Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Свенссон, Динамические системы в неразветвленных и тотально разветвленных расширениях $\mathfrak{p}$ -адического поля, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, том 69, выпуск 6, 211–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/im673>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 18:27:02

УДК 511.23+517.938

П.-А. Свенссон

Динамические системы в неразветвленных и тотально разветвленных расширениях p -адического поля

Использована теория локальных полей для изучения специального класса дискретных динамических систем, для которых итерируемая функция – полином, коэффициенты которого принадлежат кольцу целых p -адического поля.

Библиография: 17 наименований.

§ 1. Введение

В последние десять лет к теории динамических систем над полем p -адических чисел проявлялся постоянно растущий интерес (см., например, [1], [2], [4], [12]–[14]), обусловленный исследованиями, проводимыми в областях p -адической математической физики [16], [17], [6] и когнитивных наук [8]. Для получения результатов о p -адических динамических системах часто используется теория чисел (см., например, [9]). В настоящей работе мы будем использовать теорию локальных полей (см., например, [3], [5], [10], [15]) для изучения специального класса динамических систем, для которых итерируемая функция – полином с коэффициентами, лежащими в кольце целых поля p -адических чисел.

§ 2. Обозначения

Всюду далее k – p -адическое поле, т.е. локальное поле характеристики нуля. Локальное поле по определению полно относительно нетривиального дискретного нормирования и имеет конечное поле вычетов.

Обозначим через $|\cdot|$ норму на k и через $\mathfrak{V}_k$ группу значений k , т.е. множество норм всех ненулевых элементов в k . Для заданных $a \in k$ и $r > 0$ будем использовать следующие обозначения:

$$B_r(a, k) = \{x \in k : |x - a| < r\},$$

$$\overline{B}_r(a, k) = \{x \in k : |x - a| \leq r\},$$

$$\overline{S}_r(a, k) = \{x \in k : |x - a| = r\}$$

для открытого, замкнутого шара и сферы соответственно с центром в a и радиусом r . Заметим, что так как нормирование дискретное и, таким образом, неархимедово, то $B_r(a, k)$ и $\overline{B}_r(a, k)$ – одновременно открытые и замкнутые множества в топологии, индуцированной $|\cdot|$, и $S_r(a, k)$ пусто, если $r \notin \mathfrak{V}_k$. Следовательно, если $r \notin \mathfrak{V}_k$ и $s = \max\{\rho \in \mathfrak{V}_k : \rho < r\}$, то $B_r(a, k) = \overline{B}_s(a, k)$.

Кольцо целых в поле k мы будем обозначать через $\mathfrak{o}$ и соответствующий максимальный идеал – через $\mathfrak{p}$. Обозначим через $k_{\mathfrak{p}}$ поле вычетов поля k , т.е. $k_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. Поскольку нормирование дискретное, $\mathfrak{p}$ – главный идеал. Образующая π идеала $\mathfrak{p}$ называется *простым элементом* в поле k . Для каждого простого π элемент $|\pi|$

порождает группу значений $\mathfrak{V}_k$, и, обратно, если $|\pi|$ порождает $\mathfrak{V}_k$ и $|\pi| < 1$, то π порождает $\mathfrak{p}$. Рассмотрим простой элемент π . Каждый ненулевой элемент $a \in k$ может быть записан как $a = u\pi^n$ для некоторой единицы $u \in \mathfrak{o}$, причем n не зависит от π . Назовем n *порядком* $a \in k$ *относительно* π и запишем¹ $n = \text{ord}_\pi(a)$. Все конечные расширения k предполагаются вложенными в фиксированное алгебраическое замыкание K поля k . Если L – конечное расширение k , то нормирование на k может быть продолжено (одним и только одним способом) до нормирования на L (которое мы также будем обозначать через $|\cdot|$) так, что L также будет являться $\mathfrak{p}$ -адическим полем. Используем обозначения $\mathfrak{V}_L$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$ и $L_{\mathfrak{P}}$ для группы значений, кольца целых, максимального идеала и поля вычетов соответственно.

Если F – некоторое поле, мы будем использовать обозначение F^* для его мультипликативной группы. Конечное поле, состоящее из r элементов, где r – степень простого числа, будем обозначать через $\mathbb{F}_r$.

§3. Ветвление

Напомним некоторые понятия и теоремы, связанные с ветвлением конечных расширений $\mathfrak{p}$ -адических полей. Если L – конечное расширение k , то $\mathfrak{V}_k$ – подгруппа в $\mathfrak{V}_L$. Мы используем запись

$$e = e(L/k) = (\mathfrak{V}_L : \mathfrak{V}_k)$$

для так называемого *индекса ветвления* расширения L/k . Более того, поле вычетов $k_{\mathfrak{p}}$ поля k может быть вложено в поле вычетов $L_{\mathfrak{P}}$ поля L . Под относительной степенью расширения L/k мы понимаем число

$$f = f(L/k) = [L_{\mathfrak{P}} : k_{\mathfrak{p}}].$$

Числа e и f связаны друг с другом согласно следующей хорошо известной теореме.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть k – $\mathfrak{p}$ -адическое поле и L – конечное расширение k . Тогда

$$[L : k] = e(L/k)f(L/k).$$

Конечное расширение называется *неразветвленным*, если $e = 1$ (и, таким образом, $f = [L : k]$). С другой стороны, если $e = [L : k]$ (следовательно, $f = 1$), то L/k называется *тотально разветвленным*.

Сформулируем две хорошо известные теоремы, которые описывают, как строить неразветвленные и тотально разветвленные расширения $\mathfrak{p}$ -адического поля k .

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $t(x) \in k_{\mathfrak{p}}[x]$ – неприводимый полином степени n . Предположим, что $\hat{t}(x) \in \mathfrak{o}[x]$ той же степени, что и $t(x)$, и канонически отображается в $t(x)$. Тогда $\hat{t}(x)$ неприводим над k и $L = k[x]/\langle \hat{t}(x) \rangle$ – неразветвленное расширение степени n поля k . Более того, если M – другое неразветвленное расширение степени n , то M изоморфно L .

ТЕОРЕМА 3.3. Предположим, что L/k – тотально разветвленное расширение степени n . Тогда $L = k(\alpha)$ для некоторого корня многочлена Эйзенштейна, т. е. многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in k[x]$$

такого, что $\text{ord}_\pi(a_i) \geq 1$ для любых $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $\text{ord}_\pi(a_0) = 1$.

¹Будем использовать соглашение: $\text{ord}_\pi(0) = \infty$.

Обратно, если $L = k(\beta)$ – расширение k , получаемое присоединением корня β полинома Эйзенштейна степени n из $k[x]$, то L/k – тотально разветвленное накрытие степени n .

Доказательство трех теорем этого параграфа можно найти, например, в [3].

§ 4. О динамических системах

Пусть L – конечное расширение p -адического поля k . Для заданного многочлена $h(x)$ в $k[x]$ мы определяем соответствующую дискретную динамическую систему (или, для краткости, динамическую систему) h на L как отображение $L \ni \beta \rightarrow h(\beta) \in L$.

Если h – динамическая система и α – элемент L , мы определяем последовательность $(\alpha_j)_{j=0}^\infty$ в L рекурсивно:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha, \\ \alpha_j &= h^j(\alpha_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Будем записывать $h^j(\alpha) = \alpha_j$. Здесь h^j может быть интерпретировано как j -кратная итерация отображения h .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть h – динамическая система на L . Тогда $\alpha \in L$ называется *неподвижной точкой* h , если $h(\alpha) = \alpha$. Неподвижная точка α динамической системы h называется:

- (i) *притягивающей* точкой h , если $|h'(\alpha)| < 1$;
- (ii) *безразличной* точкой h , если $|h'(\alpha)| = 1$.

Здесь $h'(x)$ обозначает производную $h(x)$.

Поведение точек в окрестности неподвижной точки описывается следующей теоремой (см. [7]).

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть α – неподвижная точка динамической системы h на L .

- (i) Если α – притягивающая точка, то существует окрестность V точки α такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} h^j(\beta) = \alpha$ для любой $\beta \in V$.
- (ii) Если α – нейтральная точка, то найдется шар $B_r(\alpha, L)$ такой, что каждая сфера $S_\rho(\alpha, L)$, где $\rho < r$, инвариантна относительно динамической системы h , т. е. $h[S_\rho(\alpha, L)] \subseteq S_\rho(\alpha, L)$.

Используя утверждения (i) и (ii) теоремы 4.2, введем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть α – неподвижная точка динамической системы h на L .

- (i) Если α – притягивающая точка, то

$$A(\alpha, L) = \left\{ \beta \in L : \lim_{j \rightarrow \infty} h^j(\beta) = \alpha \right\}$$

называется *притягивающим бассейном* точки α в L относительно h .

- (ii) Если α – нейтральная точка динамической системы h , то шар $B_r(\alpha, L)$ такой, что каждая сфера $S_\rho(\alpha, L)$, для которой $\rho < r$, инвариантна относительно h и называется *диск*ом Зигеля точки α в L относительно h . Объединение всех дисков Зигеля называется *максимальным диском* Зигеля точки α в L относительно h и обозначается $\text{Si}(\alpha, L)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. По определению максимальный диск Зигеля является шаром $B_s(\alpha, L)$ для некоторого $s > 0$, поэтому любое семейство дисков Зигеля $\{B_{r_i}(\alpha, L)\}_{i \in J}$ упорядочено по включению. Однако если $s \notin \mathfrak{V}_L$ и $r = \max\{\rho \in \mathfrak{V}_L : \rho < s\}$, то $\text{Si}(\alpha, L) = \overline{B}_r(\alpha, L)$.

Следующая теорема доказана в [7].

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть h – динамическая система на L и α – неподвижная точка системы h . Пусть r – положительное действительное число.

(i) Если α – притягивающая точка и r удовлетворяет неравенству

$$\max_{n \geq 2} \left(\left| \frac{h^{(n)}(\alpha)}{n!} \right| r^{n-1} \right) < 1, \quad (4.1)$$

то $\overline{B}_r(\alpha, L) \subseteq A(\alpha, L)$. Здесь $h^{(n)}$ – n -я производная h .

(ii) Если α – безразличная точка и r удовлетворяет (4.1), то $\overline{B}_r(\alpha, L) \subseteq \text{Si}(\alpha, L)$.

Поскольку h – динамическая система и $h(x)$ – нормированный полином с коэффициентами в кольце $\mathfrak{o}$ целых поля k , нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 4.6. Пусть $h[x] \in \mathfrak{o}[x]$ – полином степени m и α – некоторый элемент в (расширении) k такой, что $|\alpha| \leq 1$. Предположим, что старший коэффициент $h(x)$ есть единица. В этом случае $r \in \mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенству (4.1) тогда и только тогда, когда $r < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Если неравенство (4.1) выполнено, то

$$\left| \frac{h^{(m)}(\alpha)}{m!} \right| r^{m-1} < 1.$$

Однако $h^{(m)}(\alpha)r^{m-1} = um!$ для некоторой единицы $u \in \mathfrak{o}$. Следовательно, $r < 1$.

($\Leftarrow$) Предположим $r < 1$. Полагая $h(x) = b_mx^m + \dots + b_1x + b_0$, где $|b_m|=1$, находим

$$\frac{h^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{m-n} \frac{(n+i)!}{i!} b_{n+i} \alpha^i = \sum_{i=0}^{m-n} \binom{n+i}{n} b_{n+i} \alpha^i$$

для любого n такого, что $2 \leq n \leq m$. Здесь правая часть целая, значит, имеем

$$\left| \frac{h^{(n)}(\alpha)}{n!} \right| r^{n-1} < \left| \frac{h^{(n)}(\alpha)}{n!} \right| \leq 1,$$

что доказывает лемму.

§ 5. Динамические системы в расширениях полей

Пусть k – p -адическое поле, и предположим, что его поле вычетов имеет характеристику p и содержит p^f элементов.

Всякий раз, когда a принадлежит кольцу целых в p -адическом поле, будем использовать запись $\bar{a}$ для канонического образа a в поле вычетов. Аналогично будем использовать запись $\bar{g}(x)$ для канонического образа полинома, коэффициенты которого целые.

Предположим, что $g(x) \in [o](x)$ – приведенный неприводимый многочлен степени q , q – простое, и положим $L = k(\alpha)$ для некоторого корня α в $g(x)$. Тогда расширение L/k будет либо неразветвленным, либо тотально разветвленным (по теореме 3.1). Далее, множество всех неподвижных точек динамической системы

$$h(x) = x + g(x) \quad (5.1)$$

совпадает с множеством корней многочлена $g(x)$ в L . Наша цель – изучить в расширении поля, содержащем неподвижную точку, характер неподвижных точек h и дать описание соответствующих притягивающих бассейнов или максимальных дисков Зигеля.

5.1. Неразветвленный случай. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $g(x) = x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \dots + a_1x + a_0 \in o[x]$ – неприводимый многочлен простой степени q . Предположим, что $g(x)$ определяет неразветвленное расширение L/k и что $\bar{g}(x) \in k_p[x]$ неприводим. Тогда каждая неподвижная точка $\alpha \in L$ динамической системы (5.1) является притягивающей, если и только если $q = p$, и

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv -1 \pmod{\pi}, \\ a_n &\equiv 0 \pmod{\pi}, \quad n = 2, 3, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Предположим, что α – притягивающая точка. Тогда $|h'(\alpha)| < 1$, откуда следует, что $\bar{h}'(\bar{\alpha}) = 0$ в $L_{\mathfrak{p}}$. Минимальный полином $\bar{\alpha}$ над k_p есть $\bar{g}(x)$, поэтому $\bar{g}(x) | \bar{h}'(x)$. Поскольку $\deg \bar{h}'(x) < \deg \bar{g}(x)$, получаем противоречие, если только $\bar{h}'(x)$ не нулевой полином в $k_p[x]$. Но в этом случае

$$q \equiv (q-1)a_{q-1} \equiv (q-2)a_{q-2} \equiv \dots \equiv 2a_2 \equiv a_1 + 1 \equiv 0 \pmod{\pi},$$

откуда немедленно вытекают равенство $q = p$ и сравнения (5.2).

($\Leftarrow$) Если $q = p$ и сравнения (5.2) справедливы, то все коэффициенты $h(x)$, за исключением старшего, делятся на π и, так как $\deg h(x) = p$, производная многочлена $\bar{h}(x)$ тождественно равна нулю в $k_p[x]$. Это означает, в частности, что $\bar{h}'(\alpha) = 0$ для любой неподвижной точки α динамической системы h , или, другими словами, что $|h'(\alpha)| < 1$. Следовательно, α – притягивающая точка.

В том случае, когда рассматриваемая неподвижная точка – притягивающая, ее притягивающий бассейн можно определить, используя следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.2. Для заданных $a, b \in o$ положим

$$g_{a,b}(x) = x^p + ax + b \in o[x].$$

Предположим, что $a+1$ не является единицей, а $\sum_{j=1}^f b^{p^j-1}$ является единицей. Тогда полином $g_{a,b}(x)$ определяет неразветвленное расширение степени p поля k . Более того, каждая неподвижная точка соответствующей динамической системы

$$h_{a,b}(x) = x + g_{a,b}(x)$$

является притягивающей, и $A(\alpha, L) = B_1(\alpha, L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что $g_{a,b}$ неприводим над полем k всякий раз, когда $a+1$ не является единицей, а $\sum_{j=1}^f b^{p^j-1}$ – единица. Это будет доказано,

если мы покажем, что полином $\bar{g}_{a,b} = x^p - x + \bar{b}$, где $\bar{b} \in k_p^*$ (так как $\bar{b}$ должно быть единицей), неприводим над k_p . Теперь, поскольку k_p изоморфно $\mathbb{F}_{p^f}$, мы найдем, что сумма $\sum_{j=1}^f b^{p^{j-1}}$ (не равная нулю по предположению) есть абсолютный след $\bar{b}$. Таким образом, полином $\bar{g}_{a,b}(x)$ неприводим над k_p (см. [11, с. 120]).

По теореме 3.2 полином $g_{a,b}$ определяет неразветвленное расширение степени p , а из теоремы 5.1 следует, что каждая неподвижная точка соответствующей динамической системы является притягивающей. Поскольку $|\alpha| = 1$ для каждой неподвижной точки α динамической системы $h_{a,b}$, то из теоремы 4.5, (i) и леммы 4.6 следует $B_1(\alpha, L) \subseteq A(\alpha, L)$.

Можно легко показать, что неравенство $|\beta - \alpha| > 1$ влечет $|h_{a,b}(\beta) - \alpha| > |\beta - \alpha|$, следовательно, $\beta \notin A(\alpha, L)$. Таким образом, остается показать, что ни один элемент $S_1(\alpha, L)$ не принадлежит $A(\alpha, L)$. Предположим противное: можно найти элемент $\beta \in S_1(\alpha, L)$ такой, что

$$|h_{a,b}(\beta) - \alpha| < 1.$$

Канонически отображая α и $h_{a,b}(\beta)$ в поле вычетов $L_{\mathfrak{p}}$, получим условия $\bar{\beta} \neq \bar{\alpha}$ и $\bar{h}_{a,b}(\bar{\beta}) = \bar{\alpha}$. Однако отображение $L_{\mathfrak{p}}$ в себя, переводящее x в элемент $\bar{h}_{a,b}(x) = x^p + \bar{b}$, взаимно однозначно. Таким образом, ни один элемент $S_1(\alpha, L)$ не принадлежит $A(\alpha, L)$. Теорема доказана.

5.2. Тотально разветвленный случай. Сформулируем лемму, которая будет использоваться при доказательстве основного результата настоящего пункта.

ЛЕММА 5.3. Пусть m и n – положительные целые числа, и пусть $r = p^m$ для некоторого простого числа p . Тогда полином $x^n + 1$ имеет корень в $\mathbb{F}_r$, если и только если $(r-1)/(n, r-1)$ – четное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathbb{F}_r$ – поле разложения $x^{r-1} - 1$ над $\mathbb{F}_p$, полином $x^n + 1$ имеет корень в $\mathbb{F}_r$ тогда и только тогда, когда результат этих двух полиномов равен нулю. Это доказывает лемму, так как результат есть $(-1)^{r-1}((-1)^{(r-1)/d} - 1)^d$, где $d = (n, r-1)$.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть q – простое число. Предположим, что

$$g(x) = x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathfrak{o}[x] \quad (5.3)$$

определяет тотально разветвленное накрытие L/k степени q . Пусть α – неподвижная точка динамической системы $h(x) = x + g(x)$. Тогда α – безразличная точка и ее максимальным диском Зигеля $\text{Si}(\alpha, L)$ является шар $B_{|\pi|^{-1/q}}(\alpha, L)$ тогда и только тогда, когда p^f и $(p^f - 1)/(q - 1, p^f - 1)$ – нечетные числа, и является шар $B_1(\alpha, L)$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $g(x)$ неприводим. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\pi | a_0$. Поскольку $g(x)$ неприводим, каждое a_i делится на π . Частным случаем таких полиномов являются полиномы Эйзенштейна (см. теорему 3.3). Более того, если α – нуль полинома $g(x)$ и, следовательно, является неподвижной точкой $h(x)$, то $|\alpha| < 1$. Значит, α – безразличная точка, так как

$$|h'(\alpha)| = |1 + a_1 + 2a_2\alpha + 3a_3\alpha^2 + \dots + q\alpha^{q-1}| = 1.$$

Докажем, что максимальным диском Зигеля точки α относительно h является шар $B_{|\pi|^{-1/q}}(\alpha, L)$. Выберем $\rho \in \mathfrak{V}_L$ такое, что $\rho < |\pi|^{-1/q}$. Так как L/k –

тотально разветвленное расширение степени q , группа значений $\mathfrak{V}_L$ есть циклическая группа $\langle |\pi|^{-1/q} \rangle = \{|\pi|^{i/q} : i \in \mathbb{Z}\}$, и мы можем предположить, что $\rho < 1$ (см. замечание 4.4).

Из теоремы 4.5, (ii) и леммы 4.6 следует, что $S_\rho(\alpha, L)$ инвариантна относительно h , если $\rho < 1$.

Случай, когда $\rho = 1$, должен быть рассмотрен отдельно, т.е. мы должны выяснить, принадлежит ли $h(\beta)$ сфере $S_1(\alpha, L)$, если $\beta \in S_1(\alpha, L)$. Мы изучаем каноническую последовательность $(\bar{\beta}_j)_{j=0}^\infty$ в поле вычетов $L_{\mathfrak{P}}$. Поскольку мы рассматриваем тотально разветвленное расширение, то $L_{\mathfrak{P}}$ изоморфно k_p . Более того, $\bar{h}(x) = x^q + x \in k_p[x]$. Если $|\beta - \alpha| = 1$, то $\bar{\beta} \neq \bar{\alpha} = 0$ в k_p . Отсюда вытекает, что $\beta \notin \text{Si}(\alpha, L)$ тогда и только тогда, когда $\bar{h}(\beta) = 0$, но $\bar{h}(\beta) = \bar{\beta}^q + \bar{\beta}$, и так как $\bar{\beta} \neq 0$, мы получаем, что $h(\beta) \notin S_1(\alpha, L)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\beta} \in k_p^* - \text{корень многочлена } x^{q-1} + 1 \in k_p[x]$. Так как k_p изоморфно $\mathbb{F}_{p^f}$, такой корень существует, если p^f четно. Если p^f нечетно, то такой нуль существует тогда и только тогда, когда $(p^f - 1)/(q - 1, p^f - 1)$ – нечетное число в соответствии с леммой 5.3.

Очевидно, не существует инвариантных относительно h сфер $S_\rho(\alpha, L)$ таких, что $\rho \in \mathfrak{V}_L$ и $\rho \geq |\pi|^{-1/q}$. Это завершает доказательство теоремы в рассматриваемом случае.

2. Пусть $\pi \nmid a_0$. В этом случае α есть единица в $\mathfrak{O}$ – кольце целых в L . Другими словами, $|\alpha| = 1$. Это означает, что существует единственное представление α :

$$\alpha = \zeta \eta, \quad (5.4)$$

где $\zeta \in \mathfrak{o} - (p^f - 1)$ -й корень из единицы и $\eta \in 1 + \mathfrak{P}$. Минимальный многочлен η над $\mathfrak{o}$ есть

$$m(x) = x^q + \zeta^{-1} a_{q-1} x^{q-1} + \dots + \zeta^{-q+1} a_1 x + \zeta^{-q} a_0. \quad (5.5)$$

Если мы зафиксируем простое Π в L (т.е. образующую идеала $\mathfrak{P}$), то можно при некотором $\gamma \in \mathfrak{O}$ выписать следующее представление:

$$\eta = 1 + \gamma \Pi. \quad (5.6)$$

Минимальный многочлен $s[x]$ элемента $\gamma \Pi$ имеет степень q и $m(x) = s(x - 1)$. Однако

$$s(x - 1) = x^q + \frac{s^{(q-1)}(-1)}{(q-1)!} x^{q-1} + \dots + s'(-1) x + s(-1),$$

откуда с учетом соотношения (5.5) получим

$$a_i = \frac{\zeta^{q-i} s^{(i)}(-1)}{i!}$$

для любого i . Положим

$$s(x) = x^q + b_{q-1} x^{q-1} + b_{q-2} x^{q-2} + \dots + b_1 x + b_0$$

для некоторых $b_i \in \mathfrak{o}$. Тогда мы найдем, что, так как $|\gamma \Pi| \leq |\pi| < 1$, каждое b_i делится на π . Следовательно, $\bar{s}(x) = x^q \in k_p[x]$ и, таким образом,

$$\bar{s}^{(i)}(-1) = \frac{q!}{(q-i)!} (-1)^{q-i},$$

откуда следует

$$\bar{h}(x) = \sum_{i=0}^q \binom{q}{i} (-\bar{\zeta})^{q-i} x^i = (x - \bar{\zeta})^q.$$

Значит,

$$\bar{h}'(\bar{\alpha}) = 1 + q(\bar{\alpha} - \bar{\zeta})^{q-1}.$$

Однако вследствие (5.4) и (5.6) $\bar{\alpha} = \bar{\zeta}$ в k_p . Следовательно, $\bar{h}'(\alpha) \neq 0$, а значит, α – нейтральная точка.

Используя теорему 4.5, (ii) и лемму 4.6, мы найдем, что каждая сфера $S_\rho(\alpha, L)$ при $\rho < 1$ инвариантна относительно h и при $\rho \geq |\pi|^{-1/q}$ не инвариантна.

Случай, когда $\rho = 1$, также должен быть рассмотрен отдельно. Пусть β – элемент $S_1(\alpha, L)$. Поскольку $\bar{h}(\beta) = \bar{\beta} + (\bar{\beta} - \bar{\alpha})^q$, мы найдем, что $\bar{\beta} \neq \bar{\alpha}$ и $\bar{h}(\beta) = \bar{\alpha}$ тогда и только тогда, когда $(\bar{\beta} - \bar{\alpha})^{q-1} = -1$. Далее рассуждения аналогичны рассуждениям, использованным в случае 1. Таким образом, в этом случае мы можем сделать такое же заключение об устройстве максимального диска Зигеля, какое мы сделали в случае 1.

Выражаю благодарность научному руководителю профессору А. Хренникову за руководство и консультации, а также благодарю К.-О. Линдала, М. Нильссона, Р. Найквиста из университета Векши за плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. Альбеверио С., Кледен П. К., Хренников А. Ю. Память человека как p -адическая динамическая система // ТМФ. 1998. Т. 117. №3. С. 385–396.
2. Arrowsmith D. K., Vivaldi F. Geometry of p -adic sigel discs // Physica D. 1994. V. 71. P. 222–236.
3. Artin E. Algebraic numbers and algebraic functions. N. Y. –L.–Paris: Gordon and Breach Science Publishers, 1967.
4. Benedetto R. Hyperbolic maps in p -adic dynamics // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2001. V. 21. P. 1–11.
5. Cassels J. W. S. Local fields. Cambrige: Cambrige Univ. Press, 1986.
6. Khrennikov A. p -adic valued distributions in mathematical physics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
7. Khrennikov A. Non-archimedian analysis: Quantum paradoxes, dynamical systems and biological models. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
8. Khrennikov A. Human subconscious as a p -adic dynamical system // J. Theor. Biology. 1998. V. 193. P. 179–196.
9. Khrennicov A., Nilson M. On the number of cycles of p -adic dynamical systems // J. number theory. 2001. V. 90. № 2. P. 255–264.
10. Lang S. Algebraic number theory. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
11. Lidl R., Niederreiter H. Introduction to finite fields and their applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
12. Lindahl K.-O. On markovian properties of the dynamical systems over p -adic numbers // Reports from Växjö University. 1999. V. 8.
13. Nilsson M. Cycles of monomial and perturbed monomial p -adic dynamical systems // Ann. Math. Blaise Pascal. 2000. V. 7. № 1.
14. Nyqvist R. Dynamical systems in finite field extension of p -adic numbers // Reports from Växjö University. 1999. V. 12.
15. Serre J.-P. Local fields. Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
16. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. p -адический анализ и математическая физика. М.: Физматлит, 1994.
17. Volovich I. V. p -adic string // Class. Quant. Grav. 1987. № 4. P. 83–87.

School of Mathematics and System Engineering
Växjö University
E-mail: Per-Anders.Svensson@msi.vxu.se

Поступило в редакцию
17.12.2003

Перевод с английского Д. В. Прохоренко