Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Фрактальные кривые и всплески, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 5, 123–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/im674>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:16:14

УДК 517.51

В. Ю. Протасов

Фрактальные кривые и всплески

Вводится понятие суммируемой фрактальной кривой (порожденной конечным семейством аффинных операторов), которое обобщает известные понятия аффинных фракталов и непрерывных фрактальных кривых на случай несжимающих операторов. Доказаны критерий существования фрактальной кривой у данного семейства операторов и критерии ее принадлежности различным пространствам функций. Получены формулы для показателей гладкости в этих пространствах, а также асимптотически точные оценки на модули непрерывности. Данные результаты применены к исследованию известных кривых (Кох, де Рама и т. д.), масштабирующих функций и всплесков. Исследуется локальное поведение непрерывных фрактальных кривых. Получена формула для показателя локальной гладкости в произвольной точке и охарактеризованы множества точек с заданной локальной гладкостью. Показано, что для любой фрактальной кривой значения ее локальной гладкости заполняют определенный отрезок. Однако почти во всех точках (в мере Лебега) гладкость одна и та же и вычисляется с помощью показателя Ляпунова данных операторов. Разработанная техника применяется к исследованию масштабирующих функций и всплесков с компактным носителем. В качестве примера вычислены модули непрерывности некоторых всплесков Добеши, показатели их локальной гладкости и гладкости в пространствах L_p .

Библиография: 47 наименований.

§ 1. Введение

Фрактальные кривые как самостоятельный объект вошли в математику начиная с классических работ [1]–[5]. Если дано конечное число сжимающих аффинных операторов $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_m$, действующих в $\mathbb{R}^n$, то существует единственный компакт $K \subset \mathbb{R}^n$, обладающий свойством самоподобия $K = \bigcup_{i=1}^m \tilde{B}_i K$ и называемый *фракталом* данных операторов [6]. При некоторых условиях налагаемых на неподвижные точки операторов $\tilde{B}_i$ (условия Барнсли [4]), фрактал K может быть параметризован непрерывной кривой $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, образ которой совпадает с K . По определению непрерывная фрактальная кривая $v(x)$ является решением уравнения

$$v(x) = \tilde{B}_i v(mx - i), \quad x \in \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m} \right], \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Классические примеры: сингулярная функция Кантора (“канторова лестница”), кривая Кох (“снежинка”), кривые де Рама, биномиальные кривые. Каждая из этих кривых порождена своим набором аффинных операторов. Впоследствии непрерывные фрактальные кривые нашли множество применений

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00066) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-5813.2006.1).

в теории функций, теории вероятностей, эргодической теории, компьютерном дизайне и т. д. [7]–[16]. Определения общих фрактальных кривых (соответствующих произвольному набору сжимающих аффинных операторов, удовлетворяющему условию Барнсли) и их исследования появились в [4] и [5]. В конце 1980-х годов выяснилась связь фрактальных кривых с теорией всплесков и масштабирующих функций, а также с теорией уточняющих алгоритмов, что вызвало большой интерес к систематическим исследованиям фрактальных кривых. В работах [8], [9] были получены оценки сверху на показатель гладкости (показатель Гёльдера в пространстве $C[0, 1]$) для фрактальных кривых. Это позволило вывести точную формулу для показателя Гёльдера масштабирующих функций и всплесков [17], [18], а также условия на их дифференцируемость [8], [14]. Методы исследования были обобщены в работах [19], [20], где были получены формулы гладкости всплесков и масштабирующих функций в пространствах $L_p[0, 1]$, но уже без связи с фрактальными кривыми. Эти результаты касались частного случая линейных операторов, связанных с масштабирующими уравнениями и задаваемых специальными матрицами (так называемыми *теплицевыми матрицами*). Возникает вопрос: нельзя ли вернуться от теории всплесков и масштабирующих функций обратно к общим фрактальным кривым и распространить разработанные методы на широкий класс функций, порожденных аффинными операторами? Для этого необходимо прежде всего обобщить понятие аффинного фрактала на несжимающие операторы. Перед формулировкой результатов условимся о некоторых обозначениях.

Через $\mathbb{R}^n$ обозначим n -мерное линейное пространство, через $\|\cdot\|$ – евклидову норму в $\mathbb{R}^n$, через $C[0, 1]$ – пространство непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ и через $L_p[0, 1]$ – пространство функций $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|v\|_p = [\int_0^1 \|v(x)\|^p dx]^{1/p}$ для $p \in [1, +\infty)$ и $\|v\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x \in [0, 1]} \|v(x)\|$, где esssup – существенная верхняя грань.

Аффинные операторы в $\mathbb{R}^n$ обозначим прописными буквами с волной, их линейные части (соответствующие линейные операторы) – теми же буквами без волны. Таким образом, аффинному оператору $\tilde{A}$ соответствует линейный оператор A . Матрицы линейных операторов будем обозначать так же, как и операторы.

Чтобы не перегружать изложение, мы будем рассматривать лишь семейства из двух операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$, все результаты без изменений переносятся на случай произвольного конечного семейства. Также мы ограничимся пространствами L_p при $p \geq 1$, хотя аналоги получаемых ниже результатов верны и для $p \in (0, 1)$.

Для данных операторов B_0, B_1 и данного k обозначим через Π_k любое произведение этих операторов, содержащее k сомножителей: $\Pi_k = B_{d_1} \cdots B_{d_k}$, $d_i \in \{0, 1\}$. Произведения аффинных операторов обозначим $\tilde{\Pi}_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Фрактальной кривой аффинных операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ называется суммируемая функция $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая уравнению*

$$v(x) = \tilde{B}_i v(2x - i), \quad x \in \left[\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}\right], \quad i = 0, 1, \quad (1)$$

почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

Таким образом, под фрактальной кривой мы будем понимать суммируемое решение уравнения (1). В § 3 докажем теорему о существовании и единственности решения. Теорема 1 дает критерий существования фрактальной кривой у данной пары операторов, критерий принадлежности кривой пространству L_p , а также доказывает, что фрактальная кривая (если существует) единственна. Критерий существования формулируется в терминах так называемого p -радиуса ρ_p операторов B_0, B_1 . Он, в частности, допускает, что операторы не являются сжимающими ни в какой норме в $\mathbb{R}^n$. Поэтому определение 1 можно рассматривать как обобщение понятия аффинного фрактала на несжимающие операторы. В случае существования нормы, в которой оба оператора сжимающие, их фрактал K является образом фрактальной кривой $v \in L_\infty$, а при выполнении условия Барнсли – непрерывной кривой v (§ 5).

Перед доказательством теоремы 1 мы установим (§ 2) несколько вспомогательных утверждений об асимптотике усредненной l_p -нормы для орбиты произвольной точки $u \in \mathbb{R}^n$ под действием двух линейных операторов. Эти результаты позволят получить формулу для гладкости произвольной фрактальной кривой во всех пространствах L_p , включая L_∞ , а также оценки на модули непрерывности в этих пространствах (теорема 2). При этом оценки на модули непрерывности являются асимптотически точными.

Далее мы сосредоточим свое внимание на непрерывных фрактальных кривых. В § 7 изучается их локальное поведение. Будет получена формула для локальной гладкости в каждой точке $x \in [0, 1]$ (теорема 4), которая особенно проста в применении для рациональных x . В § 8 будут охарактеризованы множества точек заданной локальной гладкости. В частности, будет показано, что значения локальной гладкости заполняют определенный отрезок, для каждого числа из этого отрезка множество точек, в которых локальная гладкость равна этому числу, всюду плотно на $[0, 1]$. Оно имеет меру нуль для всех чисел, кроме одного, называемого *средней гладкостью*. Таким образом, гладкость фрактальной кривой почти в каждой точке одна и та же и равна средней гладкости. Средняя гладкость вычисляется с помощью показателя Ляпунова данных операторов (теорема 5).

В § 10 изучаются гладкие фрактальные кривые. Охарактеризованы фрактальные кривые, принадлежащие пространствам C^l и W_p^l , а также доказана следующая альтернатива: либо гладкость фрактальной кривой в $\mathbb{R}^n$ строго больше n , либо это – полиномиальная кривая степени n .

В § 9, 11, 12 рассмотрены применения полученных результатов к конкретным фрактальным кривым, масштабирующим функциям и всплескам. Примеры разделяются на две категории: одни строятся искусственно для того, чтобы показать неулучшаемость критериев или точность асимптотики (примеры 1–3 и 7–10), в других мы рассматриваем известные фрактальные кривые (биномиальные кривые, кривые Кох и де Рама, всплеск-функции Добеши) и применяем к ним полученные результаты для вычисления показателей гладкости в L_p , модулей непрерывности и исследования локальной гладкости. В § 11 разработанная техника применяется к масштабирующим функциям, а в § 12 – к всплескам с компактным носителем. В примерах 11–13 мы рассматриваем наиболее известные и хорошо изученные всплеск-функции Добеши. Детальный анализ этих функций проводился во многих работах, в том числе в [7], [8], [17], [21], [22]. Мы добавляем к известным результатам оценку модулей непрерывности, показатели локальной гладкости и гладкости в пространствах L_p .

Доказательства некоторых теорем и лемм, в особенности длинные или технически сложные, перенесены из основного текста в приложение (§ 13).

§ 2. Асимптотика орбиты линейных операторов и p -радиус

Рассмотрим произвольные линейные операторы B_0, B_1 , действующие в $\mathbb{R}^n$. Для любой точки $u \in \mathbb{R}^n$ и любого $k \geq 1$ множество $\{\Pi_k u \mid d_1, \dots, d_k \in \{0, 1\}\}$, содержащее 2^k точек, назовем *орбитой* точки u . Здесь и далее $\Pi_k = B_{d_1} \cdots B_{d_k}$. Через $\|\Sigma_k(u)\|_p = \|\Sigma_k(B_0, B_1, u)\|_p$ обозначим величину $[2^{-k} \sum_{d_1, \dots, d_k} \|\Pi_k u\|^p]^{1/p}$, где $p \in [1, +\infty]$, с естественными изменениями в случае $p = \infty$. Таким образом, $\|\Sigma_k(u)\|_p$ – это усредненная по норме l_p длина элементов орбиты. В частности, $\|\Sigma_k(u)\|_1$ – среднее арифметическое длин векторов $\Pi_k u$, $\|\Sigma_k(u)\|_2$ – среднее квадратическое, а $\|\Sigma_k(u)\|_\infty = \max_{d_1, \dots, d_k} \|\Pi_k u\|$. Обозначим также через $\|\Sigma_k\|_p = \|\Sigma_k(B_0, B_1)\|_p$ величину $[2^{-k} \sum_{d_1, \dots, d_k} \|\Pi_k\|^p]^{1/p}$ – усредненную в l_p норму всевозможных произведений операторов B_0, B_1 длины k . В частности, $\|\Sigma_k\|_\infty$ – наибольшая из норм таких произведений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для данного $p \in [1, +\infty]$ p -радиусом линейных операторов B_0, B_1 называется величина $\rho_p = \rho_p(B_0, B_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Sigma_k\|_p^{1/k}$.

Для любых операторов предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Sigma_k\|_p^{1/k}$ существует и не зависит от выбора нормы в $\mathbb{R}^n$ [27]. Если $B_0 = B_1 = B$, то $\rho_p(B_0, B_1) = \rho(B)$, где $\rho(B)$ – спектральный радиус оператора B , т. е. максимальный модуль его собственных значений. Для данных операторов их p -радиус является неубывающей функцией от p . Более того, функция $f(x) = \rho_{1/x}$ на отрезке $[0, 1]$ является вогнутой по x [22].

Величину ρ_∞ называют также *совместным спектральным радиусом*. Первым из терминов появился именно “совместный спектральный радиус” в небольшой работе [23] в 1960 г. На произвольные $p \in [1, +\infty]$ это понятие обобщено в 1995 г. в работе [19]. Существует несколько алгоритмов приближенного вычисления ρ_∞ для данной пары операторов [8], [25], [26] и вычисления ρ_p для произвольного p [27]. Для целых четных значений p , начиная с $p = 2$, величина ρ_p вычисляется как (обычный) спектральный радиус некоторого конечномерного оператора [27], [28]. Краткий исторический комментарий содержится в замечании 4.

Для любого p выполняется двойное неравенство $2^{-1/p} \rho_\infty \leq \rho_p \leq \rho_\infty$. Несложно показать, что $[\rho(\Pi_k)]^{1/k} \leq \rho_\infty$ для любого произведения Π_k . Оказывается, что

$$\max_{d_1, \dots, d_k} [\rho(\Pi_k)]^{1/k} \rightarrow \rho_\infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty$$

(см. [24]). Геометрический смысл p -радиуса проясняет следующее свойство, доказанное в [24] для $p = \infty$ и обобщенное на все $p \in [1, +\infty]$ в [27].

ЛЕММА 1. Для произвольных линейных операторов B_0, B_1 следующие свойства эквивалентны:

- 1) $\rho_p < 1$;
- 2) существует норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$, для которой

$$\sup_{\|u\|=1} \left[\frac{1}{2} (\|B_0 u\|^p + \|B_1 u\|^p) \right]^{1/p} < 1$$

(с естественным изменением в случае $p = \infty$).

В частности, $\rho_\infty < 1$ тогда и только тогда, когда найдется норма в $\mathbb{R}^n$, в которой оба оператора B_0, B_1 сжимающие.

Кроме того, p -радиус операторов является показателем асимптотического роста величины $\|\Sigma_k(u)\|_p$ с ростом k . Если пара линейных операторов B_0, B_1 неприводима в $\mathbb{R}^n$, т.е. операторы не имеют общих инвариантных линейных нетривиальных (отличных от $\{0\}$ и $\mathbb{R}^n$) подпространств, то имеет место следующий факт, доказанный в работе [26].

ЛЕММА 2. *Для неприводимой пары линейных операторов и для любого $p \in [1, +\infty]$ существуют константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что для любого $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$, выполнено*

$$c_1(\rho_p)^k \leq \|\Sigma_k(u)\|_p \leq c_2(\rho_p)^k.$$

Таким образом, для неприводимой пары линейных операторов величина $\|\Sigma_k(u)\|_p$ асимптотически эквивалентна $(\rho_p)^k$ при $k \rightarrow \infty$. Для приводимой пары операторов это, вообще говоря, неверно. Величина $\|\Sigma_k(u)\|_p$ может расти быстрее, чем $(\rho_p)^k$, кроме того, она может иметь разный порядок роста для разных векторов u . Соответствующие примеры элементарны. Чтобы оценить величину $\|\Sigma_k(u)\|_p$ для произвольной пары операторов, нам понадобится ввести несколько обозначений.

Любая пара линейных операторов B_0, B_1 в подходящем базисе имеет блочную нижнетреугольную форму:

$$B_i = \begin{pmatrix} B_i^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & B_i^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & \cdots & * & B_i^l \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \quad (2)$$

где каждая пара матриц $\{B_0^k, B_1^k\}$ неприводима. Положим $\rho_{p,k} = \rho_p(B_0^k, B_1^k)$ и назовем *валентностью* пары операторов B_0, B_1 количество пар $\{B_0^k, B_1^k\}$, для которых $\rho_{p,k} = \max_{j=1, \dots, l} \rho_{p,j}$. Валентность, вообще говоря, зависит от p . Количество блоков l и их размерности определены однозначно с точностью до перестановки, а матрицы B_i^k – с точностью до подобия (перехода к другому базису в $\mathbb{R}^n$). Поэтому величины $\rho_{p,j}$ и валентность s корректно определены для любых операторов и для любого $p \in [1, +\infty]$.

ЛЕММА 3. *Для любых операторов B_0, B_1 и для любого $p \in [1, +\infty]$ имеем $\rho_p = \max_{k=1, \dots, l} \rho_{p,k}$, где $\rho_{p,k}$ – p -радиусы блоков B_0^k, B_1^k разложения (2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для случая $p = \infty$ содержится в работе [17], для конечных p – в [27].

Теперь мы можем обобщить лемму 2 на произвольные пары операторов. Для любого $u \in \mathbb{R}^n$ обозначим через V_u наименьшее по включению общее собственное линейное подпространство операторов B_0, B_1 , содержащее u .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любых операторов B_i , $i = 0, 1$, для любого $p \in [1, +\infty]$ и для любого $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = 1$, существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что*

$$c_1(\rho_p)^k \leq \|\Sigma_k(u)\|_p \leq c_2 k^{s-1} (\rho_p)^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где ρ_p – p -радиус операторов $B_0|_{V_u}, B_1|_{V_u}$, s – их валентность. При этом существует общая константа c_2 для всех векторов из подпространства V_u .

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой пары операторов и для любого $p \in [1, +\infty]$ существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что

$$c_1(\rho_p)^k \leq \|\Sigma_k\|_p \leq c_2 k^{s-1}(\rho_p)^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

где s – валентность данных операторов.

Доказательства предложения 1 и следствия 1 см. в приложении (§ 13).

§ 3. Существование и единственность фрактальной кривой

Мы сформулируем и докажем основную теорему в предположении, что пара аффинных операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ неприводима, т. е. $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ не имеют общих инвариантных аффинных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Далее будет показано, что это предположение не ограничивает общности (замечание 1). Заметим, что из неприводимости аффинных операторов не следует неприводимость их линейных частей.

ТЕОРЕМА 1. Неприводимая пара аффинных операторов имеет фрактальную кривую $v(x)$ тогда и только тогда, когда $\rho_1 < 1$. Эта кривая единственна. Если для некоторого $p \in [1, +\infty]$ имеем $\rho_p < 1$, то $v \in L_p$. При $p < \infty$ верно и обратное: если $v \in L_p$, то $\rho_p < 1$. При $p = \infty$ из $v \in L_\infty$ следует, что $\rho_\infty \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что через B_0, B_1 обозначаются линейные части аффинных операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ соответственно. Если $\rho_p < 1$, то согласно лемме 1 существует норма в $\mathbb{R}^n$, в которой

$$\sup_{\|u\|=1} \left[\frac{1}{2} (\|B_0 u\|^p + \|B_1 u\|^p) \right]^{1/p} < 1.$$

Тогда оператор $\tilde{B}$, задаваемый формулой

$$[\tilde{B}f](x) = \tilde{B}_i f(2x - i), \quad x \in \left[\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2} \right], \quad i = 0, 1, \quad (5)$$

является сжимающим в пространстве $L_p[0, 1]$ и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку.

Осталось доказать обратное: если $v \in L_p$, то $\rho_p < 1$. Положим $c = \int_0^1 v(x) dx$, $a = \tilde{B}_1 c - \tilde{B}_0 c$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{1-2^{-k}} \|v(x+2^{-k}) - v(x)\|^p dx &\geq \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \int_{2^{-k+1}j}^{2^{-k+1}j+2^{-k}} \|v(x+2^{-k}) - v(x)\|^p dx \\ &= 2^{-k+1} \sum_{d_1, \dots, d_{k-1}} \int_0^{1/2} \left\| B_{d_1} \cdots B_{d_{k-1}} \left(v\left(x + \frac{1}{2}\right) - v(x) \right) \right\|^p dx \\ &\geq 2^{-k+1} \sum_{d_1, \dots, d_{k-1}} 2^{p-1} \left\| \int_0^{1/2} B_{d_1} \cdots B_{d_{k-1}} \left(v\left(x + \frac{1}{2}\right) - v(x) \right) dx \right\|^p \\ &= 2^{-k} \sum_{d_1, \dots, d_{k-1}} 2^{p-1} \|B_{d_1} \cdots B_{d_{k-1}} (\tilde{B}_1 c - \tilde{B}_0 c)\|^p = 2^{p-2} \|\Sigma_{k-1}(a)\|_p^p. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|v(\cdot + 2^{-k}) - v(\cdot)\|_p \geq 2^{(p-2)/p} \|\Sigma_{k-1}(a)\|_p$. При фиксированном k в этом неравенстве можно перейти к пределу при $p \rightarrow \infty$, получив, что оно верно и для $p = \infty$. Теперь заметим, что аффинное подпространство $\tilde{V} = c + V_a$ инвариантно относительно операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$. В самом деле, $\tilde{B}_i c = c + (-1)^{i+1} \frac{1}{2} a \in \tilde{V}$, $i = 0, 1$. Но так как эта пара неприводима, то $V_a = \mathbb{R}^n$. Теперь применяем предложение 1:

$$\|v(\cdot + 2^{-k}) - v(\cdot)\|_p \geq C(\rho_p)^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

для любого $p \in [1, +\infty]$, где константа $C > 0$ не зависит от k . Поскольку при $v \in L_p$, $p < \infty$, левая часть неравенства (6) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то $\rho_p < 1$. При $p = \infty$ левая часть ограничена при $k \rightarrow \infty$, поэтому $\rho_\infty \leq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Фактически, в доказательстве теоремы 1 мы не пользовались неприводимостью операторов, а пользовались более слабым предположением: операторы $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ не имеют общего инвариантного аффинного подпространства, отличного от всего $\mathbb{R}^n$ и содержащего точку $c = \int_0^1 v(x) dx$.

Тем не менее, изучение фрактальных кривых произвольной пары аффинных операторов сводится к изучению случая неприводимой пары. Пусть $v(x)$ – фрактальная кривая операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$. Обозначим через $\tilde{V}$ наименьшее по включению аффинное подпространство, инвариантное относительно обоих операторов и содержащее вектор c . Докажем, что $v(x) \in \tilde{V}$ для почти всех $x \in [0, 1]$. Для этого возьмем произвольный двоичный интервал $\Delta = [2^{-k}r, 2^{-k}(r+1)]$, $0 \leq r \leq 2^k - 1$, и обозначим через $|\Delta| = 2^{-k}$ его длину. Из соотношения (1) следует, что

$$\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} v(x) dx = \tilde{B}_{d_1} \cdots \tilde{B}_{d_k} c,$$

где $r = \sum_{j=0}^{k-1} d_j 2^j$. Таким образом, $\frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} v(x) dx \in \tilde{V}$ для любого двоичного интервала Δ , следовательно, $v(x) \in \tilde{V}$ для почти всех x . Поэтому можно было сразу рассматривать ограничения операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ на подпространство $\tilde{V}$. Остается показать, что на этом подпространстве данная пара операторов неприводима. Пусть, напротив, операторы имеют инвариантное аффинное подпространство $\tilde{V}_0$, лежащее в $\tilde{V}$ и не совпадающее с ним. Тогда $c \notin \tilde{V}_0$. Не ограничивая общности, считаем, что $\tilde{V}_0$ – наименьшее по включению общее инвариантное подпространство. 1-радиус ρ_1 операторов B_0, B_1 на пространстве V по теореме 1 меньше единицы, значит, и на пространстве V_0 он также меньше единицы. Тогда операторы имеют фрактальную кривую в пространстве $\tilde{V}_0$, причем она отлична от v , поскольку $c \notin \tilde{V}_0$. Но это противоречит единственности фрактальной кривой в пространстве $\tilde{V}$.

Итак, пара операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ неприводима на $\tilde{V}$. Поэтому, ограничив при необходимости данные операторы на подпространство $\tilde{V}$, получаем фрактальную кривую, порожденную неприводимой парой операторов. Изучение произвольных фрактальных кривых сводится таким образом к случаю неприводимой пары операторов. Везде далее, если не оговорено обратное, будем считать, что пара операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ неприводима.

§ 4. Гладкость и модули непрерывности в L_p

Модулем непрерывности функции $v \in L_p[0, 1]$ в пространстве L_p , где $p \in [1, +\infty]$, называется величина

$$\omega(v, t)_p = \sup_{h \in [0, t]} \|v(\cdot + h) - v(\cdot)\|_p,$$

где

$$\|v(\cdot + h) - v(\cdot)\|_p = \left(\int_0^{1-h} \|v(x+h) - v(x)\|^p dx \right)^{1/p}$$

с естественным изменением в случае $p = +\infty$. Функция $\omega(v, t)_p$ определена в окрестности нуля $t \in [0, \varepsilon)$, $\varepsilon < 1$, и является неубывающей от t . Она обращается в нуль в точке $t = 0$, а при $p < \infty$ является непрерывной от t . Функция $\omega(v, t)_\infty$ непрерывна от t тогда и только тогда, когда $v \in C[0, 1]$.

Показателем Гёльдера функции $v \in L_p[0, 1]$ в пространстве L_p , $p \in [1, +\infty]$, называется величина

$$\alpha_{v,p} = \sup\{\alpha \mid \omega(v, t)_p \leq Ct^\alpha, t \geq 0\}.$$

Если $\alpha_{v,p} > 1$, то v является тождественной константой, т.е. $v(x) = c$ почти всюду, $c \in \mathbb{R}^n$. Если фрактальная кривая равна тождественной константе, то соответствующая точка c будет общим собственным подпространством операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$. Поскольку мы рассматриваем только неприводимые пары операторов (замечание 1), это возможно только в нульмерном случае, когда $n = 0$. Этот тривиальный случай мы рассматривать не будем. Таким образом, показатель Гёльдера фрактальных кривых не превосходит единицы.

Аффинные операторы $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ удовлетворяют *перекрестному условию*, если существуют точки $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^n$ такие, что $\tilde{B}_i v_i = v_i$, $i = 0, 1$, и

$$\tilde{B}_0 v_1 = \tilde{B}_1 v_0. \quad (7)$$

В частности, если $\rho_\infty < 1$, то оба оператора в некоторой норме сжимающие (лемма 1) и, следовательно, имеют по единственной неподвижной точке. Соотношение (7) является в этом случае условием на данные неподвижные точки. Так, например, если $\rho_p < 2^{-1/p}$ при некотором p , то $\rho_\infty < 1$ и каждый оператор $\tilde{B}_i$ имеет единственную неподвижную точку v_i , $i = 0, 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $v \in L_p$ – фрактальная кривая операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$, $p \in [1, +\infty]$; тогда если $\rho_p \geq 2^{-1/p}$ или если операторы удовлетворяют условию (7), то $\alpha_{v,p} = -\log_2 \rho_p$, в противном случае $\alpha_{v,p} = \frac{1}{p}$. Модуль непрерывности $\omega(v, t)_p$ удовлетворяет оценке

$$C_1 t^\alpha \leq \omega(v, t)_p \leq C_2 |\ln t|^{s-1+i} t^\alpha, \quad t > 0, \quad (8)$$

где $\alpha = \alpha_{v,p}$; s – валентность операторов B_0, B_1 ; $i = 1$, если $\rho_p = 2^{-1/p}$ и операторы не удовлетворяют (7), и $i = 0$ в противном случае.

Доказательство см. в приложении (§ 13).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в условиях теоремы 2 валентность равна 1 (в частности, если пара линейных операторов B_0, B_1 неприводима) и $\rho_p \neq 2^{-1/p}$, то $\omega(v, t)_p \asymp t^{\alpha_{v,p}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В формулировке теоремы 2 одно обстоятельство может показаться странным: если операторы удовлетворяют перекрестному условию (7), то $\alpha_{v,p} = -\log_2 \rho_p$, а если при этом $\rho_p < \frac{1}{2}$, то получается, что $\alpha_{v,p} > 1$. Последнее, как мы знаем, невозможно. На самом деле противоречия здесь нет, поскольку перекрестное условие влечет $\rho_p \geq \frac{1}{2}$ для всех p . Действительно, из (7) следует, что $(B_0 + B_1)[v_1 - v_0] = v_1 - v_0$, откуда $\|\Sigma_k(v_1 - v_0)\|_1 \geq 2^{-k}\|v_1 - v_0\|$. Потому $\|\Sigma_k\|_1 \geq 2^{-k}$ для любого k , следовательно, $\rho_1 \geq \frac{1}{2}$ и, значит, $\rho_p \geq \frac{1}{2}$ для любого p .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим произвольную пару аффинных операторов, действующих в $\mathbb{R}^1$: $\tilde{B}_0 y = a_0 y + b_0$, $\tilde{B}_1 y = a_1 y + b_1$. Согласно теореме 1 они имеют фрактальную кривую тогда и только тогда, когда $|a_0| + |a_1| < 2$. Поскольку $\rho_p = 2^{-1/p} [|a_0|^p + |a_1|^p]^{1/p}$, кривая принадлежит L_p тогда и только тогда, когда $|a_0|^p + |a_1|^p < 2$ (в случае $p = \infty$ — когда $\max\{|a_0|, |a_1|\} < 1$). Теорема 2 дает явную формулу для показателя гладкости в L_p . Поскольку валентность одномерных операторов равна 1, то модуль непрерывности имеет асимптотику $\omega(v, t)_p \asymp t^\alpha$, если $|a_0|^p + |a_1|^p \neq 1$, и $C_1 t^\alpha \leq \omega(v, t)_p \leq C_2 t^\alpha |\ln t|$ в противном случае.

Рассмотрим теперь два примера конкретных пар операторов в $\mathbb{R}^1$.

ПРИМЕР 2. Операторы $\tilde{B}_0 y = y + 1$, $\tilde{B}_1 = 0$ задают следующую фрактальную кривую: $v(x) = k$, $x \in (2^{-k-1}, 2^{-k}]$, $k \geq 0$. Она принадлежит L_p при всех конечных p , но не принадлежит L_∞ . При этом $\rho_p = 2^{-1/p}$, что меньше 1 при $p < \infty$ и равно 1 при $p = \infty$. Следовательно, $\alpha_{v,p} = \frac{1}{p}$. Теорема 2 дает оценку $C_1 t^{1/p} \leq \omega(v, t)_p \leq C_2 t^{1/p} |\ln t|$. На самом деле, как несложно установить, для данной кривой $\omega(v, t)_p \asymp t^{1/p} |\ln t|^{1/p}$.

ПРИМЕР 3. Для операторов $\tilde{B}_0 y = \frac{1}{2} y$, $\tilde{B}_1 = 1 - \frac{1}{2} y$ имеем $\rho_p = \frac{1}{2}$ при всех $p \in [1, \infty]$. Поэтому $v \in L_\infty$. Так как перекрестное условие (7) не выполняется, то из теоремы 2 получаем $\alpha_{v,p} = \frac{1}{p}$. При этом для $p > 1$ имеем $\omega(v, t)_p \asymp t^{1/p}$. В частности, $\omega(v, t)_\infty \geq C_1$, где $C_1 > 0$ не зависит от t . Следовательно, функция $v(x)$ разрывна. При $p = 1$ имеем $\rho_1 = 2^{-1/p}$, следовательно, $C_1 t \leq \omega(v, t)_1 \leq C_2 t |\ln t|$. На самом деле для данной кривой достигается верхняя оценка, и $\omega(v, t)_1 \asymp t |\ln t|$. Докажем это. Интегрируя уравнение (1), получаем

$$\int_{1/2-2^{-k}}^{1/2} v(x) dx = \frac{1}{3} - 2^{-k} c, \quad \int_{1/2}^{1/2+2^{-k}} v(x) dx = 1 - 2^{-k} c,$$

где $c = \int_0^1 v(x) dx$. Поэтому

$$\int_{1/2-2^{-k}}^{1/2} |v(x + 2^{-k}) - v(x)| dx \geq \frac{2}{3}.$$

Тогда из (1) следует $g(\frac{t}{2}) \geq \frac{1}{2} g(t) + \frac{2}{3} t$, где $g(t) = \|v(\cdot + t) - v(\cdot)\|_1$. Отсюда получаем $g(t) \geq C t |\ln t|$ для некоторой положительной константы C .

§ 5. Непрерывные фрактальные кривые

В данном параграфе мы введем дополнительное обозначение для совместного спектрального радиуса: $\hat{\rho} = \rho_\infty$. Оно используется во многих работах и для нас будет удобно тем, что согласуется с обозначениями нижнего спек-

рального радиуса $\check{\rho}$ и показателя Ляпунова $\bar{\rho}$. Для краткости будем опускать индекс ∞ в обозначениях модуля непрерывности и показателя Гёльдера: $\omega(v, t) = \omega(v, t)_\infty$, $\alpha_v = \alpha_{v, \infty}$.

ТЕОРЕМА 3. *Фрактальная кривая непрерывна тогда и только тогда, когда $\hat{\rho} < 1$ и выполнено условие (7). При этом $\alpha_v = -\log_2 \hat{\rho}$ и*

$$C_1 t^\alpha \leq \omega(v, t) \leq C_2 |\ln t|^{s-1} t^\alpha, \quad t > 0, \quad (9)$$

где $\alpha = \alpha_v$, s – валентность операторов B_0, B_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует, что если $\hat{\rho} < 1$, то фрактальная кривая принадлежит $L_\infty[0, 1]$. При выполнении перекрестного условия (7), применив теорему 2, получим $\alpha_v = -\log_2 \hat{\rho} > 0$, значит, $v \in C[0, 1]$. Неравенство (9) следует из теоремы 2. Обратно, если фрактальная кривая $v(x)$ непрерывна, то, применив (8) при $p = \infty$, получаем $\omega(v, t) \geq C_1 t^\alpha$, где либо $\alpha = -\log_2 \hat{\rho}$, либо $\alpha = \frac{1}{p} = 0$. Но так как $\omega(v, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, то $\alpha > 0$. Тем самым, второй случай исключается, и $\alpha = -\log_2 \hat{\rho} > 0$, следовательно, $\hat{\rho} < 1$. Более того, так как $\alpha_v \neq \frac{1}{p}$, то в силу теоремы 2 перекрестное условие (7) выполнено.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если фрактальная кривая $v(x)$ является липшицевой функцией, то $\hat{\rho} = \frac{1}{2}$ и выполнено условие (7). Обратно, если $\hat{\rho} = \frac{1}{2}$, выполнено (7) и $s = 1$, то v липшицева.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Липшецевы константы фрактальной кривой – константы C_1, C_2 в неравенстве (9) – могут быть эффективно оценены для любых операторов B_0, B_1 . Для этого нужно оценить константы c_1, c_2 в неравенстве (4). Подобные оценки получены в работе [26].

Для произвольного $x \in [0, 1]$ в двоичной системе счисления $x = 0.d_1 d_2 \dots$ уравнение (1) имеет вид

$$v(0.d_1 d_2 \dots) = \tilde{B}_{d_1} v(0.d_2 \dots). \quad (10)$$

Следовательно, непрерывная фрактальная кривая задается в каждой точке x явной формулой

$$v(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{B}_{d_1} \tilde{B}_{d_2} \dots \tilde{B}_{d_k} v_0. \quad (11)$$

В частности, для двоично-рациональных $x = 0.d_1 d_2 \dots d_k$ имеем

$$v(x) = \tilde{B}_{d_1} \tilde{B}_{d_2} \dots \tilde{B}_{d_k} v_0. \quad (12)$$

Не ограничивая общности, считаем, что d_k – последняя единица в записи двоично-рационального числа x . Число x допускает также запись, оканчивающуюся последовательностью единиц: $x = 0.d_1 \dots d_{k-1} 011 \dots$. Тогда формула (11) примет вид $v(x) = \tilde{B}_{d_1} \dots \tilde{B}_{d_{k-1}} \tilde{B}_0 v_1$, который равносильно (12), поскольку $\tilde{B}_1 v_0 = \tilde{B}_0 v_1$. Если $x = 0.d_1 \dots d_k (d_{k+1} \dots d_{k+m})$ – рациональное число с периодом $(d_{k+1} \dots d_{k+m})$, то формула (11) принимает вид $v(x) = \tilde{B}_{d_1} \dots \tilde{B}_{d_k} \tilde{v}$, где $\tilde{v}$ – неподвижная точка оператора $\tilde{B}_{d_{k+1}} \dots \tilde{B}_{d_{k+m}}$ (так как этот оператор сжимающий, то он имеет единственную неподвижную точку). Таким образом, в рациональных точках значения $v(x)$ задаются конечными произведениями операторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Некоторые примеры непрерывных фрактальных кривых изучались еще в работах [1]–[4]. В частности, перекрестное условие $\tilde{B}_0 v_1 = \tilde{B}_1 v_0$ иногда называют *условием Барнсли*. Достаточные условия существования непрерывной фрактальной кривой для операторов, задаваемых стохастическими матрицами, доказывались в 1989 г. Ч. Мичелли и Г. Праутшем [5], а в 1991 г. – И. Добеши и Дж. Лагариасом [7]. Формула гладкости фрактальной кривой для специальных операторов, задаваемых теплицевыми матрицами, была доказана Д. Коллелой и К. Хейлем в [17] со ссылками на результаты работ [7], [8]. Теорема 3 обобщает эти результаты на произвольные аффинные операторы и добавляет оценку на модуль непрерывности.

Совместный спектральный радиус впервые появился в небольшой работе Ж.К. Рота и Г. Стрэнга [23], затем почти на 30 лет был совсем забыт. Лишь в начале 1990-х годов выяснилась его исключительная важность в теории всплесков, так как именно совместный спектральный радиус дает точный показатель Гельдера. За последние 15 лет написано более 200 работ, посвященных изучению этого объекта и способов его вычисления. Краткий обзор Г. Стрэнга [29] содержит полторы страницы текста и пять страниц библиографии. Свойства совместного спектрального радиуса изучались в работах [8], [17], [24], [26], [30]–[32].

Вычисление совместного спектрального радиуса для различных матриц встречается в работах [7], [26], [25] и др. В настоящее время совместный спектральный радиус и его обобщения широко применяются в теории всплесков, теории приближений, динамических системах, теории вероятностей, теории чисел, теории кодирования, математической физике и т.д. (см. ссылки в перечисленных выше работах). Понятие p -радиуса было введено в работе [19], где с его помощью были вычислены показатели гладкости всплесков и масштабирующих функций в пространствах L_p .

§ 6. Связь с аффинными фракталами

Непустой компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *фракталом*, соответствующим паре аффинных операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$, если $\tilde{B}_0 K \cup \tilde{B}_1 K = K$. Согласно классической теореме Хатчинсона [6] если оба оператора $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ сжимающие, то они имеют единственный фрактал. Согласно лемме 1 наличие нормы в $\mathbb{R}^n$, для которой оба оператора являются сжимающими, может быть проверено в терминах совместного спектрального радиуса $\hat{\rho}(B_0, B_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ – неприводимая пара аффинных операторов. Если $\hat{\rho} < 1$, то эта пара имеет единственный фрактал; если $\hat{\rho} > 1$, то она не имеет фракталов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\hat{\rho} < 1$, то существует норма в $\mathbb{R}^n$, для которой $\|B_i\| < 1$, $i = 0, 1$ (лемма 1), далее ссылаемся на теорему Хатчинсона о существовании и единственности фрактала [6].

Обратно, если K – фрактал операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$, то его выпуклая оболочка $\text{conv } K$ имеет непустую внутренность. В противном случае аффинная оболочка множества K , которая является общим собственным подпространством операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$, не совпадает с $\mathbb{R}^n$, что противоречит неприводимости. Итак, $\text{conv } K$ содержит шар некоторого радиуса r . Следовательно, нормы всевозможных произведений Π_k равномерно ограничены константой d/r по всем k , где d – диаметр множества K . Поэтому $\hat{\rho}(B_0, B_1) \leq 1$.

Понятие фрактальной кривой является естественным обобщением аффинных фракталов. Если фрактальная кривая $v(x)$ непрерывна, то ее образ $K = v([0, 1])$ обладает свойством $\tilde{B}_0 K \cup \tilde{B}_1 K = K$, т.е. является фракталом. В силу теоремы 3 это означает, что для сжимающих операторов с выполненным перекрестным условием (7) их фрактал K единственным образом параметризуется в виде непрерывной фрактальной кривой. Если условие (7) не выполнено, то K параметризуется в виде фрактальной кривой из L_∞ . Поскольку функция $v \in L_\infty$ определена с точностью до множества меры нуль, то можно определить значения $v(x)$ по формуле (11) для всех x , кроме двоично-рациональных. Предел (11) при этом корректно определен, поскольку операторы сжимающие. Каждому двоично-рациональному $x = 0.d_1 \dots d_{k-1}1$ ставим два значения функции $v(x)$, соответствующие ее двоичным разложениям (оканчивающимся последовательностью нулей и последовательностью единиц): $\tilde{B}_{d_1} \dots \tilde{B}_{d_{k-1}} \tilde{B}_1 v_0$ и $\tilde{B}_{d_1} \dots \tilde{B}_{d_{k-1}} \tilde{B}_0 v_1$. Для почти всех x отображение однозначное. Несложно проверить, что его образ будет компактом, обладающим свойством $\tilde{B}_0 K \cup \tilde{B}_1 K = K$.

Таким образом, для сжимающих операторов, т.е. в случае $\rho_\infty < 1$, множество значений фрактальной кривой задает фрактал K . Поэтому фрактальные кривые можно рассматривать как обобщение понятия фрактала на несжимающие операторы, удовлетворяющие неравенству $\rho_1 < 1$.

Например, два одномерных аффинных оператора (пример 1) сжимающие, если $|a_0|, |a_1| < 1$. В этом случае они имеют единственный фрактал в $\mathbb{R}$. Он однозначно параметризуется их фрактальной кривой. Если $|a_0| > 1$, то операторы не имеют фрактала, однако в случае $|a_0| + |a_1| < 2$ по-прежнему имеют фрактальную кривую. Для операторов из примера 2 образ этой кривой – множество $K = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для операторов $\tilde{B}_0 y = \lambda y + 1$, $\tilde{B}_1 y = 0$ (λ – произвольный параметр, удовлетворяющий неравенству $1 \leq |\lambda| < 2$) имеем $K = \{\sum_{j=0}^k \lambda^j, k \geq 0\} \cup \{0\}$.

§ 7. Локальная гладкость

Мы получили формулы для показателей глобальной гладкости фрактальных кривых на всем отрезке $[0, 1]$. Теперь рассмотрим вопрос о локальной гладкости в каждой точке. Показателем Гёльдера непрерывной функции v в точке $x \in [0, 1]$ называется величина

$$\alpha_v(x) = \sup\{\alpha \mid \|v(x) - v(y)\| \leq C|x - y|^\alpha, y \in [0, 1]\}.$$

Ясно, что $\alpha_v \leq \inf_x \alpha_v(x)$, причем это неравенство, вообще говоря, строгое. Если имеет место равенство, то мы будем говорить, что показатель Гёльдера достигается на отрезке $[0, 1]$. Он достигается в некоторой точке x , если $\alpha_v = \alpha_v(x)$. Заметим, что в отличие от глобального показателя Гёльдера локальная гладкость в точке может принимать любые неотрицательные значения, включая $+\infty$, даже если функция не равна константе ни на каком интервале. Гладкость в точке x справа определяется следующим образом:

$$\alpha_v^+(x) = \sup\{\alpha \mid \|v(x) - v(y)\| \leq C|x - y|^\alpha, y \geq x\}.$$

Аналогично определяется гладкость слева $\alpha_v^-(x)$.

Через $(x) = \{d_1, d_2, \dots\}$ будем обозначать последовательность из нулей и единиц, $x = 0.d_1d_2\dots$ – соответствующее число в двоичной записи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Число $x = 0.d_1d_2\dots$ называется *нормальным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что для каждого $m > N(\varepsilon)$ среди цифр d_k с номерами $k \in [m, m(1 + \varepsilon)]$ найдутся две различные цифры.

Таким образом, нормальные числа не могут слишком хорошо приближаться двоично-рациональными. Почти все (в мере Лебега) числа отрезка $[0, 1]$ являются нормальными. Все рациональные, но не двоично-рациональные числа, нормальные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для данных линейных операторов B_0, B_1 и данной последовательности $(x) = \{d_1, d_2, \dots\}$ из единиц и нулей величина

$$\hat{\rho}_x = \hat{\rho}_x(B_0, B_1) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|B_{d_1} \cdots B_{d_k}\|^{1/k}$$

называется *совместным спектральным радиусом операторов B_0, B_1 вдоль последовательности (x)* .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $v(x)$ – непрерывная фрактальная кривая неприводимой пары аффинных операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$. Для любой точки $x = 0.d_1d_2\dots$ имеем $\alpha_v(x) \leq -\log_2 \hat{\rho}_x$. Если точка x нормальная, то $\alpha_v(x) = -\log_2 \hat{\rho}_x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $a = v_1 - v_0$.

1) Докажем, что $\alpha_v(x) \leq -\log_2 \hat{\rho}_x$. В случае $\hat{\rho}_x = 0$ утверждение очевидно. Считаем, что $\hat{\rho}_x > 0$. Пусть $(x_k) = \{d_1, \dots, d_{m_k}\}$ – конечные подпоследовательности последовательности (x) такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Pi_{x_k}\|^{1/m_k} = \hat{\rho}_x,$$

где $\Pi_{x_k} = B_{d_1} \cdots B_{d_{m_k}}$. Для любого $\beta \in (0, \hat{\rho}_x)$ существует такая константа $C(\beta) > 0$, что $\|\Pi_{x_k}\| \geq C(\beta)\beta^{m_k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку пара $\{\tilde{B}_0, \tilde{B}_1\}$ неприводима, то найдутся конечные последовательности $(y_r)_{l_r}$, $r = 1, \dots, n$, для которых векторы $\Pi_{y_1}(a), \dots, \Pi_{y_n}(a)$ линейно независимы. В силу эквивалентности всех норм в $\mathbb{R}^n$ существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого оператора A найдется индекс $l \in \{1, \dots, n\}$, для которого $\|A\Pi_{y_l}(a)\| \geq \gamma\|A\|$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|\Pi_{x_k}\Pi_{y_l}(a)\| \geq \gamma C(\beta)\beta^{m_k}$$

(l зависит от k). Рассмотрим конечные последовательности $(x_k y_l 0)$ и $(x_k y_l 1)$ длиной $m_n + l_k + 1$ и соответствующие двоично-рациональные числа z_0^k, z_1^k .

Для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C_0(\varepsilon)$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$C_0(\varepsilon)|z_1^k - z_0^k|^{\alpha_v(x) - \varepsilon} \geq \|v(z_1^k) - v(z_0^k)\|.$$

С другой стороны,

$$\|v(z_1^k) - v(z_0^k)\| = \|\Pi_{x_k}\Pi_{y_l}(a)\| \geq \gamma C(\beta)\beta^{m_k}.$$

Тогда $\log_2 C_0(\varepsilon) + (\alpha_v(x) - \varepsilon)(-m_k - l_k) \geq \log_2(\gamma C(\beta)) + m_k \log_2 \beta$. При $k \rightarrow \infty$ получаем $\alpha_v(x) - \varepsilon \leq -\log_2 \beta$. Теперь при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \hat{\rho}_x$ получим требуемое.

2) Докажем, что в нормальных точках $\alpha_v(x) \geq -\log_2 \hat{\rho}_x$. Берем любое $b > \hat{\rho}_x$. Пусть $x = 0.d_1 d_2 \dots$. Для любого k имеем $\|P_k\| \leq C(b)b^k$. Оценим гладкость функции v в точке x справа (гладкость слева оценивается аналогично). Берем произвольное $y > x$; пусть двоичные записи чисел x и y совпадают в первых m разрядах после точки (возможно, $m = 0$), а цифры в следующем разряде не совпадают. Таким образом, $y = 0.d_1 \dots d_m d'_{m+1} d'_{m+2} \dots$, причем $d'_{m+1} = 1$, $d_{m+1} = 0$ (так как $y > x$). Пусть в записи числа x после цифры d_{m+1} следует ровно l единиц подряд (возможно, $l = 0$). Таким образом, $d_{m+l+2} = 0$. Пусть также в записи числа y после цифры d'_{m+1} следует ровно r нулей подряд (возможно, $r = 0$). Не ограничивая общности, предположим, что $l \geq r$ (случай $l \leq r$ разбирается точно так же). Тогда $|y - x| \geq 2^{-m-r-2}$. Для данного k положим $x_k = 0.d_1 \dots d_k$. Аналогично определяется y_k . По условию $y_{m+1} = y_{m+r+1}$. Положим $\Lambda_1 = \{k \geq m + r + 2, d'_k = 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|v(y) - v(y_{m+1})\| &= \|v(y) - v(y_{m+r+1})\| \leq \sum_{k \in \Lambda_1} \|v(y_k) - v(y_{k-1})\| \\ &= \sum_{k \in \Lambda_1} \|B_{d_1} \dots B_{d'_{k-1}} a\| \leq \|B_{d_1} \dots B_{d_m} B_1 B_0^r\| \sum_{k \in \Lambda_1} \|B_{d_{m+r+2}} \dots B_{d'_{k-1}} a\|. \end{aligned}$$

Для любого $q \in (\hat{\rho}, 1)$ имеем $\|B_{d_1} \dots B_{d_k}\| \leq C(q)q^k$. Из этого следует, что ряд $\sum_{k \in \Lambda_1} \|B_{d_{m+r+2}} \dots B_{d'_{k-1}} a\|$ мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем q , следовательно, его сумма ограничена некоторой константой C , зависящей только от q . Таким образом,

$$\|v(y) - v(y_{m+1})\| \leq C \|B_{d_1} \dots B_{d_m} B_1 B_0^r\|. \quad (13)$$

Теперь заменим последовательность нулей в двоичной записи числа y_{m+1} последовательностью единиц: $y_{m+1} = 0.d_1 \dots d_m 011 \dots$. Учитывая, что $l \geq r$, и полагая $\Lambda_0 = \{k \geq m + r + 2, d_k = 0\}$, имеем

$$\begin{aligned} \|v(x) - v(y_{m+1})\| &\leq \sum_{k \in \Lambda_0} \|v(x_k) - v(x_{k-1})\| = \sum_{k \in \Lambda_0} \|B_{d_1} \dots B_{d_{k-1}} a\| \\ &\leq \|B_{d_1} \dots B_{d_m} B_0 B_1^r\| \sum_{k \in \Lambda_0} \|B_{d_{m+r+2}} \dots B_{d_{k-1}} a\| \leq C \|B_{d_1} \dots B_{d_m} B_0 B_1^r\|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|v(x) - v(y_{m+1})\| \leq C \|B_{d_1} \dots B_{d_m} B_0 B_1^r\|. \quad (14)$$

По определению $\hat{\rho}_x$ существует такая константа $C(b) > 0$ для любого $b > \hat{\rho}_x$, что $\|B_{d_1} \dots B_{d_k}\| \leq C(b)b^k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда левая часть неравенства (14) оценивается сверху величиной $CC(b)b^{n+r+1}$, а левая часть неравенства (13) – величиной

$$C \|B_{d_1} \dots B_{d_m}\| \|B_1 B_0^r\| \leq CC(b)C(q)b^m q^{r+1}.$$

Суммируя (14) и (13), получаем

$$\|v(x) - v(y)\| \leq \|v(x) - v(y_{m+1})\| + \|v(y) - v(y_{m+1})\| \leq CC(b)b^m (b^{r+1} + C(q)q^{r+1}).$$

Учитывая, что $|y - x| \geq 2^{-m-r-2}$, получаем

$$\frac{\log_2 \|v(x) - v(y)\|}{\log_2 |y - x|} \geq -\frac{\log_2 C + \log_2 C(b) + n \log_2 b + \log_2 (b^{r+1} + C(q)q^{r+1})}{m + r + 2}.$$

Поскольку точка x нормальная, то $r/m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, следовательно,

$$\frac{\log_2 (b^{r+1} + C(q)q^{r+1})}{m + r + 2} \rightarrow 0.$$

Таким образом, при $m \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{\log_2 \|v(x) - v(y)\|}{|y - x|} \geq -\log_2 b.$$

Устремив b к $\hat{\rho}_x$, получаем требуемое.

Если операторы B_0, B_1 невырождены, а последовательность (x) периодическая с периодом $(d_1 \dots d_k)$, то $\hat{\rho}_x = [\rho(B_{d_1} \dots B_{d_k})]^{1/k}$. Поэтому в рациональных точках x локальная гладкость выражается через обычный спектральный радиус.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть операторы B_0, B_1 невырождены. Если x — рациональное, но не двоично-рациональное число с периодом $(d_1 \dots d_k)$, $k \geq 2$, то

$$\alpha_v(x) = -\frac{1}{k} \log_2 \rho(B_{d_1} \dots B_{d_k}).$$

Если x — двоично-рациональное число, то

$$\alpha_v^+(x) = -\log_2 \rho(B_0), \quad \alpha_v^-(x) = -\log_2 \rho(B_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для не двоично-рациональных чисел утверждение следует из теоремы 4. Пусть $x = 0.d_1 d_2 \dots d_n 00 \dots$ — двоично-рациональное число. Оценка сверху $\alpha_v^+(x) \leq -\log_2 \rho(B_0)$ устанавливается точно так же, как и при доказательстве теоремы 4. Докажем обратное неравенство. Оно не следует из теоремы 4, поскольку число x не является нормальным. Берем произвольное $b > \rho(B_0)$. Для любого k имеем $\|B_{d_1} \dots B_{d_k}\| \leq C(b)b^k$. Тогда для произвольного $y \in (x, x + 2^{-m-1})$, $y = 0.d_1 d_2 \dots d_m d_{m+1} \dots$, положим $\Lambda = \{k \geq m + 1, d_k = 1\}$ и $r = \min \Lambda - m - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|v(y) - v(x)\| &= \|v(y_{m+r+1}) - v(x)\| \leq \sum_{k \in \Lambda} \|v(y_k) - v(y_{k-1})\| \\ &= \sum_{k \in \Lambda} \|B_{d_1} \dots B_{d_{k-1}} a\| \leq \|B_{d_1} \dots B_{d_m} B_0^r\| \sum_{k \in \Lambda} \|B_{d_{m+r+2}} \dots B_{d_{k-1}} a\|. \end{aligned}$$

Ряд $\sum_{k \in \Lambda} \|B_{d_{m+r+2}} \dots B_{d_{k-1}} a\|$ мажорируется рядом $\sum_l C(q)q^l$, где $q \in (\hat{\rho}, 1)$. Таким образом,

$$\|v(y) - v(x)\| \leq C \|B_{d_1} \dots B_{d_m} B_0^r\| \leq C_1(b)b^r,$$

где $b > \rho(\tilde{B}_0)$. Учитывая, что $|y - x| \geq 2^{-m-r-1}$, имеем

$$\frac{\log_2 \|v(x) - v(y)\|}{\log_2 |y - x|} \geq -\frac{\log_2 C_1(b) + n \log_2 b}{m + r + 1}.$$

Отсюда при $y \rightarrow x + 0$ (и, следовательно, $r \rightarrow \infty$) получаем

$$\frac{\log_2 \|v(x) - v(y)\|}{|y - x|} \geq -\log_2 b.$$

Устремив b к $\hat{\rho}_x$, получаем требуемое.

Равенство $\alpha_v^-(x) = -\log_2 \rho(B_1)$ устанавливается точно так же, с заменой последовательности нулей на конце двоичной записи x последовательностью единиц.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Условие невырожденности операторов B_0, B_1 в формулировке предложения 3 существенно. Если хотя бы один из операторов вырожден, то локальная гладкость может быть различна в разных двоично-рациональных точках (пример 6).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из теоремы 4 следует, что в нормальных точках, в отличие, например, от двоично-рациональных, локальная гладкость одинакова слева и справа.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из теоремы 4 следует, что неравенство $\alpha_v(x) \leq -\log_2 \hat{\rho}_x$ выполнено во всех точках отрезка $[0, 1]$, в то время как обратное неравенство, вообще говоря, выполнено только в нормальных точках. “Нормальность” числа x использовалась только при доказательстве неравенств (13) и (14). Был использован тот факт, что в нормальных точках величины $\|\Pi_m B_1 B_0^r\|^{\frac{1}{m+r+1}}$ и $\|\Pi_m B_0 \tilde{B}_1^r\|^{\frac{1}{m+r+1}}$ асимптотически эквивалентны при $m \rightarrow \infty$ для любого $\Pi_m = B_{d_1} \cdots B_{d_m}$. Это означает, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\Pi_m B_1 B_0^r\|^{\frac{1}{m+r+1}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \|\Pi_m B_0 B_1^r\|^{\frac{1}{m+r+1}}. \quad (15)$$

Необходимым условием для этого будет равенство $\rho(B_0) = \rho(B_1)$, которое, однако, не достаточно даже для невырожденных операторов. Можно сформулировать (довольно громоздкие) достаточные условия в терминах собственных векторов операторов B_0, B_1 . В некоторых случаях (например, для кривых де Рама, пример 6) соотношение (15) выполняется, а значит, формула локальной гладкости распространяется на все точки $x \in [0, 1]$ (мы это будем оговаривать специально). Во всех прочих случаях будем ограничиваться локальной гладкостью в нормальных точках.

§ 8. Распределение точек данной гладкости.

Показатель Ляпунова и нижний спектральный радиус

Из теоремы 4 можно сделать ряд выводов о распределении точек с данной локальной гладкостью на отрезке $[0, 1]$. Нам придется ограничиться случаем невырожденных операторов B_0, B_1 . Иначе множества точек данной локальной гладкости может иметь не столь регулярную структуру (примеры 7–9).

Здесь и далее через $\mathcal{D}$ обозначаем множество двоично-рациональных чисел, таким образом, $\mathcal{D} = \{2^{-r}k \mid k, r \in \mathbb{Z}, r \geq 0\}$.

ЛЕММА 4. Пусть v – непрерывная фрактальная кривая невырожденных операторов B_0, B_1 . Тогда для любых $x, y \in [0, 1]$ таких, что $2^q x - y \in \mathcal{D}$ при некотором целом q , локальная гладкость v в точках x и y одинакова.

Иными словами, если двоичные записи чисел x и y оканчиваются одной и той же последовательностью нулей и единиц, то $\alpha_v(x) = \alpha_v(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $q \geq 0$, иначе меняем местами x и y . Из формулы (1) следует, что ограничение кривой v на любой отрезок $[2^{-q}k, 2^{-q}(k+1)]$ аффинно подобно всей кривой v . На этом отрезке выполнено равенство $v(x) = \tilde{P}_q v(2^q x - k)$ для подходящего произведения $\tilde{P}_q = \tilde{B}_{d_1} \cdots \tilde{B}_{d_q}$. При этом оператор $\tilde{P}_q$, задающий подобие, невырожден. Следовательно $\alpha_v(2^q x - k) = \alpha_v(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Непустое подмножество отрезка $[0, 1]$ называется $(0, 1)$ -множеством, если вместе с любой своей точкой x оно содержит все точки, двоичные разложения которых оканчиваются той же последовательностью нулей и единиц, что и разложение числа x .

Иначе говоря, множество обладает свойством $(0, 1)$, если принадлежность к нему произвольной точки не зависит ни от какого конечного подмножества цифр в его двоичном разложении. Любое $(0, 1)$ -множество является классом эквивалентности, поэтому весь отрезок $[0, 1]$ разбивается на непересекающиеся $(0, 1)$ -множества. Каждое $(0, 1)$ -множество всюду плотно на отрезке $[0, 1]$. Кроме того, если оно измеримо по Лебегу, то его мера равна либо 0, либо 1. В теории вероятностей этот факт известен как “закон нуля и единицы”.

Из леммы 4 следует, что множество точек, в которых локальная гладкость фрактальной кривой принимает данное значение, либо пусто, либо является $(0, 1)$ -множеством. Локальная гладкость $\alpha_v(x)$ как функция от x измерима. Если операторы B_0, B_1 невырождены, то она ограничена почти всюду, так как в этом случае $\hat{\rho}_x \geq \hat{\rho} > 0$. Кроме того, все ее множества уровня $\{x \in [0, 1] \mid \alpha_v(x) \leq t\}$ являются $(0, 1)$ -множествами. Поскольку измеримые функции, у которых все множества уровня имеют меру 0 или 1, суть константы, показатель $\alpha_v(x)$ почти во всех точках отрезка $[0, 1]$ один и тот же. Этот показатель мы будем обозначать α_{av} и называть *средней гладкостью* v . Из теоремы 4 следует, что существование средней гладкости равносильно такому утверждению: для почти всех x показатель $\hat{\rho}_x$ один и тот же. Обозначим этот показатель через $\bar{\rho}$, он известен как показатель Ляпунова, или экспонента Ляпунова.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Показателем Ляпунова конечномерных линейных операторов B_0, B_1 называется величина

$$\bar{\rho} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{d_1, \dots, d_k} \|P_k\| \right)^{1/(2^k k)}. \quad (16)$$

Данный предел существует для любой пары операторов и не зависит от нормы. Имеет место следующий факт: для почти всех $x \in [0, 1)$ предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k\|^{1/k}$, $k \rightarrow \infty$, существует и равен $\bar{\rho}$, где $x = 0.d_1 d_2 \dots$, $P_k = B_{d_1} \cdots B_{d_k}$. Равносильная формулировка: если независимые случайные величины $\{d_j\}$ принимают значения 0 и 1 с вероятностями $\frac{1}{2}$, то почти наверно предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k\|^{1/k}$ существует и равен $\bar{\rho}$. Доказательства этих утверждений можно найти, например, в работе [33]. Подобно совместному спектральному радиусу показатель Ляпунова чрезвычайно трудно вычислять и оценивать [31], [32].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Нижним спектральным радиусом операторов B_0, B_1 называется величина*

$$\check{\rho}(B_0, B_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \min_{d_1, \dots, d_k} \|\Pi_k\|^{1/k}. \quad (17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Совместный спектральный радиус $\hat{\rho}$ является непрерывной (и даже локально липшицевой) функцией операторов [17], [26]. Однако ни для нижнего спектрального радиуса $\check{\rho}$, ни для показателя Ляпунова это, вообще говоря, не верно. Например, если $V = \mathbb{R}^2$, оператор B_0 является ортогональной проекцией на ось x , а B_1 является поворотом на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно начала координат, то функции $\check{\rho}(\cdot, \cdot)$ и $\bar{\rho}(\cdot, \cdot)$ разрывны в точке (B_0, B_1) . В самом деле, несложно показать, что $\check{\rho}(B_0, B_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, и $\bar{\rho}(B_0, B_1) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть D_k – поворот относительно начала координат на угол $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6k}$. Ясно, что $\|D_k - B_1\| \rightarrow 0$. С другой стороны, $\bar{\rho}(B_0, D_k) = 0$, а значит, и $\check{\rho}(B_0, D_k) = 0$ для любого k . В самом деле, последовательность независимых случайных величин $d_1, d_2, \dots$, принимающих равновероятно значения 0 и 1, почти наверно содержит подпоследовательность $0, 1, \dots, 1, 0$ ($3k$ единиц между двумя нулями). Так как $B_0(D_k)^{3k}B_0 = 0$, то $\bar{\rho}(B_0, D_k) = 0$. Таким образом, функции $\bar{\rho}$ и $\check{\rho}$ терпят разрыв в точке (B_0, B_1) .

Используя теорему 4, получаем, что средняя гладкость фрактальной кривой выражается через показатель Ляпунова: $\alpha_{av} = -\log_2 \bar{\rho}$. Какие значения может принимать показатель локальной гладкости $\alpha_v(x)$ в различных точках x ? Очевидно, что $\check{\rho} \leq \hat{\rho}_x \leq \hat{\rho}$ для любого x . Тогда по теореме 4 неравенство $\alpha_v(x) \leq -\log_2 \check{\rho}$ выполнено для всех $x \in [0, 1]$. Заметим, что $\check{\rho} > 0$, так как операторы невырождены. С другой стороны, локальная гладкость в любой точке не меньше глобальной гладкости, поэтому $\alpha_v(x) \geq -\log_2 \hat{\rho}$. Таким образом, значения локальной гладкости во всех точках $x \in [0, 1]$ принадлежат конечному отрезку $[-\log_2 \hat{\rho}, -\log_2 \check{\rho}]$. Оказывается, что они заполняют весь отрезок, т.е. для каждого $\alpha \in [-\log_2 \hat{\rho}, -\log_2 \check{\rho}]$ существует такое $x \in [0, 1]$ (а значит, и $(0, 1)$ -множество таких точек), что $\alpha_v(x) = \alpha$.

ЛЕММА 5. Пусть операторы B_0 и B_1 невырождены и $\hat{\rho}, \check{\rho}$ – их совместный спектральный радиус и нижний спектральный радиус соответственно. Тогда для каждого числа $a \in [\check{\rho}, \hat{\rho}]$ существует нормальная последовательность из нулей и единиц (x) такая, что $\hat{\rho}_x = a$.

Доказательство леммы 5 см. в приложении (§ 13).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Условие невырожденности операторов B_0, B_1 в лемме 5 является существенным (пример 6).

Соберем полученные результаты о распределении точек фиксированной локальной гладкости в следующей теореме. Будем использовать обозначения

$$\alpha_{\min} = -\log_2 \hat{\rho}, \quad \alpha_{\max} = -\log_2 \check{\rho}. \quad (18)$$

Для данного α обозначим через $\Omega_\alpha = \{x \in [0, 1] : \alpha_v(x) = \alpha\}$ множество точек x , в которых локальная гладкость равна α .

ТЕОРЕМА 5. Пусть $v(x)$ – непрерывная фрактальная кривая невырожденных операторов $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$. Тогда $\alpha_v(x) \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ в любой точке $x \in [0, 1]$. Для каждого значения $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ множество Ω_α непусто и является $(0, 1)$ -множеством. В частности, оно всюду плотно на $[0, 1]$. Для $\alpha = -\log_2 \bar{\rho}$ множество Ω_α имеет полную меру на отрезке $[0, 1]$, для всех остальных α – меру ноль.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Теоремы 3 и 4, дающие формулы для глобальной и локальной гладкости, верны для всех непрерывных фрактальных кривых. С другой стороны, формула гладкости в рациональных точках (предложение 3) и утверждения о распределении локальной гладкости (теорема 5) верны, вообще говоря, только при условии, что операторы B_0, B_1 невырождены.

§ 9. Примеры

ПРИМЕР 4 (кривая биномиального распределения). В примере 1 был установлен критерий принадлежности фрактальной кривой в $\mathbb{R}^1$ пространству L_p . В частности, $v \in L_\infty$, если $\max\{|a_0|, |a_1|\} < 1$. При этом условии согласно теореме 3 кривая будет непрерывна тогда и только тогда, когда выполнено перекрестное условие (7). С точностью до аффинного подобия можно считать, что $v_0 = 0, v_1 = 1$. Условие (7) равносильно тому, что $a_0 + a_1 = 1, a_0, a_1 > 0$. Для определенности считаем, что $a_0 \leq a_1$, и полагаем $a_0 = \lambda, a_1 = 1 - \lambda$.

Итак, одномерная фрактальная кривая непрерывна тогда и только тогда, когда операторы аффинной заменой приводятся к виду $\tilde{B}_0 y = \lambda y, \tilde{B}_1 y = (1 - \lambda)y + \lambda$, где $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$. Случай $\lambda = \frac{1}{2}$ тривиален: кривая задается линейной функцией $v(x) \equiv x$. Рассмотрим общий случай $\lambda < \frac{1}{2}$. Поскольку $\hat{\rho} = 1 - \lambda$, имеем $\alpha_v = -\log_2(1 - \lambda)$. Так как валентность равна 1, то по теореме 3 имеем $\omega(v, t) \asymp t^{\alpha_v}$.

Пусть $r(x) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k d_j$ — верхняя плотность единиц в последовательности (x) . Так как $\hat{\rho}_x = (1 - \lambda)^{r(x)} \lambda^{1-r(x)}$, то, воспользовавшись теоремой 4, получаем

$$\alpha_v(x) = -r(x) \log_2(1 - \lambda) - (1 - r(x)) \log_2 \lambda \quad (19)$$

в каждой нормальной точке x . Поскольку $\rho(B_0) \neq \rho(B_1)$, то (замечание 7) формула локальной гладкости не распространяется на все точки $x \in [0, 1]$. Гладкость в рациональных точках определяется из предложения 3. В частности, в двоично-рациональных точках гладкость слева равна $-\log_2(1 - \lambda)$ а справа равна $-\log_2 \lambda$. Значения локальной гладкости заполняют отрезок $[-\log_2 \hat{\rho}, -\log_2 \check{\rho}] = [-\log_2(1 - \lambda), -\log_2 \lambda]$. Для почти всех $x \in [0, 1]$ гладкость равна $-\log_2 \bar{\rho} = -\log_2 \sqrt{\lambda(1 - \lambda)}$. Поскольку $\alpha_{av} > 1$, функция $v(x)$ чисто сингулярна, т. е. $v'(x) = 0$ для почти всех x .

Для гладкости в L_p по теореме 2 имеем

$$\alpha_{v,p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \log_2(\lambda^p + (1 - \lambda)^p).$$

В частности, $\alpha_{v,1} = 1$. Так как валентность равна 1, то $\omega(v, t)_p \asymp t^\alpha$ при любом p , где $\alpha = \alpha_{v,p}$.

На отрезке $[0, 1]$ функция $v(x)$ совпадает с функцией распределения ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-k}$, где случайные величины $\{\varepsilon_k\}$ независимо принимают значения 0 и 1 с вероятностями λ и $1 - \lambda$ соответственно. Обобщенная производная функции v , т. е. плотность распределения, задает так называемую биномиальную меру.

ПРИМЕР 5 (кривая Кох). Пусть $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ — операторы подобия в $\mathbb{R}^2$:

$$B_0 = \frac{1}{2 \cos \gamma} \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{1}{2 \cos \gamma} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ -\sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix},$$

где $\gamma \in (0, \frac{\pi}{4})$. При этом начало координат является неподвижной точкой оператора $\tilde{B}_0$, а точка $(1, 0)^T$ – неподвижной точкой оператора $\tilde{B}_1$. В отличие от предыдущего примера операторы B_0, B_1 не коммутируют. Однако каждый из них является композицией ортогонального преобразования и сжатия с коэффициентом $\frac{1}{2 \cos \gamma}$. Следовательно, $\hat{\rho}_x = \frac{1}{2 \cos \gamma}$ для любого $x \in [0, 1]$. В частности, $\hat{\rho} = \bar{\rho} = \check{\rho} = \frac{1}{2 \cos \gamma}$. Условие (15) из замечания 7 выполнено, следовательно, гладкость в любой точке $x \in [0, 1]$ вычисляется по формуле $\alpha_v(x) = -\log_2 \hat{\rho}_x$. Таким образом, значения гладкости кривой Кох во всех точках одинаковы и равны $1 + \log_2 \cos \gamma$. При уменьшении γ от $\frac{\pi}{4}$ до 0 гладкость кривой увеличивается от $\frac{1}{2}$ до 1. В частности, при $\gamma = \frac{\pi}{6}$ имеем $\alpha_v = \frac{1}{2} \log_2 3$. Поскольку ρ_p также равно $\frac{1}{2 \cos \gamma}$, то гладкость кривой Кох во всех пространствах $L_p(\mathbb{R})$ одинакова и равна $1 + \log_2 \cos \gamma$. Так как $s = 1$, то $\omega(v, t)_p \asymp t^\alpha$ для всех $p \in [1, +\infty]$.

ПРИМЕР 6 (кривые де Рама). Эти кривые получаются в пределе из плоской ломаной последовательным срезанием ее углов. На первом шаге каждая сторона ломаной делится на три части в отношении $\beta : (1 - 2\beta) : \beta$, где $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ – заданный параметр. На каждой стороне, таким образом, возникло по две точки деления. Соединив последовательно все точки деления, получаем новую ломаную, делим ее стороны в том же отношении (с тем же параметром β), получаем следующую ломаную и т. д. Кривая, получающаяся в пределе называется *кривой де Рама*. Она определяется, таким образом, параметром β и начальной ломаной.

Впервые эти кривые были исследованы де Рамом в работах [1]–[3]. Затем они нашли применения в прикладной математике [11], [15], [16], [34], [35], в эргодической теории и динамических системах [12], [13]. Множество работ посвящены изучению различных свойств кривых де Рама (см., например, [36]–[39]) и их обобщениям [40]–[42].

Если в качестве начальной ломаной взять квадрат, то соответствующая кривая де Рама будет состоять из четырех одинаковых сегментов с концами в серединах сторон квадрата. Такой сегмент называется *фундаментальной* кривой де Рама и обозначается далее через Γ . Кривая де Рама, соответствующая произвольной начальной ломаной, является объединением нескольких кривых, каждая из которых аффинно подобна Γ . Поэтому при изучении кривых де Рама можно ограничиться рассмотрением только фундаментальной кривой Γ . Она является непрерывной фрактальной кривой в $\mathbb{R}^2$ операторов

$$\tilde{B}_0 u = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \beta & 1 - 2\beta \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\beta \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_1 u = \begin{pmatrix} 1 - 2\beta & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2\beta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Оператор $\tilde{B}_0$ имеет неподвижную точку $v_0 = (0, -1)^T$, а оператор $\tilde{B}_1$ – неподвижную точку $v_1 = (1, 0)^T$. Условие (7) выполнено. В отличие от предыдущих примеров, операторы B_0, B_1 не коммутируют и не являются композициями ортогональных преобразований и сжатий, что значительно осложняет исследование. Тем не менее, величины $\check{\rho}$ и $\hat{\rho}$ явно вычисляются при любом значении параметра β . Имеют место равенства $\hat{\rho} = \max\{\rho(B_0), \sqrt{\rho(B_0 B_1)}\}$, $\check{\rho} = \min\{\rho(B_0), \sqrt{\rho(B_0 B_1)}\}$. При этом

$$\rho(B_0) = \rho(B_1) = \begin{cases} 1 - 2\beta, & \text{если } \beta \leq 1/3, \\ \beta, & \text{если } \beta \geq 1/3, \end{cases} \quad \sqrt{\rho(B_0 B_1)} = \frac{\beta + \sqrt{4\beta - 7\beta^2}}{2}.$$

Доказательства этих утверждений см. в [39]. Таким образом, глобальная гладкость α_v , а также границы для локальной гладкости $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$ явно вычисляются для каждого β . При изменении β от 0 до $\frac{1}{4}$ показатель α_v монотонно возрастает от 0 до 1, затем монотонно убывает до точки $\beta = \frac{4+\sqrt{2}}{14} = 0.3867\dots$, в которой $\alpha_v = 0.8706\dots$, далее вновь монотонно возрастает, и при $\beta \rightarrow 0.5$ имеем $\alpha_v \rightarrow 1$. Таким образом, только при $\beta = \frac{1}{4}$ гладкость равна 1 (в этом случае кривая де Рама является сегментом параболы), при остальных β имеем $\alpha_v < 1$. Более того, из теоремы 5 следует, что $\alpha_v(x) = \alpha_v$ на всюду плотном множестве x , следовательно, ни при каком $\beta \neq \frac{1}{4}$ кривая де Рама не является кусочно дифференцируемой.

Поскольку валентность равна 1, то $\omega(v, t) \asymp t^{\alpha_v}$.

Несложно показать, что $\rho_1 = \frac{1}{2}$, откуда $\alpha_{v,1} = 1$ для любого β . Для всех $\beta \neq \frac{1}{4}$ имеем $\check{\rho} \neq \hat{\rho}$, следовательно, $\alpha_{\min} < \alpha_{\max}$, и значения локальной гладкости заполняют отрезок. Локальная гладкость вычисляется по формуле $\alpha_v(x) = -\log_2 \hat{\rho}_x$, которая верна для всех точек x , а не только для нормальных (можно показать, что условие (15) в данном случае выполнено при любом β). Во всех рациональных точках гладкость эффективно вычисляется с помощью предложения 3. Из формул для $\check{\rho}$ и $\hat{\rho}$ следует, что при $\beta \leq \frac{1}{4}$ наименьшая локальная гладкость достигается в двоично-рациональных точках x , а наибольшая – в точках вида $x = \frac{p}{3 \cdot 2^k}$ ($p \not\equiv 0 \pmod{3}$), т. е. в рациональных точках с периодом (01). При $\beta > \frac{1}{4}$ все наоборот: наименьшая гладкость – в точках вида $x = \frac{p}{3 \cdot 2^k}$, а наибольшая – в двоично-рациональных точках. Заметим также, что в двоично-рациональных точках гладкости с двух сторон одинаковы.

Для средней гладкости α_{av} при каждом $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ имеем следующую оценку:

$$-\frac{1}{4} \log_2(\beta(1-2\beta)) \leq \alpha_{av} \leq -\frac{1}{3} \log_2(\beta(1-2\beta))$$

(см. [39]). Из этого неравенства, в частности, следует, что при $\beta \rightarrow 0$ и при $\beta \rightarrow \frac{1}{2}$ средняя гладкость стремится к $+\infty$. Для показателя Ляпунова операторов (20) существует интегральная формула, позволяющая приближенно вычислять среднюю гладкость α_{av} при любом β [39]. В работе [13] исследовалась хаусдорфова размерность множества точек x , в которых локальная гладкость принимает заданные значения (так называемая мультифрактальная размерность).

ПРИМЕР 7 (контрпример для случая вырожденного оператора). В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим аффинные операторы

$$\tilde{B}_0 u = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} u, \quad \tilde{B}_1 u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь $v_0 = (0, 0)^T$, $v_1 = (3, 1)^T$, при этом перекрестное условие выполнено. Любое произведение Π_k операторов B_0, B_1 имеет вид

$$\Pi_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & (\frac{3}{5})^{k-j} (\frac{2}{5})^j \end{pmatrix}, & \text{если } j \neq 0, \\ \begin{pmatrix} (\frac{2}{3})^k & * \\ 0 & (\frac{3}{5})^k \end{pmatrix}, & \text{если } j = 0, \end{cases}$$

где j – число сомножителей B_1 в произведении Π_k . Следовательно,

$$\min_{d_1, \dots, d_k} \rho(\Pi_k) = \left(\frac{2}{5}\right)^k, \quad \max_{d_1, \dots, d_k} \rho(\Pi_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k,$$

откуда $\check{\rho} = \frac{2}{5}$, $\hat{\rho} = \frac{2}{3}$.

Поскольку $\hat{\rho} < 1$, то данная пара операторов имеет непрерывную фрактальную кривую, $\alpha_v = -\log_2 \frac{2}{3}$. Локальная гладкость вычисляется по формуле $\alpha_v(x) = -\log_2 \hat{\rho}_x$ (теорема 4), однако ни формула гладкости в рациональных точках (предложение 3), ни утверждения о структуре множеств постоянной гладкости (теорема 5) не выполняются. В точке $x = 0$ имеем

$$\hat{\rho}_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \|B_0^k\|^{1/k} = \frac{2}{3},$$

а в точке $x = \frac{1}{2}$ имеем

$$\hat{\rho}_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \|B_1 B_0^k\|^{1/(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^k\right)^{1/(k+1)} = \frac{3}{5}.$$

Таким образом, $\alpha_v^+(0) = -\log_2 \frac{2}{3}$, а $\alpha_v^+(\frac{1}{2}) = -\log_2 \frac{3}{5}$, что противоречит формуле локальной гладкости в двоично-рациональных точках (предложение 3). Таким образом, изменив первую цифру в двоичном разложении числа x , мы изменили локальную гладкость. Значит, множество точек, в которых $\alpha_v(x) = -\log_2 \frac{2}{3}$, не является $(0, 1)$ -множеством. Более того, это множество вообще состоит из одной точки $x = 0$. Если $x \neq 0$, то в двоичном разложении x есть хотя бы одна единица (пусть $x_r = 1$), и тогда

$$\hat{\rho}_x \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|B_{x_r} B_{x_{r+1}} \cdots B_{x_{r+k-1}}\|^{1/k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|B_1 B_{x_{r+1}} \cdots B_{x_{r+k-1}}\|^{1/k}.$$

Все элементы матрицы $B_1 B_{x_{r+1}} \cdots B_{x_{r+k-1}}$ равны нулю, кроме одного элемента, стоящего во второй строке и втором столбце, он равен $(\frac{2}{5})^j (\frac{3}{5})^{k-j}$, где j – количество единиц среди чисел $x_{r+1}, \dots, x_{r+k-1}$. Таким образом, $\hat{\rho}_x \leq \frac{3}{5} (\frac{2}{3})^{j/k} \leq \frac{3}{5}$. Итак, $\alpha_v(0) = -\log_2 \frac{2}{3}$, а для всех ненулевых x будем иметь $\alpha_v(x) \geq -\log_2 \frac{3}{5}$. Поэтому значения локальной гладкости не заполняют весь отрезок $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. Фактически, множество значений локальной гладкости здесь $\{-\log_2 \frac{2}{3}\} \cup [-\log_2 \frac{3}{5}, -\log_2 \frac{2}{5}]$.

ПРИМЕР 8. Если пара операторов B_0, B_1 нильпотентна, т. е. некоторое произведение $B_{d_1} \cdots B_{d_r}$ равно нулю, то соответствующая фрактальная кривая $v(x)$ будет на множестве полной меры принимать счетное множество значений. На каждом двоичном интервале вида $[\beta_0, \beta_1]$, где $\beta_i = 0.x_1 \dots x_k d_1 \dots d_r i$, $i = 0, 1$, функция $v(x)$ постоянна. Сумма длин этих интервалов равна 1. Если при этом $\hat{\rho} < 1$ и выполнено перекрестное условие (7), то v будет непрерывной кривой канторовского типа. Здесь вновь не выполняется утверждение теоремы 5: ни для какого значения $\alpha_v(x)$, кроме $+\infty$, множество точек x , в которых гладкость принимает это значение, не является всюду плотным. Оно, более того, нигде не плотно на $[0, 1]$.

Следующий пример показывает, что даже если пара операторов B_0, B_1 не является нильпотентной, локальная гладкость $\alpha_v(x)$ может обращаться в $+\infty$ почти всюду.

ПРИМЕР 9. Рассмотрим последовательность $a_1 = 4$, $a_{k+1} = 2^{3^{a_k}}$, $k \geq 1$, и положим $\gamma = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$. Ясно, что γ иррационально. Пусть S_0 – поворот евклидовой плоскости на угол γ , S_1 – оператор ортогональной проекции на ось x . Положим $B_i = \lambda^{-1} S_i$, $i = 0, 1$, где λ – наибольшее собственное значение оператора $S_0 + S_1$. Поскольку $\lambda > 1$, то оба оператора B_i сжимающие (в евклидовой норме), поэтому $\hat{\rho}(B_0, B_1) < 1$. Кроме того, оператор $B_0 + B_1$ имеет собственное значение 1, а значит, перекрестное условие выполнено. Следовательно, по теореме 1 существует непрерывная фрактальная кривая $v(x)$, соответствующая аффинным операторам с линейными частями B_0, B_1 . Покажем, что $\bar{\rho}(B_0, B_1) = 0$. Для $m \geq 2$ имеем $\|B_1 B_0^{a_m} B_1\| = |\cos a_m \gamma|$. Поскольку

$$|\cos a_m \gamma| = \sin\left(\frac{\pi}{2} \sum_{k \geq m+1} \frac{a_m}{a_k}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{2a_m}{a_{m+1}}\right) < \frac{\pi a_m}{a_{m+1}} = \pi a_m 2^{-3^{a_m}},$$

имеем

$$\|B_1 B_0^{a_m} B_1\|^{1/(a_m+2)} < [\pi a_m 2^{-3^{a_m}}]^{1/(a_m+2)},$$

что эквивалентно $2^{-3^{a_m}/(a_m+2)}$ при больших m . Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\prod_{d_1, \dots, d_{a_m+2}} \|\Pi_{a_m+2}\| \right)^{1/(2^{a_m+2}(a_m+2))} &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|B_1 B_0^{a_m} B_1\|^{1/(2^{a_m+2}(a_m+2))} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} 2^{-3^{a_m}/(2^{a_m+2}(a_m+2))} = \lim_{m \rightarrow \infty} 2^{-(\frac{3}{2})^{a_m}/(4(a_m+2))} = 0. \end{aligned}$$

Это в силу определения 6 означает, что $\bar{\rho}(B_0, B_1) = 0$. Следовательно, $\alpha_v(x) = +\infty$ для почти всех $x \in [0, 1]$, несмотря на то, что v не является кривой канторовского типа. Так как число γ иррационально, то пара операторов B_0, B_1 не является нильпотентной. Поэтому кривая v не является постоянной ни на каком интервале.

§ 10. Гладкие фрактальные кривые

Как обычно, через $C^l[0, 1]$ обозначаем пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$, $C^0[0, 1] = C[0, 1]$. Через $W_p^l[0, 1]$, $l \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$ обозначаем пространство Соболева, состоящее из определенных на $[0, 1]$ функций, $(l-1)$ -я производная которых абсолютно непрерывна и l -я производная принадлежит L_p . Положим также $W_p^0 = L_p$. Ясно, что $W_p^l[0, 1] \subset W_q^l[0, 1]$ при $p > q$.

Следствие 3 дает условия принадлежности фрактальной кривой классу липшицевых функций. Получим теперь условия на дифференцируемость. Ключевой факт состоит в том, что производная фрактальной кривой сама является фрактальной кривой в пространстве меньшей размерности.

Если фрактальная кривая дифференцируема, то она, конечно, непрерывна, поэтому (теорема 3) операторы $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ имеют по единственной неподвижной точке v_0, v_1 и выполнено перекрестное условие (7). Обозначим через $\tilde{V}$ наименьшее общее инвариантное аффинное подпространство операторов $2B_0, 2B_1$, содержащее вектор $v_1 - v_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Непрерывная фрактальная кривая $v(x)$ имеет суммируемую производную тогда и только тогда, когда 1-радиус ρ_1 операторов B_0, B_1 ,*

ограниченных на подпространство V , меньше $\frac{1}{2}$. При этом ее производная v' является фрактальной кривой операторов $2B_0, 2B_1$ на пространстве $\tilde{V}$ и $\dim \tilde{V} = n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $v \in W_1^1$, то, дифференцируя уравнение (1), получим

$$v'(x) = 2B_i v'(2x - i), \quad x \in \left[\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2} \right], \quad i = 0, 1.$$

Таким образом, v' – фрактальная кривая операторов $2B_0, 2B_1$, ограниченных на их общее инвариантное аффинное подпространство $\tilde{V}_0$. Это подпространство содержит вектор $\int_0^1 v'(x) dx = v_1 - v_0$, значит, содержит $\tilde{V}$. Следовательно, оно совпадает с $\tilde{V}$ (замечание 1). Из теоремы 1 следует, что $\rho_1(B_{0|V}, B_{1|V}) < \frac{1}{2}$. Однако $\rho_1(B_0, B_1) \geq \frac{1}{2}$ (замечание 2), поэтому $V \neq \mathbb{R}^n$ и, значит, $\dim V \leq n - 1$. С другой стороны, $v(x) = v_0 + \int_0^x v'(t) dt$, поэтому аффинная оболочка пространства $\tilde{V}$ и точки v_0 совпадает со всем $\mathbb{R}^n$, откуда $\dim V \geq n - 1$. Следовательно, $\dim V = n - 1$.

Обратно, если $\rho_1(B_{0|V}, B_{1|V}) < \frac{1}{2}$, то согласно теореме 1 операторы $2B_0, 2B_1$, ограниченные на пространство $\tilde{V}$, будут иметь фрактальную кривую. Ее первообразная является фрактальной кривой исходных операторов B_0, B_1 и в силу единственности совпадает с v .

Так же доказывается, что непрерывная фрактальная кривая принадлежит $C^1[0, 1]$ тогда и только тогда, когда ограничения операторов $2B_0, 2B_1$ на пространство $\tilde{V}$ имеют непрерывную фрактальную кривую. В силу теоремы 3 это означает, что исходные операторы B_0, B_1 имеют простое собственное значение $\frac{1}{2}$, причем соответствующие собственные векторы v'_0, v'_1 удовлетворяют перекрестному условию $B_0 v'_1 = B_1 v'_0$, а совместный спектральный радиус этих операторов, ограниченных на подпространство $V_{v'_1 - v'_0}$, меньше $\frac{1}{2}$.

ПРИМЕР 10. Кривая де Рама (пример 6) ни при каком β , кроме $\beta = \frac{1}{4}$, не имеет суммируемой производной. Действительно, для операторов (20) при каждом $\beta \neq \frac{1}{4}$ имеем $v_1 - v_0 = (1, 1)^T$ и $\tilde{V} = \mathbb{R}^2$. Поэтому $v \notin W_1^1$ в силу предложения 4.

Заметим, что аффинное подпространство $\tilde{V}$ не содержит нуля, иначе операторы $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ имели бы общее инвариантное аффинное подпространство $v_0 + V$, что противоречит их неприводимости. Следовательно, сопряженные операторы B_i^* , $i = 0, 1$, имеют общий собственный вектор, соответствующий собственному значению $\frac{1}{2}$. Возьмем этот вектор в качестве первого базисного вектора в $\mathbb{R}^n$, а остальные базисные векторы выберем из подпространства V произвольно. В этом базисе матрицы наших операторов имеют вид

$$B_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ * & D_i & & \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1,$$

где $D_i = B_{i|V} - ((n-1) \times (n-1))$ -матрицы, $i = 0, 1$. Согласно предложению 4 имеем $\rho_1(D_0, D_1) < \frac{1}{2}$. Поскольку пара операторов $2B_0, 2B_1$ на аффинном пространстве $\tilde{V}$ неприводима (замечание 1), то, применяя индукцию, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Непрерывная фрактальная кривая $v(x)$ принадлежит классу W_1^l , $l \geq 1$, тогда и только тогда, когда:

1) операторы B_i имеют собственные значения $\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^l}$, а соответствующие собственные векторы $v_i^{(k)}$, $k = 1, \dots, l-1$, $i = 0, 1$, удовлетворяют перекрестному условию $B_0 v_1^{(k)} = B_1 v_0^{(k)}$;

2) матрицы операторов B_0, B_1 в подходящем базисе имеют вид

$$B_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & \frac{1}{2^l} & 0 & \dots & 0 \\ & * & & D_i & & \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \quad (21)$$

причем $\rho_1(D_0, D_1) < 2^{-l}$. Производная $v^{(l)}$ является фрактальной кривой неприводимой пары операторов $2^l B_0, 2^l B_1$ на $(n-l)$ -мерном аффинном пространстве $\tilde{V} = \{(0, \dots, 0, 1, u_{l+1}, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n, u_j \in \mathbb{R}\}$.

Применяя теперь теорему 2, получаем формулы для показателя Гёльдера l -й производной $v^{(l)}(x)$ в пространстве L_p , а также оценки на модули непрерывности. При этом $\rho_p = 2^l \rho_p(D_0, D_1)$ и числа s, i – соответствующие показатели матриц D_0, D_1 . Теоремы 4 и 5 применимы для изучения локальной гладкости производной $v^{(l)}$.

ТЕОРЕМА 7. Непрерывная фрактальная кривая $v(x)$ принадлежит классу C^l тогда и только тогда, когда операторы B_i имеют простые собственные значения $\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^l}$, соответствующие собственные векторы $v_i^{(k)}$, $k = 1, \dots, l$, $i = 0, 1$, удовлетворяют перекрестному условию $B_0 v_1^{(k)} = B_1 v_0^{(k)}$, матрицы операторов в подходящем базисе имеют вид (21), причем $\hat{\rho}(D_0, D_1) < 2^{-l}$.

Показателем Гёльдера производной $v^{(l)}$ является $\alpha = -l - \log_2 \hat{\rho}(D_0, D_1)$, а модуль непрерывности удовлетворяет оценке

$$C_1 t^\alpha \leq \omega(v^{(l)}, t) \leq C_2 t^\alpha |\ln t|^{s-1},$$

где s – валентность матриц D_0, D_1 .

Гладкостью функции $v \in L_p$ в пространстве L_p назовем величину $m + \alpha_{v^{(m)}, p}$, где m – наибольшее целое число, для которого $v \in W_p^m$. Так же определяется гладкость в C . Из теорем 6 и 7 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Если фрактальная кривая принадлежит W_p^l , $p < \infty$, или C^l , то ее гладкость в соответствующем пространстве строго больше l .

Если в формуле (21) положить $l = n$, то и матрицы B_i становятся нижнетреугольными с элементами $\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}$ на диагонали. “Аффинное пространство” $\tilde{V}$, в котором будет расположена n -я производная $v^{(n)}$, будет иметь размерность нуль, т.е. выродится в точку, а сама производная – в тождественную константу. Исходная кривая, таким образом, является n -й первообразной константы, т.е. полиномиальной кривой степени не выше n . Полиномиальной кривой степени r называется функция $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, все координатные функции которой – алгебраические полиномы на $[0, 1]$ и наибольшая степень этих полиномов равна r .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Гладкость n -мерной фрактальной кривой либо строго меньше n , либо бесконечна. В последнем случае кривая является полиномиальной степени n . При этом существует базис, в котором матрицы операторов B_0 и B_1 верхнетреугольные с диагональными элементами $\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}$; k -я компонента кривой в этом базисе является полиномом степени k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если гладкость больше или равна n , то по следствию 4 показатель Гёльдера одномерной кривой $v^{(n-1)}(x)$ в пространстве L_1 равен 1. Учитывая пример 4, где классифицированы все одномерные фрактальные кривые, получаем, что функция $v^{(n-1)}(x)$ линейна. Следовательно, ее $(n-1)$ -я первообразная $v(x)$ является полиномиальной кривой степени n . Далее применяем теорему 6.

В заключение отметим, что любая полиномиальная кривая является фрактальной. В самом деле, из тождественной константы за n переходов к первообразной можно получить любую полиномиальную кривую степени n .

§ 11. Применения к масштабирующим функциям

Масштабирующим уравнением с конечным числом слагаемых называется функциональное разностное уравнение с двоичным сжатием аргумента:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi(2x - k), \quad (22)$$

где $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – искомая финитная функция, $\{c_0, \dots, c_N\}$ – произвольная последовательность комплексных коэффициентов. Масштабирующие уравнения применяются в теории всплесков, теории приближений, теории вероятностей, математической физике и компьютерном дизайне. Наиболее известными масштабирующими функциями являются В-сплайны, функции Добеши, интерполяционные функции Деларье–Дюбука. Тесно связаны с ними кривые де Рама и функции Рвачева (обширная библиография по масштабирующим уравнениям может быть найдена, например, в [18], [30], [43]).

Не ограничивая общности, с возможным сдвигом аргумента, можно считать, что $c_0 c_N \neq 0$. Известно [7], [44], что если уравнение (22) имеет суммируемое решение φ , то $\text{supp } \varphi \subset [0, N]$, причем общий случай легко сводится к случаю $\sum c_k = 2$. При этом условии суммируемое решение (если существует) единственно. Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что масштабирующее уравнение (22) эквивалентно уравнению $v_\varphi(x) = T_i v_\varphi(2x - i)$, $x \in [\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}]$, $i = 0, 1$, на вектор-функцию $v_\varphi(x) = (\varphi(x), \dots, \varphi(x + N - 1))^T \in \mathbb{R}^N$, где операторы T_i определяются своими $(N \times N)$ -матрицами следующим образом:

$$(T_i)_{jk} = c_{2j-k-i+1}, \quad 1 \leq j, k \leq N \quad (23)$$

(такие матрицы принято называть *теплицевыми*, соответствующими последовательности $c_0, \dots, c_N$; также полагаем $c_k = 0$ при $k < 0$ и при $k > N$). Таким образом, масштабирующая функция соответствует фрактальной кривой $v_\varphi(x)$, заданной аффинными операторами $\tilde{B}_i = T_i|_{\tilde{V}}, T_1|_{\tilde{V}}$, где $\tilde{V}$ – наименьшее общее аффинное инвариантное подпространство операторов T_0, T_1 , содержащее точку $c = \int_0^1 v_\varphi(x) dx$.

Следовательно, все результаты о гладкости фрактальных кривых применимы к масштабирующим функциям. В частности, теоремы 1–3 и 6, 7 дают критерии принадлежности масштабирующей функции пространствам L_p , C , W_p^l , C^l и формулы для показателей гладкости в этих пространствах. Эти результаты для масштабирующих функций были получены ранее, в работах [8], [17],

[19], [21]. Мы добавим к ним оценки на модули непрерывности и исследования локальной гладкости. Для этого используем несколько специфических свойств теплицевых матриц T_i . Во-первых, они всегда удовлетворяют перекрестному условию (7); см. [7]. Следовательно, $\alpha_{\varphi,p} = -\log_2 \rho_p$, где ρ_p — p -радиус операторов $T_i|_V$ (теорема 2). Кроме того, нам понадобится следующий результат, доказанный в работе [45].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\varphi \in L_1$ — масштабирующая функция, и пусть m — наибольшее число, для которого $\varphi \in W_1^m$. Тогда в пространстве V существует базис, в котором матрицы операторов $B_i = T_i|_V$ имеют вид (21), при этом $l \geq m$, а операторы D_0, D_1 невырождены и не имеют общих собственных линейных подпространств.

Из этого следует, что если $\rho_p(D_0, D_1) = 2^{-k}$ для некоторого $k \leq m$, то валентность s операторов B_0, B_1 равна 1, в противном случае $s = 0$. Применив формулу для показателя Гёльдера, получаем, что если для данного p имеем $\alpha_{\varphi,p} = 1$, то $s = 1$, в противном случае $s = 0$. Таким образом, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть масштабирующая функция φ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$. Тогда если $\alpha_{\varphi,p} < 1$, то $\omega(\varphi, t)_p \asymp t^\alpha$, а если $\alpha_{\varphi,p} = 1$, то

$$C_1 t^\alpha \leq \omega(\varphi, t)_p \leq C_2 |\ln t| t^\alpha.$$

Применяя теоремы 6 и 7, получаем, что такая же оценка верна для модулей непрерывности производных $\varphi^{(k)}$ масштабирующих функций.

Через $\hat{\rho}_x, \hat{\rho}, \check{\rho}$ и $\bar{\rho}$ обозначим соответствующие спектральные характеристики операторов $B_i = T_i|_V$, $i = 0, 1$. Поскольку эти операторы невырождены (предложение 6), то можно применить теорему 5 и предложение 3. Используя обозначения теоремы 5, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\varphi(x) \in C(\mathbb{R})$ — масштабирующая функция и $v(x) = v_\varphi(x)$ — соответствующая кривая. Тогда показатель локальной гладкости $\alpha_v(x)$ в каждой точке x не превосходит $-\log_2 \hat{\rho}_x$, а в нормальных точках равен этой величине. В рациональных точках x показатель $\alpha_v(x)$ вычисляется с помощью предложения 3.

В любой точке $x \in [0, 1]$ имеем $\alpha_v(x) \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. Для каждого значения $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ множество Ω_α непусто и является $(0, 1)$ -множеством. В частности, оно всюду плотно на $[0, 1]$. Для $\alpha = -\log_2 \bar{\rho}$ множество Ω_α имеет полную меру на отрезке $[0, 1]$, для всех остальных $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ — меру нуль.

Применяя теорему 6, несложно установить аналогичные утверждения о локальной гладкости производных $\varphi^{(k)}$ масштабирующих функций.

§ 12. Всплески с компактным носителем

Системой ортогональных всплесков на прямой называется полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, имеющая вид $\{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, где $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ — порождающая функция, называемая еще всплеск-функцией.

Если ψ финитна, то она порождает систему всплесков с компактным носителем. Для построения системы всплесков с компактным носителем нужно найти решение φ масштабирующего уравнения с некоторыми специальными условиями на коэффициенты c_k , затем вычислить всплеск-функцию ψ по формуле

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^N (-1)^{k+1} \bar{c}_{N-k} \varphi(2x - k).$$

По той же схеме, с использованием масштабирующих функций, получаются системы биортогональных всплесков и системы ортогонализированных всплесков [46], [47]. Во всех случаях всплеск-функции являются линейными комбинациями целочисленных сдвигов масштабирующих функций. Следовательно, всплески имеют ту же локальную и глобальную гладкость, что и масштабирующие функции. Предложения 7 и 8 о модулях непрерывности масштабирующих функций и об их локальной гладкости без изменений переносятся на всплески. В качестве примера мы применим эти результаты к наиболее изученным системам всплесков с компактным носителем – всплескам Добеши.

ПРИМЕР 11 (функция Добеши ψ_2). Всплеск-функция Добеши $\psi_2(x)$ (индекс 2 далее будем опускать) определяется с помощью масштабирующей функции φ , удовлетворяющей следующему уравнению:

$$\varphi(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \varphi(2x) + \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \varphi(2x - 1) + \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \varphi(2x - 2) + \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \varphi(2x - 3). \quad (24)$$

Операторы T_0, T_1 действуют в $\mathbb{R}^3$, $\tilde{V} = \{(x_1, x_2, x_3)^T, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ – двумерное подпространство. Операторы $B_i = T_{i|V}$, $i = 0, 1$, действующие в $\mathbb{R}^2$, приводятся к форме (21), где $l = 1$ и D_0, D_1 – одномерные операторы умножения на $a_0 = (1 + \sqrt{3})/4$ и $a_1 = (1 - \sqrt{3})/4$ соответственно. Результаты, полученные в § 11, позволяют провести полный анализ локальной и глобальной гладкости функции ψ . Так, $\alpha_\psi = -\log_2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) = 0.550\dots$. Следовательно, ψ непрерывна. Поскольку показатель гладкости не целый, получаем $\omega(\psi, t) \asymp t^{0.550\dots}$. Производная ψ' суммируема, но не из $L_2(\mathbb{R})$. В самом деле, $\alpha_{\psi',1} = 1 - \log_2 \sqrt{3} = 0.2075\dots$. С другой стороны, $\alpha_{\psi',2} = 1$, так что $\psi' \notin L_2(\mathbb{R})$.

Локальная гладкость в каждой нормальной точке x равна $-\log_2 \hat{\rho}_x$, при этом $\hat{\rho}_x = \max\{a_1^{r(x)} a_0^{1-r(x)}, \frac{1}{2}\}$ (применили формулу (19) к операторам D_i и перешли к операторам B_i). Применив предложение 3, для двоично-рациональных x получаем

$$\begin{aligned} \alpha_v^-(x) &= \min\left\{1 - \log_2 \frac{\sqrt{3}-1}{2}, 1\right\} = \min\{2.449\dots, 1\} = 1, \\ \alpha_v^+(x) &= \min\left\{1 - \log_2 \frac{\sqrt{3}+1}{2}, 1\right\} = \min\{0.550\dots, 1\} = 0.550\dots \end{aligned}$$

Итак, во всех двоично-рациональных точках правая производная бесконечна. При этом левая производная определена и конечна. При всевозможных $x \in [0, 1]$ величина $\alpha_v(x)$ заполняет отрезок $[1 - \log_2 \frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1] = [0.550, 1]$. Наконец, так как $\psi \in W_1^1$, то средняя гладкость равна 1.

ПРИМЕР 12 (третья всплеск-функция Добеши ψ_3). Эта функция определяется по масштабирующей функции φ , удовлетворяющей уравнению (22) с коэффициентами

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{16} \left[1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right], \\ c_1 &= \frac{1}{16} \left[5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right], \\ c_2 &= \frac{1}{16} \left[10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right], \\ c_3 &= \frac{1}{16} \left[10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right], \\ c_4 &= \frac{1}{16} \left[5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right], \\ c_5 &= \frac{1}{16} \left[1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

В данном случае имеем $\tilde{V} = \{(x_1, \dots, x_5)^T, \sum x_j = 1\}$. Операторы B_0, B_1 приводятся к виду (21) с $l = 2$ и

$$D_0 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3.764 & 0 \\ 0.399 & 2.162 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2.162 & 3.764 \\ 0 & 0.399 \end{pmatrix}$$

(коэффициенты даем приближенно). Имеем $\hat{\rho}(D_0, D_1) = 0.470 \dots$ [8]. Поскольку $\hat{\rho} < \frac{1}{2}$ то согласно теореме 7 $\psi \in C^1$ и $\alpha_{\psi'} = -1 - \log_2 0.470 = 0.088$. В силу предложения 7 имеем $\omega(\psi', t) \asymp t^{0.088}$. Наименьшую гладкость функция ψ имеет в двоично-рациональных точках. В самом деле, $\alpha_{\psi'}^+(x) = -1 - \log_2 \rho(D_0) = 0.088$. При этом $\alpha_{\psi'}^-(x) = -1 - \log_2 \rho(D_1) = 0.887$. Как видим, в двоично-рациональных точках гладкости слева и справа различны. Гладкость слева равна минимальной локальной гладкости функции ψ' . Оказывается, что гладкость справа равна максимальной гладкости. Иными словами, $\check{\rho}(D_0, D_1) = \rho(D_0) = 0.470 \dots$. Для того чтобы это показать, воспользуемся следующим фактом, доказанным в [39]. Если для некоторого $\lambda > 0$ и замкнутого множества $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$, не содержащего нуля, имеем $D_i \mathcal{Q} \subset \lambda \mathcal{Q}$, $i = 0, 1$, то $\check{\rho} \geq \lambda$. Возьмем $\lambda = \rho(D_0)$. Тогда в качестве $\mathcal{Q}$ подходит объединение двух углов: первый имеет вершину в точке $(1, 0)$ и стороны, сонаправленные векторам $(5, 1)$ и $(5, -1)$; второй симметричен ему относительно начала координат. Получаем $\check{\rho} \geq \rho(D_0)$. С другой стороны, очевидно, $\check{\rho} \leq \rho(D_0)$. Следовательно, $\check{\rho} = \rho(D_0)$.

Таким образом, локальная гладкость функции $\psi'(x)$ в каждой точке не превосходит $0.887 \dots$. В частности, $\psi'(x)$ нигде не дифференцируема. Значения локальной гладкости заполняют отрезок $[0.088, 0.887]$.

ПРИМЕР 13 (всплеск-функция Добеши ψ_4). Соответствующее масштабирующее уравнение степени $N = 7$ имеет коэффициенты

$$\begin{aligned} c_0 &= 0.325802, & c_4 &= -0.264507, \\ c_1 &= 1.010945, & c_5 &= 0.043616, \\ c_2 &= 0.892200, & c_6 &= -0.046503, \\ c_3 &= -0.039575, & c_7 &= -0.014976. \end{aligned} \quad (26)$$

Для него $l = 3$, (3×3) -матрицы D_0, D_1 определяются формулами (23) с коэффициентами (приближенно)

$$c_0 = 0.326, \quad c_1 = -0.292, \quad c_2 = 0.106, \quad c_3 = -0.015.$$

Оказывается, что $\hat{\rho}(D_0, D_1) = \rho(D_0) = 0.326 \dots$ [8]. Таким образом, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ и $\alpha_{\psi'} = -1 - \log_2 0.326 = 0.618 \dots$. Так как показатель не целый, то $\omega(\psi', t) \asymp t^{0.618}$. При этом наименьшая гладкость $\psi'(x)$ достигается в двоично-рациональных точках справа. Гладкость в тех же точках слева равна $\alpha_v^+(x) = -1 - \log_2 \rho(D_1) = 0.851 \dots$. Для нижнего спектрального радиуса имеем, например, оценку

$$\check{\rho} \leq \min_{d_1, \dots, d_6 \in \{0,1\}^6} \|D_{d_1} \cdots D_{d_6}\|^{1/6} = \|D_0^3 D_1 D_0 D_1\|^{1/6} = 0.244 \dots$$

Поскольку $-\log_2 0.244 = 2.034 \dots$, наибольшая локальная гладкость функции ψ' равна 1. В частности, ψ дважды дифференцируема на всюду плотном множестве точек, например во всех рациональных точках x с периодом (000101). Однако функция ψ не имеет суммируемой второй производной. Согласно теореме 6 это означает, что $\rho_1(D_0, D_1) \geq \frac{1}{4}$. Для того чтобы это показать, заметим сначала, что $\rho_1(D_0, D_1) = \rho_1(D_0, -D_1) \geq \rho(\frac{1}{2}(D_0 - D_1))$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\rho(\frac{1}{2}(D_0 - D_1)) = 0.309 \dots > \frac{1}{4}$. Итак, $\psi \notin W_1^2$ и $\alpha_{\psi',1} = -1 - \log_2 0.309 = 0.694 \dots$.

§ 13. Приложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1 И СЛЕДСТВИЯ 1. Достаточно провести доказательство для евклидовой нормы в $\mathbb{R}^n$. Также можно считать, что $V_u = \mathbb{R}^n$, иначе ограничим операторы на пространство V_u . Докажем оценку снизу в неравенстве (3). Так как u не принадлежит никакому общему собственному подпространству операторов B_0, B_1 , то среди $2^{n+1} - 1$ векторов $\{\Pi_k u, k \leq n\}$ можно выбрать n векторов $\Pi_{k_j} u, j = 1, \dots, n$, составляющих базис $\mathbb{R}^n$. Далее, согласно лемме 3 p -радиус ρ_p равен p -радиусу одного из блоков B_0^j, B_1^j разложения (2). Пусть данный блок занимает строки и столбцы с номерами $r, \dots, r+d$. Положим $L_j = \{(y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n, y_k = 0, k \notin \{r, \dots, r+d\}\}$. В евклидовой норме для любого $y \in L_j$ и для любого произведения $B_{d_1} \cdots B_{d_k}$ имеем $\|B_{d_1} \cdots B_{d_k} y\| \geq \|B_{d_1}^j \cdots B_{d_k}^j y\|$. Тогда, применяя лемму 2 к неприводимой паре операторов $\{B_0^j, B_1^j\}$, получаем

$$\|\Sigma_k(B_0, B_1, y)\|_p \geq \|\Sigma_k(B_0^j, B_1^j, y)\|_p \geq c_1(\rho_p)^k \quad (27)$$

для любого $y \in L_j$. Разложим вектор y по базису $\Pi_{k_i} u: y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Pi_{k_i} u$. Положим $\lambda = \max_i |\lambda_i|$. Применяя (27), получаем

$$\begin{aligned} c_1(\rho_p)^k &\leq \|\Sigma_k(y)\|_p = \left\| \Sigma_k \left(\sum_i \lambda_i \Pi_{k_i} u \right) \right\|_p \leq \sum_i |\lambda_i| \|\Sigma_k \Sigma_k(\Pi_{k_i} u)\|_p \\ &\leq \sum_i |\lambda_i| 2^{k_i/p} \|\Sigma_{k+k_i}(u)\|_p \leq \lambda 2^{n/p} \sum_i \|\Sigma_{k+k_i}(u)\|_p \end{aligned}$$

(мы учли, что $k_i \leq n$). Пусть максимальное слагаемое в сумме $\sum_i \|\Sigma_{k+k_i}(u)\|_p$ имеет номер j . Тогда

$$c_1(\rho_p)^k \leq n |\lambda| 2^{n/p} \|\Sigma_{k+k_j}(u)\|_p, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Подставляя в это неравенство $k = m - k_j$, получаем

$$\|\Sigma_m(u)\|_p \geq \frac{c_1}{n\lambda} 2^{-n/p} (\rho_p)^{m-k_j}$$

для любого $m \geq k_j$, что устанавливает нижнюю оценку в неравенстве (3), а значит, и в неравенстве (4).

Докажем теперь оценку сверху в неравенстве (4), из нее будет следовать и оценка сверху в (3). Проведем индукцию по числу блоков l в разложении (2). Для $l = 1$ утверждение содержится в лемме 2. Предположим, что утверждение верно для матриц, состоящих из $l - 1$ блоков. Пусть r_1 – размерность матрицы первого блока B_i^1 , $i = 0, 1$. Обозначим через D_i $(n \times n)$ -матрицу, первые r_1 строк и столбцов которой равны нулю, а остальные элементы совпадают с элементами матрицы B_i ; через C_i $(n \times n)$ -матрицу, элементы которой в пересечении первых r_1 строк и последних $n - r_1$ столбцов совпадают с элементами B_i (остальные равны нулю); наконец, матрицу, совпадающую с B_i (т. е. фактически с B_i^1) в пересечении первых r_1 строк и столбцов (остальные равны нулю), обозначим через A_i . Таким образом, $B_i = A_i + C_i + D_i$ и

$$\begin{aligned} B_{d_1} \cdots B_{d_k} &= D_{d_1} \cdots D_{d_k} + D_{d_1} \cdots D_{d_{k-1}} C_{d_k} + D_{d_1} \cdots D_{d_{k-2}} C_{d_{k-1}} A_{d_k} + \cdots \\ &\quad \cdots + D_{d_1} C_{d_2} A_{d_3} \cdots A_{d_k} + C_{d_1} A_{d_2} \cdots A_{d_k} + A_{d_1} \cdots A_{d_k}. \end{aligned}$$

Обозначив $M = \max\{\|C_0\|, \|C_1\|\}$, получаем

$$\|B_{d_1} \cdots B_{d_k}\| \leq \|D_{d_1} \cdots D_{d_k}\| + M \sum_{m=1}^k \left\| \prod_{q \leq m-1} D_{d_q} \right\| \left\| \prod_{q \geq m+1} A_{d_q} \right\| + \|A_{d_1} \cdots A_{d_k}\|,$$

откуда, воспользовавшись неравенством треугольника для l_p -нормы, выводим

$$\begin{aligned} \|\Sigma_k(B_0, B_1)\|_p &\leq \|\Sigma_k(D_0, D_1)\|_p \\ &\quad + M 2^{-1/p} \sum_{m=1}^k \|\Sigma_{m-1}(D_0, D_1)\|_p \|\Sigma_{k-m}(A_0, A_1)\|_p + \|\Sigma_k(A_0, A_1)\|_p. \end{aligned} \quad (28)$$

Положим $\lambda_1 = \rho_p(D_0, D_1)$, $\lambda_2 = \rho_p(A_0, A_1)$. Согласно лемме 3 имеем $\rho_p = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Согласно лемме 2 имеем $\|\Sigma_k(A_0, A_1)\|_p \leq c_2 \lambda_2^k$, а по предположению индукции имеем

$$\|\Sigma_k(D_0, D_1)\|_p \leq c_2 k^{s'-1} \lambda_1^k,$$

где s' – валентность матриц D_0, D_1 . Если $\lambda_1 > \lambda_2$, то $\rho_p = \lambda_1$, $s' = s$, и, применяя (28), получаем

$$\begin{aligned} \|\Sigma_k(B_0, B_1)\|_p &\leq c_2 k^{s-1} \lambda_1^k \\ &\quad + M 2^{-1/p} c_2^2 \sum_{m=1}^k (m-1)^{s-1} \lambda_1^{m-1} \lambda_2^{k-m} + c_2 \lambda_2^k \leq C k^{s-1} \lambda_1^k, \end{aligned}$$

где C – некоторая константа. Если $\lambda_1 < \lambda_2$, то $\rho_p = \lambda_2$, $s = 1$, и аналогично получаем $\|\Sigma_k(B_0, B_1)\|_p \leq C \lambda_2^k$. Наконец, если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $\rho_p = \lambda_1$, $s' = s - 1$, и из (28) выводим

$$\|\Sigma_k(B_0, B_1)\|_p \leq c_2 k^{s-2} \lambda_1^k + M 2^{-1/p} c_2^2 \sum_{m=1}^k (m-1)^{s-2} \lambda_1^{m-1} + c_2 \lambda_1^k \leq C k^{s-1} \lambda_1^k,$$

что завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Неравенство $\omega(v, t)_p \geq C_1 t^{-\log_2 \rho_p}$ непосредственно следует из оценки (6), поэтому $\alpha_v \leq -\log_2 \rho_p$.

Докажем теперь, что если $\rho_p < 2^{-1/p}$ и перекрестное условие (7) не выполнено, то $\omega(v, t)_p \geq C_1 t^{1/p}$ и, следовательно, $\alpha_v \leq 1/p$. Рассмотрим пока случай $p < \infty$. Имеем

$$\begin{aligned} \|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|_p^p &\geq \int_{1/2-2^{-k}}^{1/2} \|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|^p dx \\ &\geq 2^{1-p} \left\| \int_{1/2-2^{-k}}^{1/2} (v(x + 2^{-k}) - v(x)) dx \right\|^p \\ &= 2^{1-p-k} \|\tilde{B}_1 \tilde{B}_0^{k-1} c - \tilde{B}_0 \tilde{B}_1^{k-1} c\|^p, \end{aligned}$$

где, напомним, $c = \int_0^1 v(x) dx$. Поскольку $\rho_p < 2^{-1/p}$, то $\rho_\infty < 1$, следовательно, B_0, B_1 – сжимающие операторы в некоторой норме. Поэтому $\tilde{B}_i^{k-1} c \rightarrow v_i$ при $k \rightarrow \infty$, $i = 0, 1$. Следовательно,

$$\tilde{B}_1 \tilde{B}_0^{k-1} c - \tilde{B}_0 \tilde{B}_1^{k-1} c \rightarrow \tilde{B}_1 v_0 - \tilde{B}_0 v_1 \neq 0.$$

Тогда при больших k имеем

$$\|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|_p^p \geq C 2^{1-p-k},$$

где константа C не зависит от k . Возводя это неравенство в степень $1/p$, получим $\omega(v, 2^{-k})_p \geq C_1 2^{-k/p}$, что и требовалось. Заметим, что $C_1(p) = 2^{(1-p-k)/p} C^{1/p} \rightarrow \frac{1}{2}$ при фиксированном k и $p \rightarrow \infty$. Следовательно, неравенство выполнено и для $p = \infty$.

Итак, оценки снизу на модуль непрерывности доказаны. Докажем оценки сверху. Сначала рассмотрим случай $t = 2^{-k}$ и $p < \infty$. Имеем

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{1-2^{-k}} \|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{2^{-m}(2j+1)-2^{-k}}^{2^{-m}(2j+1)} \sum_{m=1}^k \sum_{j=0}^{2^{m-1}-1} \|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|^p dx \right)^{1/p} \\ &= 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{m=1}^k \sum_{d_1, \dots, d_{m-1}} \|\Pi_{m-1}(\tilde{B}_1 \tilde{B}_0^{k-m} v(x) - \tilde{B}_0 \tilde{B}_1^{k-m} v(x))\|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Таким образом, величина $\|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|_p$ не превосходит

$$2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{m=1}^k \sum_{d_1, \dots, d_{m-1}} \|\Pi_{m-1}(\tilde{B}_1 \tilde{B}_0^{k-m} v(x) - \tilde{B}_0 \tilde{B}_1^{k-m} v(x))\|^p dx \right)^{1/p}. \quad (29)$$

Аффинный оператор $\tilde{B}_i$ представляется в виде $\tilde{B}_i u = B_i u + a_i$, где $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1$. Тогда

$$\tilde{B}_1 \tilde{B}_0^{k-m} u = B_1 B_0^{k-m} u + B_1 \sum_{q=0}^{k-m-1} B_0^q a_0 + a_1,$$

и аналогично раскладывается произведение $\tilde{B}_1 \tilde{B}_0^{k-m} u$. Подставляя это разложение в (29) и применяя неравенство треугольника для L_p -нормы, получаем

$$\begin{aligned} \|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|_p &\leq 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{m=1}^k \sum_{d_1, \dots, d_{m-1}} \|\Pi_{m-1} B_1 B_0^{k-m} v(x)\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{m=1}^k \sum_{d_1, \dots, d_{m-1}} \|\Pi_{m-1} B_0 B_1^{k-m} v(x)\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + 2^{-k/p} \sum_{r=1}^k \left(\int_0^1 \sum_{m=1}^r \sum_{d_1, \dots, d_{m-1}} \|\Pi_{m-1} B_1 B_0^{r-m} a_0\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + 2^{-k/p} \sum_{r=1}^k \left(\int_0^1 \sum_{m=1}^r \sum_{d_1, \dots, d_{m-1}} \|\Pi_{m-1} B_0 B_1^{r-m} a_1\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{m=1}^r \sum_{d_1, \dots, d_{m-1}} \|\Pi_{m-1} a_0\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{m=1}^r \sum_{d_1, \dots, d_{m-1}} \|\Pi_{m-1} a_1\|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Оценим первый интеграл в данной сумме:

$$\begin{aligned} &2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{m=1}^k \sum_{d_1, \dots, d_{m-1}} \|\Pi_{m-1} B_1 B_0^{k-m} v(x)\|^p dx \right)^{1/p} \\ &= 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{d_1, \dots, d_k} \|\Pi_k v(x)\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{d_1, \dots, d_k} \|\Pi_k\| \|v(x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq \|\Sigma_k\|_p \left(\int_0^1 \|v(x)\|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Последнее в силу предложения 1 не превосходит $c_2(\rho_p)^k k^{s-1} (\int_0^1 \|v(x)\|^p dx)^{1/p}$. Оценив остальные интегралы, получаем, что величина $\|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|_p$ не превосходит

$$\begin{aligned} &2c_2 \left(\left(\int_0^1 \|v(x)\|^p dx \right)^{1/p} + \|a_0\| + \|a_1\| \right) (\rho_p)^k k^{s-1} \\ &\quad + 2c_2 (\|a_0\| + \|a_1\|) \sum_{m=1}^k 2^{-(k-m)/p} (\rho_p)^m m^{s-1}. \end{aligned}$$

В данном неравенстве при фиксированном k можно перейти к пределу при $p \rightarrow \infty$, поэтому оно верно и при $p = \infty$. При $\rho_p > 2^{-1/p}$ получаем

$$\|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|_p \leq C(\rho_p)^k k^{s-1},$$

при $\rho_p = 2^{-1/p}$ имеем $\|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|_p \leq C 2^{-k/p} k^s$, и при $\rho_p < 2^{-1/p}$ получаем $\|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|_p \leq C 2^{-k/p}$. Если в случае $\rho_p < 2^{-1/p}$ дополнительно

известно, что выполнено (7), то для произвольного $u \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned}\tilde{B}_1 \tilde{B}_0^{k-m} u - \tilde{B}_0 \tilde{B}_1^{k-m} u &= (\tilde{B}_1 \tilde{B}_0^{k-m} v_0 - \tilde{B}_0 \tilde{B}_1^{k-m} v_1) \\ &\quad + (B_1 B_0^{k-m} (u - v_0) - B_0 B_1^{k-m} (u - v_1)) \\ &= B_1 \tilde{B}_0^{k-m} (u - v_0) - B_0 B_1^{k-m} (u - v_1).\end{aligned}$$

Подставляя последнее равенство в (29), получаем

$$\begin{aligned}\|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|_p &\leq 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{m=1}^k \sum_{d_1, \dots, d_{m-1}} \|\Pi_{m-1} (B_1 B_0^{k-m} (v(x) - v_0) \right. \\ &\quad \left. - B_0 B_1^{k-m} (v(x) - v_1))\|^p dx \right)^{1/p} \\ &= 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{d_1, \dots, d_k} \|\Pi_k (v(x) - v_0)\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{d_1, \dots, d_k} \|\Pi_k (v(x) - v_1)\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{d_1, \dots, d_k} \|\Pi_k\|^p \|v(x) - v_0\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + 2^{-k/p} \left(\int_0^1 \sum_{d_1, \dots, d_k} \|\Pi_k\|^p \|v(x) - v_1\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \|\Sigma_k\|_p \left(\left(\int_0^1 \|v(x) - v_0\|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 \|v(x) - v_1\|^p dx \right)^{1/p} \right).\end{aligned}$$

Применяя предложение 1, получаем

$$\begin{aligned}\|v(x + 2^{-k}) - v(x)\|_p &\leq c_2 \left(\left(\int_0^1 \|v(x) - v_0\|^p dx \right)^{1/p} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^1 \|v(x) - v_1\|^p dx \right)^{1/p} \right) (\rho_p)^k k^{s-1}.\end{aligned}$$

Переходя к пределу, доказываем это неравенство также и для $p = \infty$.

Итак, оценки сверху в неравенстве (8) доказаны для $t = 2^{-k}$. Для перехода к произвольному $t \in (0, 1)$ разложим его в двоичной системе счисления: $t = 0.d_1 d_2 \dots$, и обозначим через r наименьший индекс, для которого $d_r = 1$. Тогда $t \geq 2^{-r}$ и

$$\begin{aligned}\|v(\cdot + t) - v(\cdot)\|_p &\leq \sum_{k \geq r} \|v(\cdot + 2^{-k}) - v(\cdot)\|_p \\ &\leq \sum_{k \geq r} C 2^{-k\alpha} k^{s-1} \leq C_2 2^{-r\alpha} r^{s-1} \leq C_2 t^\alpha |\ln t|^{s-1},\end{aligned}$$

что завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. По определению величины $\check{\rho}$ существует последовательность операторных произведений $\check{\Pi}_k$, $k \in \mathbb{N}$ (длина $\check{\Pi}_k$ равна k), для которой $\check{\beta}_k = \|\check{\Pi}_k\|^{1/k} \rightarrow \check{\rho}$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда $[\rho(\check{\Pi}_k)]^{1/k} \rightarrow \check{\rho}$ при $k \rightarrow \infty$ (напомним, что через ρ обозначен обычный спектральный радиус). Поскольку операторы невырождены, то можно считать, что при $k \geq 3$ каждое произведение $\check{\Pi}_k$ содержит оба оператора B_0, B_1 . Иначе домножим каждое из них справа на $B_0 B_1$, при этом свойство $\|\check{\Pi}_k\|^{1/k} \rightarrow \check{\rho}$ сохранится. Пользуясь тем, что $[\max \rho(\Pi_k)]^{1/k} \rightarrow \hat{\rho}$, находим последовательность произведений $\{\check{\Pi}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, для которой $\hat{\beta}_k = [\rho(\check{\Pi}_k)]^{1/k} \rightarrow \hat{\rho}$, $k \rightarrow \infty$. Вновь можем считать, что при всех достаточно больших k произведение $\hat{\Pi}_k$ содержит оба оператора B_0, B_1 . Если, например, существуют сколь угодно длинные произведения, не содержащие B_1 , то $\hat{\rho} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|B_0^k\|^{1/k} = \rho(B_0)$. Покажем, что существует такое $r \in \{1, \dots, n\}$, что $[\rho(B_0^{k-r} B_1^r)]^{1/k} \rightarrow \hat{\rho}$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда мы сможем положить $\hat{\Pi}_k = B_1^r B_0^{k-r}$, $k \geq r+1$.

Пусть λ – собственное значение B_0 , для которого $|\lambda| = \hat{\rho}$, и u – соответствующий собственный вектор (возможно, комплексный). Обозначим через $L \subset \mathbb{R}^n$ линейную оболочку всех корневых подпространств, соответствующих собственным значениям, по модулю меньшим $\hat{\rho}$. Ясно, что $L = \{v \in \mathbb{R}^n, B_0^k v = o(\hat{\rho}^k)\}$. Так как оператор B_1 невырожденный, то один из векторов $B_1 u, \dots, B_1^n u$ не принадлежит L . Пусть $B_1^r u \notin L$. Тогда $\rho(B_0^{k-r} B_1^r) \geq C|\lambda|^k$ для некоторого $C > 0$, что и требовалось доказать.

Теперь будем строить искомую последовательность операторов из произведений $\check{\Pi}_k, \hat{\Pi}_k$. Для этого возьмем две произвольные последовательности положительных чисел $\{\check{\varepsilon}_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{\hat{\varepsilon}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, стремящиеся к нулю. Берем произведение $\check{\Pi}_1$ (оно состоит из одного оператора) и наименьшее натуральное число p_1 , для которого

$$\|(\check{\Pi}_1)^{p_1}\|^{1/p_1} \leq \max\{a, \check{\beta}_1\} + \check{\varepsilon}_1.$$

Такое число обязательно найдется, поскольку

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|(\check{\Pi}_1)^p\|^{1/p} = \check{\beta}_1 \leq \max\{a, \check{\beta}_1\} < \max\{a, \check{\beta}_1\} + \check{\varepsilon}_1.$$

Тогда началом нашей последовательности будет $\check{\Pi}_1 \cdots \check{\Pi}_1$ (p_1 сомножителей). Далее будем обозначать одним и тем же символом произведение $\check{\Pi}_k$ и соответствующую конечную последовательность операторов. Итак, построен первый блок нашей последовательности, состоящий из p_1 операторов. Теперь берем произведение $\hat{\Pi}_1$ и наименьшее натуральное число q_1 , для которого

$$\|(\check{\Pi}_1)^{p_1} (\hat{\Pi}_1)^{q_1}\|^{1/(p_1+q_1)} \geq \min\{a, \hat{\beta}_1\} - \hat{\varepsilon}_1.$$

Такое число обязательно найдется, поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} \|(\check{\Pi}_1)^{p_1} (\hat{\Pi}_1)^q\|^{1/(p_1+q)} &= \lim_{q \rightarrow \infty} \|(\hat{\Pi}_1)^q\|^{1/(p_1+q)} \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \|(\hat{\Pi}_1)^q\|^{1/q} = \hat{\beta}_1 \geq \min\{a, \hat{\beta}_1\} > \min\{a, \hat{\beta}_1\} - \hat{\varepsilon}_1. \end{aligned}$$

Первое равенство в данной цепочке следует из того, что оператор $(\check{\Pi}_1)^{p_1}$ невырожден, а значит, $\|(\check{\Pi}_1)^{p_1} (\hat{\Pi}_1)^q\| \geq C \|(\hat{\Pi}_1)^q\|$ для некоторой константы C , не зависящей от q . Построен второй блок последовательности $\hat{\Pi}_1 \cdots \hat{\Pi}_1$, состоящий

из q_1 операторов. Третий блок строится аналогично первому, но с использованием $\check{\Pi}_2, \check{\beta}_2, \check{\varepsilon}_2$ вместо $\check{\Pi}_1, \check{\beta}_1, \check{\varepsilon}_1$ соответственно. Третий блок: $\check{\Pi}_2 \cdots \check{\Pi}_2$ (p_2 сомножителей), где p_2 – наименьшее натуральное число, для которого

$$\|(\check{\Pi}_1)^{p_1}(\hat{\Pi}_1)^{q_1}(\check{\Pi}_2)^{p_2}\|^{1/(p_1+q_1+2p_2)} \leq \max\{a, \check{\beta}_2\} + \check{\varepsilon}_2.$$

Такое число существует, поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \|(\check{\Pi}_1)^{p_1}(\hat{\Pi}_1)^{q_1}(\check{\Pi}_2)^p\|^{1/(p_1+q_1+2p)} \\ \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|(\check{\Pi}_1)^{p_1}(\hat{\Pi}_1)^{q_1}\|^{1/(p_1+q_1+2p)} \|(\check{\Pi}_2)^p\|^{1/(p_1+q_1+2p)} \\ = \lim_{p \rightarrow \infty} \|(\check{\Pi}_2)^p\|^{1/(p_1+q_1+2p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|(\check{\Pi}_2)^p\|^{1/(2p)} = \check{\beta}_2 < \max\{a, \check{\beta}_2\} + \check{\varepsilon}_2. \end{aligned}$$

Четвертый блок: $\hat{\Pi}_2 \cdots \hat{\Pi}_2$ (q_2 сомножителей), q_2 – наименьшее натуральное число, для которого

$$\|(\check{\Pi}_1)^{p_1}(\hat{\Pi}_1)^{q_1}(\check{\Pi}_2)^{p_2}(\hat{\Pi}_2)^{q_2}\|^{1/(p_1+q_1+2p_2+2q_2)} \geq \min\{a, \hat{\beta}_2\} - \hat{\varepsilon}_2.$$

Существование такого числа доказывается так же, как для второго блока. Продолжая построение, мы в результате получаем последовательность

$$(x) = \check{\Pi}_1^{p_1} \hat{\Pi}_1^{q_1} \cdots \check{\Pi}_k^{p_k} \hat{\Pi}_k^{q_k} \cdots$$

(через Π^m обозначаем последовательность $\Pi \cdots \Pi$ из m элементов). Эта последовательность нормальна. Докажем, что $\hat{\rho}_x = a$. Будем для краткости обозначать $\Pi_m = B_{x_1} \cdots B_{x_m}$.

1) Покажем, что $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|\Pi_m\|^{1/m} \geq a$. Для этого возьмем последовательность

$$m_k = p_1 + q_1 + \cdots + p_k + q_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\|\Pi_m\|^{1/m_k} = \|\check{\Pi}_1^{p_1} \cdots \check{\Pi}_k^{p_k} \hat{\Pi}_k^{q_k}\|^{1/m_k}$, а это по построению не меньше, чем $\min\{a, \hat{\beta}_k\} - \hat{\varepsilon}_k$. Таким образом,

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|\Pi_m\|^{1/m} \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Pi_{m_k}\|^{1/m_k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} [\min\{a, \hat{\beta}_k\} - \hat{\varepsilon}_k] = \min\{a, \hat{\rho}\} = a,$$

поскольку $\hat{\varepsilon}_k \rightarrow 0$, $\hat{\beta}_k \rightarrow \hat{\rho}$.

2) Покажем, что $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|\Pi_m\|^{1/m} \leq a$. Положим $b = \max\{1, \|B_0\|, \|B_1\|\}$. Рассмотрим два случая.

а) Последний оператор B_{x_m} принадлежит произведению $\hat{\Pi}_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Иначе говоря,

$$p_1 + q_1 + \cdots + kp_k < m \leq p_1 + q_1 + \cdots + kp_k + kq_k.$$

Обозначим $n_k = p_1 + q_1 + \cdots + kp_k$. Заметим, что $\|\Pi_{n_k}\|^{1/n_k} \leq \max\{a, \check{\beta}_k\} + \check{\varepsilon}_k$. Кроме того, $n_k \geq k^2$, поскольку $n_k \geq 2 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2(k-1) + k = k^2$.

Предположим сначала, что $m \leq n_k + q_k$, т.е. B_{x_m} принадлежит первому произведению в блоке $\hat{\Pi}_k \cdots \hat{\Pi}_k$. Тогда

$$\begin{aligned} \|B_{x_1} \cdots B_{x_m}\| &= \|\Pi_{n_k} B_{x_{n_k+1}} \cdots B_{x_m}\| \leq \|\Pi_{n_k}\| \|B_{x_{n_k+1}} \cdots B_{x_m}\| \\ &\leq [\|\Pi_{n_k}\|^{1/n_k}]^{n_k} b^{m-n_k} \leq [\max\{a, \check{\beta}_k\} + \check{\varepsilon}_k]^{n_k} b^{m-n_k}. \end{aligned}$$

Заметим, что $m - n_k \leq k$, а с другой стороны, $m \geq k^2$, поэтому

$$b^{(m-n_k)/m} \leq b^{1/k} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty.$$

Аналогично, $1 - 1/k \leq n_k/m \leq 1$, а кроме того, $\max\{a, \check{\beta}_k\} + \check{\varepsilon}_k \rightarrow a$, $k \rightarrow \infty$. Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$[\max\{a, \check{\beta}_k\} + \check{\varepsilon}_k]^{n_k} b^{m-n_k} \leq (a + \varepsilon)^m$$

при всех достаточно больших k . Итак, в данном случае $\|B_{x_1} \cdots B_{x_m}\|^{1/m} \leq a + \varepsilon$ при больших k .

Теперь предположим, что $m > n_k + q_k$. Пусть s – наибольшее целое число, для которого $m > n_k + sq_k$, т.е. B_{x_m} принадлежит $(s + 1)$ -му произведению в блоке $\hat{\Pi}_k \cdots \hat{\Pi}_k$. По построению последовательности (x) имеем $\|\Pi_{n_k+sq_k}\|^{1/(n_k+sq_k)} < \min\{a, \check{\beta}_k\} + \check{\varepsilon}_k$ (поскольку обратное неравенство было бы выполнено, только если $\hat{\Pi}_s$ – последнее произведение в блоке, а оно не последнее). Тогда

$$\begin{aligned} \|\Pi_m\| &= \|\Pi_{n_k+sq_k} B_{x_{n_k+sq_k+1}} \cdots B_{x_m}\| \leq \|\Pi_{n_k+sq_k}\| \|B_{x_{n_k+sq_k+1}} \cdots B_{x_m}\| \\ &\leq [\min\{a, \check{\beta}_k\} + \check{\varepsilon}_k]^{n_k+sq_k} b^{m-n_k-sq_k}. \end{aligned}$$

Поскольку $m \geq k^2$ и $m - n_k - sq_k \leq k$, имеем $b^{m-n_k-sq_k} \leq b^{m/k}$. С другой стороны, $\min\{a, \check{\beta}_k\} + \check{\varepsilon}_k \rightarrow a$, $k \rightarrow \infty$, а кроме того, $1 - 1/k \leq (n_k + sk)/m \leq 1$. Следовательно,

$$[\min\{a, \rho\beta_k\} + \rho\varepsilon_k]^{n_k+sk} b^{m-n_k-sk} \leq (a + \varepsilon)^m$$

для достаточно больших k . Таким образом, для тех значений m , для которых имеет место случай а), верхний предел $\|\Pi_m\|^{1/m}$ не превосходит a .

б) Последний оператор B_{x_m} принадлежит произведению $\check{\Pi}_{k+1}$ для некоторого k . Иначе говоря, $n_k + kq_k < m \leq n_{k+1}$. Пусть s – наибольшее число, для которого $n_k + kq_k + s(k+1) < m$. По доказанному в п. а) имеем $\|\Pi_{n_k+kq_k}\| \leq (a + \varepsilon)^{n_k+kq_k}$ при достаточно больших k . Если $s = 0$, то

$$\|\Pi_m\| = \|\Pi_{n_k+kq_k} B_{x_{n_k+kq_k+1}} \cdots B_{x_m}\| \leq (a + \varepsilon)^{n_k+kq_k} b^{m-n_k-kq_k}.$$

Поскольку $(m - n_k - kq_k)/m \leq k/m < 1/k$, $1 - 1/k \leq (n_k + kq_k)/m \leq 1$, то для достаточно больших k получаем $\|\Pi_m\|^{1/m} \leq a + 2\varepsilon$. Если $s \geq 1$, то имеем

$$\begin{aligned} \|\Pi_m\|^{1/m} &= \|\Pi_{n_k+kq_k} \check{\Pi}_{k+1}^s B_{x_{n_k+q_k k+s(k+1)+1}} \cdots B_{x_m}\|^{1/m} \\ &\leq \|\Pi_{n_k+kq_k} \check{\Pi}_{k+1}^s\|^{1/m} \|B_{x_{n_k+q_k k+s(k+1)+1}} \cdots B_{x_m}\|^{1/m}. \end{aligned}$$

Второй множитель оценим, как и ранее:

$$\|B_{x_{n_k+q_k k+s(k+1)+1}} \cdots B_{x_m}\|^{1/m} \leq b^{(m-n_k+q_k k+s(k+1))/m} \leq b^{1/k}.$$

Для того чтобы оценить первый множитель, воспользуемся следующим неравенством: для любых операторов A, B и для любых $r, p \geq 1$ имеем

$$\|AB\|^{1/(r+p)} \leq \max\{\|A\|^{1/r}, \|B\|^{1/p}\}.$$

Для доказательства полагаем $\alpha = \|A\|^{1/r}$, $\beta = \|B\|^{1/p}$, и тогда

$$\ln \|AB\|^{1/(r+p)} \leq \frac{r}{r+p} \ln \alpha + \frac{p}{r+p} \ln \beta \leq \max\{\ln \alpha, \ln \beta\}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \|\Pi_{n_k+kq_k} \check{\Pi}_{k+1}^s\|^{1/m} &= \left(\|\Pi_{n_k+kq_k} \check{\Pi}_{k+1}^s\|^{1/(n_k+q_k k+s(k+1))} \right)^{(n_k+q_k k+s(k+1))/m} \\ &\leq \max\left\{ \|\Pi_{n_k+kq_k}\|^{1/(n_k+q_k k)}, \|\check{\Pi}_{k+1}^s\|^{1/(s(k+1))} \right\}^{(n_k+q_k k+s(k+1))/m}. \end{aligned}$$

Имеем, таким образом, максимум из двух величин. Первая, как мы видели, не превосходит $a + \varepsilon$ (для больших k). Вторую можно оценить сверху следующим образом:

$$\|\check{\Pi}_{k+1}^s\|^{1/(s(k+1))} \leq \|\check{\Pi}_{k+1}\|^{s/(s(k+1))} = \|\check{\Pi}_{k+1}\|^{1/(k+1)} = \check{\beta}_k.$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \check{\beta}_k = \check{\rho} \leq a$, то для достаточно больших k эта величина также не превосходит $a + \varepsilon$. Так что наш максимум при больших k не превосходит $a + \varepsilon$. Таким образом,

$$\|\Pi_{n_k+kq_k} \check{\Pi}_{k+1}^s\|^{1/m} \leq (a + \varepsilon)^{(n_k+q_k k+s(k+1))/m}$$

и, следовательно,

$$\|\Pi_m\|^{1/m} \leq (a + \varepsilon)^{(n_k+q_k k+s(k+1))/m} b^{1/k}.$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} b^{1/k} = 1$ и, кроме того, $m - (k+1) \leq n_k + q_k k + s(k+1) \leq m$, то для степени имеем оценку

$$1 - \frac{k+1}{m} \leq \frac{1}{m} (n_k + q_k k + s(k+1)) \leq 1.$$

Поскольку $m \geq n_k + q_k k \geq n_k + k \geq k^2 + k = k(k+1)$, получаем

$$1 - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{m} (n_k + q_k k + s(k+1)) \leq 1,$$

а значит, степень стремится к единице с ростом k . Следовательно, для всех достаточно больших k имеем $\|\Pi_m\|^{1/m} \leq a + 2\varepsilon$. Итак, для всех достаточно больших m , для которых имеет место случай 6), выполнено $\|\Pi_m\|^{1/m} \leq a + 2\varepsilon$. Устремив ε к нулю, получаем, что для таких m верхний предел величины $\|\Pi_m\|^{1/m}$ не превосходит a . Таким образом, $\hat{\rho}_x = a$. Лемма доказана.

Автор выражает благодарность Ю. А. Фаркову за ряд ценных замечаний.

Список литературы

1. De Rham G., "Une peu de mathématiques à propos d'une courbe plane", *Rev. de math. élémentaires*, **2**:4 (1947), 73–76; **2**:5 (1947), 89–97.
2. De Rham G., "Sur une courbe plane", *J. Math. Pures Appl.* (9), **35** (1956), 25–42.
3. De Rham G., "Sur les courbes limités de polygones obtenus par trisection", *Enseign. Math.* (2), **5** (1959), 29–43.
4. Barnsley M., *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, 1988.

5. Micchelli Ch. A., Prautzsch H., "Uniform refinement of curves", *Linear Algebra Appl.*, **114–115** (1989), 841–870.
6. Hutchinson J. E., "Fractals and self-similarity", *Indiana Univ. Math. J.*, **30**:5 (1981), 713–747.
7. Daubechies I., Lagarias J., "Two-scale difference equations. I. Existence and global regularity of solutions", *SIAM. J. Math. Anal.*, **22**:5 (1991), 1388–1410.
8. Daubechies I., Lagarias J., "Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals", *SIAM. J. Math. Anal.*, **23**:4 (1992), 1031–1079.
9. Cavaretta A. S., Dahmen W., Micchelli Ch. A., "Stationary subdivision", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **93**:453 (1991), 186.
10. Дерфель Г. А., "Вероятностные методы для одного класса функционально-разностных уравнений", *Укр. матем. журн.*, **41**:10 (1989), 1137–1141.
11. Aumann G., "Subdivision of linear corner cutting curves", *J. Geom. Graph.*, **1**:2 (1997), 91–103.
12. Sidorov N., Vershik A., "Ergodic properties of the Erdős measure, the entropy of the goldenshift, and related problems", *Monatsh. Math.*, **126**:3 (1998), 215–261.
13. Никитин П. П., "Хаусдорфова размерность гармонической меры на кривой де Рама", *Зап. науч. семин. ПОМИ*, **283** (2001), 206–223.
14. Dyn N., Gregory J. A., Levin D., "Analysis of uniform binary subdivision schemes for curve design", *Constr. Approx.*, **7**:1 (1991), 127–147.
15. Farin G. E., *Curves and surfaces for computer-aided geometric design*, 4th ed., Academic Press, San Diego, 1997.
16. Brezinski C., Redivo Zaglia M., *Extrapolation methods. Theory and Practice*, North-Holland Publ., Amsterdam, 1991.
17. Collela D., Heil C., "Characterization of scaling functions: continuous solutions", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **15**:2 (1994), 496–518.
18. Villemoes L., "Wavelet analysis of refinement equations", *SIAM J. Math. Anal.*, **25**:5 (1994), 1433–1460.
19. Lau K.-S., Wang J., "Characterization of L_p -solutions for two-scale dilation equations", *SIAM. J. Math. Anal.*, **26**:4 (1995), 1018–1046.
20. Wang Y., "Two-scale dilation equations and the mean spectral radius", *Random Comput. Dynam.*, **4**:1 (1996), 49–72.
21. Rioul O., "Simple regularity criteria for subdivision schemes", *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:6 (1992), 1544–1576.
22. Zhou D.-X., "The p -norm joint spectral radius and its applications in wavelet analysis", *International conference in wavelet analysis and its applications (Guangzhou, China, 1999)*, *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, **25**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 2002, 305–326.
23. Rota G.-C., Strang G., "A note on the joint spectral radius", *Indag. Math.*, **22** (1960), 379–381.
24. Berger M. A., Wang Y., "Bounded semigroups of matrices", *Linear Algebra Appl.*, **166** (1992), 21–27.
25. Gripenberg G., "Computing the joint spectral radius", *Linear Algebra Appl.*, **234** (1996), 43–60.
26. Протасов В. Ю., "Совместный спектральный радиус и инвариантные множества линейных операторов", *Фундамент. и приклад. математика*, **2**:1 (1996), 205–231.
27. Протасов В. Ю., "Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:5 (1997), 99–136.
28. Zhou D.-X., "The p -norm joint spectral radius for even integers", *Methods Appl. Anal.*, **5**:1 (1998), 39–54.
29. Strang G., "The joint spectral radius", *Gian-Carlo Rota on analysis and probability. Selected papers and commentaries*, Contemporary Mathematics, eds. J. Dhombres, J. P. S. Kung, N. Starr, Birkhauser, Boston, 2003.

30. Daubechies I., Lagarias J. C., "Corrigendum/addendum to: Sets of matrices all infinite products of which converge", *Linear Algebra Appl.*, **327**:1–3 (2001), 69–83.
31. Blondel V. D., Gaubert S., Tsitsiklis J. N., "Approximating the spectral radius of sets of matrices in the max-algebra is NP-hard", *IEEE Trans. Automat. Control*, **45**:9 (2000), 1762–1765.
32. Blondel V. D., Tsitsiklis J. N., "The boundedness of all products of a pair of matrices is undecidable", *Systems Control Lett.*, **41**:2 (2000), 135–140.
33. Оселедец В. И., "Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем", *Тр. ММО*, **19** (1968), 179–210.
34. Chaikin G. M., "An algorithm for high speed curve generation", *Comput. Graphics and Image Processing*, **3** (1974), 346–349.
35. Mainar E., Pena J. M., "Error analysis of corner cutting algorithms", *Numer. Algorithms*, **22**:1 (1999), 41–52.
36. Micchelli Ch. A., Pinkus A., "Descartes systems from corner cutting", *Constr. Approx.*, **7**:1 (1991), 161–194.
37. Merrien J.-L., "Prescribing the length of a de Rham curve", *Math. Engrg. Indust.*, **7**:2 (1998), 129–138.
38. Dubuc S., Merrien J.-L., Sablonnière P., "The length of the de Rham curve", *J. Math. Anal. Appl.*, **223**:1 (1998), 182–195.
39. Протасов В. Ю., "О гладкости кривых де Рама", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 139–180.
40. Paluszny M., Prautzsch H., Schäfer M., "A geometric look at corner cutting", *Comput. Aided Geom. Design*, **14**:5 (1997), 421–447.
41. Gregory J. A., Qu R., "Nonuniform corner cutting", *Comput. Aided Geom. Design*, **13**:8 (1996), 763–772.
42. Noakes L., "Nonlinear corner-cutting", *Adv. Comput. Math.*, **8**:3 (1998), 165–177.
43. Protasov V., "Refinement equations with nonnegative coefficients", *J. Fourier Anal. Appl.*, **6**:1 (2000), 55–78.
44. Deslauriers G., Dubuc S., "Symmetric iterative interpolation processes", *Constr. Approx.*, **5**:1 (1989), 49–68.
45. Протасов В. Ю., "Спектральное разложение 2-блочных тёплицевых матриц и масштабированные уравнения", *Алгебра и анализ*, **18**:4 (2006), 127–184.
46. Добеши И., *Десять лекций по вейвлетам*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевск, 2001.
47. Wojtaszczyk P., "A mathematical introduction to wavelets", *London Math. Soc. Stud. Texts*, **37**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

В. Ю. ПРОТАСОВ (V. YU. PROTASOV)
 МГУ им. М. В. Ломоносова
 E-mail: vladimir_protasov@yahoo.com

Поступило в редакцию
 31.10.2005