Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирациональная геометрия прямых произведений Фано, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 6, 153–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/im671>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:01:57

УДК 512.7

А. В. Пухликов

Бирациональная геометрия прямых произведений Фано

Доказана бирациональная сверхжесткость прямых произведений $V = F_1 \times \cdots \times F_K$ примитивных многообразий Фано следующих двух типов: либо $F_i \subset \mathbb{P}^M$ – общая гиперповерхность степени M , $M \geq 6$, либо $F_i \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^M$ – общее двойное пространство индекса 1, $M \geq 3$. В частности, все структуры рационально связного расслоения на V суть проекции на прямые сомножители. В основе доказательства лежит принцип связности Шокурова–Коллара и техника гиперкасательных дивизоров.

Библиография: 44 наименования.

Введение

0.1. Прямые произведения Фано. Гладкое проективное многообразие F есть *примитивное многообразие Фано*, если $\mathrm{Pic} F = \mathbb{Z}K_F$, антиканонический класс $(-K_F)$ обилен и $\dim F \geq 3$. Типичные примеры примитивных многообразий Фано дают гладкие полные пересечения индекса 1 в (взвешенных) проективных пространствах. Наиболее наглядные примеры – это гиперповерхности Фано $X_d \subset \mathbb{P}^d$, $\deg X_d = d$, $d \geq 4$, и двойные пространства Фано $\sigma: X \rightarrow \mathbb{P}^d$, разветвленные над гладкой гиперповерхностью $W_{2d} \subset \mathbb{P}^d$ степени $2d$.

Известно (см., например, [1], [13], [14], [23]–[27], [29], [30], [32], [34], [35]), что типичные примитивные многообразия Фано обладают свойством *бirationальной жесткости*, в частности, не могут быть расслоены нетривиальным рациональным отображением на рационально связные многообразия (точное определение см. ниже). Целью в настоящей работе является описание бирациональной геометрии прямых произведений вида

$$V = F_1 \times \cdots \times F_K,$$

$K \geq 2$, F_i – примитивные многообразия Фано. Будет показано, что если прямые сомножители F_i удовлетворяют некоторым условиям, то на V нет других структур рационально связного расслоения, кроме проекций $V \rightarrow F_{i_1} \times \cdots \times F_{i_k}$ на прямые сомножители. Точнее (см. п. 0.3 ниже), само многообразие V является бирационально жестким.

Грубо говоря, многообразие V восстанавливается по своему полю рациональных функций $\mathbb{C}(V)$ (основным полем является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$). Условия, которые приходится налагать на прямые сомножители F_i , являются очень сильными. В настоящей работе показано, что достаточно общие (в смысле топологии Зариского) гиперповерхности Фано $X_d \subset \mathbb{P}^d$, $d \geq 6$, и двойные пространства Фано индекса 1 этим условиям удовлетворяют.

0.2. Бирациональная жесткость и сверхжесткость. Для гладкого проективного многообразия X пусть $A^i X$ – группа классов циклов коразмерности i по модулю численной эквивалентности. В частности, $A^1 X$ – группа численных классов дивизоров. Пусть

$$A_+^1 X \subset A^1 X \otimes \mathbb{R}$$

– замкнутый конус псевдоэффективных классов, т. е. наименьший замкнутый конус, содержащий классы всех эффективных дивизоров. Предположим, что многообразие X рационально связно [9], [17]. Для эффективного дивизора D на X определим его *порог канонического присоединения* формулой

$$c(D) = c(D, X) = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \mid D + \varepsilon K_X \in A_+^1 X\}, \quad (1)$$

где K_X – канонический класс. Если Σ – произвольная непустая линейная система на X , то пишем $c(\Sigma) = c(D)$, где $D \in \Sigma$ – произвольный дивизор. Для *подвижной* линейной системы Σ определим ее *виртуальный порог канонического присоединения* формулой

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = \inf_{\tilde{X} \rightarrow X} \{c(\tilde{\Sigma}, \tilde{X})\},$$

где точная нижняя грань берется по всем последовательностям раздутий $\tilde{X} \rightarrow X$ с неособыми центрами (или, эквивалентно, по всем бирациональным морфизмам гладких многообразий $\tilde{X} \rightarrow X$), а $\tilde{\Sigma}$ – собственный прообраз системы Σ на $\tilde{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (i) Многообразие X называется *бирационально сверхжестким*, если для любой подвижной линейной системы Σ на X выполнено равенство

$$c(\Sigma) = c_{\text{virt}}(\Sigma).$$

(ii) Многообразие X называется *бирационально жестким*, если для любой подвижной линейной системы Σ существует бирациональный автоморфизм $\chi \in \text{Bir } X$ такой, что выполнено равенство

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\chi^* \Sigma);$$

здесь $\chi^* \Sigma$ обозначает *собственный прообраз* системы Σ относительно χ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Виртуальный порог канонического присоединения является бирациональным инвариантом в следующем смысле: пусть

$$\chi: X_1 \dashrightarrow X_2$$

– бирациональное отображение, Σ_i – подвижная линейная система на X_i , $i = 1, 2$, причем Σ_1 есть собственный прообраз Σ_2 относительно χ . Тогда

$$c_{\text{virt}}(\Sigma_1) = c_{\text{virt}}(\Sigma_2),$$

хотя фактические пороги $c(\Sigma_1)$ и $c(\Sigma_2)$ не обязаны совпадать.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\pi: X \rightarrow S$ – рационально связное расслоение, т.е. для общей точки $z \in S$ слой $\pi^{-1}(z)$ есть рационально связное многообразие. Предположим, что база S нетривиальна (т.е. $\dim S \geq 1$) и

$$\Sigma = \pi^* \Lambda$$

– полный прообраз подвижной линейной системы Λ на S . Легко видеть, что

$$c(\Sigma) = 0,$$

потому что канонический класс K_X отрицателен на слоях π . Следовательно,

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma) = 0.$$

Поэтому если на рационально связном многообразии X имеется *структура* рационально связного расслоения (т.е. нетривиальное *рациональное* отображение $\varphi: X \dashrightarrow S$, общий слой которого рационально связан), то на X существует подвижная линейная система Σ , удовлетворяющая равенству $c_{\text{virt}}(\Sigma) = 0$. В частности, если многообразие X бирационально жесткое, то наличие нетривиальной структуры рационально связного расслоения влечет существование подвижной линейной системы Σ , удовлетворяющей равенству $c(\Sigma) = 0$. На примитивном многообразии Фано F по тривиальным причинам нет таких систем. Поэтому бирационально жесткие примитивные многообразия Фано *не имеют нетривиальных структур рационально связного расслоения*.

Первый пример бирационально жесткого (на самом деле, сверхжесткого) примитивного многообразия Фано был дан теоремой В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартирке [14], в дальнейшем метод доказательства (*метод максимальных особенностей*) был дополнен рядом новых идей и существенно усовершенствован, а сам термин “бирациональная (сверх)жесткость” был введен автором в конце 80-х годов (см. п. 0.7 ниже).

0.3. Основной результат. Чтобы сформулировать основной результат, дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что примитивное многообразие Фано F удовлетворяет условию *дивизориальной каноничности*, или условию (C) (соответственно, условию *дивизориальной логканоничности*, или условию (L)), если для любого эффективного дивизора $D \in |-nK_F|$, $n \geq 1$, пара

$$\left(F, \frac{1}{n} D\right) \quad (2)$$

имеет канонические (соответственно, логканонические) особенности. Если пара (2) имеет канонические особенности для общего дивизора $D \in \Sigma \subset |-nK_F|$ любой *подвижной* линейной системы, то скажем, что F удовлетворяет условию *подвижной каноничности*, или условию (M).

В явном виде условие (С) формулируется следующим образом: для любого бирационального морфизма $\varphi: \tilde{F} \rightarrow F$ и исключительного дивизора $E \subset \tilde{F}$ имеет место неравенство

$$\nu_E(D) \leq na(E). \quad (3)$$

Неравенство (3) противоположно классическому *неравенству Нётера–Фано* [14], [26], [27], [35]. Условие (L) слабее: требуется выполнение неравенства

$$\nu_E(D) \leq n(a(E) + 1). \quad (4)$$

В соотношениях (3) и (4) число $a(E)$ – дискрепантность исключительного дивизора $E \subset \tilde{F}$ относительно модели F . Неравенство (4) противоположно *логнеравенству Нётера–Фано*. Условие (M) означает, что неравенство (3) выполнено для общего дивизора D любой подвижной системы $\Sigma \subset |-nK_F|$ и любого дискретного нормирования ν_E .

Хорошо известно (фактически – начиная с классической работы [14]), что условие (M) гарантирует бирациональную сверхжесткость. Это условие доказано для многих классов примитивных многообразий Фано (см. [14], [23], [24], [29], [32], [35]). Отметим также, что условие (С) сильнее, чем условия (L) и (M).

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что примитивные многообразия Фано $F_1, \dots, \dots, F_K$, $K \geq 2$, удовлетворяют условиям (L) и (M). Тогда их прямое произведение*

$$V = F_1 \times \dots \times F_K$$

– бирационально сверхжесткое многообразие.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $K = 1$ утверждение теоремы выполнено тривиальным образом (достаточно одного условия (M)).

СЛЕДСТВИЕ 1. (i) *Все структуры рационально связного расслоения на многообразии V суть проекции на прямые сомножители. Точнее, пусть $\beta: V^\sharp \rightarrow S^\sharp$ – рационально связное расслоение и $\chi: V \dashrightarrow V^\sharp$ – бирациональное отображение. Тогда существуют множество индексов*

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, K\}$$

и бирациональное отображение

$$\alpha: F_I = \prod_{i \in I} F_i \dashrightarrow S^\sharp$$

такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & V^\sharp \\ \pi_I \downarrow & & \downarrow \beta \\ F_I & \xrightarrow{\alpha} & S^\sharp \end{array}$$

т. е. $\beta \circ \chi = \alpha \circ \pi_I$, где $\pi_I: \prod_{i=1}^K F_i \rightarrow \prod_{i \in I} F_i$ – естественная проекция на прямой сомножитель. В частности, на многообразии V нет структур расслоения на рационально связанные многообразия размерности, строго меньшей, чем $\min\{\dim F_i\}$. В частности, V не имеет структур расслоения на коники и рациональные поверхности.

(ii) Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают:

$$\mathrm{Bir} V = \mathrm{Aut} V.$$

В частности, группа $\mathrm{Bir} V$ конечна.

(iii) Многообразие V нерационально.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Группу бирегулярных автоморфизмов $\mathrm{Aut} V$ легко вычислить. Разобьем множество многообразий $F_1, \dots, F_K$ на подмножества попарно изоморфных многообразий:

$$I = \{1, \dots, K\} = \bigvee_{k=1}^l I_k,$$

где $F_i \cong F_j$ тогда и только тогда, когда $\{i, j\} \subset I_k$ для некоторого $k \in \{1, \dots, l\}$. Легко видеть, что

$$\mathrm{Aut} V = \prod_{j=1}^l \mathrm{Aut} \left(\prod_{i \in I_j} F_i \right).$$

В частности, если многообразия $F_1, \dots, F_K$ попарно неизоморфны, то имеем

$$\mathrm{Aut} V = \prod_{i=1}^K \mathrm{Aut} F_i$$

(и эта группа действует на V покомпонентно). В противоположном случае, если

$$F_1 \cong F_2 \cong \dots \cong F_K \cong F,$$

получаем точную последовательность

$$1 \rightarrow (\mathrm{Aut} F)^{\times K} \rightarrow \mathrm{Aut} V \rightarrow S_K \rightarrow 1,$$

где S_K – симметрическая группа перестановок K элементов. На самом деле, в этом случае $\mathrm{Aut} V$ содержит подгруппу, изоморфную S_K , которая переставляет прямые сомножители произведения V , так что $\mathrm{Aut} V$ есть полупрямое произведение нормальной подгруппы $(\mathrm{Aut} F)^{\times K}$ и симметрической группы S_K . По-видимому, справедливо следующее обобщение теоремы 1.

ГИПОТЕЗА 1. *Предположим, что $F_1, \dots, F_K$ – бирационально (сверх) жесткие примитивные многообразия Фано. Тогда их прямое произведение $V = F_1 \times \dots \times F_K$ – бирационально (сверх) жесткое многообразие.*

0.4. Дивизориально канонические многообразия. Пусть $\mathbb{P} = \mathbb{P}^M$, $M \geq 3$, – комплексное проективное пространство. Положим

$$\mathcal{F} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M))), \quad \mathcal{W} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2M)))$$

– пространства гиперповерхностей степени M и $2M$ соответственно.

ТЕОРЕМА 2. (i) При $M \geq 6$ существует непустое открытое по Зарискому подмножество $\mathcal{F}_{\text{reg}} \subset \mathcal{F}$ такое, что для любого многочлена $f \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$ соответствующая гиперповерхность $F = \{f = 0\}$ неособа и удовлетворяет условию (C).

(ii) Существует непустое подмножество $\mathcal{W}_{\text{reg}} \subset \mathcal{W}$, открытое по Зарискому, такое, что для любого $w \in \mathcal{W}_{\text{reg}}$ двойное пространство Фано $\sigma: F \rightarrow \mathbb{P}$, разветвленное над гиперповерхностью $W = \{w = 0\}$, удовлетворяет условию (C).

Множества регулярных гиперповерхностей $\mathcal{F}_{\text{reg}}$, $\mathcal{W}_{\text{reg}}$ описаны явно далее, в пп. 2.1, 2.2, а их непустота доказана в п. 2.3. По-видимому, справедливо следующее обобщение теоремы 2.

ГИПОТЕЗА 2. Общий элемент $F \in \Phi$ любого семейства примитивных полных пересечений Фано Φ во взвешенном проективном пространстве удовлетворяет условию (C). В частности, этому условию удовлетворяют общие кватрики $F = F_4 \subset \mathbb{P}^4$ и квинтики $F = F_5 \subset \mathbb{P}^5$.

0.5. Схема доказательства и структура статьи. Доказательство теоремы 1 проводится индукцией по числу сомножителей K . При $K = 1$, как отмечалось выше, теорема 1 справедлива тривиальным образом. Пусть $K \geq 2$.

Предположим противное: на V имеется подвижная линейная система Σ , для которой справедливо неравенство $c_{\text{virt}}(\Sigma) < c(\Sigma)$. В силу определения виртуального порога канонического присоединения это означает, что существует последовательность раздутий $\varphi: \tilde{V} \rightarrow V$ такая, что выполнено неравенство

$$c(\tilde{\Sigma}) < c(\Sigma), \quad (5)$$

где $\tilde{\Sigma}$ – собственный прообраз линейной системы Σ на $\tilde{V}$.

Для доказательства теоремы 1 необходимо установить, что неравенство (5) невозможно, т. е. получить противоречие.

Пусть $H_i = -K_{F_i}$ – положительная образующая группы $\text{Pic } F_i$. Положим

$$S_i = \prod_{j \neq i} F_j,$$

так что $V \cong F_i \times S_i$. Пусть $\rho_i: V \rightarrow F_i$ и $\pi_i: V \rightarrow S_i$ – проекции на сомножители. Злоупотребляя обозначениями, пишем H_i вместо $\rho_i^* H_i$, так что

$$\begin{aligned} \text{Pic } V &= \bigoplus_{i=1}^K \mathbb{Z} H_i, \\ K_V &= -H_1 - \cdots - H_K. \end{aligned}$$

Имеем $\Sigma \subset |n_1 H_1 + \dots + n_K H_K|$, причем

$$c(\Sigma) = \min\{n_1, \dots, n_K\}.$$

Без ограничения общности считаем, что $c(\Sigma) = n_1$. В силу неравенства (5) получаем $n_1 \geq 1$. Положим $n = n_1$, $\pi = \pi_1$, $F = F_1$, $S = S_1$. Получаем

$$\Sigma \subset |-nK_V + \pi^*Y|,$$

где $Y = \sum_{i=2}^K (n_i - n)H_i$ — эффективный класс на базе S расслоения π .

Теперь необходимо модифицировать бирациональный морфизм φ . Здесь мы рассуждаем по аналогии с доказательством теоремы Саркисова [39], [40]. Для произвольной последовательности раздутий $\mu_S: S^+ \rightarrow S$ полагаем $V^+ = F \times S^+$ и получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V^+ & \xrightarrow{\mu} & V \\ \pi_+ \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^+ & \xrightarrow{\mu_S} & S \end{array} \quad (6)$$

где π_+ — проекция, $\mu = (\text{id}_F, \mu_S)$. Пусть $E_1, \dots, E_N \subset \tilde{V}$ — все исключительные дивизоры морфизма φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует такая последовательность раздутий $\mu_S: S^+ \rightarrow S$, что в обозначениях диаграммы (6) центр любого дискретного нормирования E_i , $i = 1, \dots, N$, покрывает либо S^+ , либо некоторый дивизор на S^+ :*

$$\text{codim}[\pi_+(\text{centre}(E_i, V^+))] \leq 1.$$

Пусть Σ^+ — собственный прообраз линейной системы Σ на V^+ . Теперь доказательство разбивается на две части в силу следующего факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеет место альтернатива:*

- (i) *либо выполнено неравенство $c(\Sigma^+) < c(\Sigma)$,*
- (ii) *либо для общего дивизора $D^+ \in \Sigma^+$ пара $(V^+, \frac{1}{n}D^+)$ не является каноничной, причем для некоторого $i = 1, \dots, N$ дискретное нормирование E_i реализует неканоническую особенность этой пары.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Альтернативу предложения 2 следует понимать в том смысле, что по крайней мере одна из двух возможностей (i), (ii) имеет место (возможно, обе).

Теперь доказательство теоремы 1 завершается следующим образом. Если выполнено условие (i), то нетрудно показать, что многообразие S не является бирационально сверхжестким, что противоречит предположению индукции, так как S — прямое произведение $K - 1$ многообразия Фано. Если же выполнено условие (ii), то принцип обращения присоединения, вытекающий из принципа связности Шокурова–Коллара, приводит к противоречию с условием (L) для слоя F . Этим теорема 1 полностью доказана.

Описанная выше схема рассуждения реализована во всех деталях в § 1. Дальнейшая структура статьи такова. В § 2 доказана теорема 2. Сначала описаны условия регулярности, задающие открытые множества $\mathcal{F}_{\text{reg}}$, $\mathcal{W}_{\text{reg}}$, и доказана их непустота (для $\mathcal{F}_{\text{reg}}$ это не вполне очевидно). Затем доказана дивизориальная каноничность регулярных двойных пространств (п. 2.2) и гиперповерхностей $F_M \subset \mathbb{P}^M$, $M \geq 6$ (п. 2.3). Для гиперповерхностей основу доказательства составляет *метод гиперкасательных дивизоров* [29], [32], [35].

Схема доказательства теоремы 2 следующая. Предположим, что пара $(F, \frac{1}{n}D)$, где $D \in |-nK_F|$, $n \geq 1$, не канонична, F – регулярное двойное пространство или регулярная гиперповерхность Фано. Нетрудно показать, что центр неканонической особенности есть точка $x \in F$. Из принципа обращения присоединения можно вывести

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\varphi: \tilde{F} \rightarrow F$ – раздутие точки x , $E \subset \tilde{F}$ – исключительный дивизор. Для некоторой гиперплоскости $B \subset E$ выполнено неравенство

$$\text{mult}_x D + \text{mult}_B \tilde{D} > 2n, \quad (7)$$

где $\tilde{D} \subset \tilde{F}$ – собственный прообраз дивизора D .

Если F – двойное пространство, то несложная проверка показывает, что неравенство (7) невозможно для эффективного дивизора $D \in |-nK_F|$. Если же $F \subset \mathbb{P}^M$ – гиперповерхность Фано, то противоречие достигается с помощью (модифицированной) техники гиперкасательных дивизоров.

В § 3 приведены доказательство предложения 3 и краткое обсуждение принципа связности и принципа обращения присоединения в нужной нам форме. Детальное изложение этих фундаментальных принципов содержится в [16], [41]. Однако в силу важности этих результатов мы включили их краткое объяснение в настоящую работу.

0.6. Замечания. 1. Дословно повторяя доказательство теоремы 1, можно установить более сильный факт – совпадение виртуального и фактического порогов канонического присоединения для произвольного *неприводимого* дивизора D на V : $c_{\text{virt}}(D) = c(D)$. Неприводимость существенна. Именно таким образом были построены рассуждения в первой версии настоящей работы [38]. Однако в [38] вместо обрыва канонического присоединения в смысле формулы (1) использовалось формально более сильное условие, состоявшее в том, что для некоторого $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ и последовательности раздутий $\tilde{V} \rightarrow V$ класс $\tilde{D} + \varepsilon K_{\tilde{V}}$ отрицателен на кривых из некоторого семейства, заматающего $\tilde{V}$. Такой подход не дает бирациональной сверхжесткости, но позволяет описать (в точности так, как это сделано здесь) все структуры рационально связного расслоения на V и, тем самым, дает все утверждения следствия 1. Доказательство теоремы 2 полностью соответствует рассуждениям, приведенным в работе [38].

2. Отметим некоторые отличия настоящей работы от предшествующих статей по данной тематике. Метод, используемый здесь, естественно назвать *линейным*, в отличие от *квадратичного* метода предшествующих работ: мы изучаем особенности *одного* дивизора D , в то время как в упомянутых работах основным шагом

было построение *самопересечения* подвижной линейной системы Σ , т.е. эффективного цикла коразмерности два $Z = (D_1 \circ D_2)$, где $D_i \in \Sigma$ – общие дивизоры.

Другое отличие настоящей работы от предшествующих состоит в том, что впервые доказана бирациональная жесткость расслоения Фано с базой и слоем произвольной размерности: в работах [39], [40] рассматривались расслоения с одномерным слоем, в работах [10]–[12], [28], [31], [36], [37], [42], [43] – расслоения с одномерной базой $\mathbb{P}^1$. Нерациональность (точнее, нелинейчатость) некоторых расслоений Фано, база и слой которых имеют произвольную размерность, была доказана Я. Колларом в [18]; однако бирациональная (сверх)жесткость есть гораздо более сильное свойство, дающее, как объяснено выше, полное описание всех структур рационально связного расслоения на рассматриваемом многообразии.

Наконец, отметим, что до сих пор бирациональная геометрия расслоений Фано над нетривиальной базой изучалась при условии “достаточной закрученности” по базе (условие Саркисова для расслоений на коники, K^2 -условие для расслоений Фано над $\mathbb{P}^1$), в то время как прямые произведения вообще по базе не закручены.

3. Развитая в работе техника открывает новые возможности изучения подвижных линейных систем на расслоениях Фано $V/\mathbb{P}^1$. Если $F = F_t$, $t \in \mathbb{P}^1$, – слой над точкой t – удовлетворяет условию (L), то линейная система

$$\Sigma \subset |-nK_V + lF|$$

при $l \in \mathbb{Z}_+$ не может иметь максимальной особенности E , центр которой $B = \text{centre}(E, V)$ содержится в слое F . Это замечание демонстрирует силу линейного метода по сравнению с квадратичным. С другой стороны, доказывать условие (L) нелегко. Метод, развитый в настоящей работе, требует более сильных условий общности положения, чем те, которые используются в квадратичном методе.

Еще одно отличие линейного метода – его применимость к тривиальным расслоениям $V = F \times \mathbb{P}^1$, где F – примитивное многообразие Фано. Дальнейшее развитие идей настоящей работы позволяет доказать, что если F удовлетворяет условию (C), то на V имеется единственная структура расслоения на коники, задаваемая проекцией $V \rightarrow F$, а все остальные нетривиальные структуры рационально связного расслоения $\text{Bir } V$ -эквивалентны расслоению $F \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ (проекции на прямой сомножитель). Группа $\text{Bir } V$ с точностью до конечной подгруппы $\text{Aut } F \subset \text{Aut } V$ есть группа $\text{Aut } \mathbb{P}_{\mathbb{C}(F)}^1 = \text{PGL}(2, \mathbb{C}(F))$ дробно-линейных преобразований проективной прямой над полем рациональных функций $\mathbb{C}(F)$. Доказательство будет опубликовано в другой статье.

0.7. Исторические замечания и благодарности. Феномен бирациональной жесткости был угадан Фано [5]–[7], когда он пытался изучать бирациональную геометрию трехмерных многообразий по аналогии с поверхностями. Фано использовал обрыв присоединения канонического класса, играющий ключевую роль и в доказательстве теоремы Нётера о группе Кремоны $\text{Bir } \mathbb{P}^2$, и в теоремах итальянской школы (таких, например, как критерий рациональности Кастельнуово). В работах Фано присутствует и прообраз понятия максимальной особенности. Однако сколько-нибудь законченных доказательств Фано получить не удалось.

На современном этапе развития алгебраической геометрии контуры теории бирациональной жесткости намечены в работах Ю. И. Манина 60-х годов о поверхностях над незамкнутыми полями (см. [19]–[21]), где, в частности, с использованием более ранних результатов Б. Сегре доказана (в современной терминологии) бирациональная сверхжесткость поверхностей дель Пеццо степени 1 с группой Пикара $\mathbb{Z}$ и бирациональная жесткость кубических поверхностей с группой Пикара $\mathbb{Z}$ и вычислена группа бирациональных автоморфизмов этих поверхностей. В работах [20], [21] с конечной последовательностью раздутий связан некоторый граф. Его комбинаторные инварианты очень важны для техники подсчета кратностей [27], [29], [33], [35]. Конструкция этого графа присутствует почти во всех работах данного направления. Она используется и в настоящей работе при анализе логканонической особенности (п. 3.1).

Прорыв в трехмерную бирациональную геометрию был сделан в работе В. А. Исковских и Ю. И. Манина [14], где доказана (в современной терминологии) бирациональная сверхжесткость гладкой трехмерной кватрики в $\mathbb{P}^4$. Формально в [14] установлено, что бирациональное отображение одной гладкой кватрики на другую есть бирегулярный изоморфизм, но рассуждения этой работы не требуют никакой модификации и автоматически дают бирациональную сверхжесткость. В [14] отмечено, что метод, используемый в этой работе (без каких-либо усовершенствований), дает аналогичный результат и для гладких двойных пространств индекса 1 размерности три. Незначительное усиление техники (“откручивание” максимальных прямых) дает бирациональную жесткость (но не сверхжесткость: группа бирациональных автоморфизмов весьма велика) гладких двойных квадрик индекса 1. Подробные доказательства для этих двух классов трехмерных многообразий Фано опубликованы в [13].

Следующий шаг сделан В. Г. Саркисовым в [39], [40]. Используя результаты Исковских о поверхностях с пучком рациональных кривых, Саркисов доказал единственность структуры расслоения на коники при условии, что дискриминантный дивизор достаточно велик (“условие Саркисова”). Опять же, фактически была доказана бирациональная жесткость, но самого понятия еще не существовало.

Первая попытка распространить трехмерную технику Исковских–Манина в произвольную размерность была сделана автором настоящей статьи в [23], [24]. Тогда же была описана бирациональная геометрия трехмерной кватрики с невырожденной двойной точкой [25]. Однако доказательства становились технически все более сложными и трудными для восприятия. Необходимо было совершенствовать методы. Кроме того, к середине 80-х годов уже ясно осознавалось, что в отношении всех успешно исследованных многообразий (кватрики, квинтики, двойных пространств и двойных квадрик, расслоений на коники) доказывается какое-то одно и то же общее свойство, которое, однако, нигде не было явно сформулировано. Возникал вопрос – какое именно?

В качестве ответа на этот вопрос автором настоящей статьи были введены понятия “бирациональная жесткость” и “бирациональная сверхжесткость”. Первые, несколько неуклюжие, определения этих свойств были даны в докладе автора на конференции в Варвикском университете в 1991 г. и опубликованы в статье [26]. Впоследствии эти определения модифицировались; возможно, что и ны-

нешняя версия (определение 1) не является окончательной. В конце 90-х годов А. Корти и М. Рид ввели другой вариант этих понятий, взяв за основу геометрические свойства бирационально (сверх)жестких многообразий [1]–[3].

За прошедшие десять лет техника доказательства бирациональной жесткости была радикально усилена. Прежде всего, метод гиперкасательных дивизоров позволил работать с многообразиями Фано произвольно высокой степени [29], [30], [32], [35]. Далее, в [1] Корти предложил использовать принцип обращения присоединения, основанный на принципе связности Шокурова–Коллара (который, в свою очередь, опирается на теорему Каваматы–Фивега об обращении в нуль), для изучения самопересечения подвижных линейных систем в качестве альтернативы технике подсчета кратностей (разработанной в [27] на основе метода пробного класса [14]). Тем самым, в [1] было начато использование обращения присоединения в теории бирациональной жесткости. Эта техника оказалась весьма эффективной для некоторых типов максимальных особенностей линейных систем [33]. Наконец, простая идея разбиения самопересечения линейной системы на горизонтальную и вертикальную части открыла путь к систематическому изучению расслоений Фано над $\mathbb{P}^1$ [10]–[12], [31], [36], [37], [42], [43].

В итоге метод изучения бирациональной геометрии рационально связных многообразий через анализ особенностей соответствующих подвижных линейных систем, который мы в соответствии с традицией называем методом максимальных особенностей, сегодня работает для широкого класса многомерных многообразий Фано и расслоений Фано и, можно надеяться, станет основой для бирациональной классификации многомерных рационально связных многообразий.

Основной результат настоящей работы был получен автором в октябре 2003 г. во время пребывания в Институте Макса Планка в Бонне. Первоначальная версия статьи [38] закончена в апреле 2004 г. в Ливерпуле. Автор благодарит Институт Макса Планка за превосходные условия работы и гостеприимство.

§ 1. Бирационально жесткие прямые произведения

В настоящем параграфе доказана теорема 1.

1.1. Разрешение особенностей. Докажем предложение 1. Пусть $E \subset \tilde{V}$ – исключительный дивизор бирационального морфизма $\varphi: \tilde{V} \rightarrow V$, $B = \varphi(E)$ – центр дискретного нормирования E на V . Предположим, что

$$\mathrm{codim}_S \pi(B) \geq 2.$$

Построим последовательность коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} V_j & \xrightarrow{\varepsilon_j} & V_{j-1} \\ \pi_j \downarrow & & \downarrow \pi_{j-1} \\ S_j & \xrightarrow{\lambda_j} & S_{j-1} \end{array} \quad (8)$$

$j = 1, \dots, l$, удовлетворяющую следующим требованиям:

- 1) $V_0 = V$, $S_0 = S$, $\pi_0 = \pi$;
- 2) $V_j = F \times S_j$, π_j – проекция на сомножитель S_j , $\varepsilon_j = (\text{id}_F, \lambda_j)$ для всех $j \geq 1$;
- 3) λ_j – раздутие неприводимого многообразия

$$B_{j-1} = \pi_{j-1}(\text{centre}(E, V_{j-1})) \subset S_{j-1},$$

где $\text{codim } B_{j-1} \geq 2$.

Очевидно, что свойства 1)–3) однозначно определяют последовательность (8).

ЛЕММА 1. *Имеет место неравенство $l \leq a(E, V)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_j \subset V_j$ – исключительный дивизор морфизма ε_j . По построению имеем

$$\text{centre}(E, V_j) \subset \Delta_j,$$

стало быть, $\nu_E(\Delta_j) \geq 1$. Теперь получаем

$$a(E, V) = a(E, V_l) + \sum_{j=1}^l \nu_E(\Delta_j) a(\Delta_j, V) \geq l.$$

Лемма доказана.

Поэтому последовательность диаграмм (8) обрывается: можно считать, что $\text{centre}(E, V_l)$ покрывает дивизор на базе S_l .

Отсюда (в силу теоремы Хиронаки о разрешении особенностей) немедленно вытекает предложение 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Мы пользуемся обозначениями п. 0.5. Рассмотрим диаграмму отображений (6). Пусть $\tau: V^\sharp \rightarrow V^+$ – разрешение особенностей сквозного отображения

$$V^+ \xrightarrow{\mu} V \xrightarrow{\varphi^{-1}} \tilde{V}.$$

Положим $\psi = \varphi^{-1} \circ \mu \circ \tau: V^\sharp \rightarrow \tilde{V}$. Это бирациональный морфизм неособых проективных многообразий. Существуют открытое множество $U \subset V^\sharp$ и замкнутое множество коразмерности два $Y \subset \tilde{V}$ такие, что

$$\psi_U = \psi|_U: U \rightarrow \tilde{V} \setminus Y$$

– изоморфизм. Очевидно, если $E \subset V^\sharp$ – исключительный дивизор морфизма τ и $E \cap U \neq \emptyset$, то

$$E \cap U = \psi_U^{-1}(E_i)$$

для некоторого исключительного дивизора E_i морфизма φ .

Пусть Σ^+ и $\Sigma^\sharp$ – собственные прообразы линейной системы Σ на V^+ и $V^\sharp$ соответственно, $\Sigma_U = \Sigma^\sharp|_U$. Если $D^\sharp \in \Sigma^\sharp$ – общий дивизор, то

$$\tilde{D} = \psi_U(D_U^\sharp) \in \tilde{\Sigma}$$

– общий дивизор линейной системы $\tilde{\Sigma}$ (мы не различаем $\tilde{\Sigma}$ и ее ограничение на $\tilde{V} \setminus Y$, потому что Y имеет коразмерность два). Мы знаем, что

$$\tilde{D} + nK_{\tilde{V}} \notin A_+^1 \tilde{V}$$

(см. (5)). Следовательно,

$$D_U^\sharp + nK_U \notin A_+^1 U. \quad (9)$$

Пусть $\mathcal{E}$ – множество исключительных дивизоров морфизма τ , имеющих непустое пересечение с U . В силу (9) получаем

$$\tau^*(D^+ + nK^+)|_U - \sum_{E \in \mathcal{E}} (\nu_E(D^+) - na^+(E))E_U \notin A_+^1 U,$$

где K^+ – канонический класс многообразия V^+ , $a^+(E) = a(E, V^+)$. Следовательно, либо

$$D^+ + nK^+ \notin A_+^1 V^+,$$

и тогда имеет место утверждение (i) предложения 2, либо существует исключительный дивизор $E \in \mathcal{E}$, удовлетворяющий неравенству Нётера–Фано

$$\nu_E(D^+) > na^+(E),$$

т. е. дискретное нормирование E реализует неканоническую особенность пары $(V^+, \frac{1}{n}D^+)$. В последнем случае выполнено утверждение (ii) альтернативы предложения 2, так как $E \in \mathcal{E}$, и потому $E = E_i$ для некоторого $i = 1, \dots, N$ (как дискретные нормирования). Этим предложение 2 доказано.

1.2. Редукция к базе расслоения. Предположим, что имеет место случай (i) альтернативы предложения 2, т. е.

$$D^+ + nK^+ \notin A_+^1 V^+.$$

Пусть $z \in F$ – точка общего положения. Положим

$$S_z^+ = \{z\} \times S^+, \quad S_z = \{z\} \times S.$$

Понятно, что $K_z^+ = K^+|_{S_z^+}$ и $K_z = K_V|_{S_z}$ – канонические классы K_S^+ и K_S соответственно. Пусть

$$\Sigma_z = \Sigma|_{S_z}, \quad \Sigma_z^+ = \Sigma^+|_{S_z^+}$$

– ограничения линейных систем Σ , Σ^+ на S_z , S_z^+ соответственно, $D_z \in \Sigma_z$ и $D_z^+ \in \Sigma_z^+$ – общие дивизоры. Получаем подвижную линейную систему Σ_z на многообразии $S = F_2 \times \dots \times F_K$, причем

$$\Sigma_z \subset |n_2 H_2 + \dots + n_K H_K|,$$

так что $c(\Sigma_z) = \min\{n_2, \dots, n_K\} \geq n = c(\Sigma)$.

ЛЕММА 2. *Имеет место равенство*

$$D^+ + nK^+ = \pi_+^*(D_z^+ + nK_z^+).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E}_S$ – множество исключительных дивизоров морфизма μ_S . Исключительные дивизоры морфизма μ суть $F \times E = \pi_+^* E$ для $E \in \mathcal{E}_S$. Имеем

$$\begin{aligned} K_S^+ &= \mu_S^* K_S + \sum_{E \in \mathcal{E}_S} a_E E, \\ K^+ &= \mu^* K_V + \pi_+^* \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_S} a_E E \right), \end{aligned}$$

где $a_E = a(E)$ – дискрепантность дивизора E . Для некоторых чисел $b_E \geq 0$ имеем

$$D^+ = \mu^* D - \sum_{E \in \mathcal{E}_S} b_E \pi_+^* E,$$

причем для точки $z \in F$ общего положения

$$D_z^+ = \mu_S^* D_z - \sum_{E \in \mathcal{E}_S} b_E E.$$

Теперь, учитывая, что $D + nK_V = \pi^* Y$ и что $D_z + nK_z = D_z + nK_S = Y$, получаем утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 2. $D_z^+ + nK_z^+ \notin A_+^1 S^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, очевидно, что $\pi_+^* A_+^1 S^+ \subset A_+^1 V^+$. Следствие доказано.

Таким образом, для собственного прообраза Σ_z^+ линейной системы Σ_z на S^+ получаем неравенство

$$c(\Sigma_z^+) < c(\Sigma_z).$$

Тем более, $c_{\text{virt}}(\Sigma_z) < c(\Sigma_z)$. Значит, многообразие S не является бирационально сверхжестким. Противоречие с предположением индукции.

1.3. Редукция к слою. В силу предложения 2 и п. 1.2 для общего дивизора $D^+ \in \Sigma^+$ пара $(V^+, \frac{1}{n}D^+)$ не канонична, т.е. существует исключительный дивизор $E \subset V^\sharp$ некоторого бирационального морфизма $V^\sharp \rightarrow V^+$, удовлетворяющий неравенству Нётера–Фано $\nu_E(\Sigma^+) > na_E^+$, где $a_E^+ = a(E, V^+)$. Более того, можно предполагать, что центр $B = \text{centre}(E, V^+)$ нормирования E накрывает дивизор на базе или всю базу: $\text{codim}_{S^+} T \leq 1$, где $T = \pi_+(B)$.

Пусть $t \in T$ – точка общего положения. Слой $F_t = \pi_+^{-1}(t)$ не может целиком содержаться в базисном множестве $\text{Bs } \Sigma^+$ подвижной системы Σ^+ , так как

$$\text{codim}_{V^+} \pi_+^{-1}(T) \leq 1.$$

Следовательно, $\Sigma_t^+ = \Sigma^+|_{F_t}$ – непустая линейная система на F , $\Sigma_t^+ \subset |nH| = |-nK_F|$ (если $T \subset S^+$ – дивизор, то Σ_t^+ может иметь неподвижные компоненты). Пусть $D_t^+ \in \Sigma_T^+$ – общий дивизор. Согласно принципу обращения присоединения (см. [16] и §3 настоящей статьи) пара $(F, \frac{1}{n}D_t^+)$ не логканонична. Получаем противоречие с условием (L). Это противоречие завершает доказательство теоремы 1.

1.4. Структуры рационально связного расслоения. Докажем утверждение (i) следствия 1. Пусть $\beta: V^\sharp \rightarrow S^\sharp$ – рационально связное расслоение, $\chi: V \dashrightarrow V^\sharp$ – бирациональное отображение. Возьмем очень обильную линейную систему $\Sigma_S^\sharp$ на базе $S^\sharp$, и пусть

$$\Sigma^\sharp = \beta^* \Sigma_S^\sharp$$

– подвижная линейная система на $V^\sharp$. Как отмечалось выше (замечание 2), $c(\Sigma^\sharp) = 0$. Пусть Σ – собственный прообраз системы $\Sigma^\sharp$ на V . Тогда

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = 0,$$

так что по теореме 1 имеем $c(\Sigma) = 0$. Следовательно, в представлении

$$\Sigma \subset |-n_1 H_1 - \dots - n_K H_K|$$

найдется коэффициент $n_e = 0$. Для определенности считаем $e = 1$. Полагая $S = F_2 \times \dots \times F_K$, $\pi: V \rightarrow S$ – проекция, получаем

$$\Sigma \subset |\pi^* Y|$$

для некоторого неотрицательного класса Y на S . Но это означает, что бирациональное отображение χ расслоения V/S в расслоение $V^\sharp/S^\sharp$ является послойным: существует рациональное доминантное отображение

$$\gamma: S \dashrightarrow S^\sharp,$$

обеспечивающее коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & V^\sharp \\ \pi \downarrow & & \downarrow \beta \\ S & \xrightarrow{\gamma} & S^\sharp \end{array}$$

Для точки общего положения $z \in S^\sharp$ пусть $F_z^\sharp = \beta^{-1}(z)$ – соответствующий слой, $F_z^\chi \subset V$ – его собственный прообраз относительно χ . По предположению многообразие F_z^χ рационально связно. С другой стороны,

$$F_z^\chi = \pi^{-1}(\gamma^{-1}(z)) = F \times \gamma^{-1}(z),$$

где $F = F_1$ – слой π . Следовательно, слой $\gamma^{-1}(z)$ также рационально связан.

Таким образом, задача описания рационально связных структур на V сводится к той же самой задаче на S . Теперь утверждение (i) следствия 1 легко получается индукцией по числу K прямых сомножителей. Для $K = 1$ отсутствие нетривиальных рационально связных структур очевидно (замечание 2). Вторая часть утверждения (i) (о структурах расслоения на коники и рациональные поверхности) очевидна в силу того, что $\dim F_i \geq 3$ для всех $i = 1, \dots, K$. Нерациональность многообразия V теперь очевидна.

1.5. Бирациональные автоморфизмы. Докажем утверждение (ii) следствия 1. Пусть $\mathcal{RC}(V)$ – множество структур рационально связного расслоения на многообразии V с нетривиальной базой. Согласно утверждению (i)

$$\mathcal{RC}(V) = \left\{ \pi_I: V \rightarrow F_I = \prod_{i \in I} F_i \mid \emptyset \neq I \subset \{1, \dots, K\} \right\}.$$

На множестве $\mathcal{RC}(V)$ имеется естественное отношение порядка $\alpha \leq \beta$, если β пропускается через α . Очевидно, $\pi_I \leq \pi_J$, если и только если $J \subset I$. Для $I = \{1, \dots, K\} \setminus \{e\}$ положим $\pi_I = \pi_e$, $F_I = S_e$. Очевидно, $\pi_1, \dots, \pi_K$ – минимальные элементы $\mathcal{RC}(V)$.

Пусть $\chi \in \text{Bir } V$ – бирациональный автоморфизм. Имеем биекцию

$$\begin{aligned} \chi^*: \mathcal{RC}(V) &\rightarrow \mathcal{RC}(V), \\ \chi^*: \alpha &\mapsto \alpha \circ \chi, \end{aligned}$$

причем χ^* сохраняет отношение $\leq$. Отсюда легко вывести, что χ^* имеет вид

$$\chi^*: \pi_I \mapsto \pi_{I\sigma},$$

где $\sigma \in S_K$ – некоторая перестановка K элементов, и для $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ полагаем $I^\sigma = \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}$. Далее, для каждого $I \subset \{1, \dots, K\}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & V \\ \pi_I \downarrow & & \downarrow \pi_{I\sigma} \\ F_I & \xrightarrow{\chi_I} & F_{I\sigma} \end{array}$$

где χ_I – некоторое бирациональное отображение. В частности, χ индуцирует бирациональные изоморфизмы

$$\chi_e: F_e \dashrightarrow F_{\sigma(e)},$$

$e = 1, \dots, K$. Однако все многообразия F_e бирационально сверхжесткие, так что все отображения χ_e – изоморфизмы. Стало быть, и $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_K) \in \text{Bir } V$ – бирегулярный изоморфизм, $\chi \in \text{Aut } V$. Следствие 1 полностью доказано.

§ 2. Дивизориально каноничные многообразия

В настоящем параграфе доказана теорема 2.

2.1. Гиперповерхности Фано. Пусть $F = F_M \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ – гладкая гиперповерхность Фано. В точке $x \in F$ зафиксируем систему аффинных координат $z_1, \dots, z_M$ с началом в точке x . Пусть

$$f = q_1 + q_2 + \dots + q_M$$

– уравнение гиперповерхности F , $q_i = q_i(z_*)$ – однородные многочлены степени $\deg q_i = i$. Чтобы доказать дивизориальную каноничность этого многообразия,

нам потребуются более сильные условия регулярности (т.е. условия общности положения) для многочлена f , чем те, которые были использованы для доказательства бирациональной жесткости в [29]. Пусть

$$f_i = q_1 + \dots + q_i$$

– левые сегменты многочлена f , $i = 1, \dots, M$.

(R1.1) Последовательность $q_1, q_2, \dots, q_{M-1}$ регулярна в кольце $\mathcal{O}_{x, \mathbb{P}}$, т.е. система уравнений

$$q_1 = q_2 = \dots = q_{M-1} = 0$$

задает одномерное подмножество – конечный набор прямых в $\mathbb{P}$, проходящих через точку x . Это стандартное условие регулярности, использованное в предыдущих работах (см. [29]).

(R1.2) Линейная оболочка любой неприводимой компоненты замкнутого алгебраического множества

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0$$

в $\mathbb{C}^M$ есть гиперплоскость $q_1 = 0$ (т.е. касательная гиперплоскость $T_x F$).

(R1.3) Замкнутое алгебраическое множество

$$\overline{\{f_1 = f_2 = 0\} \cap F} = \overline{\{q_1 = q_2 = 0\} \cap F} \subset \mathbb{P} \quad (10)$$

(черта означает замыкание в $\mathbb{P}$) неприводимо, и любое сечение этого множества некоторой гиперплоскостью $P \ni x$:

- либо также неприводимо и приведено;
- либо распадается на две неприводимые компоненты $B_1 + B_2$, где $B_i = F \cap S_i$ – сечение F плоскостью $S_i \subset \mathbb{P}$ коразмерности 3, и, более того, $\text{mult}_x B_i = 3$;
- либо неприведено и имеет вид $2B$, где $B = F \cap S$ – сечение F плоскостью S коразмерности 3, и, более того, $\text{mult}_x B = 3$.

Пусть $\mathcal{F}_{\text{reg}} \subset \mathcal{F}$ – множество гиперповерхностей Фано, удовлетворяющих условиям (R1.1)–(R1.3) в каждой точке (в частности, любая гиперповерхность $F \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$ гладкая). Понятно, что $\mathcal{F}_{\text{reg}}$ – открытое по Зарискому подмножество проективного пространства $\mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *При $M \geq 6$ множество $\mathcal{F}_{\text{reg}}$ непусто.*

Доказательство предложения 4 приведено ниже, в п. 2.3. При $M \geq 8$ в условии (R1.3) можно потребовать, чтобы сечение множества (10) любой гиперплоскостью $P \ni x$ было неприводимо и приведено. С другой стороны, при $M = 4, 5$ легко показать, что для любой гиперповерхности $F \in \mathcal{F}$ найдется точка, в которой условия (R1.2) и (R1.3) не выполнены.

Докажем утверждение (i) теоремы 2, т.е. справедливость условия (C) для регулярной гиперповерхности Фано $F \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$.

Пусть $\Delta \in |nH|$ – эффективный дивизор, $n \geq 1$, где $H \in \text{Pic } F$ – класс гиперплоского сечения, $K_F = -H$. Необходимо показать, что пара $(F, \frac{1}{n}\Delta)$ имеет

канонические особенности. Предположим противное. Тогда для некоторой последовательности раздутий $\varphi: F^+ \rightarrow F$ и исключительного дивизора $E^+ \subset F^+$ выполнено неравенство Нётера–Фано

$$\nu_{E^+}(\Delta) > na(E^+). \quad (11)$$

При фиксированном E^+ неравенство (11) линейно по Δ , так что без потери общности можно считать, что $\Delta \subset F$ – простой дивизор, т.е. неприводимое подмногообразие коразмерности 1. Из (11) легко следует, что центр $Y = \varphi(E^+)$ нормирования E^+ на F удовлетворяет неравенству

$$\text{mult}_Y \Delta > n.$$

С другой стороны, хорошо известно [26], [28], что для любой неприводимой кривой $C \subset F$ имеет место неравенство

$$\text{mult}_C \Delta \leq n.$$

Поэтому $Y = x$ – точка. Пусть $\varepsilon: \tilde{F} \rightarrow F$ – ее раздутие, $E \subset \tilde{F}$ – исключительный дивизор $E \cong \mathbb{P}^{M-2}$. Согласно предложению 3 для некоторой гиперплоскости $B \subset E$ выполнено неравенство

$$\text{mult}_x \Delta + \text{mult}_B \tilde{\Delta} > 2n, \quad (12)$$

где $\tilde{\Delta} \subset \tilde{F}$ – собственный прообраз дивизора Δ .

Пусть $\mathbb{T} = \overline{T_x F} \subset \mathbb{P}$ – касательная гиперплоскость в точке x . Дивизор E естественно отождествляется с проективизацией

$$\mathbb{P}(T_x \mathbb{T}) = \mathbb{P}(T_x F).$$

Существует единственная гиперплоскость $\mathbb{B} \subset \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{B}$, такая, что

$$B = \mathbb{P}(T_x \mathbb{B})$$

относительно указанного выше отождествления. Пусть $\Lambda_{\mathbb{B}}$ – пучок гиперплоскостей в $\mathbb{P}$, содержащих $\mathbb{B}$, и $\Lambda_B = \Lambda_{\mathbb{B}}|_F \subset |H|$ – его ограничение на F . Рассмотрим общий дивизор $R \in \Lambda_B$. Это гиперповерхность степени M в $\mathbb{P}^{M-1}$, гладкая в точке x . Пусть $\tilde{R} \subset \tilde{F}$ – собственный прообраз дивизора R . Очевидно,

$$\tilde{R} \cap E = B.$$

Положим $\Delta_R = \Delta|_R = \Delta \cap R$. Это эффективный дивизор на гиперповерхности R .

ЛЕММА 3. *Имеет место оценка*

$$\text{mult}_x \Delta_R > 2n. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$(\tilde{\Delta} \circ \tilde{R}) = \tilde{\Delta}_R + Z,$$

где Z – эффективный дивизор на E . В соответствии с правилами элементарной теории пересечений [8] выполнено равенство

$$\text{mult}_x \Delta_R = \text{mult}_x \Delta + \deg Z,$$

поскольку $\text{mult}_x R = 1$. Однако Z содержит B с кратностью по меньшей мере $\text{mult}_B \tilde{\Delta}$. Поэтому из неравенства (12) вытекает оценка (13). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Дивизор*

$$T_R = T_x R \cap R$$

на гиперповерхности R неприводим и имеет кратность точно 2 в точке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неприводимость очевидна (например, при $M \geq 6$ можно применить теорему Лефшеца). Согласно условию (R1.2) квадрика $\{q_2|_E = 0\}$ не содержит компонентой гиперплоскость в E , в частности она не содержит гиперплоскость $B \subset E$. Поэтому квадратичная компонента уравнения дивизора T_R , т. е. многочлен $q_2|_B$, отлична от нуля. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2. В силу лемм 3 и 4 можно записать

$$\Delta_R = aT_R + \Delta_R^\sharp,$$

где $a \in \mathbb{Z}_+$ и эффективный дивизор $\Delta_R^\sharp \in |n^\sharp H_R|$ на гиперповерхности R удовлетворяет оценке

$$\text{mult}_x \Delta_R^\sharp > 2n^\sharp.$$

Более того, $\Delta_R^\sharp$ не содержит дивизор T_R компонентой. Без ущерба для общности можно считать, что дивизор $\Delta_R^\sharp$ неприводим и приведен.

Теперь рассмотрим вторую гиперкасательную систему [29], [30], [35]

$$\Lambda_2^R = |s_0 f_2 + s_1 f_1|_R,$$

где s_i – однородные многочлены степени i от линейных координат z_* . Ее базисное множество

$$S_R = \{q_1|_R = q_2|_R = 0\}$$

имеет в силу условия (R1.3) коразмерность 2 в R и либо неприводимо и имеет кратность 6 в точке x , либо распадается на два плоских сечения гиперповерхности R , каждое кратности 3 в точке x . В любом случае для общего дивизора $D \in \Lambda_2^R$ получаем $\Delta_R^\sharp \not\subset \text{Supp } D$, так что на R корректно определен эффективный цикл

$$\Delta_D = (D \circ \Delta_R^\sharp)$$

коразмерности два. Поскольку $\text{mult}_x D = 3$ и $\Lambda_2^R \subset |2H_R|$, цикл Δ_D удовлетворяет оценке

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} \Delta_D > \frac{3}{M}. \quad (14)$$

Заменяя цикл Δ_D его подходящей неприводимой компонентой, можно предполагать его неприводимым подмногообразием коразмерности 2 в R . Сравнивая оценку (14) с данным выше описанием множества S_R , видим, что

$$\Delta_D \not\subset S_R.$$

Отсюда вытекает, что $\Delta_D \not\subset T_R$. В самом деле, если бы это было не так, мы имели бы

$$f_1|_{\Delta_D} \equiv q_1|_{\Delta_D} \equiv 0. \quad (15)$$

Однако $\Delta_D \subset D$, так что для некоторых $s_0 \neq 0$, $s_1 \neq 0$ (дивизор D выбран достаточно общим) имеем

$$(s_0 f_2 + s_1 f_1)|_{\Delta_D} \equiv 0.$$

Согласно (15) отсюда следует, что

$$f_2|_{\Delta_D} \equiv (q_1 + q_2)|_{\Delta_D} \equiv 0$$

(поскольку $s_0 \neq 0$ есть просто константа), так что $\Delta_D \subset S_R$. Противоречие.

Итак, $\Delta_D \not\subset T_R$. Следовательно, эффективный цикл $\Delta^+ = (\Delta_D \circ T_R)$ корректно определен и удовлетворяет оценке

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} \Delta^+ > \frac{6}{M}. \quad (16)$$

Эффективный цикл Δ^+ имеет коразмерность 4 как цикл на F . Напомним теперь следующий факт [29]: если гиперповерхность Фано F в точке x удовлетворяет условию регулярности (R1.1), то для любого эффективного цикла Y чистой коразмерности $l \leq M - 2$ выполнено неравенство

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} Y \leq \frac{l + 2}{M}.$$

Следовательно, неравенство (16) для эффективного цикла коразмерности 4 невозможно. Этим противоречием утверждение (i) теоремы 2 доказано.

2.2. Двойные пространства Фано. Пусть $F \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ – двойное пространство Фано, разветвленное над гладкой гиперповерхностью $W = W_{2M} \subset \mathbb{P}$ степени $2M$, $M \geq 3$. Для точки $x \in W$ зафиксируем систему аффинных координат $z_1, \dots, z_M$ на $\mathbb{P}$ с центром в x , и пусть

$$w = q_1 + q_2 + \dots + q_{2M}$$

– уравнение гиперповерхности W , $q_i = q_i(z_*)$ – однородные многочлены степени $\deg q_i = i$. Условие регулярности формулируется в терминах многочленов q_i .

Необходимо различать три случая: $M \geq 5$, $M = 4$ и $M = 3$. Для удобства обозначений считаем, что $q_1 \equiv z_1$. Положим также

$$\bar{q}_i = \bar{q}_i(z_2, \dots, z_M) = q_i|_{\{z_1=0\}} = q_i(0, z_2, \dots, z_M).$$

Сформулируем условие регулярности в точке x .

(R2) Пусть $M \geq 5$. Мы требуем, чтобы ранг квадратичной формы $\bar{q}_2$ был не меньше 2.

Пусть $M = 3$ или $M = 4$. Мы требуем, чтобы квадратичная форма $\bar{q}_2$ была отлична от нуля и, более того:

- (i) либо $\text{rk } \bar{q}_2 \geq 2$ (как и выше);
- (ii) либо $\text{rk } \bar{q}_2 = 1$ и выполнено следующее дополнительное условие; без ограничения общности считаем в этом случае, что $\bar{q}_2 = z_2^2$; теперь при $M = 4$ мы требуем, чтобы кубический многочлен от переменной t

$$\bar{q}_3(0, 1, t) = q_3(0, 0, 1, t)$$

имел ровно три различных корня, при $M = 3$ мы требуем, чтобы хотя бы один из двух многочленов от переменной z_3 :

$$\bar{q}_3(0, z_3) \quad \text{или} \quad \bar{q}_4(0, z_3)$$

(они имеют вид αz_3^m , $\alpha \in \mathbb{C}$, $m = 3, 4$), был отличен от нуля.

Пусть $\mathcal{W}_{\text{reg}} \subset \mathcal{W}$ – множество двойных пространств Фано, удовлетворяющих условию (R2) в каждой точке дивизора ветвления. Очевидно, что $\mathcal{W}_{\text{reg}}$ – открытое по Зарискому подмножество.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Множество $\mathcal{W}_{\text{reg}}$ непусто.*

Доказательство предложения 5 приведено ниже, в п. 2.3.

Докажем утверждение (ii) теоремы 2, т. е. справедливость условия (C) для регулярного двойного пространства F .

Предположим противное: существует неприводимый дивизор $D \in |nH|$, $H = -K_F = \sigma^* H_{\mathbb{P}}$, где $H_{\mathbb{P}}$ – класс гиперплоскости в $\mathbb{P}$, для которого пара $(F, \frac{1}{n}D)$ не канонична. Напомним следующий факт [27, предложение 4.3]: для любой неприводимой кривой $C \subset F$ выполнено неравенство

$$\text{mult}_C D \leq n.$$

(Формально это неравенство было доказано в [27] для *подвижного* дивизора $D \in \Lambda \subset |nH|$, где Λ – линейная система без неподвижных компонент, однако подвижность нигде в доказательстве не использовалась.) Рассуждая так же, как в п. 2.1, заключаем, что центром неканонической особенности пары $(F, \frac{1}{n}D)$ является некоторая точка $x \in F$. Снова имеем неравенство

$$\text{mult}_x D + \text{mult}_B \tilde{D} > 2n$$

для некоторой гиперплоскости $B \subset E$ в исключительном дивизоре $E \subset \tilde{F}$ раздутья $\tilde{F} \rightarrow F$ точки x .

Случай 1. Точка $z = \sigma(x) \notin W$. В этом случае пусть $P \subset \mathbb{P}$ – такая гиперплоскость, что $P \ni z$ и $\tilde{F}_P \cap E = B$, где $F_P = \sigma^{-1}(P)$. Такая гиперплоскость единственна. Дивизор F_P очевидным образом неприводим и удовлетворяет равенству

$$\text{mult}_x F_P + \text{mult}_B \tilde{F}_P = 2.$$

Поскольку $F_P \in |H|$, отсюда следует, что $F_P \neq D$. Поэтому $Z = (F_P \circ D)$ – корректно определенный эффeктивный цикл коразмерности два на F . Получаем

$$\deg Z = 2n, \quad \text{mult}_x Z \geq \text{mult}_x D + \text{mult}_B \tilde{D} > 2n,$$

что невозможно. Поэтому случай $z \notin W$ не реализуется.

Случай 2. Точка $z = \sigma(x) \in W$. В этом случае пусть $P = T_z W \subset \mathbb{P}$ – касательная гиперплоскость. Снова положим $F_P = \sigma^{-1}(P)$. Имеем $F_P \in |H|$, $\text{mult}_x F_P \geq 2$. Дивизор F_P неприводим, так что если $F_P \neq D$, то для цикла $Z = (F_P \circ D)$ снова получаем

$$\deg Z = 2n, \quad \text{mult}_x Z \geq 2 \text{mult}_x D > 2n, \quad (17)$$

так как $\text{mult}_x D \geq \text{mult}_B \tilde{D}$. Поскольку не существует цикла Z , удовлетворяющего оценке (17), заключаем, что

$$F_P = D.$$

До сих пор мы никак не использовали соображения об общности положения.

ЛЕММА 5. *Пара (F, F_P) канонична в точке x .*

Доказательство леммы 5 приведено ниже, в п. 2.3. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

2.3. Условия регулярности. Докажем предложение 4. Необходимо установить, что замкнутое множество $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{\text{reg}}$ гиперповерхностей Фано, нерегулярных хотя бы в одной точке, имеет положительную коразмерность в $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{F}(x)$ – множество гиперповерхностей, проходящих через точку $x \in \mathbb{P}$, $\mathcal{F}_{\text{reg}}(x) \subset \mathcal{F}(x)$ – множество гиперповерхностей, регулярных в точке x . Достаточно установить, что

$$\text{codim}_{\mathcal{F}(x)}[\mathcal{F}(x) \setminus \mathcal{F}_{\text{reg}}(x)] \geq M, \quad (18)$$

так как $\mathcal{F}(x)$ – дивизор в $\mathcal{F}$. Для условия (R1.1) это было доказано в [29], так что можно считать, что все рассматриваемые гиперповерхности удовлетворяют (R1.1). Зафиксируем точку $x \in \mathbb{P}$ и покажем, что нарушение условия (R1.2) или (R1.3) налагает на гиперповерхность $F \ni x$ не меньше чем M условий (как мы увидим, на самом деле коразмерность гораздо больше, причем получающаяся оценка тем сильнее, чем больше M).

Пусть $\varphi: \tilde{F} \rightarrow F$ – раздутие точки x , $E \subset \tilde{F}$ – исключительный дивизор, $E \cong \mathbb{P}^{M-2}$. Будем рассматривать $z_2, \dots, z_M$ как однородные координаты на E , считая, что $q_1 \equiv z_1$. Положим

$$g_i = q_i|_E = q_1|_{\{z_1=0\}}.$$

Теперь условие (R1.2) формулируется следующим образом: линейная оболочка любой неприводимой компоненты множества $\{g_2 = g_3 = 0\} \subset E$ есть E .

Проверка неравенства (18) тем легче, чем больше M . Рассмотрим в деталях наиболее трудный случай $M = 6$. Здесь $E = \mathbb{P}^4$. Легко видеть, что приводимость квадрики

$$Q = \{g_2 = 0\} \subset E$$

налагает на многочлен g_2 (и потому на q_2) шесть независимых условий. Поэтому для общей гиперповерхности квадрика Q неприводима в каждой точке $x \in F$. Следовательно, для Q имеются следующие возможности:

- квадрика Q гладкая (это выполнено для точки $x \in F$ общего положения);
- квадрика Q есть конус над гладкой квадрикой в $\mathbb{P}^3$ (это выполнено для точек, лежащих на некотором дивизоре $Z_1 \subset F$);
- квадрика Q есть конус с вершиной $\mathbb{P}^1$ над гладкой коникой в $\mathbb{P}^2$ (это выполнено для точек $x \in Z_2$, где $Z_2 \subset F$ – некоторое замкнутое множество коразмерности 3).

Разберем каждый из этих случаев отдельно.

Предположим, что квадрика Q гладкая. Имеем

$$\text{Pic } Q = \mathbb{Z}H_Q,$$

где H_Q – гиперплоское сечение. Условие (R1.2) нарушается только в том случае, когда дивизор $\{g_3|_Q = 0\} \subset Q$ распадается на две компоненты, одна из которых – гиперплоское сечение. Легко проверить, что это налагает на многочлен g_3 (и потому на q_3) 12 независимых условий, так что для общей гиперповерхности F в случае гладкой квадрики Q условие (R1.2) не нарушается.

Отметим, что для произвольного $M \geq 6$ в случае гладкой квадрики Q нарушение условия (R1.2) налагает $\frac{1}{6}(M^3 - 3M^2 - 10M + 24)$ независимых условий на многочлен g_3 , так что коразмерность множества нерегулярных гиперповерхностей возрастает с ростом M .

Предположим, что квадрика Q есть конус, вершина которого – точка $p \in E$ или прямая $L \subset E$, и некоторая компонента дивизора $\{g_3|_Q = 0\}$ содержится в гиперплоскости $P \subset E$. Рассмотрим пересечение $P \cap Q$. Если это пересечение – неприводимая квадрика, то рассуждаем, как и выше в гладком случае. Если же $P \cap Q$ распадается, то имеем

$$P \cap Q = S_1 + S_2$$

для некоторых плоскостей $S_i \subset Q$. Обращение многочлена g_3 в нуль на хотя бы одной плоскости $S \subset Q$ налагает $10 - 1 = 9$ независимых условий на g_3 и q_3 , потому что квадрика Q содержит одномерное семейство плоскостей.

Если $M \geq 7$, то рассуждения аналогичны, а оценки – сильнее (см. пример, приведенный выше). Этим справедливость условия (R1.2) в каждой точке общей гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}$ при $M \geq 6$ доказана.

Рассмотрим условие (R1.3). Пусть $\mathbb{T} = \overline{\{q_1 = 0\}} \subset \mathbb{P}$ – проективная касательная гиперплоскость к гиперповерхности F в точке x , $\mathbb{T} \cong \mathbb{P}^{M-1}$, и

$$Q = \{q_2|_{\mathbb{T}} = 0\} \subset \mathbb{T}$$

– квадратичный конус с вершиной в точке x . Проверка условия (R1.3) требует перебора частных случаев. Рассуждения однотипны, поэтому ниже разобраны лишь несколько основных примеров. Объясним основную схему рассуждений.

Зафиксируем квадрику Q и гиперплоскость $P \ni x$, $P \subset \mathbb{T}$. Положим $Q_P = Q \cap P$. Пересечение $Q_P \cap F$ будем рассматривать как дивизор на квадрике Q_P . Очевидно, $Q_P \cap F$ задается уравнением

$$(q_3 + \dots + q_M)|_{Q_P} = 0,$$

где однородные многочлены $q_3 + \dots + q_M$ произвольны. Теперь для доказательства предложения 4 необходимо оценить, сколько условий на многочлены $q_3, \dots, q_M$ налагает нарушение (R1.3) для каждого типа квадрики Q_P . Мы снова ограничимся рассмотрением наиболее трудного случая $M = 6$.

Предположим сначала, что Q – конус над неособой трехмерной квадрикой. В этом случае Q – факториальное многообразие. Пусть $P \ni x$ – произвольная гиперплоскость. Для квадрики $Q_P = Q \cap P$ существуют две возможности:

- 1) Q_P есть конус с вершиной x над неособой квадрикой $S \subset \mathbb{P}^3$;
- 2) Q_P есть конус с вершиной в прямой $L \ni x$ над неособой коникой $C \subset \mathbb{P}^2$; данная возможность реализуется тогда и только тогда, когда гиперплоскость P касается Q вдоль прямой L .

В свою очередь, случай 1) разбивается на два подслучая.

1А) Множество $Q_P \cap F$ приводимо и хотя бы одна его компонента A не содержит точку x . Для дивизора $A \subset Q_P$ имеем

$$A \sim aH_P,$$

где H_P – гиперплоское сечение квадрики Q_P и $1 \leq a \leq 4$. (Чуть ниже мы объясним, почему $a \leq 4$, так как формально можно утверждать только то, что $a \leq 5$). Таким образом,

$$Q_P \cap F = A + B,$$

где $B \sim (6 - a)H_P$. Аффинное уравнение гиперповерхности $F \cap P \subset P$ имеет вид

$$q_2^+ + \dots + q_6^+ = 0,$$

где $q_i^+ = q_i|_P$, – вот почему $a \leq 4$. Уравнение $q_2^+ = 0$ задает квадрику Q_P . Множество сечений квадрики Q_P гиперповерхностями F такого вида имеет размерность 125, в то время как при $a \geq 2$

$$h^0(Q_P, \mathcal{O}(a)) = \binom{a+4}{4} - \binom{a+2}{4}.$$

Теперь несложный подсчет показывает, что при фиксированной гиперплоскости $P \subset \mathbb{T}$ нарушение условия (R1.3) налагает на набор многочленов $(q_3^+, \dots, q_6^+)$ не менее 35 независимых условий. Поскольку $P \ni x$ варьируется в четырехмерном семействе, получаем окончательно, что нарушение условия (R1.3) типа 1A) в точке $x \in F$ налагает на f не менее 31 условия. Напомним, что нам достаточно шесть условий. Итак, для общей гиперповерхности F подслучай 1A) невозможен.

1B) Множество $Q_P \cap F$ приводимо и каждая его компонента содержит точку x . В этом случае приводимы (или всюду не приведены) проективизированный касательный конус

$$C = \mathbb{P}T_x(Q_P \cap F)$$

и пересечение

$$C_\infty = Q_P \cap F \cap H_\infty$$

с бесконечно удаленной гиперплоскостью $H_\infty \not\ni x$. Поскольку Q_P – конус над гладкой квадрикой $S \cong Q_P \cap H_\infty$, обе кривые C и C_∞ можно рассматривать как кривые на квадрике $S \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Кривая C задается многочленом q_3 , кривая C_∞ – многочленом q_6 . Условие приводимости кривой C (имеющей бистепень $(3, 3)$) налагает $k \geq 3$ независимых условий на многочлен q_3 , причем $k = 3$ соответствует случаю общего положения, когда $C = R + C^+$, где $R \subset S$ – прямая и C^+ – неприводимая кривая степени 5. Условие приводимости кривой C_∞ (имеющей бистепень $(6, 6)$) налагает $k_\infty \geq 6$ независимых условий на многочлен q_6 , причем $k_\infty = 6$ соответствует случаю общего положения, когда $C_\infty = R_\infty + C_\infty^+$, где $R_\infty \subset S$ – прямая и C_∞^+ – неприводимая кривая степени 11. Однако в силу условия (R1.1) гиперповерхность F (и потому $Q_P \cap F$) не может содержать плоскость. Следовательно, нарушение условия (R1.3) налагает на многочлен f

$$k + k_\infty \geq 3 + 6 + 1 = 10$$

независимых условий. (Учет многочленов q_4 и q_5 дает существенно большую ко-размерность, но нам это не нужно.) Поскольку гиперплоскость P варьируется в четырехмерном семействе ($x \in P \subset \mathbb{T}$), в итоге имеем не менее шести независимых условий на многочлен f . Следовательно, на общей гиперповерхности F нарушение условия (R1.3) типа 1) невозможно.

Рассмотрим случай 2). Здесь гиперплоскость $P \subset \mathbb{T}$ варьируется в трехмерном семействе. Предположим, что $Q_P \cap F$ приводимо. Если $F \not\supset L$, где $L \cong \mathbb{P}^1$ – вершина конуса Q_P , то рассуждая, как в случае 1A), получаем требуемую оценку (18).

Условие $F \supset L$ означает, что

$$q_i|_L \equiv 0, \quad i = 3, 4, 5, 6,$$

откуда имеем четыре дополнительных независимых условия на f . Далее, легко проверить, что случай

$$\text{mult}_L Q_P \cap F > 2$$

на общей гиперповерхности F невозможен. Пусть $S_1, S_2 \subset Q_P$, $S_i \supset L$, – пара общих плоскостей на Q_P . Ограничение $F|_{S_i}$ есть плоская кривая степени 6, имеющая

прямую L однократной компонентой. Приводимость вычетных кривых степени 5 налагает на f не менее шести независимых условий. В итоге получаем не менее $7 = 6 + 4 - 3$ независимых условий на f в точке x . Отметим, что $Q_P \cap F$ не может содержать компонентой плоскость, так как это противоречит условию (R1.1).

Случай, когда Q – конус над неособой трехмерной квадрикой, разобран полностью.

Остальные случаи разбираются аналогично. Мы не приводим эти рассуждения, поскольку они однотипны и элементарны. Разберем подробно лишь еще один случай, противоположный случаю 1) и возможный только при $M = 6$.

Пусть Q – конус с вершиной в плоскости $S \cong \mathbb{P}^2$ над коникой $C \subset \mathbb{P}^2$, причем гиперплоскость P содержит S , так что $Q_P = \Pi_1 + \Pi_2 \subset P$ и $Q_P = 2\Pi$ – пара 3-плоскостей или двойная 3-плоскость. Множество точек $x \in F$, где этот случай возможен, двумерно. Гиперплоскость P варьируется в двумерном семействе $S \subset P \subset T$. Гиперповерхность F не может содержать плоскостей ввиду условия (R1.1).

Если $\Pi_1 \neq \Pi_2$, то $\Pi_1 \cap \Pi_2 = S$ и

$$F \cap Q_P = F \cap \Pi_1 + F \cap \Pi_2.$$

Приводимость поверхности $F \cap \Pi_i$ налагает на F не менее 25 условий, так что обе поверхности $F \cap \Pi_i$ можно считать неприводимыми. Очевидно,

$$\text{mult}_x F \cap \Pi_i \geq 3.$$

Однако в силу условия (R1.2) имеем

$$\text{mult}_x F \cap Q_P = \text{mult}_x F \cap \Pi_1 + \text{mult}_x F \cap \Pi_2 = 6.$$

Следовательно, условие (R1.3) выполнено и в этом случае.

Если $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi$, то рассуждения аналогичны. Это завершает доказательство для $M = 6$.

При $M = 7$ рассуждения проще, а при $M \geq 8$ во всех случаях достаточно рассуждать аналогично случаю 1).

Предложение 4 полностью доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Множество квадратичных форм ранга не более 1 от переменных $z_2, \dots, z_M$ имеет коразмерность

$$c(M) = \frac{(M-1)(M-2)}{2}.$$

При $M \geq 5$ имеем $c(M) \geq M$, так что условие (R2) выполнено в каждой точке $x \in W$ для достаточно общего многочлена w .

Пусть $M = 4$. Здесь $c(4) = 3 = \dim W$, так что для общей гиперповерхности W условие (i) нарушается в конечном множестве точек $x \in W$. Для общего кубического многочлена q_3 многочлен $\bar{q}_3(0, 1, t)$ имеет три различных корня: если имеется кратный корень, это дает условие коразмерности 1 на $\bar{q}_3$. Поэтому (R2) выполнено и при $M = 4$.

Пусть $M = 3$. Здесь $c(3) = 1$, $\dim W = 2$, так что всегда имеется одномерное множество точек $x \in W$, в которых нарушается условие (i). Легко видеть, что условия

$$\bar{q}_3(0, z_3) \equiv 0 \text{ и } \bar{q}_4(0, z_3) \equiv 0$$

независимы. Это завершает доказательство предложения 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Поскольку гиперповерхность W неособа, точка x есть изолированная особенность гиперповерхности

$$W_P = W \cap P,$$

где $P = T_x W$. Неприводимый дивизор F_P есть двулистное накрытие гиперплоскости P с ветвлением в W_P . Пусть $p = \sigma^{-1}(x) \in F$, $\varphi: \tilde{F} \rightarrow F$ – раздутие точки p , $E \subset \tilde{F}$ – исключительный дивизор. Предположим, что пара (F, F_P) не канонична. В силу предложения 3 для некоторой гиперплоскости $B \subset E$ выполнено неравенство

$$\text{mult}_p F_P + \text{mult}_B \tilde{F}_P \geq 3. \quad (19)$$

Однако $\text{mult}_x F_P = 2$, так что проективизированный касательный конус

$$\mathbb{P}(T_p F_P) = (\tilde{F}_P \circ E) \quad (20)$$

должен содержать гиперплоскость B .

С другой стороны, касательный конус $T_p F_P$ задается уравнением

$$y^2 = \bar{q}_2(z_2, \dots, z_M)$$

(в обозначениях п. 2.2). При $M \geq 5$ в силу условия (R2) имеем $\text{rk } \bar{q}_2 \geq 2$, так что квадрика (20) неприводима и не может содержать B . Это доказывает лемму для $M \geq 5$.

При $M = 3, 4$ неравенство (19) выполнено только в тех точках p , где $\text{rk } \bar{q}_2 = 1$, и только для двух гиперплоскостей

$$B = \{y \pm z_2 = 0\}.$$

Пусть $M = 4$. Локальные вычисления показывают, что $\tilde{F}_P$ имеет ровно три особых точки: они лежат на прямой $\{y = z_2 = 0\}$ и соответствуют корням многочлена $\bar{q}_3(0, 1, t)$. Более того, эти три точки суть невырожденные квадратичные особенности. Поэтому трехмерное многообразие F_P имеет терминальные особенности, так что пара (F, F_P) терминальна, тем более, канонична вопреки предположению.

Пусть $M = 3$. Здесь $E = \mathbb{P}^2$ и

$$\tilde{F}_P \cap E = L_+ + L_- = \{y = \pm z_2\}$$

– пара прямых. Единственная особенность поверхности $\tilde{F}_P$ над точкой p есть точка $p^* = L_+ \cap L_-$ пересечения этих прямых. Если $\bar{q}_3(0, z_3) \neq 0$, то p^* – невырожденная квадратичная особенность, так что ее раздутие

$$\varphi^*: F_P^* \rightarrow \tilde{F}_P$$

дает неособую поверхность F_P^* . Если $\bar{q}_3(0, z_3) \equiv 0$, то исключительный дивизор E^* раздутия φ^* есть пара прямых: $E^* = L_+^* + L_-^*$, так что единственная особенность поверхности F_P^* над точкой p^* есть точка $p^\sharp = L_+^* \cap L_-^*$.

Легко проверить, что ввиду условия $\bar{q}_4(0, z_3) \neq 0$ точка $p^\sharp$ есть невырожденная квадратичная точка. Поэтому в любом случае поверхность $F_{\mathcal{P}}$ канонична. Этим лемма 5 доказана полностью.

§ 3. Принцип связности Шокурова–Коллара

В настоящем параграфе мы обсуждаем принцип связности и обращение присоединения и доказываем предложение 3.

3.1. Принцип связности. Следующий факт является частным случаем общего принципа связности [16, теорема 17.4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (Шокуров, Коллар). Пусть $x \in X$ – росток гладкого многообразия и

$$D = \sum_{i \in I} d_i D_i$$

– эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор, $d_i \in \mathbb{Q}_+$ для всех $i \in I$. Пусть $\varphi: \tilde{X} \rightarrow X$ – разрешение особенностей пары (X, D) , в частности носитель дивизора $\tilde{D}$ есть дивизор с нормальными пересечениями. Запишем

$$K_{\tilde{X}} = \varphi^*(K_X + D) + \sum_{j \in J} e_j E_j,$$

где $E_j \subset \tilde{X}$ – простые дивизоры (либо исключительные дивизоры морфизма φ , либо компоненты собственного прообраза $\tilde{D}$). Тогда дивизор

$$\bigcup_{e_j \leq -1} E_j$$

связен в окрестности каждого слоя отображения φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [16, гл. 17]. Отметим лишь, что основным ингредиентом доказательства является теорема Каваматы–Фивега об обращении в нуль [4], [15], [44].

3.2. Обращение присоединения. Следствием принципа связности является обращение присоединения. В общем виде обращение присоединения формулируется и доказывается в [16, гл. 17]. Мы приведем частный случай этого общего факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 (обращение присоединения). Пусть $x \in X$, как и выше, росток гладкого многообразия, D – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор, $x \in \text{Supp } D$. Предположим, что точка x есть изолированный центр неканонической особенности пары (X, D) , т. е. пара (X, D) не канонична, но ее ограничение на $X \setminus \{x\}$ канонично. Пусть $R \ni x$ – неособый дивизор, $R \not\subset \text{Supp } D$. Тогда пара $(R, D_R = D|_R)$ не логканонична в точке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для облегчения чтения работы приведем доказательство, следуя [16, гл. 17]. Пусть $D = \sum_{i \in I} d_i D_i$, $d_i \in \mathbb{Q}_+$. Поскольку пара (X, D) канонична вне x , имеем $d_i \leq 1$ для всех $i \in I$. Заменяя D на $\frac{1}{1+\varepsilon} D$ для малого $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$, можно считать, что $d_i < 1$ для всех $i \in I$.

Пусть $\lambda: X^+ \rightarrow X$ – раздутие точки x , $E = \lambda^{-1}(x) \subset X^+$ – исключительный дивизор, D^+ и R^+ – собственные прообразы дивизоров D и R соответственно. Далее, пусть $\mu: \tilde{X} \rightarrow X^+$ – разрешение особенностей пары $(X^+, D^+ + R^+)$, $\varphi = \lambda \circ \mu: \tilde{X} \rightarrow X$ – сквозное отображение. Запишем

$$K_{\tilde{X}} = \varphi^*(K_X + D + R) + \sum_{j \in J} e_j E_j - \sum_{i \in I} d_i \tilde{D}_i - \tilde{R}, \quad (21)$$

где E_j , $j \in J$, – все исключительные дивизоры морфизма φ , $\tilde{D}_i$ и $\tilde{R}$ – собственные прообразы соответственно дивизоров D_i , R на $\tilde{X}$. Положим

$$b_j = \text{ord}_{E_j} \varphi^* D, \quad a_j = a(E_j, X), \quad j \in J.$$

В этих обозначениях для $j \in J$ имеем $e_j = a_j - b_j - r_j$, где $r_j = \text{ord}_{E_j} \varphi^* R$. Очевидно,

$$\varphi^{-1}(x) = \bigcup_{j \in J^+} E_j$$

для некоторого подмножества $J^+ \subset J$. Если $j \in J^+$, то

$$r_j = \text{ord}_{E_j} \mu^* R^+ + \text{ord}_{E_j} \mu^* E \geq 1.$$

В силу предположения пара (X, D) не канонична, но канонична вне точки x . Следовательно, среди $j \in J^+$ найдется такой индекс l , что $a_l < b_l$. Для этого индекса имеем

$$e_l < -1.$$

В силу принципа связности можно предполагать, что

$$E_l \cap \tilde{R} \neq \emptyset.$$

Теперь из равенства (21) по формуле присоединения получаем

$$K_{\tilde{R}} = (K_{\tilde{X}} + \tilde{R})|_{\tilde{R}} = \varphi_R^*(K_R + D_R) + \left(\sum_{j \in J} e_j E_j|_{\tilde{R}} - \sum_{i \in I} d_i \tilde{D}_i|_{\tilde{R}} \right),$$

где $\varphi_R = \varphi|_{\tilde{R}}: \tilde{R} \rightarrow R$ – ограничение последовательности раздутий φ на R . В силу только что сказанного в последней скобке найдется хотя бы один простой дивизор вида $E_l|_{\tilde{R}}$, где $l \in J^+$, коэффициент при котором строго меньше -1 . Предложение доказано.

Приведем еще одно следствие принципа связности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. В принятых выше обозначениях предположим, что пара (X, D) не логканонична, но вне точки x логканонична. Тогда имеет место следующая альтернатива:

- 1) либо $\text{mult}_x D > \dim X$;
- 2) либо множество $\mu(\bigcup_{b_j > a_j + 1} E_j) \subset E$ связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду сделанных предположений утверждение предложения немедленно вытекает из принципа связности.

3.3. Доказательство предложения 3. Каноничность сильнее логканоничности. Поэтому обращение присоединения (предложение 7) можно применять многократно, последовательно ограничивая пару (X, D) на гладкие подмногообразия

$$R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_k,$$

$R_1 \subset X$ – гладкий дивизор, $R_{i+1} \subset R_i$ – гладкий дивизор, $x \in R_k$ и $R_k \not\subset \text{Supp } D$. Все пары

$$(R_i, D|_{R_i})$$

не логканоничны в точке x . Поэтому предложение 7 справедливо для любого гладкого ростка $R \ni x$ коразмерности $k \leq \dim X - 1$. В частности, оно справедливо для общей поверхности $S \ni x$. (Этот факт впервые был использован А. Корти [1] для альтернативного доказательства $4n^2$ -неравенства; см. также [35, предложение 1.5].) Итак, пара

$$(S, D_S = D|_S)$$

имеет в точке x изолированную (для общей поверхности S) не логканоническую особенность. Рассмотрим подробнее двумерный случай. Имеем: $x \in S$ – росток гладкой поверхности, $C \subset S$ – росток эффeктивной (возможно, приводимой) кривой, $x \in C$. Рассмотрим некоторую последовательность раздутий

$$\varphi_{i,i-1}: S_i \rightarrow S_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$S_0 = S$, $\varphi_{i,i-1}$ раздувает точку $x_{i-1} \in S_{i-1}$, $E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(x_{i-1}) \subset S_i$ – исключительная прямая.

Положим для $i > j$

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{j+1,j} \circ \dots \circ \varphi_{i,i-1}: S_i \rightarrow S_j,$$

$\varphi = \varphi_{N,0}$, $\tilde{S} = S_N$. Мы предполагаем, что раздуваемые точки x_i лежат одна над другой, т. е. $x_i \in E_i$, и что $x_0 = x$, так что все точки x_i , $i \geq 1$, лежат над x :

$$\varphi_{i,0}(x_i) = x \in S.$$

Пусть Γ – граф с вершинами $1, \dots, N$ и ориентированными ребрами (стрелками)

$$i \rightarrow j,$$

которые соединяют вершины i и j , если и только если $i > j$ и $x_{i-1} \in E_j^{i-1}$, где для кривой $Y \subset S_j$ ее собственный прообраз на S_a , $a \geq j$, обозначается символом Y^a .

Предположим, что точка x есть изолированная не логканоническая особенность пары $(S, \frac{1}{n}C)$ для некоторого $n \geq 1$. Это означает, что для некоторого исключительного дивизора $E \subset \tilde{S}$ выполнено неравенство

$$\nu_E(C) = \text{ord}_E \varphi^* C > n(a_E + 1), \quad (22)$$

где a_E — дискрепантность E . Без ограничения общности можно считать, что $E = E_N$ — последний исключительный дивизор. Неравенство (22) называется *логнеравенством Нётера–Фано*.

Пусть для $i > j$ символ p_{ij} обозначает число путей в графе Γ из вершины i в вершину j . Для $i < j$ полагаем $p_{ij} = 0$. Положим также $p_{ii} = 1$. В терминах чисел p_{ij} логнеравенство Нётера–Фано (22) приобретает традиционный вид:

$$\sum_{i=1}^N p_{Ni} \mu_i > n \left(\sum_{i=1}^N p_{Ni} + 1 \right), \quad (23)$$

где $\mu_i = \text{mult}_{x_{i-1}} C^{i-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Имеет место следующая альтернатива: либо $\mu_1 > 2n$ (т. е. уже первый исключительный дивизор $E_1 \subset S_1$ реализует не логтерминальную особенность пары $(S, (1/n)C)$), либо $N \geq 2$ и выполнено неравенство $\mu_1 + \mu_2 > 2n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $N = 1$, то $\mu_1 > 2n$ в силу логнеравенства Нётера–Фано. Предположим, что $\mu_1 \leq 2n$; тогда $N \geq 2$. Очевидно, $\mu_1 > n$. Если $\mu_2 \geq n$, то $\mu_1 + \mu_2 > 2n$, как и утверждалось. Предположим, что $\mu_2 < n$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, N\}$, $i \geq 2$, имеем $\mu_i \leq \mu_2 < n$ (потому что точка x_{i-1} лежит над x_1). Стало быть, из неравенства (23) получаем

$$p_{N1}(\mu_1 - n) + \sum_{i=2}^N p_{Ni}(\mu_2 - n) > n.$$

Однако

$$p_{N1} = \sum_{j=1} p_{Nj} \leq \sum_{i=2}^N p_{Ni},$$

так что тем более

$$\sum_{i=2}^N p_{Ni}(\mu_1 + \mu_2 - 2n) > n.$$

Следовательно, $\mu_1 + \mu_2 > 2n$. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Докажем предложение в следующем виде: пусть (X, D) — такая же пара, как в предложении 8, $\lambda: X^+ \rightarrow X$ — раз-

другие точки x , $E \subset X^+$ – исключительный дивизор, $E \cong \mathbb{P}^e$, $e = \dim X - 1$; тогда существует гиперплоскость $B \subset E$ такая, что

$$\text{mult}_x D + \text{mult}_B D^+ > 2, \quad (24)$$

где D^+ – собственный прообраз D на X^+ .

Рассмотрим общую поверхность $S \ni x$. Пара (S, D_S) не логканонична, но вне точки x логканонична. Согласно предложению 8 либо

$$\text{mult}_x D_S > 2,$$

но тогда $\text{mult}_x D > 2$ и неравенство (24) выполнено тривиальным образом для любой гиперплоскости $B \subset E$, либо пара (S^+, D_S^+) (собственный прообраз пары (S, D_S) на X^+) не логканонична, но логканонична вне некоторого собственного замкнутого связного подмножества

$$Z_S \subset E_S = E \cap S^+ \cong \mathbb{P}^1.$$

Очевидно, Z_S – точка $y_S \in E_S$. В силу общности поверхности S существует гиперплоскость $B \subset E$ такая, что $y_S = B \cap S^+$. Согласно предложению 9 выполнено неравенство

$$\text{mult}_x D_S + \text{mult}_{y_S} D_S^+ > 2.$$

Отсюда немедленно вытекает неравенство (24) и предложение 3.

Список литературы

1. Corti A. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry Explicit Birational Geometry of Threefolds. (London Mathematical Society Lecture Note Series; V. 281.) Cambridge: Cambridge University Press, 2000. P. 259–312.
2. Corti A., Pukhlikov A., Reid M. Fano 3-fold hypersurfaces Explicit Birational Geometry of Threefolds. (London Mathematical Society Lecture Note Series; V. 281.) Cambridge: Cambridge University Press, 2000. P. 175–258.
3. Corti A., Reid M. Foreword to “Explicit Birational Geometry of Threefolds” // London Mathematical Society Lecture Note Series. V. 281. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. P. 1–20.
4. Esnault H., Viehweg E. Lectures on vanishing theorems, DMV-Seminar. Bd. 20. Basel: Birkhäuser, 1992.
5. Fano G. Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli // Atti Acc. Torino. 1908. V. 43. P. 973–977.
6. Fano G. Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli // Atti Acc. Torino. 1915. V. 50. P. 1067–1072.
7. Fano G. Nouve ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche // Comm. Rend. Ac. Sci. 1947. V. 11. P. 635–720.
8. Fulton W. Intersection Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
9. Graber T., Harris J., Starr J. Families of rationally connected varieties // J. Amer. Math. Soc. 2002. V. 16. № 1. P. 57–67.
10. Гриненко М. М. Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 37–52.
11. Гриненко М. М. Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степени 1 и 2 // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 5. С. 17–38.

12. *Гриненко М. М.* Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степени 1 и 2. II // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 5. С. 31–60.
13. *Исковских В. А.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 159–235.
14. *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166.
15. *Kawamata Y.* A generalization of Kodaira–Ramanujam’s vanishing theorem // Math. Ann. 1982. V. 261. P. 43–46.
16. *Kollár J. et al.* Flips and Abundance for Algebraic Threefolds // Asterisque. V. 211. Paris: SMF, 1993.
17. *Kollár J.* Rational curves on algebraic varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
18. *Kollár J.* Nonrational covers of $\mathbb{CP}^m \times \mathbb{CP}^n$ Explicit Birational Geometry of Threefolds. (London Mathematical Society Lecture Note Series; V. 281.) Cambridge: Cambridge University Press, 2000. P. 51–71.
19. *Manin Yu. I.* Rational surfaces over perfect fields // Publ. Math. IHES. 1966. V. 30. P. 55–113.
20. *Манин Ю. И.* Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. 1967. Т. 72. С. 161–192.
21. *Манин Ю. И.* Кубические формы. Алгебра, геометрия, арифметика. М.: Наука, 1972.
22. *Noether M.* Über Flächen welche Schaaren rationaler Kurven besitzen // Math. Ann. 1871. V. 3. P. 161–227.
23. *Pukhlikov A. V.* Birational isomorphisms of four-dimensional quintics // Invent. Math. 1987. V. 87. P. 303–329.
24. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квадрики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 1. С. 229–239.
25. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартики с простейшей особенностью // Матем. сб. 1988. Т. 135. № 4. С. 472–496.
26. *Пухликов А. В.* Замечание о теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартике // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1995. Т. 208. С. 278–289.
27. *Pukhlikov A. V.* Essentials of the method of maximal singularities Explicit Birational Geometry of Threefolds. (London Mathematical Society Lecture Note Series; V. 281.) Cambridge: Cambridge University Press, 2000. P. 73–100.
28. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164.
29. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. № 2. P. 401–426.
30. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие двойные гиперповерхности Фано // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 6. С. 101–126.
31. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие расслоения Фано // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 3. С. 131–150.
32. *Pukhlikov A. V.* Birationally rigid Fano complete intersections // Crelle J. für die reine und angew. Math. 2001. V. 541. P. 55–79.
33. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие гиперповерхности Фано с изолированными особенностями // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 3. С. 135–160.
34. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие гиперповерхности Фано // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 6. С. 159–186.
35. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие итерированные двойные накрытия Фано // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 3. С. 139–182.
36. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. I // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 7. С. 127–160.
37. *Пухликов А. В.* Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. II // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 11. С. 119–156.

- 38. *Pukhlikov A. V.* Birational geometry of Fano direct products. math.AG/0405011.
- 39. *Саркисов В. Г.* Бирациональные автоморфизмы расслоений на коники // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 4. С. 918–945.
- 40. *Саркисов В. Г.* О структурах расслоений на коники // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 2. С. 371–408.
- 41. *Шокурров В. В.* Трехмерные логперестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1993. Т. 40. № 1. С. 93–202.
- 42. *Соболев И. В.* Об одной серии бирационально жестких многообразий с пучком гиперповерхностей Фано // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 10. С. 123–130.
- 43. *Соболев И. В.* Бирациональные автоморфизмы одного класса многообразий, расслоенных на кубические поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 1. С. 203–224.
- 44. *Viehweg E.* Vanishing theorems // Crelle J. für die reine und angew. Math. 1982. V. 335. P. 1–8.

Поступило в редакцию
26.01.2005