции G_2 имеем

$$\begin{aligned} |\partial_z F_2(z_2) - \partial_z F_2(z_1)| &\leq |\partial_w G(w_2) - \partial_w G(w_1)| |k'(z_2)| \\ &+ |\partial_w G(w_1)| |k'(z_2) - k'(z_1)| \leq c|w_1 - w_2|^\mu c_1 + c d_1^\mu c_1 \leq c(m, c_1)\delta^\mu. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\delta < d_2/2$. Поскольку в этом случае $|k'(z_2) - k'(z_1)| \leq c|z_1 - z_2|/d_2$, мы окончательно получаем

$$\begin{aligned} |\partial_z F_2(z_2) - \partial_z F_2(z_1)| &\leq |\partial_w G(w_2) - \partial_w G(w_1)| |k'(z_2)| \\ &+ |\partial_w G(w_1)| |k'(z_2) - k'(z_1)| \leq c\delta^\mu + c d_1^\mu \delta (d_2)^{-1} \leq c(m, c_1)\delta^\mu. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $f \in SH(D) \cap C^m(\overline{D})$ при $m \in (1, 2)$ или $f \in H(D) \cap C^m(\overline{D})$ при $m \in [2, 3]$. Найдутся константа $c > 0$ и функция $F_3 \in SH(\mathbb{C}) \cap \text{Lip}^m(\mathbb{C}) \cap C^m(\mathbb{C} \setminus \partial D)$ такие, что:

- а) $F_3(z) = f(z)$ при $z \in \overline{D}$;
- б) $\|\nabla F_3\|_{m-1} \leq c\|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности мы можем предположить, что $f(a) = 0$, так что $\|f\|_{m, \overline{D}} \leq c\|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}$. Продолжим функцию f (с множества $\overline{D}$) до функции $F_0 \in BC^m(\mathbb{C})$ с носителем в круге $B(a, 2R)$ и условиями

$$\|F_0\|_m \leq c\|f\|_{m, \overline{D}}, \quad |\Delta F_0(z)| \leq c\|f\|_{m, \overline{D}}(d(z))^{m-2}.$$

Последняя оценка при $m \in (1, 2)$ вытекает из [2, гл. 6, § 2.3, оценка 2.3.2(б')], а при $m \in [2, 3]$ она непосредственно следует из определения нормы $\|\cdot\|_m$ и условия $\Delta F_0 = 0$ в $\overline{D}$. Из леммы 3.2 получаем, что найдется $c_4 > 0$ такая, что функция

$$F_3 = F_0 + c_4\|f\|_{m, \overline{D}}F_2$$

удовлетворяет всем требованиям леммы 3.3.

ЛЕММА 3.4. Пусть $f \in SH(D) \cap C^m(\overline{D})$ при $m \in (1, 2)$ или $f \in H(D) \cap C^m(\overline{D})$ при $m \in [2, 3]$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется функция $F_\varepsilon \in SH(\mathbb{C}) \cap C^m(\mathbb{C})$ такая, что:

- а) если $m \in (1, 2)$, то $(f - F_\varepsilon) \in SH(D)$ и $\text{supp } \Delta F_\varepsilon \cap D \subset \text{supp } \Delta f$; если $m \in [2, 3]$, то $(f - F_\varepsilon) \in H(D)$ (в частности, $F_\varepsilon \in H(D)$);
- б) $\|f - F_\varepsilon\|_{m, \overline{D}} < \varepsilon$;
- с) $\|\nabla F_\varepsilon\|_{m-1} \leq c\|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, мы можем предположить, что $f(a) = 0$ (откуда $\|f\|_{m, \overline{D}} \leq c\|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}$), и продолжить функцию f до функции $F_0 \in BC^m(\mathbb{C})$ с носителем в круге $B(a, 2R)$ и условием $\|F_0\|_m \leq c\|f\|_{m, \overline{D}}$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Утверждается, что найдется функция $G_\varepsilon \in BC^m(\mathbb{C}) \cap SH(D)$ (если $m \in [2, 3]$, то $G_\varepsilon \in BC^m(\mathbb{C}) \cap H(D)$), гармоническая в некоторой окрестности $U = U(\partial D)$ границы ∂D области D с условиями

$$\|G_\varepsilon - F_0\|_m < \varepsilon, \quad (f - G_\varepsilon) \in SH(D), \quad \text{supp } \Delta G_\varepsilon \cap D \subset \text{supp } \Delta f.$$

При $m \in [2, 3]$ указанное утверждение (о возможности гармонической C^m -аппроксимации) непосредственно следует из теоремы О'Фаррелла–Вердеры (см. [3, теорема 1''] и [4, теорема 1]). Пусть теперь $m \in (1, 2)$. При $\delta \in (0, R/4)$ рассмотрим стандартное δ -разбиение единицы $\{B_j, \varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$ в $\mathbb{C}$ (здесь $j = (j_1, j_2)$, $a_j = (\delta j_1, \delta j_2)$, $B_j = B(a_j, \delta)$, $\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \varphi_j \equiv 1$, $\|\nabla^2 \varphi_j\| \leq c\delta^{-2}$). Пусть $f_j = \Phi * (\varphi_j \Delta F_0)$ – соответствующие локализованные (по схеме Витушкина [5]) функции. Положим $J = \{j \in \mathbb{Z}^2 \mid B_j \cap B(a, 2R) \neq \emptyset\}$, $J_1 = \{j \in \mathbb{Z}^2 \mid B_j \cap \partial D \neq \emptyset\}$. Ввиду (1.1) для каждого $j \in J_1$ существует (замкнутый) круг $\overline{B}_j^*$ радиуса $(2c_1)^{-2}\delta$, принадлежащий множеству $B(a_j, 2\delta) \setminus \overline{D}$. Нетрудно показать

(см. [4, доказательство теоремы 2]), что найдутся функции $g_j \in C^m(\mathbb{C}) \cap H(\mathbb{C} \setminus \overline{B}_j^*)$, $j \in J_1$, такие, что

$$\left\| \sum_{j \in J_1} (f_j - g_j) \right\|_m < c \omega_{\mathbb{C}}^{m-1}(F_0, \delta).$$

Поскольку $F_0 = \sum_{j \in J} f_j$ и $\omega_{\mathbb{C}}^{m-1}(F_0, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то при достаточно малом δ искомую функцию G_ε можно взять в виде

$$G_\varepsilon = \sum_{j \in J \setminus J_1} f_j + \sum_{j \in J_1} g_j.$$

Требуемое *утверждение* доказано.

Продолжим доказательство леммы. Выберем $\delta_1 \in (0, 1)$ такое, что область D_1 , ограниченная кривой $k^{-1}(\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1 + \delta_1\})$, содержится в множестве $D \cup U$. При этом $k_1(z) = k(z)/(1 + \delta_1)$ – конформное отображение области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_1$ на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B}_1$, удовлетворяющее условию $c_1(D_1) \leq (1 + \delta_1)c_1 \leq 2c_1$, где $c_1(D_1)$ – константа “билипшицевости” функции k_1 (т.е. константа в формуле, аналогичной (1.1), для k_1). Пусть теперь G_3 – построенная в лемме 3.3 (вместо F_3) функция (для области D_1 вместо D и функции $G_\varepsilon|_{\overline{D}_1}$ вместо f). Так же, как и в [6, доказательство леммы 5.2], остается сгладить функцию G_3 . Фиксируем $\rho \in (0, \text{dist}(\partial D, \partial D_1)/3)$. Выберем *радиально-симметричную* функцию

$$\varphi_1 \in C_0^\infty(B_1), \quad \varphi_1 \geq 0, \quad \int_{B_1} \varphi_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1,$$

и положим $\varphi_\rho(z) = \rho^{-2} \varphi(z/\rho)$. Функция F_ε , равная G_ε в 2ρ -окрестности области D и равная $\varphi_\rho * G_\varepsilon$ вне ρ -окрестности области D , является искомой. Действительно, $\varphi_\rho * G_\varepsilon \in C^m(\mathbb{C})$, причем

$$\|\nabla(\varphi_\rho * G_\varepsilon)\|_{m-1} \leq c \|\nabla G_\varepsilon\|_{m-1} \leq c^2 \|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}},$$

$G_\varepsilon \in C^m(\overline{D}_1)$ и $\|\nabla G_\varepsilon\|_{m-1, \overline{D}_1} \leq c \|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}$. При этом функции $\varphi_\rho * G_\varepsilon$ и G_ε совпадают на множестве $\{z \in D_1 \setminus D \mid \rho < \text{dist}(z, \partial D) < 2\rho\}$, что вытекает из теоремы о среднем для гармонической в области $D_1 \setminus \overline{D}$ функции G_ε и указанных выше свойств функции φ_ρ . Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 1.1. Ввиду леммы 3.1 мы можем считать, что при $m \in [2, 3)$ имеем $f \in H(D) \cap C^m(\overline{D})$. Так же, как и в [6], нам остается устроить итерационный процесс. Применяя лемму 3.4 к функции f и $\varepsilon = 1/2$, найдем F_{ε_1} . Применим снова лемму 3.4 к функции $(f - F_1)|_{\overline{D}}$ и $\varepsilon = 1/2^2$, в результате получая F_{ε_2} . По индукции находим функции $F_{\varepsilon_3}, \dots, F_{\varepsilon_n}, \dots$ такие, что

$$\begin{aligned} \|f - (F_{\varepsilon_1} + \dots + F_{\varepsilon_n})\|_{m, \overline{D}} &\leq 2^{-n} \|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}, \\ \|\nabla F_{\varepsilon_n}\|_{m-1} &\leq c 2^{-n} \|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}. \end{aligned}$$

Функция $F = \sum_{n=1}^{+\infty} F_{\varepsilon_n}$ определяет нужное продолжение. Теорема 1.1 доказана.

§4. Следствия

В качестве первого следствия теоремы 1.1 мы получим “локализационную” теорему о C^m -субгармоническом продолжении с замкнутых жордановых областей.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть D – жорданова область в $\mathbb{C}$, $m \in [1, 3)$ и $f \in C^m(\overline{D}) \cap SH(D)$. Предположим, что для любого $a \in \partial D$ найдутся окрестность U_a точки a в $\mathbb{C}$ и функция $F_a \in C^m(U_a) \cap SH(U_a)$ такие, что $F_a = f$ в $D \cap U_a$. Тогда найдется $F \in C^m(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$ с условием $F = f$ в $\overline{D}$.

Случай $m = 1$ этой теоремы был ранее получен в [1, теорема 2.5]. Хотя доказательство теоремы 4.1 в основном следует доказательству [1, теорема 2.5], мы приведем его для полноты изложения ввиду его краткости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество

$$E = \{e \in \partial D \mid \exists b_e \notin \overline{D}: \overline{B(b_e, |b_e - e|)} \cap \overline{D} = \{e\}\}$$

всюду плотно на ∂D , из компактности множества ∂D следует, что найдутся конечные подмножества $A_J = \{a_1, \dots, a_J\}$ в ∂D и $E_J = \{e_1, \dots, e_J\}$ в E , а также окрестности $U_j := U_{a_j}$ точек a_j со следующими свойствами: $\partial D \subset \bigcup_{j=1}^J U_j$; при каждом j множество U_j и соответствующая функция $F_j := F_{a_j}$ удовлетворяют условиям теоремы 4.1, причем $\gamma_j = \partial D \cap U_j$ – открытая жорданова дуга; точки a_j занумерованы в последовательном порядке на ∂D (полагаем $a_{J+1} = a_1$, $U_{J+1} = U_1$, $F_{J+1} = F_1$), окрестности U_j (а также соответствующие дуги γ_j) пересекаются только попарно (последовательно) и $e_j \in \gamma_j \cap \gamma_{j+1}$. Круги $B^j = B(b_{e_j}, |b_{e_j} - e_j|)$, $j = 1, \dots, J$, нужны для “разделения” несогласованных в $(U_j \cap U_{j+1}) \setminus D$ функций F_j и F_{j+1} .

Таким образом, найдется жорданова окрестность Ω множества $\overline{D}$ такая, что f продолжается до функции $F_J \in C^m(\overline{\Omega}_J) \cap SH(\Omega_J)$, где

$$\Omega_J = \Omega \setminus (\overline{B}^1 \cup \dots \cup \overline{B}^J).$$

Применяя теорему 1.1 в достаточно малых B -областях G_j , $1 \leq j \leq J$, таких, что $G_j \subset \Omega_J$ и $G_j \cup \overline{B}^j$ содержит некоторую окрестность точки e_j , можно продолжить F_J до C^m -субгармонической функции в некоторую окрестность множества E_J . Таким образом, в конечном счете f надлежащим образом продолжается в некоторую окрестность множества $\overline{D}$. Для нахождения искомой функции F остается применить теорему 1.1 к полученному продолжению и некоторой достаточно малой B -окрестности множества $\overline{D}$.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть D – произвольная жорданова область в $\mathbb{C}$, $m \in [1, 3)$. Предположим, что для любой точки $a \in \partial D$ существует круг $B(a, r_a)$, $r_a > 0$, такой, что для всякой функции $f \in C^m(\overline{D}) \cap SH(D)$ найдется функция $F_a \in C^m(\overline{D}_a) \cap SH(D_a)$, $D_a = D \cup B(a, r_a)$, с условием $F_a = f$ в $\overline{D}$. Тогда для любой $f \in C^m(\overline{D}) \cap SH(D)$ найдется $F \in C^m(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$ с условием $F = f$ в $\overline{D}$. Если, кроме того, каждая функция F_a может быть выбрана с оценкой

$\|\nabla F_a\|_{m-1, \overline{D}_a} \leq c(D, a) \|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}$, то указанная выше функция F может быть выбрана с дополнительным условием $\|\nabla F\|_{m-1} \leq c(D) \|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}$.

Переформулируем теорему 1.1 в терминах продолжения соответствующей меры Рисса $\sigma = \Delta f$ функции f из D в $\mathbb{C}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть D является B -областью, Ω – некоторая окрестность множества $\overline{D}$ и $m \in (1, 3)$. Найдется константа $c = c(D, \Omega, m) > 0$ со следующими свойствами. Пусть σ – неотрицательная конечная борелевская мера в D и h – гармоническая функция в D такие, что функция

$$\Phi * \sigma(x) + h(x) = \int_D \Phi(x - y) d\sigma(y) + h(x)$$

продолжается (из D) до функции класса $C^m(\overline{D})$. Тогда найдется неотрицательная конечная борелевская мера σ_1 в $\Omega \setminus \overline{D}$ такая, что $\Phi * (\sigma + \sigma_1) \in C^m(\mathbb{C})$, причем

$$\|\nabla \Phi * (\sigma + \sigma_1)\|_{m-1} \leq c \|\nabla(\Phi * \sigma + h)\|_{m-1, \overline{D}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = \Phi * \sigma + h$ (функция, определенная на $\overline{D}$ класса $C^m(\overline{D})$). Отметим, что мера σ есть обобщенный лапласиан функции f в D , причем согласно (обобщенной) формуле Гаусса–Остроградского имеем

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \nu} d\ell = \sigma(D).$$

Здесь ν – единичная внешняя нормаль к ∂D (существующая почти всюду относительно длины на ∂D), а $d\ell$ – дифференциал длины на ∂D . Так что условие конечности меры σ в D необходимо. Продолжим функцию f по теореме 1.1 до функции F . Фиксируем какую-либо функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ с условием $\varphi = 1$ на D . Положим $F_2 = \Phi * (\varphi \Delta F)$. Хорошо известно [4], что

$$\|\nabla F_2\|_{m-1} \leq c(m, \varphi) \|\nabla F\|_{m-1}.$$

Поскольку F субгармонична в $\mathbb{C}$, ее мера Рисса ΔF есть неотрицательная локально конечная борелевская мера в $\mathbb{C}$, причем из упомянутой выше формулы Гаусса–Остроградского следует, что $\Delta F(\partial D) = 0$. Искомая мера σ_1 имеет вид $\sigma_1 = \varphi \Delta F - \sigma$.

Отметим, что следствие 4.3 справедливо и при $m = 1$ для областей типа Дини–Ляпунова (как аналогичное следствие [1, теорема 2.2]).

Обсудим теперь аналоги задачи 2.1 и теоремы 1.1 для Lip^m -продолжений субгармонических функций.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть D является B -областью, $m \in (1, 3]$. Тогда найдется константа $c = c(D, m) > 0$ такая, что для любой функции $f \in \text{Lip}^m(\overline{D}) \cap SH(D)$ существует $F \in \text{Lip}^m(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$ с условиями $F|_{\overline{D}} = f$ и

$$\|\nabla F\|_{m-1, \mathbb{C}} \leq c \|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}. \quad (4.1)$$

При $m = 1$ аналогичное утверждение справедливо для областей типа Дини–Ляпунова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $m \in (1, 2)$ непосредственно следует из леммы 3.2 и леммы 3.3 (ее аналога с заменой условия $f \in C^m(\overline{D})$ на $f \in \text{Lip}^m(\overline{D})$). При $m \in [2, 3]$ необходимо дополнительно воспользоваться следующим аналогом леммы 3.1.

ЛЕММА 4.5. Пусть $m \in [2, 3]$, $f \in \text{Lip}^m(\overline{D}) \cap SH(D)$. Тогда найдется функция $F_1 \in \text{Lip}^m(\mathbb{C}) \cap SH(\mathbb{C})$ такая, что:

- а) $f - F_1 \in H(D)$;
- б) $\|F_1\|_{m, \overline{D}} \leq c \|\nabla^2 f\|_{m-2, \overline{D}} \leq c \|f\|_{m, \overline{D}}$;
- в) $\|\nabla F_1\|_{m-1} \leq c \|\nabla^2 f\|_{m-2, \overline{D}} \leq c \|\nabla f\|_{m-1, \overline{D}}$.

Чтобы установить справедливость леммы 4.5, дословно повторим доказательство леммы 3.1 с учетом непрерывности оператора Кальдерона–Зигмунда с ядром $1/z^2$ (по мере Лебега в $\mathbb{C}$), действующего из пространства $\text{Lip}_0^\mu(B(a, 2R))$ (функций класса $\text{Lip}^\mu(\mathbb{C})$ с носителем в круге $B(a, 2R)$) в пространство $B \text{Lip}^\mu(\mathbb{C})$ при (любом фиксированном) $\mu \in (0, 1)$ ($\mu = m - 2$). При $m = 2$ и $m = 3$ повторяется то же доказательство, что и в лемме 3.1 для случая $m = 2$, только учитывается, что Ψ_1 и h_1 здесь будут принадлежать классу $L_\infty(\mathbb{C})$ (при $m = 2$) или $\text{Lip}^1(\mathbb{C})$ (при $m = 3$).

В случае $m = 1$ повторяется доказательство теоремы 2.2 работы [1] с некоторыми упрощениями (как, например, в настоящем доказательстве отпала необходимость в использовании леммы 3.4 и последующих итераций в завершении доказательства теоремы 1.1).

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Аналоги теоремы 4.1 и следствия 4.2 справедливы для Lip^m -продолжений при $m \in [1, 3]$.

В завершение работы обсудим вкратце задачу о C^m -субгармоническом продолжении (аналог задачи 2.1) в $\mathbb{R}^N$ (всюду далее $N \in \{3, 4, \dots\}$ фиксировано). Данные ранее (в § 1 и § 2) определения пространств $SH(\Omega)$, $H(\Omega)$, а также пространств $BC^m(\Omega)$, $B \text{Lip}^m(\Omega)$, $C^m(\Omega)$, $\text{Lip}^m(\Omega)$, $C^m(X)$, $\text{Lip}^m(X)$ дословно переносятся на открытые множества Ω и компакты X в $\mathbb{R}^N$. Предложение 1.2 остается верным и для шаров в $\mathbb{R}^N$ (доказательство повторяется практически дословно). Однако, ввиду того, что всякое конформное отображение в (какой-либо области) $\mathbb{R}^N$ сводится к композициям подобия (сдвиг, гомотетия, ортогональное преобразование) и инверсии [7], аналоги теорем 1.1 и 4.4 в N -мерном случае удалось получить только для шаров. Соответственно, не удастся доказать и аналог теоремы 4.1. Как уже отмечалось, при $m = 1$ следующая теорема доказана в [6].

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть B – шар в $\mathbb{R}^N$, $m \in (1, 3)$ и $f \in C^m(\overline{B}) \cap SH(B)$ (соответственно, $m \in (1, 3]$ и $f \in \text{Lip}^m(\overline{B}) \cap SH(B)$). Тогда найдется $F \in BC^m(\mathbb{R}^N) \cap SH(\mathbb{R}^N)$ (соответственно, $F \in B \text{Lip}^m(\mathbb{R}^N) \cap SH(\mathbb{R}^N)$) с условиями $F|_{\overline{B}} = f$ и

$$\|F\|_{m, \mathbb{R}^N} \leq c \|f\|_{m, \overline{B}}, \quad (4.2)$$

где $c \in (0, +\infty)$ зависит только от N и m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать, что $B = \{|x| < 1\}$ – единичный шар. Пусть $\Phi_N(x) = -c_N |x|^{-N+2}$ – фундаментальное решение для оператора Лапласа в $\mathbb{R}^N$ ($c_N > 0$ – подходящая константа). Вторые (обобщенные) частные производные функции Φ_N являются ядрами типа Кальдерона–Зигмунда в $\mathbb{R}^N$ (см. [2,

гл. 3, § 1]), поэтому доказательство леммы 3.1 для *шаров* в $\mathbb{R}^N$ проходит практически по той же схеме, как и в $\mathbb{R}^2$ (рассуждения, связанные с конформными отображениями, опускаются). В лемме 3.2 в качестве F_2 (или G_2) следует взять функцию $F_2(x) = (1 - |x|^{2-N})^m$ при $|x| > 1$, $F_2(x) = 0$ при $|x| \leq 1$. Изменения в доказательствах лемм 3.3 и 3.4 в особых комментариях не нуждаются. Оценка (4.2) (при $N = 2$ она не верна) выглядит естественнее оценки (1.2). Дело здесь в том, что Φ_N (в отличие от $\Phi_2 = \Phi$) *ограничена* в окрестности ∞ (в частности, функцию f_a^* вместо f в доказательствах лемм 3.1, 3.3 и 3.4 можно не рассматривать).

Список литературы

1. Мельников М. С., Парамонов П. В. C^1 -продолжение субгармонических функций с замкнутых жордановых областей в $\mathbb{R}^2$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 6. С. 105–118.
2. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
3. O'Farrell A. G. Rational approximation in Lipschitz norms. II // Proc. Royal. Irish. Acad. 1979. V. 79A. № 11. P. 103–114.
4. Verdera J. C^m -approximation by solutions of elliptic equations, and Calderón–Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55. № 1. P. 157–187.
5. Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. № 6. С. 141–199.
6. Вердера Дж., Мельников М. С., Парамонов П. В. C^1 -аппроксимация и продолжение субгармонических функций // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 4. С. 37–58.
7. Решетняк Ю. Г. Теорема Лиувилля о конформных отображениях при минимальных предположениях регулярности // Сиб. матем. жур. 1967. Т. 8. № 4. С. 835–840.

МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: petr@paramonov.msk.ru

Поступило в редакцию
23.05.2005