Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, Обобщенные функции, асимптотически однородные по траекториям, определяемым однопараметрическими группами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 3, 39–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/im6753>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:10:42

УДК 517.53

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов

Обобщенные функции, асимптотически однородные по траекториям, определяемым однопараметрическими группами

Получено полное описание обобщенных функций, асимптотически однородных вдоль траекторий. Эти траектории определяются непрерывными мультипликативными однопараметрическими группами преобразований, вещественные части всех собственных значений инфинитезимальной матрицы которых положительны, в том числе и для критических порядков асимптотической шкалы. Для этого вводятся и изучаются специальные пространства обобщенных функций. Полученные результаты применяются для описания обобщенных функций, однородных по таким группам.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: обобщенные функции, квазиасимптотика, тауберовы теоремы, однородные обобщенные функции, асимптотически однородные функции.

Введение

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое пространство (основных) функций ($S(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и т. п.), $\mathcal{F}'$ – пространство обобщенных функций (пространство линейных непрерывных функционалов) над пространством соответствующих основных функций. Следуя стандартам, принятым в теории обобщенных функций, обобщенную функцию $f \in \mathcal{F}'$ удобно указывать вместе с аргументом основной функции, и мы записываем $(f(t), \psi(t))$, $\psi(t) \in \mathcal{F}$, вместо (f, ψ) . В такой записи через $f(Ut)$, где U – линейное преобразование координат $t \in \mathbb{R}^n$, обозначается обобщенная функция, действующая по правилу

$$(f(Ut), \psi(t)) = \frac{1}{\det U} (f(t), \psi(U^{-1}t)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Пусть $U = \{U_k, k > 0\}$ – мультипликативная непрерывная однопараметрическая группа линейных преобразований $\mathbb{R}^n$, так что $U_{k_1 k_2} = U_{k_1} U_{k_2}$. Пусть $\mathcal{F}$ инвариантно относительно U_k , $\rho(k)$ – положительная непрерывная функция при $k > 0$ и $f \in \mathcal{F}'$. Мы говорим, что f обладает *квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ по группе U* , если для любой функции $\psi(t) \in \mathcal{F}$ и некоторой $g \in \mathcal{F}'$

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(U_k t), \psi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (g(t), \psi(t)). \quad (0.1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00178) и Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-2928.2012.1).

В этом случае мы говорим, что f *асимптотически однородна* на $\mathcal{F}$ по группе преобразований $U = \{U_k, k > 0\}$, и записываем $f(t) \in \text{AO}_\rho^U(\mathcal{F})$.

Отметим, что U_k может быть представлена в виде $U_k = e^{E \ln k}$, где E – некоторое линейное преобразование $\mathbb{R}^n$. В работах [1]–[5] дается описание асимптотически однородных обобщенных функций в случае, когда матрица E имеет строго диагональный вид, ее собственные значения вещественны и одного знака. В настоящей работе рассматривается важный для приложений случай, когда жорданова форма матрицы E не обязательно диагональна, но вещественные части всех собственных значений имеют один знак. При этом если все они положительны, то мы говорим об асимптотической однородности на бесконечности, а если отрицательны, то – в нуле.

Если $g = 0$, то мы говорим, что $f(t)$ обладает *тривиальной квазиасимптотикой* по этой группе преобразований. Если для $f \in \mathcal{F}$ выполнено соотношение (0.1) и $g \neq 0$, то $\rho(k)$ обязательно является автомодельной (правильно меняющейся) функцией (см. [6]).

Напомним, что положительная непрерывная функция $\rho(k)$ при $k > 0$ называется *автомодельной*, если для любого $a > 0$ и некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \rightarrow a^\alpha, \quad k \rightarrow +\infty,$$

равномерно на компактах по a в $(0, \infty)$. Число α называется *порядком автомодельности* ρ . Порядок α автомодельной функции $\rho(k)$ из (0.1), если $g \neq 0$, называется *порядком асимптотически однородной обобщенной функции*.

Отметим, что любая автомодельная функция $\rho(k)$ порядка α может быть представлена в виде

$$\rho(k) = k^\alpha L(k), \quad k > 0, \quad (0.2)$$

где $L(k)$ – автомодельная функция нулевого порядка (автомодельные функции нулевого порядка называют еще *медленно меняющимися функциями*). Далее мы будем допускать комплексный порядок автомодельности, а следовательно, и комплексные автомодельные функции, имея в виду, что комплексная автомодельная функция имеет представление (0.2) для $\alpha \in \mathbb{C}$.

Заметим, что если $\rho(k)$ в соотношении (0.1) имеет порядок α , то g является однородной обобщенной функцией степени $\alpha \in \mathbb{C}$ по соответствующей группе преобразований аргумента, т. е. $g(U_k t) = k^\alpha g(t)$, $k > 0$. (Иногда такие функции называют *квазиоднородными* порядка α относительно группы U ; см. [7].)

Из общего представления автомодельных функций непосредственно вытекает следующая

ЛЕММА 0.1. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует константа c такая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} t^{\text{Re } \alpha - \varepsilon} &\leq \left| \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \right| \leq c t^{\text{Re } \alpha + \varepsilon} && \text{при } k > 1, \quad t > 1, \\ \frac{1}{c} t^{\text{Re } \alpha + \varepsilon} &\leq \left| \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \right| \leq c t^{\text{Re } \alpha - \varepsilon} && \text{при } \frac{1}{k} < t < 1, \quad k > 1. \end{aligned}$$

Асимптотически однородные функции обладают рядом интересных свойств и участвуют в формулировке многих тауберовых теорем, а также в различных задачах математической физики (см. [8]). Их описание и свойства хорошо изучены для пространства обобщенных функций из S'_+ – обобщенных функций из S' с носителями на положительной полуоси. Это пространство является двойственным к пространству S_+ – пространству бесконечно дифференцируемых функций на полуоси с топологией, определяемой системой полунорм

$$P_N[\varphi] = \max_{0 \leq |j| \leq N} \sup_{r \geq 0} (1+r)^N |\varphi^{(j)}(r)|.$$

В частности, если функция $f(t) \in S'_+$ асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , то

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} C f_{\alpha+1}(t) \quad \text{в } S'_+,$$

где ядро дробного (дифференцирования) интегрирования $f_\beta(t) \in S'_+$ определяется формулой

$$f_\beta(t) = \begin{cases} \frac{\Theta(t)t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & \text{при } \operatorname{Re} \beta > 0, \\ \frac{d^N}{dt^N} f_{\beta+N}(t) & \text{при } \operatorname{Re} \beta \leq 0, \operatorname{Re} \beta + N > 0, \text{ рекуррентно по } N. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(\beta)$ – гамма-функция, $\Theta(t)$ – функция Хевисайда (характеристическая функция положительной полуоси $\mathbb{R}_+$).

ЛЕММА 0.2. *Для того чтобы функция $f(t) \in S'_+$ была асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $N > -\operatorname{Re} \alpha - 1$, что*

$$\frac{f^{(-N)}(t)}{t^N \rho(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} A.$$

Здесь $f^{(-N)}(t)$ – первообразная порядка N .

Первообразная (производная) порядка β обобщенной функции $f(t) \in S'_+(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$f^{(-\beta)}(t) = f_\beta(t) * f(t).$$

Основной целью в настоящей статье является получение подобного рода описания в общем случае. При этом мы сосредоточимся на рассмотрении асимптотической однородности на бесконечности. Главные теоремы будут изложены в § 4. Основным инструментом такого описания служит так называемое *обобщенное сферическое представление* обобщенных функций, которое вводится в § 1. Это представление сводит изучение асимптотических свойств обобщенных функций вдоль траекторий, определяемых группой $\{U_k, k > 0\}$, к исследованию радиальных асимптотических свойств обобщенных функций, заданных на специальных пространствах основных функций. Асимптотически

однородные обобщенные функции на этих специальных пространствах изучаются в § 2, 3. Как приложение полученных результатов, в § 4 дается описание обобщенных функций, однородных относительно однопараметрических групп линейных преобразований.

§ 1. Обобщенное сферическое представление обобщенных функций

Пусть в $\mathbb{R}^n$ (а следовательно, и в $\mathbb{C}^n$) действует вещественная непрерывная мультипликативная группа линейных преобразований $U = \{U_k = e^{E \ln k}, k > 0\}$. Полагаем, что система координат в $\mathbb{C}^n$ выбрана таким образом, что матрица E имеет канонический жорданов вид, т. е. блочно-диагональный вид, и состоит из блоков вида

$$\begin{pmatrix} \sigma_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} \sigma_i > 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad (1.1)$$

причем если σ_i не вещественно, то наряду с блоком (1.1) в E присутствует блок вида (1.1) с комплексно-сопряженным σ_i . При этом изначальное вещественное пространство $\mathbb{R}^n$ отождествляется с некоторым подпространством $L \subset \mathbb{C}^n$. Это подпространство состоит из векторов $e = (e_1, \dots, e_n)$ таких, что их координаты, соответствующие блоку (1.1) с вещественными σ , вещественны, а координаты, соответствующие не вещественному σ_i , сопряжены с координатами, соответствующими блоку с $\bar{\sigma}_i$. В этой системе координат матрица оператора U_k состоит из блоков на главной диагонали вида

$$e^{\sigma_i \tau} \begin{pmatrix} 1 & \tau & \frac{1}{2!} \tau^2 & \dots & \frac{1}{(m-1)!} \tau^{m-1} \\ 0 & 1 & \tau & \dots & \frac{1}{(m-2)!} \tau^{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \tau \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где m – размер блока, а $\tau = \ln k$. Пространство L также можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^n$, переходя к вещественным и мнимым частям комплексных координат. (При этом матрица E примет стандартную вещественную жорданову форму.) В дальнейшем мы будем пользоваться двумя этими представлениями, в зависимости от конкретной ситуации.

Пусть Γ – замкнутая бесконечно гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, охватывающая начало координат и такая, что каждая траектория, определяемая такой группой U , пересекает эту поверхность только в одной точке и по некасательному направлению. Такие поверхности будем называть *допустимыми*. Нетрудно

показать, что класс допустимых поверхностей не пуст; в частности, в качестве такой поверхности можно взять достаточно сжатый по некоторым осям эллипсоид. Введем в $\mathbb{R}^n$ обобщенные сферические координаты по формуле

$$t = \mu(r, e) = U_r e, \quad e \in \Gamma, \quad r > 0. \quad (1.3)$$

Пусть $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$, где $S(\mathbb{R}^n)$ – стандартное пространство основных функций Л. Шварца (см. [8]). Тогда при преобразовании (1.3) функция $\varphi(t)$ перейдет в функцию $\psi(r, e) = \varphi(U_r e)$. Это отображение обозначим через ζ , так что

$$\zeta: \varphi \mapsto \psi(r, e) = \varphi(U_r e), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad e = (e_1, \dots, e_n) \in \Gamma. \quad (1.4)$$

Обратное к (1.3) отображение обозначим через μ^{-1} , так что

$$\mu^{-1}(t) = (r, e), \quad t = U_r e, \quad r > 0, \quad e = (e_1, \dots, e_n) \in \Gamma. \quad (1.5)$$

Для того чтобы описать образ отображения ζ и обосновать соответствующую замену переменных для обобщенных функций, нам понадобится ввести специальные пространства основных и обобщенных функций.

Пусть J – не более чем счетное (может быть, пустое) множество комплексных чисел λ такое, что в каждой полуплоскости $\{\operatorname{Re} z < a: z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}\}$ содержится не более конечного числа точек. Каждому такому $\lambda \in \mathbb{C}$ сопоставим целое неотрицательное число $n(\lambda) \in \mathbb{Z}_+$. Множества пар $(\lambda, n(\lambda))$ таких чисел будем обозначать через $\bar{J}$ и называть *допустимыми множествами*. Условимся считать, что $(\lambda, n(\lambda)) \notin \bar{J}$, если $n(\lambda) < 0$.

Обозначим через S_J пространство функций $\psi(r) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, быстро убывающих при $r \rightarrow +\infty$ вместе со всеми производными и таких, что для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ и некоторых постоянных $C_{\lambda, m}$, зависящих от ψ , выполнено

$$\begin{aligned} [\psi(r) - \bar{\Omega}_N^J[\psi](r)] &\in C^N([0, +\infty)), \\ \left(\frac{d}{dr}\right)^l [\psi(r) - \bar{\Omega}_N^J[\psi](r)]|_{r=0} &= 0, \quad l = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\bar{\Omega}_N^J[\psi](r) = \sum_{\substack{\operatorname{Re} \lambda \leq N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m} \ln^m r.$$

Всюду далее полагаем

$$\Omega_N^J[\psi](r) = \sum_{\substack{\operatorname{Re} \lambda < N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m} \ln^m r. \quad (1.7)$$

Топологию на S_J зададим с помощью системы норм

$$\mathcal{P}_N(\psi) = \max_{0 \leq l \leq N} \sup_{r > 0} (1+r)^N \left| \left(\frac{d}{dr} \right)^l [\psi(r) - \eta(r) \bar{\Omega}_N^J[\psi](r)] \right| + \max_{\substack{\operatorname{Re} \lambda \leq N, \lambda \in J \\ m \leq n(\lambda)}} |C_{\lambda, m}|. \quad (1.8)$$

Здесь и всюду далее функция $\eta(r)$ бесконечно дифференцируема на $[0, \infty)$, финитна и равна 1 в некоторой окрестности нуля. Например,

$$\eta(r) \in C^\infty([0, \infty)), \quad \eta(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r < 1, \\ 0 & \text{при } r > 2. \end{cases} \quad (1.9)$$

Ясно, что топология на пространстве $S_{\bar{J}}$ не зависит от выбора функции $\eta(r)$ с такими свойствами, $S_{\bar{J}}$ – пространство Фреше.

Верхний индекс J у функций $\bar{\Omega}_N^J$ и Ω_N^J записывать не будем, если из контекста ясно, о чем идет речь. Отметим также, что $S_{\bar{J}}$ инвариантно относительно растяжений аргумента. Кроме того, заметим, что если множество $\bar{J}'$ содержит $\bar{J}$, т.е. $J \subset J'$, и $n(\lambda) \leq n'(\lambda)$, то $S_{\bar{J}} \subset S_{\bar{J}'}$. (Для добавочных точек $\lambda \in J'$, не принадлежащих J , считаем $C_{\lambda, m} = 0$.) В частности, если J – пустое множество (обозначим его $J_\emptyset$), то $S_{J_\emptyset} \subset S_{\bar{J}}$ для любого допустимого множества $\bar{J}$ и $S_{J_\emptyset}$ содержит функции из S_+ , имеющие нуль в начале координат бесконечного порядка. Если $J = \mathbb{Z}_+$ и $n(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, то $S_{\bar{J}} = S_+$.

Пусть Γ – допустимая поверхность в $\mathbb{R}^n$, $S(\Gamma) = C^\infty(\Gamma)$ – пространство бесконечно дифференцируемых на этой поверхности функций со стандартной топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными. Точнее, пусть $e = (e_1, \dots, e_n) \in \Gamma$ и Ω_i , $i = 1, 2, \dots, M$, – атлас карт на Γ , каждая карта имеет соответствующие координаты $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$. Положим

$$Q_N^i\{\psi(e)\} = \max_{|j| \leq N} \sup_{\Theta \in \Omega_i} \left| \frac{\partial^{|j|}}{\partial \theta_1^{j_1} \dots \partial \theta_{n-1}^{j_{n-1}}} \psi(e(\Theta)) \right|, \quad e \in U_i.$$

В качестве системы норм в $S(\Gamma)$ берем

$$Q_N\{\psi(e)\} = \max_{1 \leq i \leq M} Q_N^i\{\psi(e)\}, \quad N = 0, 1, \dots$$

Ясно, что эта топология не зависит от выбора атласа.

Через $S^N(\Gamma)$ обозначаем пополнение $C^\infty(\Gamma)$ по норме Q_N .

Положим $W_{\bar{J}} = S_{\bar{J}} \otimes S(\Gamma)$ (проективное тензорное произведение пространств $S_{\bar{J}}$ и $S(\Gamma)$; см. [9]). Пространство $W_{\bar{J}}$ может быть реализовано как пространство функций $\psi(r, e)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $e \in \Gamma$, бесконечно дифференцируемых при $e \in \Gamma$ и $r \in \mathbb{R}_+$ и таких, что

$$\psi(r, e) - \sum_{\substack{\operatorname{Re} \lambda \leq N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m}(e) \ln^m r \in C^N([0, \infty) \times S(\Gamma)),$$

$$\left(\frac{d}{dr} \right)^l \left[\psi(r, e) - \sum_{\substack{\operatorname{Re} \lambda \leq N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m}(e) \ln^m r \right] \Big|_{r=0} = 0, \quad 0 \leq l \leq N, \quad N = 0, 1, \dots$$

Здесь $C_{\lambda, m}(e) \in S(\Gamma)$, $\lambda \in J$. Введем обозначения

$$\bar{\Omega}_q[\psi](r, e) = \sum_{\substack{\operatorname{Re} \lambda \leq q \\ \lambda \in J}} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r, e), \quad \Omega_q[\psi](r, e) = \sum_{\substack{\operatorname{Re} \lambda < q \\ \lambda \in J}} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r, e), \quad (1.10)$$

где $\omega_\lambda[\psi](r, e) = \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m}(e) \ln^m r$. Топология на $W_{\bar{J}}$ задается с помощью системы норм

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(\psi) = \max_{0 \leq l \leq N} \sup_{r > 0} Q_N \left\{ (1+r)^N \left(\frac{d}{dr} \right)^l [\psi(r, e) - \eta(r) \bar{\Omega}_N[\psi](r, e)] \right\} \\ + \max_{\operatorname{Re} \lambda \leq N, \lambda \in J} Q_N \{C_{\lambda, m}(e)\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где функция $\eta(r)$ удовлетворяет условию (1.9). Заметим, что топология на $W_{\bar{J}}$ не зависит от выбора функции $\eta(r)$ с такими свойствами. Таким образом,

$$W_{\bar{J}} \subset \dots \subset W_{\bar{J}}^{N+1} \subset W_{\bar{J}}^N \subset \dots \subset W_{\bar{J}}^0,$$

где $W_{\bar{J}}^N$ – банахово пространство с нормой $\mathcal{P}_N(\psi)$ (пополнение $W_{\bar{J}}$ по норме $\mathcal{P}_N$). Кроме того, для $\psi(r, e) \in W_{\bar{J}}$ имеет место асимптотическое равенство

$$\psi(r, e) \sim \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m}(e) \ln^m r = \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r, e), \quad r \rightarrow 0, \quad (1.12)$$

в том смысле, что для любого $M \in \mathbb{Z}_+$ существует $N \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^l Q_M \{ \psi(r, e) - \bar{\Omega}_N[\psi](r, e) \} = O(r^M), \quad r \rightarrow 0, \quad l = 0, 1, \dots, M.$$

Разложение (1.12) можно дифференцировать сколь угодно раз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть каждому $\lambda \in J$ сопоставлено конечномерное линейное подпространство $\mathcal{E}_\lambda \subset S(\Gamma)$ и нильпотентный линейный оператор A_λ , так что $A_\lambda^{n(\lambda)+1} \varphi \equiv 0$ при $\varphi \in \mathcal{E}_\lambda$. Кроме того, если $\lambda_1, \lambda_2 \in J$, причем $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2$, но $\operatorname{Im} \lambda_1 \neq \operatorname{Im} \lambda_2$, то

$$\mathcal{E}_{\lambda_1} \cap \mathcal{E}_{\lambda_2} = \{0\}.$$

Определим в $W_{\bar{J}}$ подпространство $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$, полагая

$$V_{\bar{J}, \mathcal{F}} = \left\{ \psi(r, e) \in W_{\bar{J}} : C_{\lambda, 0}(e) \in \mathcal{E}_\lambda, \quad C_{\lambda, m}(e) = \frac{1}{m!} A_\lambda^m C_{\lambda, 0}(e) \right\}, \quad (1.13)$$

где $\mathcal{F} = \{\mathcal{E}_\lambda, A_\lambda : \lambda \in J\}$ и $m = 0, 1, \dots, n(\lambda)$. Топология в $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ наследуется топологией $W_{\bar{J}}$. Нетрудно видеть, что $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ – замкнутое подпространство пространства $W_{\bar{J}}$.

Пусть $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$. Найдем асимптотическое разложение $\varphi(t)$ в обобщенных сферических координатах при $r \rightarrow +0$. Как обычно, если $j = (j_1, \dots, j_n)$ – мультииндекс, то

$$j! = j_1! \cdots j_n!, \quad |j| = j_1 + \cdots + j_n, \quad \varphi^{(j)}(t) \equiv D^j \varphi(t) = \frac{\partial^{|j|}}{\partial t_1^{j_1} \cdots \partial t_n^{j_n}} \varphi(t).$$

Напомним, что некоторые из координат t в базисе, который мы выбрали, могут быть комплексными. Например, если $t_i = a + ib$ – такая переменная и $t_l = \bar{t}_i$, то, как обычно,

$$\frac{\partial}{\partial t_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a} - i \frac{\partial}{\partial b} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a} + i \frac{\partial}{\partial b} \right). \quad (1.14)$$

Имеем

$$\varphi(t) \sim \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n} a_j t^j, \quad |t| \rightarrow 0. \quad (1.15)$$

Отметим, что

$$E = \Lambda + \mathcal{N}, \quad (1.16)$$

где Λ – диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся соответствующие числа σ_i из блоков (1.1), а матрица $\mathcal{N}$ имеет единицы и нули, стоящие над главной диагональю, остальные ее элементы равны нулю. Условимся далее через

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_s, \dots, \sigma_s) \quad (1.17)$$

обозначать вектор, компоненты которого есть числа, стоящие на главной диагонали матрицы Λ . При этом каждое σ_i повторяется столько раз, каков размер соответствующего блока.

В обобщенных сферических координатах асимптотическое разложение функции (1.15) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(U_r e) &\sim \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n} a_j \prod_{k=1}^n (U_r e)_k^{j_k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n} a_j \prod_{k=1}^n (e^{\Lambda \tau} e^{\tau \mathcal{N}} e)_k^{j_k} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n} a_j e^{(\sigma, j) \tau} \prod_{k=1}^n (e^{\tau \mathcal{N}} e)_k^{j_k}; \end{aligned} \quad (1.18)$$

здесь $\tau = \ln r$. Пусть

$$J = \{\lambda: (\sigma, j) = \lambda, j \in \mathbb{Z}_+^n\}. \quad (1.19)$$

Обозначим также

$$G_\lambda(e) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ (\sigma, j) = \lambda}} a_j e^j.$$

Из (1.18) имеем

$$\varphi(U_r e) \sim \sum_{\lambda \in J} r^\lambda G_\lambda(e^{\tau \mathcal{N}} e) = \sum_{\lambda \in J} r^\lambda [C_{\lambda,0}(e) + \tau C_{\lambda,1}(e) + \dots + \tau^{n(\lambda)} C_{\lambda,n(\lambda)}(e)], \quad (1.20)$$

где $n(\lambda)$ – некоторые целые числа и

$$C_{\lambda,0}(e) = G_\lambda(e^{\tau \mathcal{N}} e)|_{\tau=0} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ (\sigma, j) = \lambda}} a_j e^j.$$

Вводя операторы A_λ , A_λ^+ формулами

$$\begin{aligned} A_\lambda P(e) &= \text{grad } P(e) \mathcal{N} e = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial P(e)}{\partial e_k} \varepsilon_{k,l} e_l, \\ A_\lambda^+ P(e) &= \text{grad } P(e) \mathcal{N}^T e = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial P(e)}{\partial e_k} \varepsilon_{l,k} e_l, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $\varepsilon_{k,l}$ – элементы матрицы $\mathcal{N}$, и пользуясь соотношением

$$\left(\frac{d}{d\tau} \right)^m P(e^{\tau \mathcal{N}} e) = A_\lambda^m P(t) \Big|_{t=e^{\tau \mathcal{N}} e}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (1.22)$$

которое рекуррентным образом вытекает из групповых соотношений

$$e^{\tau \mathcal{N}} e \Big|_{\tau=0} = Ie, \quad \frac{d}{d\tau} e^{\tau \mathcal{N}} e \Big|_{\tau=0} = \mathcal{N} e,$$

из (1.20) и (1.22) получаем

$$C_{\lambda,m}(e) = \frac{1}{m!} \frac{d^m G_\lambda(e^{\tau \mathcal{N}} e)}{d\tau^m} \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{m!} A_\lambda^m C_{\lambda,0}(e), \quad m = 1, 2, \dots, n(\lambda). \quad (1.23)$$

Отсюда и из (1.20) следует, что $A_\lambda^{n(\lambda)+1} C_{\lambda,0}(e) = 0$. Каждому $\lambda \in J$ сопоставим подпространство $\mathcal{E}_\lambda$ по формуле

$$\mathcal{E}_\lambda = \text{Lin} \{ e^j = e_1^{j_1} \dots e_n^{j_n} \Big|_\Gamma : (\sigma, j) = \lambda \}, \quad (1.24)$$

где вектор σ определен формулой (1.17). Нильпотентный оператор A_λ в $\mathcal{E}_\lambda$ определим формулой (1.21). Нетрудно видеть, что для таким образом выбранных $\mathcal{E}_\lambda$ выполнены все условия определения 1.1.

Полагая теперь $\mathcal{F} = \{\mathcal{E}_\lambda, A_\lambda, \lambda \in J\}$, строим соответствующее подпространство $V_{\bar{J}, \mathcal{F}} \subset W_{\bar{J}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Отображение ζ , определяемое формулой (1.4), осуществляет изоморфизм пространств $S(\mathbb{R}^n)$ и $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что ζ – непрерывное отображение $S(\mathbb{R}^n)$ в $W_{\bar{J}}$. Ядро этого отображения тривиально. Из (1.18)–(1.24) вытекает, что ζ отображает $S(\mathbb{R}^n)$ в $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$. Теперь достаточно доказать, что ζ – отображение $S(\mathbb{R}^n)$ на $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$. Из этого, в частности, будет следовать, что ζ^{-1} – непрерывное отображение $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ на $S(\mathbb{R}^n)$.

Итак, пусть $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$. Достаточно показать, что $\psi(\mu^{-1}(t)) = \varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$, где μ определяется формулой (1.5). Ясно, что функция $\psi(\mu^{-1}(t))$ бесконечно дифференцируема вне начала координат и убывает вместе со всеми производными быстрее любой степени $\frac{1}{|t|}$ при $|t| \rightarrow +\infty$. Покажем, что эта функция имеет все производные в окрестности начала координат, т.е. $\psi(\mu^{-1}(t)) \in C^\infty(\omega)$, где ω – некоторая окрестность начала координат. Положим

$$\Phi_M(r, e) = \psi(r, e) - \bar{\Omega}_M[\psi](r, e),$$

где $\overline{\Omega}_M[\psi](r, e)$ определяется формулой (1.10). Ясно, что $\Phi_M(r, e) - M$ раз дифференцируемая функция при $r \geq 0, e \in \Gamma$, причем

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^l \Phi_M(0, e) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, M.$$

Поэтому $\Phi_M(r, e)$ имеет нуль в нуле по r порядка M , следовательно, для любого N существует M такое, что $\Phi_M(\mu^{-1}(t)) \in C^N(\omega)$. Покажем, что $\overline{\Omega}_M[\psi](\mu^{-1}(t)) \in C^\infty(\omega)$ для любого M .

Учитывая, что $C_{\lambda,0}(e) \in \mathcal{E}_\lambda$, и обозначая $\ln r = \tau$, для произвольного слагаемого в (1.10) имеем

$$\begin{aligned} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r, e) &= r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \frac{1}{m!} A_\lambda^m C_{\lambda,0}(e) \tau^m \\ &= r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \frac{1}{m!} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^m C_{\lambda,0}(e^{\tau\mathcal{N}}e) \Big|_{\tau=0} \tau^m = r^\lambda C_{\lambda,0}(e^{\tau\mathcal{N}}e). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (1.22) при $f = C_{\lambda,0}(e)$ и учли, что $C_\lambda(e^{\tau\mathcal{N}}e)$ – полином по τ степени не выше $n(\lambda)$.

Полагая $C_{\lambda,0}(e) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n, (\sigma,j)=\lambda} a_j e^j$, имеем

$$\begin{aligned} r^\lambda C_{\lambda,0}(e^{\tau\mathcal{N}}e) &= \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ (\sigma,j)=\lambda}} a_j e^{\tau(\sigma,j)} (e^{\tau\mathcal{N}}e)^j = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ (\sigma,j)=\lambda}} a_j (e^{\tau\Lambda} e^{\tau\mathcal{E}}e)^j \\ &= \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ (\sigma,j)=\lambda}} a_j (e^{(\Lambda+\mathcal{N}) \ln r} e)^j = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ (\sigma,j)=\lambda}} a_j (U_r e)^j = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}_+^n \\ (\sigma,j)=\lambda}} a_j t^j. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.25) следует, что $\psi(\mu^{-1}(t)) \in C^N(\omega)$. Поскольку N произвольно, то $\psi(\mu^{-1}(t)) \in C^\infty(\omega)$. Утверждение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$; тогда обобщенная функция $f_s(r, e)$, определяемая формулой

$$(f_s(r, e), \psi(r, e)) = (f(t), \varphi(t)), \quad \varphi(t) = \varphi(\mu(r, e)) = \psi(r, e) \in V_{\bar{j}, \mathcal{F}},$$

принадлежит $V'_{\bar{j}, \mathcal{F}}$. По теореме Хана–Банаха мы можем продолжить f_s на всё $W_{\bar{j}}$. Обозначим это продолжение $F(r, e)$ и назовем его *обобщенным сферическим представлением* функции $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$. Таким образом,

$$(F(r, e), \psi(r, e)) = (f_s, \psi(r, e)) \quad \forall \psi(r, e) \in V_{\bar{j}, \mathcal{F}}.$$

Обобщенное сферическое представление $F(r, e)$ функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ определяется неоднозначно. Для того чтобы описать эту неоднозначность, введем в $S_{\bar{j}}$ и $W_{\bar{j}}$ специальные функции, обобщающие обычные дельта-функции и их производные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Для каждого $\lambda \in J$, $m = 0, 1, \dots, n(\lambda)$ и любой функции $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$ определим *обобщенные функции* $\Delta_{\lambda,m}(r) \in S'_{\bar{J}}$ и $\Delta_{\lambda,m}(r)\Phi(e) \in W'_{\bar{J}}$ по формулам

$$\begin{aligned} (\Delta_{\lambda,m}(r), \psi(r)) &= C_{\lambda,m}, & \psi &\in S_{\bar{J}}, \\ (\Delta_{\lambda,m}(r)\Phi(e), \psi(r, e)) &= (\Phi(e), C_{\lambda,m}(e)), & \psi &\in W_{\bar{J}}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где $C_{\lambda,m}$ берется из (1.6), а $C_{\lambda,m}(e) \in S(\Gamma)$ – из (1.12).

Пусть теперь $F_1(r, e) \in W_{\bar{J}}$ и $F_2(r, e) \in W_{\bar{J}}$ – обобщенные сферические представления $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$. Обозначая $\Psi(r, e) = F_1(r, e) - F_2(r, e)$, для любой функции $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ имеем $(\Psi(r, e), \psi(r, e)) = 0$. Ясно, что $\text{supp } \Psi(r, e) \subset \{0\} \times \Gamma$, а потому существует N такое, что

$$\Psi(r, e) = \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J}} \sum_{m=1}^{n(\lambda)} \Delta_{\lambda,m}(r) \Phi_{\lambda,m}(e),$$

где $\Phi_{\lambda,m}(e) \in S'(\Gamma)$. Отсюда для любой функции $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ имеем

$$\begin{aligned} (\Psi(r, e), \psi(r, e)) &= \left(\sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J}} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \Delta_{\lambda,m}(r) \Phi_{\lambda,m}(e), \psi(r, e) \right) \\ &= \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J}} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} (\Phi_{\lambda,m}(e), C_{\lambda,m}(e)) = 0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $C_{\lambda,m}(e) \in \mathcal{E}_{\lambda}$. Положим

$$\psi(r, e) = r^{\lambda} \left(\varphi(e) + A_{\lambda} \varphi(e) \ln r + \dots + \frac{\ln^{n(\lambda)} r}{n(\lambda)!} A_{\lambda}^{n(\lambda)} \varphi(e) \right), \quad \lambda \in J, \quad \varphi(e) \in \mathcal{E}_{\lambda}.$$

Из (1.27) имеем

$$\sum_{m=0}^{n(\lambda)} \left(\Phi_{\lambda,m}(e), \frac{1}{m!} A_{\lambda}^m \varphi(e) \right) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}_{\lambda}. \quad (1.28)$$

Отсюда вытекает, что любое обобщенное сферическое представление обобщенной функции $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеет вид

$$F(r, e) + \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J}} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \Delta_{\lambda,m}(r) \Phi_{\lambda,m}(e), \quad (1.29)$$

где N – некоторое натуральное число, а $F(r, e)$ – какое-то обобщенное сферическое представление, а обобщенные функции $\Phi_{\lambda,m}(e)$ удовлетворяют условиям (1.28).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β . Мы говорим, что $F(r) \in S'_{\bar{J}}$ асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$, если для любой функции $\psi(r) \in S_{\bar{J}}$ и некоторой $G(r) \in S'_{\bar{J}}$

$$\frac{1}{\rho(k)}(F(kr), \psi(r)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (G(r), \psi(r)),$$

при этом записываем $F(r) \in \text{АО}_{\rho}(S_{\bar{J}})$. Аналогично, $F(r, e) \in W'_{\bar{J}}$ асимптотически однородна по r на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$, если для любой функции $\psi(r, e) \in W_{\bar{J}}$ и некоторой $G(r, e) \in W'_{\bar{J}}$

$$\frac{1}{\rho(k)}(F(kr, e), \psi(r, e)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (G(r, e), \psi(r, e)),$$

при этом записываем $F(r, e) \in \text{АО}_{\rho}(W_{\bar{J}})$.

Для пространства $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ определение асимптотической однородности относительно $\rho(k)$ дается аналогично, записываем $F(r, e) \in \text{АО}_{\rho}(V_{\bar{J}, \mathcal{F}})$.

Пусть $F(r, e)$ – обобщенное сферическое представление для обобщенной функции $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$; тогда

$$(f(t), \varphi(t)) = (F(r, e), \varphi(U_r e)) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (f(U_k t), \varphi(t)) &= \frac{1}{\det U_k} (f(t), \varphi(U_{1/k} t)) = \frac{1}{\det U_k} (F(r, e), \varphi(U_{r/k} e)) \\ &= \frac{k}{\det U_k} (F(kr, e), \varphi(U_r e)), \end{aligned} \quad (1.30)$$

и отсюда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Для того чтобы обобщенная функция $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ была асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ по группе преобразований $U = \{U_k, k > 0\}$, необходимо и достаточно, чтобы ее обобщенное сферическое представление $F(r, e)$ было асимптотически однородным на бесконечности относительно $\rho_1(k)$ над пространством $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$, т. е. $F(r, e) \in \text{АО}_{\rho_1}(V_{\bar{J}, \mathcal{F}})$, где $\rho_1(k) = \frac{\det U_k}{k} \rho(k)$.

Таким образом, для описания класса $\text{АО}_{\rho}^U(S(\mathbb{R}^n))$ нам достаточно описать класс асимптотически однородных обобщенных функций на пространствах $V_{\bar{J}, \mathcal{F}} \subset W_{\bar{J}}$. Этому мы предпошлем описание асимптотически однородных обобщенных функций на пространстве $S_{\bar{J}}$.

§ 2. Обобщенные функции, асимптотически однородные на $S_{\bar{J}}$

Пространство основных функций $S_{\bar{J}}$, где $\bar{J}$ – допустимое множество, введено в § 1. Дадим несколько полезных определений и введем некоторые обозначения.

Через $\bar{J} \setminus \{\sigma\}$ обозначим множество пар $\bar{J}$ без пары $(\sigma, n(\sigma))$, если $\sigma \in J$, а через $\text{pr } J$ – множество вещественных чисел $\{\text{Re } \lambda : \lambda \in J\}$. Пусть $\mu \in \mathbb{C}$.

Положим

$$J_\mu = \{\lambda \in J: \operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \mu\}, \quad \bar{J}_\mu = \{(\lambda, n(\lambda)) \in \bar{J}: \operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \mu\}.$$

Условимся считать, что целочисленная функция $n(\sigma)$ определена для всех $\sigma \in \mathbb{C}$, причем если $\sigma \notin J$, то $n(\sigma)$ принимает отрицательные значения, и, наоборот, если для пары $(\sigma, n(\sigma))$ окажется, что $n(\sigma) < 0$, то $\sigma \notin J$. Пусть

$$\bar{J} = \{(\lambda, n(\lambda)): \lambda \in J, n(\lambda) \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \bar{L} = \{(l, m(l)): l \in L, m(l) \in \mathbb{Z}_+\}$$

– допустимые множества. Положим

$$\begin{aligned} \overline{J \cap L} &= \{(\sigma, q(\sigma)): \sigma \in J \cap L, q(\sigma) = \min\{n(\sigma), m(\sigma)\}\}, \\ \overline{J \cup L} &= \{(\sigma, q(\sigma)): \sigma \in J \cup L, q(\sigma) = \max\{n(\sigma), m(\sigma)\}, \sigma \in J \cap L\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Будем записывать $\bar{J} \subset \bar{L}$, если $J \subset L$ и $n(\lambda) \leq m(\lambda)$ при $\lambda \in J$, $\overline{J+l} = \{(\sigma, q(\sigma)): \sigma = \lambda + l, q(\sigma) = n(\sigma - l), \lambda \in J\}$, $l \in \mathbb{C}$. Отображение $r^l: \varphi(r) \mapsto r^l \varphi(r) = \psi(r)$, $l \in \mathbb{C}$, осуществляет изоморфизм пространств $S_{\bar{J}}$ и $S_{\overline{J+l}}$.

Рассмотрим отображение

$$r \frac{d}{dr}: \varphi(r) \mapsto \psi(r) = r \frac{d}{dr} \varphi(r). \quad (2.2)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество пар, причем $\{0\} \in J$. Положим $\bar{J}_1 = \overline{J \setminus \{0\}} \cup \{(0, n(0)-1)\}$. Тогда отображение (2.2) осуществляет изоморфизм пространств $S_{\bar{J}}$ на $S_{\bar{J}_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $r \frac{d}{dr}$ непрерывно отображает $S_{\bar{J}}$ в $S_{\bar{J}_1}$. Это следует из того, что

$$r \frac{d}{dr} r^\lambda P_m(\ln r) = \begin{cases} r^\lambda Q_m(\ln r) & \text{при } \lambda \neq 0, \\ Q_{m-1}(\ln r) & \text{при } \lambda = 0. \end{cases}$$

Здесь $P_m(\xi)$, $Q_m(\xi)$, $Q_{m-1}(\xi)$ – многочлены степеней m , m , $m-1$ соответственно. Теперь для доказательства достаточно предъявить непрерывное обратное отображение. Оно задается формулой

$$\left(r \frac{d}{dr}\right)^{-1} \psi(r) = - \int_r^\infty \frac{1}{\xi} \psi(\xi) d\xi = \varphi(r)$$

и отображает $S_{\bar{J}_1}$ в $S_{\bar{J}}$, так как

$$\int \frac{1}{r} r^\lambda P_m(\ln r) dr = \begin{cases} r^\lambda Q_m(\ln r) + C & \text{при } \lambda \neq 0, \\ Q_{m+1}(\ln r) + C & \text{при } \lambda = 0. \end{cases}$$

Утверждение доказано.

Пусть $(\sigma, n(\sigma)) \in \bar{J}$. Введем отображение

$$D_\sigma \equiv r^\sigma \left(r \frac{d}{dr}\right)^{n(\sigma)+1} r^{-\sigma}: \varphi(r) \mapsto \psi(r) = D_\sigma \varphi(r). \quad (2.3)$$

Из утверждения 2.1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\sigma \in J$. Отображение D_σ осуществляет изоморфизм пространств $S_{\bar{J}}$ и $S_{\overline{J \setminus \{\sigma\}}}$.

Отметим, что отображения (2.2) и (2.3) коммутируют с растяжениями.

Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$ и $\bar{J}$ – допустимое множество пар. Напомним, что $J_\gamma = \{\lambda \in J : \operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \gamma\}$. Отметим, что J_γ – конечное множество. Положим

$$D_{\bar{J}_\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{Re} \gamma \notin \operatorname{pr} J, \\ \prod_{\lambda \in J_\gamma} D_\lambda, & \text{если } \operatorname{Re} \gamma \in \operatorname{pr} J, \end{cases} \quad (2.4)$$

где зафиксирован порядок, в котором перемножаются операторы D_λ . Дальнейшие результаты не будут зависеть от этого порядка. Из следствия 2.1 вытекает, что

$$D_{\bar{J}_\gamma} \sum_{\lambda \in J_\gamma} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r) = 0, \quad (2.5)$$

где $\omega_\lambda[\psi](r)$ определено формулой (1.10).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество и $\beta \in \mathbb{C}$ – число такое, что $-\beta - 1 \notin J$. Тогда существует единственное однородное степени β продолжение r^β из S_{J_β} на $S_{\bar{J}}$. Это продолжение задается формулой

$$(r_{\bar{J}}^\beta, \varphi(r)) = \begin{cases} \int_0^\infty r^\beta (\varphi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\varphi](r)) dr, & \text{если } -\operatorname{Re} \beta - 1 \notin \operatorname{pr} J, \\ \prod_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \left(\frac{-1}{\beta + 1 + \lambda} \right)^{n(\lambda)+1} \times \int_0^\infty r^\beta D_{\bar{J}_{-\beta-1}} (\varphi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\varphi](r)) dr, & \text{если } -\operatorname{Re} \beta - 1 \in \operatorname{pr} J, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $\Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\varphi](r)$ определено формулой (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $-\beta - 1 \notin \operatorname{pr} J$. Тогда интеграл в (2.6) корректно определен, так как для некоторого $\Delta > 0$

$$|\varphi(r) - \bar{\Omega}_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\varphi](r)| \leq \begin{cases} cr^{-\operatorname{Re} \beta - 1 + \Delta}, & r \rightarrow +0, \\ cr^{-\operatorname{Re} \beta - 1 - \Delta}, & r \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Ясно, что он задает однородную функцию на $S_{\bar{J}}$, совпадающую с r^β на S_{J_β} .

Пусть теперь $-\operatorname{Re} \beta - 1 \in \operatorname{pr} J$, $-\beta - 1 \notin J$. В силу (2.5) соответствующий интеграл в (2.6) корректно определен, так как для некоторого $\Delta > 0$

$$|D_{\bar{J}_{-\beta-1}} (\varphi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\varphi](r))| \leq \begin{cases} cr^{-\operatorname{Re} \beta - 1 + \Delta}, & r \rightarrow +0, \\ cr^{-\operatorname{Re} \beta - 1 - \Delta}, & r \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Ясно, что этот интеграл также задает однородную функцию на $S_{\bar{J}}$. Проверим, что она есть продолжение r^β из пространства $S_{J_\emptyset}$ на $S_{\bar{J}}$. Пусть $\varphi(r) \in S_{J_\emptyset}$; имеем

$$(r_{\bar{J}}^\beta, \varphi(r)) = \prod_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \left(\frac{-1}{\beta+1+\lambda} \right)^{n(\lambda)+1} \int_0^\infty r^\beta D_{\bar{J}_{-\beta-1}} \varphi(r) dr.$$

Пользуясь (2.3), (2.4) и интегрируя по частям, получим

$$(r_{\bar{J}}^\beta, \varphi(r)) = \int_0^\infty r^\beta \varphi(r) dr.$$

Докажем единственность продолжения. Предположим, что существует другое продолжение. Тогда их разность – однородная обобщенная функция, сосредоточенная в нуле. Нетрудно видеть, что единственной обобщенной однородной функцией степени β в $S'_{\bar{J}}$, $-\beta-1 \in J$, сосредоточенной в нуле, является функция $\Delta_{-\beta-1, n(-\beta-1)}(r)$. Поэтому эта разность с точностью до константы должна быть равна $\Delta_{-\beta-1, n(-\beta-1)}(r)$. Однако, поскольку $-\beta-1 \notin J$, такой обобщенной функции в $S'_{\bar{J}}$ не существует. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если $\bar{J} \subset \bar{J}_1$, $-\beta-1 \notin J_1$, то $r_{\bar{J}_1}^\beta$ совпадает с $r_{\bar{J}}^\beta$ на $S_{\bar{J}}$. Это позволяет записывать r_+^β вместо $r_{\bar{J}}^\beta$. Обобщенная функция $r_+^\beta \in S'_J$ мероморфна по $\beta \in \mathbb{C}$ и имеет в точках $\beta = -\lambda-1$, $\lambda \in J$, полюсы порядка $n(\lambda)+1$.

Отметим, что функция r_+^β в пространстве S'_+ подробно изучена в [10].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Рассмотрим семейство обобщенных функций

$$g_\beta(r) = \prod_{\lambda \in J_{-\beta_0-1}} [-(\beta+1+\lambda)]^{n(\lambda)+1} r_+^\beta \quad (2.7)$$

в некоторой окрестности точки β_0 , $-\beta_0-1 \in J$. Ясно (см. (2.6)), что

$$(g_\beta(r), \psi(r)) = \int_0^\infty r^\beta D_{\bar{J}_{-\beta_0-1}} (\psi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta_0-1}[\psi](r)) dr. \quad (2.8)$$

Очевидно, что интеграл в соотношении (2.8) хорошо определен и даже аналитичен по β в некоторой окрестности точки β_0 . Вычислим его значение при $\beta = \beta_0$. Сначала заметим, что интеграл в (2.8) не зависит от порядка сомножителей в $D_{\bar{J}_{-\beta_0-1}}$ (см. (2.6) и (2.5)). Считая, что

$$D_{\bar{J}_{-\beta_0-1}} = r^{-\beta_0-1} \left(r \frac{d}{dr} \right)^{n(-\beta_0-1)+1} r^{\beta_0+1} \prod_{\substack{\lambda \in J_{-\beta_0-1} \\ \lambda \neq -\beta_0-1}} r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^{n(\lambda)+1} r^{-\lambda},$$

из (2.8) при $\beta = \beta_0$ имеем

$$\begin{aligned}
 (g_{\beta_0}(r), \psi(r)) &= \int_0^\infty \frac{d}{dr} \left[\left(r \frac{d}{dr} \right)^{n(-\beta_0-1)} r^{\beta_0+1} \right. \\
 &\quad \left. \times D_{J_{-\beta_0-1} \setminus \{-\beta_0-1\}} (\psi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta_0-1} [\psi](r)) \right] dr \\
 &= - \left[\left(r \frac{d}{dr} \right)^{n(-\beta_0-1)} r^{\beta_0+1} D_{J_{-\beta_0-1} \setminus \{-\beta_0-1\}} \right. \\
 &\quad \left. \times (\psi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta_0-1} [\psi](r)) \right] \Big|_{r=0} \\
 &= -(n(-\beta_0-1))! \prod_{\substack{\lambda \in J_{-\beta_0-1} \\ \lambda \neq -\beta_0-1}} [-(\beta_0+1+\lambda)]^{n(\lambda)+1} C_{-\beta_0-1, n(-\beta_0-1)},
 \end{aligned}$$

где $C_{-\beta_0-1, n(-\beta_0-1)}$ – соответствующий коэффициент в разложении (1.12). Таким образом,

$$g_{\beta_0}(r) = -(n(-\beta_0-1))! \prod_{\substack{\lambda \in J_{-\beta_0-1} \\ \lambda \neq -\beta_0-1}} [-(\beta_0+1+\lambda)]^{n(\lambda)+1} \Delta_{-\beta_0-1, n(-\beta_0-1)}(r).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть обобщенная функция $F(r) \in S'_J$ имеет компактный носитель. Для $\lambda \in J$ и $0 \leq m \leq n(\lambda)$ определим ее *моменты порядка λ , m* по формуле

$$M_{\lambda, m}[F] = (F(r), \eta(r) r^\lambda \ln^m r),$$

где $\eta(r) \in S_+$ и $\eta(r) = 1$ при $r \in \operatorname{supp} F$. Ясно, что $M_{\lambda, m}[F]$ не зависит от выбора $\eta(r)$ с такими свойствами.

ЛЕММА 2.1. Пусть $L \in \mathbb{Z}_+$, и пусть $F(r) \in S'_J$ имеет компактный носитель и все моменты $M_{\lambda, m}[F]$ равны нулю при $\lambda \in J$, $\operatorname{Re} \lambda \leq L$, $0 \leq m \leq n(\lambda)$. Тогда для некоторого $\Delta > 0$ и любой функции $\psi(r) \in S_J$ имеем

$$(F(kr), \psi(r)) = o\left(\frac{1}{k^{L+1+\Delta}}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что по условию

$$(F(kr), \bar{\Omega}_L[\psi](r)) = \frac{1}{k} \left(F(r), \bar{\Omega}_L \left[\psi \left(\frac{r}{k} \right) \right] (r) \right) = \frac{1}{k} \left(F(r), \bar{\Omega}_L[\psi] \left(\frac{r}{k} \right) \right) = 0,$$

и полагая $\chi(r) = \psi(r) - \bar{\Omega}_L[\psi](r)$, имеем

$$\begin{aligned}
 (F(kr), \psi(r)) &= (F(kr), \psi(r) - \bar{\Omega}_L[\psi](r)) + (F(kr), \bar{\Omega}_L[\psi](r)) \\
 &= (F(kr), \chi(r)) = \frac{1}{k} \left(F(r), \eta(r) \chi \left(\frac{r}{k} \right) \right),
 \end{aligned}$$

где функция $\eta(r) \in C^\infty([0, \infty))$ финитна и равна 1 на носителе $F(r)$. Пусть $\operatorname{supp} F \subset [0, A)$. В силу конечности порядка F существует M (без ограничения

общности можно считать $M > L$) такое, что

$$\left| \frac{1}{k} \left(F(r), \eta(r) \chi \left(\frac{r}{k} \right) \right) \right| \leq \frac{\tilde{c}}{k} \mathcal{P}_M \left(\eta(r) \chi \left(\frac{r}{k} \right) \right);$$

здесь и далее $\tilde{c}$ – произвольная постоянная. Норма $\mathcal{P}_M$ определена формулой (1.8). Далее будем использовать асимптотическое разложение

$$\chi(r) \sim \sum_{\operatorname{Re} \lambda > L} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m} r^\lambda \ln^m r, \quad r \rightarrow +0,$$

из которого следует

$$\chi \left(\frac{r}{k} \right) \sim \sum_{\operatorname{Re} \lambda > L} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m} \left(\frac{r}{k} \right)^\lambda \ln^m \frac{r}{k} = \sum_{\operatorname{Re} \lambda > L} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \widehat{C}_{\lambda, m}(k) r^\lambda \ln^m r, \quad r \rightarrow +0.$$

Нетрудно видеть, что $|\widehat{C}_{\lambda, m}(k)| < \frac{\tilde{c}}{k^{L+\Delta}}$, $\Delta > 0$. Теперь при $k \rightarrow +\infty$ получаем

$$\begin{aligned} |(F(kr), \psi(r))| &\leq \frac{\tilde{c}}{k} \left\{ \max_{l \leq M} \sup_{r < A} \left| \left(\frac{d}{dr} \right)^l \chi \left(\frac{r}{k} \right) \right| + \max_{\substack{L < \operatorname{Re} \lambda \leq M \\ m < n(\lambda)}} |\widehat{C}_{\lambda, m}(k)| \right\} \\ &\leq \frac{\tilde{c}}{k} \left\{ \frac{\tilde{c}}{k^{L+\Delta}} + \frac{\tilde{c}}{k^{L+\Delta}} \right\} = \frac{\tilde{c}}{k^{L+1+\Delta}}, \quad \Delta > 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались оценкой

$$\begin{aligned} \max_{l \leq M} \sup_{r < A} \left| \left(\frac{d}{dr} \right)^l \chi \left(\frac{r}{k} \right) \right| &= \max_{l \leq M} \sup_{\xi < \frac{A}{k}} \left(\frac{1}{k} \right)^l \left| \left(\frac{d}{d\xi} \right)^l \chi(\xi) \right| \\ &\leq \max_{l \leq M} \sup_{\xi < \frac{A}{k}} \left(\frac{1}{k} \right)^l \tilde{c} \xi^{L+\Delta-l} \leq \tilde{c} \frac{1}{k^{L+\Delta}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующие леммы и теоремы предоставляют описание обобщенных функций из класса $\operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , причем $-\operatorname{Re} \beta - 1 \notin \operatorname{pr} J$. Пусть $\gamma(r)$ – непрерывная при $r > 0$ функция такая, что

$$\gamma(r) \sim B \rho(r) r^{N+l}, \quad r \rightarrow +\infty, \quad (2.9)$$

где $B, l \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{Z}_+$. Положим

$$(F_1(r), \psi(r)) = \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-l} (\psi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r))) dr \quad \forall \psi \in S_{\bar{J}}. \quad (2.10)$$

Тогда $F_1(r) \in \operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$, причем

$$\frac{1}{\rho(k)} F_1(kr) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (-1)^N B Q r_+^\beta(r), \quad Q = \frac{\Gamma(\beta + 1 + l + N)}{\Gamma(\beta + 1 + l)}. \quad (2.11)$$

Отметим, что Q может быть равно нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g(r) = \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(\frac{1}{r^l}(\psi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r))\right).$$

Имеют место следующие оценки:

$$|g(r)| \leq c \cdot \begin{cases} r^{-\operatorname{Re} \beta - 1 - \Delta - \operatorname{Re} l - N}, & r \geq 1, \\ r^{-\operatorname{Re} \beta - 1 + \Delta_1 - \operatorname{Re} l - N}, & r \leq 1, \end{cases} \quad (2.12)$$

где $\Delta, \Delta_1 > 0$. Здесь мы учли, что последнее $\operatorname{Re} \lambda$ из суммы (1.7) равно $-\operatorname{Re} \beta - 1 - \Delta$, а в окрестности нуля

$$\begin{aligned} \psi(r) - \Omega_{-\beta-1}[\psi](r) &= O(r^{\operatorname{Re} \lambda_1 - \varepsilon}), \quad \lambda_1 \in J, \\ \operatorname{Re} \lambda_1 &= -\operatorname{Re} \beta - 1 + \Delta_1, \quad \Delta_1 - \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

так как $-\operatorname{Re} \beta - 1 \notin \operatorname{pr} J$, а величину ε , появившуюся из оценки логарифмов, можно считать сколь угодно малой. Кроме того, в силу (2.9) и леммы 0.1 имеем

$$|\gamma(r)| \leq \tilde{c} |\rho(r) r^{N+l}| \leq c_\varepsilon r^{N+\operatorname{Re} l + \operatorname{Re} \beta + \varepsilon}, \quad r > 1,$$

где $\varepsilon < \Delta$. Отсюда, в частности, следует, что интеграл в (2.10) сходится.

Покажем, что функция $F_1(r)$, определяемая формулой (2.10), обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$. Для любой функции $\psi(r) \in S_{\bar{J}}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (F_1(kr), \psi(r)) &= \frac{1}{k\rho(k)} \left(F_1(r), \psi\left(\frac{r}{k}\right) \right) \\ &= \frac{1}{k\rho(k)} \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(r^{-l} \left(\psi\left(\frac{r}{k}\right) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1} \left[\psi\left(\frac{r}{k}\right) \right](r) \right) \right) dr \\ &= \frac{1}{k^{N+l}\rho(k)} \int_{1/k}^\infty \gamma(kr) \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(r^{-l} (\psi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r)) \right) dr \\ &= \int_{1/k}^\infty \frac{\rho(kr)}{\rho(k)} \frac{\gamma(kr)}{(kr)^{N+l}\rho(kr)} r^{N+l} g(r) dr. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Мы учли, что $\Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi(\frac{r}{k})](r) = \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi(r)](\frac{r}{k})$. Считая $\varepsilon < \min\{\Delta, \Delta_1\}$, по лемме 0.1 имеем

$$\frac{\rho(kr)}{\rho(k)} \leq c \cdot \begin{cases} r^{\operatorname{Re} \beta + \varepsilon} & \text{при } r > 1, k > 1, \\ r^{\operatorname{Re} \beta - \varepsilon} & \text{при } \frac{1}{k} < r < 1, k > 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Учитывая оценки (2.12), (2.14) и оценку

$$\left| \frac{\gamma(kr)}{(kr)^{N+l}\rho(kr)} \right| \leq \tilde{c}, \quad kr > 1, \quad (2.15)$$

видим, что подынтегральная функция в соотношении (2.13) оценивается функцией $cr^{-1-(\Delta-\varepsilon)}$ в окрестности ∞ и функцией $cr^{-1+(\Delta_1-\varepsilon)}$ в окрестности нуля,

т.е. интегрируемой функцией, не зависящей от k . Кроме того, при $k \rightarrow +\infty$ подынтегральная функция имеет предел (при каждом r). По теореме Лебега можно в соотношении (2.13) перейти к пределу при $k \rightarrow +\infty$. Избавляясь в пределе от производных и интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{\rho(k)}(F_1(kr), \psi(r)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (-1)^N BQ \int_0^\infty r^\beta (\psi(r) - \Omega_{-\beta-1}[\psi](r)) dr. \quad (2.16)$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , $F_1(r) \in \text{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$, причем $\text{supp } F_1 \subset [1, +\infty)$. Кроме того, для некоторого $l \in \mathbb{C}$ пусть $r^l F_1(r) \in \text{AO}_{\rho_1}(S_+)$, где $\rho_1(k) = k^l \rho(k)$. Тогда существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная функция $\gamma(r)$, $r > 0$, обладающая асимптотикой (2.9), такие, что F_1 определяется формулой (2.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что так как носитель $F_1(r)$ отделен от нуля, то $r^l F_1(r) \in S'_{\bar{J}_1}$ для любого l и любого допустимого множества $\bar{J}_1$, в частности $r^l F_1(r) \in S'_+$. Поскольку обобщенная функция $r^l F_1(r)$ обладает квазиасимптотикой относительно $k^l \rho(k)$ на S_+ , существует число N такое, что ее первообразная порядка $N > -\text{Re } \beta - \text{Re } l - 1$ является непрерывной функцией и имеет асимптотику вида $r^{l+N} \rho(r)$, т.е.

$$\gamma(r) = (-1)^N (r^l F_1(r))^{(-N)} \sim Br^{l+N} \rho(r), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (2.17)$$

Полагая $\eta_\varkappa(r) = \eta\left(\frac{r}{\varkappa}\right)$, где $\eta(r)$ удовлетворяет условиям (1.9), для любого $\varkappa > 0$ и любой функции $\psi(r) \in S_{\bar{J}}$ имеем

$$\begin{aligned} (F_1(r), \psi(r)) &= (F_1(r), \psi(r) - \eta_\varkappa(r) \Omega_{-\text{Re } \beta - 1}[\psi](r)) \\ &+ \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \text{Re } \lambda < -\text{Re } \beta - 1}} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m} (F_1(r), \eta_\varkappa(r) r^\lambda \ln^m r). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Покажем, что второе слагаемое в правой части равенства (2.18) стремится к нулю при $\varkappa \rightarrow +\infty$. Действительно, учитывая, что $r^\lambda \eta(r) \ln^m r \in S_{\bar{J}}$ и $F_1 \in \text{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$, а потому $(F_1(\varkappa r), r^\lambda \eta(r) \ln^m r) \sim c \rho(\varkappa)$, для любого слагаемого этой суммы имеем

$$\begin{aligned} (F_1(r), r^\lambda \eta_\varkappa(r) \ln^m r) &= \varkappa^{1+\lambda} \sum_{q=0}^m c_q \ln^q \varkappa (F_1(\varkappa r), r^\lambda \eta(r) \ln^{m-q} r) \\ &= O(\varkappa^{1+\lambda} \ln^m \varkappa \rho(\varkappa)) \xrightarrow{\varkappa \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

так как $\text{Re } \lambda + \text{Re } \beta + 1 + \varepsilon < 0$ для достаточно малого ε .

Для первого слагаемого в правой части (2.18) имеем

$$\begin{aligned} &(F_1(r), \psi(r) - \eta_\varkappa \Omega_{-\text{Re } \beta - 1}[\psi](r)) \\ &= (-1)^N \left((r^l F_1(r))^{(-N)}, \left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-l} (\psi(r) - \eta_\varkappa(r) \Omega_{-\text{Re } \beta - 1}[\psi](r))) \right) \end{aligned}$$

$$= \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-l} \psi(r) - \eta_{\varkappa}(r) \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \operatorname{Re} \lambda < -\operatorname{Re} \beta - 1}} r^{\lambda-l} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m} \ln^m r \right) dr. \quad (2.19)$$

Поскольку выражение в левой части равенства (2.18) не зависит от $\varkappa$, а второе слагаемое в правой части стремится к нулю при $\varkappa \rightarrow +\infty$, выводим, что и первое слагаемое справа имеет предел. Покажем, что оно стремится к интегралу в формуле (2.10). Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в (2.19) под интегралом. Пользуясь формулой Лейбница, для каждого слагаемого этой суммы имеем

$$\left(\frac{d}{dr} \right)^N \eta_{\varkappa}(r) r^{\lambda-l} \ln^m r = \sum_{q=0}^N \eta^{(q)} \left(\frac{r}{\varkappa} \right) \frac{r^{\lambda-l-(N-q)}}{\varkappa^q} \sum_{p=0}^m c_{qp} \ln^p r$$

с некоторыми постоянными c_{pq} . Теперь для типичного слагаемого этой суммы, учитывая (1.9), при $q \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_1^\infty \gamma(r) \eta^{(q)} \left(\frac{r}{\varkappa} \right) \frac{r^{\lambda-l-(N-q)}}{\varkappa^q} \ln^p r \, dr \right| \\ & \leq c \int_1^\infty |\rho(r)| r^{N+\operatorname{Re} l} \left| \eta^{(q)} \left(\frac{r}{\varkappa} \right) \right| \frac{r^{\operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Re} l - (N-q)}}{\varkappa^q} \ln^p r \, dr \\ & \leq \frac{c}{\varkappa^q} \int_{\varkappa}^{2\varkappa} r^{\operatorname{Re} \beta + \varepsilon + N + \operatorname{Re} l + \operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Re} l - (N-q)} \, dr \\ & \leq \frac{c}{\varkappa^q} \int_{\varkappa}^{2\varkappa} r^{q-1-\Delta+\varepsilon} \, dr = \frac{c}{\varkappa^q} \frac{r^{q-\Delta+\varepsilon}}{q-\Delta+\varepsilon} \Big|_{\varkappa}^{2\varkappa} \xrightarrow{\varkappa \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Здесь мы учли то, что $\operatorname{Re} \lambda < -\operatorname{Re} \beta - 1 - \Delta$, $\Delta > 0$, а также асимптотическое соотношение (2.17) и свойства автомодельной функции и воспользовались леммой 0.1 при $\varepsilon < \Delta$.

Пусть теперь $q = 0$. Учитывая, что семейство функций $\eta_{\varkappa}(r) \rightarrow 1$ при каждом фиксированном r равномерно ограничено, имеем

$$\int_1^{2\varkappa} \gamma(r) r^{\lambda-l-N} \ln^p r \eta \left(\frac{r}{\varkappa} \right) dr \xrightarrow{\varkappa \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \gamma(r) r^{\lambda-l-N} \ln^p r \, dr.$$

Переходя теперь в (2.19) к пределу при $\varkappa \rightarrow +\infty$, получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $F(r) \in S'_J$ и $L \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $F(r) = F_0(r) + F_1(r)$, где $\operatorname{supp} F_1 \subset [1, +\infty)$, а $\operatorname{supp} F_0$ – компакт и

$$M_{\lambda,m}[F_0] = 0, \quad \lambda \in J, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq L, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda). \quad (2.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью разбиения единицы представим $F = \widehat{F}_0 + \widehat{F}_1$, где $\operatorname{supp} \widehat{F}_1 \subset [1, +\infty)$, а $\operatorname{supp} \widehat{F}_0$ – компакт. Пусть $\xi(r) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp} \xi(r) \subset [2, 3]$, причем

$$M_{\lambda,m}[\xi] = M_{\lambda,m}[\widehat{F}_0], \quad \operatorname{Re} \lambda \leq L, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda).$$

Это возможно в силу линейной независимости $r^\lambda \ln^m r$ при различных λ , m . Теперь положим $F_0 = \widehat{F}_0 - \xi$, $F_1 = \widehat{F}_1 + \xi$.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция, $F(r) \in \text{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$ и $\text{supp } F(r) \subset [1, \infty)$. Тогда существуют $l \in \mathbb{C}$ и обобщенная функция $F_l(r) \in \text{AO}_{\rho_1}(S_+)$, где $\rho_1(k) = k^l \rho(k)$, такая, что $r^l F(r) = F_l$ на $S_{\bar{J}-}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $S_\emptyset \subset S_{\bar{J}}$, то $F(r) \in \text{AO}_\rho(S_\emptyset)$. По теореме о конечности порядка (см. [8]) существует число $l \in \mathbb{C}$ такое, что $F(r)$ обладает квазиасимптотикой на всех функциях вида $r^l \psi(r)$, $\psi(r) \in S_+$, относительно $\rho_1(k) = k^l \rho(k)$. Другими словами, $r^l F(r)$ определяет обобщенную функцию $F_l(r)$ на S_+ , обладающую квазиасимптотикой относительно $\rho_1(k)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , $L \geq -\text{Re } \beta - 1$ и $F(r) \in \text{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$. Тогда существуют числа $l, B \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная при $r > 0$ функция $\gamma(r)$, удовлетворяющая условию (2.9), такие, что $F(r) = F_0(r) + F_1(r)$, где $F_0(r) \in S'_{\bar{J}}$ удовлетворяет условию (2.20), а обобщенная функция $F_1(r)$ задается формулой (2.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.4 представим $F = F_0 + F_1$. Пользуясь леммой 2.1, заключаем, что F_0 обладает тривиальной асимптотикой относительно ρ и, следовательно, $F_1(r) \in \text{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$. Теперь, пользуясь леммами 2.3, 2.5, завершаем доказательство.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\bar{J}, \bar{J}_1$ – допустимые множества, причем $\bar{J} \subset \bar{J}_1$, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , $-\text{Re } \beta - 1 \notin \text{pr } J_1$, $F(r) \in \text{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$. Тогда $F(r)$ продолжается до обобщенной функции из $\text{AO}_\rho(S_{\bar{J}_1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{J} = \{(\lambda, n(\lambda))\}$, а $\bar{J}_1 = \{(\lambda, n_1(\lambda))\}$. По лемме 2.6 имеем $F = F_0 + F_1$, где F_0 удовлетворяет условию (2.20) при $L \geq -\text{Re } \beta - 1$, а F_1 представляется в виде (2.10) с некоторыми N, l и $\gamma(r)$. Продолжим F_0 до обобщенной функции $\widehat{F}_0 \in S'_{\bar{J}_1}$ так, чтобы $\text{supp } \widehat{F}_0$ был компактен и чтобы

$$M_{\lambda, m}[\widehat{F}_0] = 0, \quad \lambda \in J_1, \quad \text{Re } \lambda \leq L, \quad 0 \leq m \leq n_1(\lambda). \quad (2.21)$$

Покажем, что это возможно. Заметим, что любое продолжение обобщенной функции с компактным носителем будет иметь компактный носитель. Обозначим

$$\begin{aligned} \widehat{J}_2 = \{(\lambda, m(\lambda)) : \lambda \in J_1, \text{Re } \lambda \leq L, m(\lambda) = n_1(\lambda)\} \\ \cup \{(\lambda, m(\lambda)) : \lambda \in J, \text{Re } \lambda > L, m(\lambda) = n(\lambda)\}. \end{aligned}$$

Сначала продолжим F_0 до обобщенной функции $\widehat{\widehat{F}}_0$ из $S'_{\widehat{J}_2}$. Для этого достаточно задать значения $\widehat{\widehat{F}}_0$ на конечном числе функций вида $\eta(r)r^\lambda \ln^m r$, где $\eta(r)$ удовлетворяет условиям (1.9). Мы полагаем эти значения равными нулю. Теперь в качестве искомого продолжения $\widehat{F}_0$ можно взять любое продолжение $\widehat{\widehat{F}}_0$

до обобщенной функции $\widehat{F}_0$ на $S_{\bar{J}_1}$. Такое продолжение существует по теореме Хана–Банаха. Отметим, что при таком продолжении

$$\frac{1}{\rho(k)} \widehat{F}_0(kr) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty, \quad \text{в } S'_{\bar{J}_1}$$

(см. лемму 2.1). Продолжим теперь F_1 до обобщенной функции $\widehat{F}_1 \in S'_{\bar{J}_1}$ по формуле

$$\begin{aligned} (\widehat{F}_1(r), \psi(r)) &= \\ &= \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-l} \left(\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J_1 \\ \operatorname{Re} \lambda < -\operatorname{Re} \beta - 1}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda, m} \ln^m r \right) \right) dr, \end{aligned}$$

где $\psi \in S_{\bar{J}_1}$, а числа N , l и функция $\gamma(r)$ берутся из формулы (2.10). Согласно лемме 2.2 таким образом определенная обобщенная функция $\widehat{F}_1$ принадлежит $\operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}_1})$. Ясно, что для $\psi(r) \in S_{\bar{J}}$ функции $F(r)$ и $\widehat{F}(r) = \widehat{F}_0 + \widehat{F}_1$ совпадают. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , причем $-\operatorname{Re} \beta - 1 \notin \operatorname{pr} J$ и $L \geq -\operatorname{Re} \beta - 1$. Если число $l \in \mathbb{C}$ таково, что

$$-\operatorname{Re} \beta - \operatorname{Re} l - 1 \notin \mathbb{Z}_+, \quad (2.22)$$

то $F(r) \in \operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$ тогда и только тогда, когда

$$F(r) = F_0(r) + F_1(r), \quad F_0(r), F_1(r) \in S'_{\bar{J}}, \quad (2.23)$$

где $F_0(r)$ имеет компактный носитель и

$$M_{\lambda, m}[F_0] = 0, \quad \lambda \in J, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq L, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda), \quad (2.24)$$

а $F_1(r)$ определяется следующим образом: существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная функция $\gamma(r)$, удовлетворяющие асимптотическому условию

$$\gamma(r) \sim B \rho(r) r^{N+l}, \quad r \rightarrow +\infty, \quad (2.25)$$

такие, что для любой $\psi \in S_{\bar{J}}$

$$(F_1(r), \psi(r)) = \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-l} (\psi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r)) \right) dr. \quad (2.26)$$

При этом

$$\frac{1}{\rho(k)} F(kr) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (-1)^N B \frac{\Gamma(\beta + 1 + l + N)}{\Gamma(\beta + 1 + l)} r_+^\beta \quad \text{в } S'_{\bar{J}}. \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность следует из лемм 2.1, 2.2. Докажем необходимость. Пусть $F \in \operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$, положим $\bar{J}_1 = \overline{J \cup (\mathbb{Z}_+ - l)}$. Ясно, что $\bar{J} \subset \bar{J}_1$,

и в силу (2.22) имеем $-\operatorname{Re} \beta - 1 \notin \operatorname{pr} J_1$. По лемме 2.7 обобщенная функция $F(r)$ продолжается до $\operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}_1})$, а тогда по лемме 2.6 имеем $F = F_0 + F_1$, где $\operatorname{supp} F_1 \subset [1, \infty)$, а $F_0 \in S'_{\bar{J}_1}$ имеет компактный носитель и удовлетворяет соотношениям (2.24), в которых J заменено на J_1 , а потому обладает тривиальной квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$. Следовательно, $F_1 \in \operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}_1})$. Отсюда следует, что $r^l F_1(r) \in \operatorname{AO}_{\rho_1}(S_{(\bar{J}-l) \cup \mathbb{Z}_+})$, где $\rho_1(k) = k^l \rho(k)$. Поэтому $r^l F_1(r) \in \operatorname{AO}_{\rho_1}(S_+)$, и, следовательно, по лемме 2.3 обобщенная функция F_1 на $S_{\bar{J}_1}$ представляется в виде (2.10) с некоторыми $N \in \mathbb{Z}_+$ и $\gamma(r)$, удовлетворяющими соотношению (2.9). Поскольку $\bar{J} \subset \bar{J}_1$, выполнены соотношения (2.23)–(2.26). Теперь по лемме 2.2 имеем

$$\frac{1}{\rho(k)} F_1(kr) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (-1)^N B \frac{\Gamma(\beta + 1 + l + N)}{\Gamma(\beta + 1 + l)} r_+^\beta.$$

Учитывая, что квазиасимптотика $F_0(r)$ относительно $\rho(k)$ равна нулю (см. лемму 2.1), видим, что выполняется соотношение (2.27). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , причем $-\operatorname{Re} \beta - 1 \in \operatorname{pr} J$, $L \geq -\operatorname{Re} \beta - 1$ и число $l \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию

$$-\operatorname{Re} \beta - \operatorname{Re} l - 1 \notin \mathbb{Z}_+. \quad (2.28)$$

Для того чтобы $F(r) \in \operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$F(r) = F_0(r) + F_1(r), \quad F_0(r), F_1(r) \in S'_{\bar{J}}, \quad (2.29)$$

где $F_0(r)$ имеет компактный носитель и

$$M_{\lambda, m}[F_0] = 0, \quad \lambda \in J, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq L, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda), \quad (2.30)$$

а обобщенная функция $F_1(r)$ для любой $\psi(r) \in S_{\bar{J}}$ определяется формулой

$$(F_1(r), \psi(r)) = \int_1^{+\infty} \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-l} (D_{\bar{J}-\beta-1})(\psi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta-1}[\psi](r)) dr \quad (2.31)$$

с некоторым $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывной функцией $\gamma(r)$, удовлетворяющей асимптотическому соотношению

$$\gamma(r) \sim B \rho(r) r^{N+l}, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (2.32)$$

При этом

$$\frac{1}{\rho(k)} F(kr) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \begin{cases} C_1 r_+^\beta & \text{при } -\beta - 1 \notin J, \\ -C_2 \Delta_{-\beta-1, n(-\beta-1)}(r) & \text{при } -\beta - 1 \in J, \end{cases} \quad (2.33)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= (-1)^N \frac{\Gamma(\beta + 1 + l + N)}{\Gamma(\beta + 1 + l)} \prod_{\lambda \in J - \beta - 1} [-(\beta + 1 + \lambda)]^{n(\lambda)+1}, \\ C_2 &= (-1)^N \frac{\Gamma(\beta + 1 + l + N)}{\Gamma(\beta + 1 + l)} n(-\beta - 1)! \prod_{\substack{\lambda \in J - \beta - 1 \\ \lambda \neq -\beta - 1}} [-(\beta + 1 + \lambda)]^{n(\lambda)+1}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Здесь $D_{\bar{J}-\beta-1}$ определяется формулой (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что все $\lambda \in J$, $\operatorname{Re} \lambda = -\operatorname{Re} \beta - 1$, перенумерованы так, что $\operatorname{Re} \lambda_p = -\operatorname{Re} \beta - 1$, $\lambda_p \in J$, $p = 1, \dots, q$. Положим $J_1 = J \setminus \{\lambda_p, p = 1, \dots, q\}$ и зададим обобщенную функцию $\hat{F}(r) \in S_{\bar{J}_1}$ формулой

$$(F(r), \psi(r)) = \left(\hat{F}(r), \left(\prod_{p=1}^q D_{\lambda_p} \right) \psi(r) \right), \quad \psi(r) \in S_{\bar{J}}.$$

Здесь D_λ определяется формулой (2.3). Это определение корректно, так как по следствию 2.1 отображение

$$\prod_{p=1}^q D_{\lambda_p} : S_{\bar{J}} \mapsto S_{\bar{J}_1}$$

осуществляет изоморфизм пространств $S_{\bar{J}}$ и $S_{\overline{J \setminus \{\lambda_p, p=1, \dots, q\}}} = S_{\bar{J}_1}$. Теперь, так как это отображение коммутирует с растяжениями, имеем

$$F(r) \in \operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}}) \iff \hat{F}(r) \in \operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}_1}).$$

Поскольку $-\operatorname{Re} \beta - 1 \notin \operatorname{pr} J_1$ (из J мы вычли все те λ , для которых $\operatorname{Re} \lambda = -\operatorname{Re} \beta - 1$), согласно теореме 2.1 имеем $\hat{F} = \hat{F}_0 + \hat{F}_1$, где $\operatorname{supp} \hat{F}_0$ – компакт и $M_{\lambda, m}[\hat{F}_0] = 0$ при $\operatorname{Re} \lambda \leq L$, $\lambda \in J_1$, а $\hat{F}_1$ на $S_{\bar{J}_1}$ представляется соотношением (2.26). Для любой функции $\psi(r) \in S_{\bar{J}}$ имеем

$$\begin{aligned} (F(r), \psi(r)) &= \left(\hat{F}_0(r), \left(\prod_{p=1}^q D_{\lambda_p} \right) \psi(r) \right) \\ &+ \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-l} \left[\left(\prod_{p=1}^q D_{\lambda_p} \right) \psi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1} \left[\left(\prod_{p=1}^q D_{\lambda_p} \right) \psi(r) \right](r) \right] dr. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Учитывая, что $(\prod_{p=1}^q D_{\lambda_p}) r^\lambda \ln^m r = 0$, если λ совпадает с одним из $\lambda_p, p = 1, \dots, q$, нетрудно видеть, что первое слагаемое в правой части (2.35) определяет обобщенную функцию $F_0 \in S'_J$ с компактным носителем и всеми моментами, до порядка L включительно равными нулю. Учитывая также, что оператор D_λ коммутирует с оператором $\Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}$, видим, что второе слагаемое в правой части (2.35) определяет обобщенную функцию $F_1 \in S'_J$, задаваемую формулой (2.31). Достаточность следует из лемм 2.1, 2.2. Теперь для любой $\varphi(r) \in S_{\bar{J}}$ аналогично, как и при доказательстве соотношения (2.27), интегрируя полученное соотношение N раз по частям, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho(k)} (F_1(kr), \varphi(r)) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (-1)^N \frac{\Gamma(\beta + 1 + l + N)}{\Gamma(\beta + 1 + l)} B \int_0^\infty r^\beta D_{\bar{J} - \beta - 1} (\varphi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\varphi](r)) dr. \end{aligned}$$

Если $-\beta - 1 \notin J$, отсюда, учитывая, что квазиасимптотика $F_0(r)$ относительно $\rho(k)$ равна нулю, согласно формуле (2.6) получим соотношение (2.33). Если $-\beta - 1 \in J$, то (2.33) следует из замечания 2.1. Теорема доказана.

В следующем параграфе нам понадобится ряд вспомогательных лемм.

ЛЕММА 2.8. Пусть дано семейство функций $f_i(r) = r^{\lambda_i} \ln^{m_i} r$, $i = 1, \dots, M$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $(\lambda_i, m_i) \neq (\lambda_j, m_j)$, $i \neq j$, и задан дифференциальный оператор

$$T_{N,s}^{\varkappa,\mu} = \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\varkappa} r^\mu \left(r \frac{d}{dr} \right)^s r^{-\mu} \quad (2.36)$$

для некоторых N , $s \in \mathbb{Z}_+$ и $\varkappa, \mu \in \mathbb{C}$, $\mu - \varkappa \notin \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим множество функций $\{T_{N,s}^{\varkappa,\mu} f_i(r), i = 1, \dots, M\}$. Предположим, что ни одна из этих функций не равна тождественно нулю. Тогда все эти функции линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Существуют c_i , не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{i=1}^M c_i T_{N,s}^{\varkappa,\mu} f_i(r) = T_{N,s}^{\varkappa,\mu} \sum_{i=1}^M c_i f_i(r) \equiv 0.$$

Тогда, обращая дифференциальный оператор $\left(\frac{d}{dr} \right)^N$, имеем

$$\left(r \frac{d}{dr} \right)^s r^{-\mu} \sum_{i=1}^M c_i f_i(r) = r^{\varkappa-\mu} \mathcal{P}_{N-1}(r),$$

где $\mathcal{P}_{N-1}(r)$ — многочлен степени не выше $N-1$. Отсюда, обращая оператор $\left(r \frac{d}{dr} \right)^s$ и учитывая, что $\mu - \varkappa \notin \mathbb{Z}_+$, получаем

$$r^{-\mu} \sum_{i=1}^M c_i f_i(r) = r^{\varkappa-\mu} Q_{N-1}(r) + L_{s-1}(\ln r),$$

где $Q_{N-1}(r) = \sum_{p=0}^{N-1} b_p r^p$ и $L_{s-1}(r) = \sum_{q=0}^{s-1} a_q r^q$ с некоторыми постоянными b_p и a_q . Далее, имеем

$$\sum_{i=1}^M c_i f_i(r) = r^{\varkappa} Q_{N-1}(r) + r^\mu L_{s-1}(\ln r).$$

Замечая, что

$$T_{N,s}^{\varkappa,\mu} r^{\varkappa+p} \equiv 0, \quad p = 0, \dots, N-1, \quad T_{N,s}^{\varkappa,\mu} r^\mu \ln^q r \equiv 0, \quad q = 0, \dots, s-1,$$

получаем, что все функции множества

$$\{r^{\lambda_i} \ln^{m_i} r, r^{\varkappa+p}, r^\mu \ln^q r; i = 1, \dots, M, p = 0, \dots, N-1, q = 0, \dots, s-1\}$$

различны (случай $q = 0$ и $\varkappa + p = \mu$ исключен условием $\mu - \varkappa \notin \mathbb{Z}_+$). Функции такого множества линейно независимы. Однако мы получили

$$\sum_{i=1}^M c_i f_i(r) - \sum_{p=0}^{N-1} b_p r^{\varkappa+p} - \sum_{q=0}^{s-1} a_q r^\mu \ln^q r \equiv 0,$$

что возможно, только если все c_i , b_p , a_q равны нулю. Противоречие. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. При $s = 0$ и любом $\varkappa$ утверждение леммы 2.8 останется справедливым для оператора $\left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\varkappa} = T_{N,0}^{\varkappa,\mu}$, не зависящего от μ .

ЛЕММА 2.9. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и задано допустимое множество

$$\bar{I}_{-\beta-1} = \{(\lambda, n(\lambda)) : \operatorname{Re} \lambda = -\operatorname{Re} \beta - 1\}, \quad I_{-\beta-1} \cap J = \emptyset. \quad (2.37)$$

Положим $\bar{J}_1 = \bar{J} \cup \bar{I}_{-\beta-1}$. Тогда любое продолжение $F(r)$ до обобщенной функции $\hat{F}(r) \in S'_{\bar{J}_1}$ задается формулой $\hat{F} = \hat{F}_0 + \hat{F}_1$, $\hat{F}_0, \hat{F}_1 \in S'_{\bar{J}_1}$, где $\hat{F}_0$ имеет компактный носитель и удовлетворяет соотношениям (2.25) с заменой J на J_1 , а $\hat{F}_1$ определяется формулой

$$(\hat{F}_1(r), \varphi(r)) = \int_1^\infty \gamma_1(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-l} (\varphi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\varphi](r)) dr \quad \forall \varphi \in S_{\bar{J}_1} \quad (2.38)$$

с некоторым N и непрерывной функцией $\gamma_1(r)$, удовлетворяющей асимптотическому соотношению $\gamma_1(r) \sim B_1 r^{N+l} \rho(r)$ при $r \rightarrow +\infty$ с некоторой постоянной B_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно разложению (2.24) имеем $F = F_0 + F_1$. Так же, как и при доказательстве леммы 2.7, продолжим F_0 до обобщенной функции $\hat{\hat{F}}_0 \in S'_{\bar{J}_1}$, положив $M_{\lambda,m}[\hat{\hat{F}}_0] = 0$ для $\lambda \in I_{-\beta-1}$ и $0 \leq m \leq n(\lambda)$. Последняя имеет компактный носитель и удовлетворяет условиям (2.25) с заменой J на J_1 . Далее, продолжим F_1 до обобщенной функции $\hat{\hat{F}}_1 \in S'_{\bar{J}_1}$ формулой (2.27), которая корректно определена для всех $\psi(r) \in S_{\bar{J}_1}$. Тем самым $\hat{\hat{F}} = \hat{\hat{F}}_0 + \hat{\hat{F}}_1$ дает одно из продолжений F на $S_{\bar{J}_1}$. Пусть теперь $\tilde{F}$ – любое другое продолжение. Тогда оно отличается от $\hat{\hat{F}}$ на обобщенную функцию, сосредоточенную в нуле. Более того, ясно, что

$$\tilde{F} = \hat{\hat{F}} + \sum_{\lambda \in I_{-\beta-1}} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} b_m^\lambda \Delta_{\lambda,m}(r), \quad b_m^\lambda \neq 0.$$

Положим

$$(h(r), \varphi(r)) = \int_1^\infty \omega(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-l} \varphi(r) dr, \quad \varphi \in S_{J_1}, \quad (2.39)$$

где $\omega(r)$ – непрерывная функция с компактным и отделенным от нуля носителем (скажем, $\operatorname{supp} \omega \subset [2, 3]$). Заметим, что в силу (2.22)

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-l} r^\lambda \ln^m r \neq 0, \quad \lambda \in I_{-\beta-1}, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda).$$

Выберем $\omega(r)$ так, чтобы

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \omega(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-l} r^\lambda \ln^m r \, dr = \\ = \begin{cases} b_m^\lambda, & \lambda \in I_{-\beta-1}, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda), \\ 0, & \lambda \in \left\{ \lambda \in J, \operatorname{Re} \lambda \leq L, \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-l} r^\lambda \ln^m r \not\equiv 0 \right\}, \quad m \leq n(\lambda). \end{cases} \quad (2.40) \end{aligned}$$

Это возможно, так как все функции вида

$$\left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-l} r^\lambda \ln^m r \not\equiv 0$$

в (2.40) линейно независимы, как это следует из замечания 2.3. Ясно, что

$$(h(r), r^\lambda \ln^m r) = \begin{cases} b_m^\lambda & \text{при } \lambda \in I_{-\beta-1}, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda), \\ 0 & \text{при } \lambda \in J, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq L, \quad m \leq n(\lambda). \end{cases}$$

Кроме того, ясно, что при таком выборе $\omega(r)$

$$(h(r), \varphi(r)) = \int_1^\infty \omega(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-l} (\varphi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\varphi](r)) \, dr.$$

Теперь, как нетрудно проверить, функции

$$\widehat{F}_0(r) = \widehat{\widehat{F}}_0(r) + \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} b_m^\lambda \Delta_{\lambda, m}(r) - h(r), \quad \widehat{F}_1(r) = \widehat{\widehat{F}}_1(r) + h(r)$$

влекут искомое продолжение при $\gamma_1(r) = \gamma(r) + \omega(r)$.

ЛЕММА 2.10. Пусть выполнены условия теоремы 2.2 и задано допустимое множество $\bar{J}_1 \supset \bar{J}$ такое, что $\operatorname{Re} \lambda \neq -\operatorname{Re} \beta - 1$ для всех $\lambda \in \{J_1 \setminus J\}$. Тогда обобщенная функция $F(r) \in \operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$ продолжается до обобщенной функции $\widehat{F}(r) \in \operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}_1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.2 имеем $F(r) = F_0(r) + F_1(r)$, где F_0 имеет компактный носитель и удовлетворяет условию (2.30), а F_1 представляется в виде (2.32). Продолжим F_0 до $\widehat{F}_0$ на $S_{\bar{J}_1}$ точно так же, как это сделано при доказательстве леммы 2.7. При этом продолжении $\widehat{F}_0$ будет иметь компактный носитель и все моменты, равные нулю до порядка L включительно. Далее, продолжим F_1 до $\widehat{F}_1 \in S_{\bar{J}_1}$ по формуле (2.31), которая остается корректной и при $\psi(r) \in S_{\bar{J}_1}$. Пользуясь опять теоремой 2.2, нетрудно видеть, что $\widehat{F}(r) = \widehat{F}_0(r) + \widehat{F}_1(r)$ даст нужное продолжение.

Следующую лемму мы сформулируем в случае, когда множество тех $\lambda \in J$, для которых $\operatorname{Re} \lambda = -\operatorname{Re} \beta - 1$, состоит из одной точки μ . Другими словами, $J_{-\beta-1}$ состоит из одной точки μ .

ЛЕММА 2.11. Пусть выполнены условия теоремы 2.2 при $J_{-\beta-1} = \{\mu\}$ и задано допустимое множество

$$\bar{I}_{-\beta-1} = \{(\lambda, n(\lambda))\} \quad (2.41)$$

такое, что $\lambda \in I_{-\beta-1}$, $\lambda \neq \mu$, и $\operatorname{Re} \lambda = -\operatorname{Re} \beta - 1$. Положим $\bar{J}_1 = \bar{J} \cup \bar{I}_{-\beta-1}$. Тогда любое продолжение $F(r) \in \operatorname{AO}_\rho(S_{\bar{J}})$ до обобщенной функции $\hat{F}(r) \in S'_{\bar{J}_1}$ задается формулой $\hat{F} = \hat{F}_0 + \hat{F}_1$, $\hat{F}_0, \hat{F}_1 \in S'_{\bar{J}_1}$, где $\hat{F}_0$ имеет компактный носитель и удовлетворяет соотношениям (2.30) с заменой J на J_1 , а $\hat{F}_1$ для любой функции $\psi(r) \in S_{\bar{J}_1}$ определяется формулой

$$\begin{aligned} (\hat{F}_1(r), \psi(r)) = \int_1^\infty \gamma_1(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-l} \left(r^\mu \left(r \frac{d}{dr} \right)^{n(\mu)+1} r^{-\mu} \right) \\ \times (\psi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r)) dr \end{aligned} \quad (2.42)$$

с некоторым $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывной функцией $\gamma_1(r)$, удовлетворяющей асимптотическому соотношению

$$\gamma_1(r) \sim B_1 \rho(r) r^{N+l}, \quad r \rightarrow +\infty,$$

с некоторой постоянной B_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится так же, как и доказательство леммы 2.9, только теперь функцию $\omega(r)$ будем подбирать для функционала

$$(H(r), \varphi(r)) = \int_1^\infty \omega(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-l} r^\mu \left(r \frac{d}{dr} \right)^{n(\mu)+1} r^{-\mu} \psi(r) dr$$

и в соответствующем месте сослаться на лемму 2.8.

§ 3. Обобщенные функции, асимптотически однородные на пространствах $W_{\bar{J}}$ и $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$

Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество. Класс $\operatorname{AO}_\rho(W_{\bar{J}})$ асимптотически однородных обобщенных функций относительно автомодельной функции $\rho(k)$ на пространстве $W_{\bar{J}}$ определен в § 1 (см. определение 1.4). Все результаты, полученные для асимптотически однородных обобщенных функций в § 2 в случае пространства $S_{\bar{J}}$, верны и в случае пространства $W_{\bar{J}}$. Далее мы рассмотрим те новые моменты, которые связаны с появлением зависимости функций от переменных $e \in \Gamma$. Так, если $F(r) \in S'_{\bar{J}}$ и $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$, то $F(r)\Phi(e) \in W'_{\bar{J}}$ определяется формулой

$$(F(r)\Phi(e), \psi(r, e)) = (F(r), (\Phi(e), \psi(r, e))_e), \quad \psi(r, e) \in W_{\bar{J}}.$$

Здесь и всюду далее нижний индекс e в записи $(\Phi(e), \psi(r, e))_e$ указывает значение обобщенной функции $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$ на функции $\psi(r, e)$, рассматриваемой

как основной из $S(\Gamma)$ при фиксированном r . В частности, если $-\beta - 1 \notin J$, то

$$(r_+^\beta \Phi(e), \psi(r, e)) = \begin{cases} \int_0^\infty r^\beta (\Phi(e), \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e))_e dr & \text{при } -\operatorname{Re} \beta - 1 \notin \operatorname{pr} J, \\ C \int_0^\infty r^\beta D_{\bar{J}_{-\beta-1}}(\Phi(e), \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e))_e dr & \text{при } -\operatorname{Re} \beta - 1 \in \operatorname{pr} J, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $C = \prod_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \left(\frac{-1}{\beta+1+\lambda} \right)^{n(\lambda)+1}$.

Отметим, что в формуле (3.1) в силу (2.5) вместо $\Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e)$ можно написать $\bar{\Omega}_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e)$. Кроме того, функция $r_+^\beta \Phi(e)$ однородна по r степени β .

Для $F(r, e) \in W'_J$ с компактным носителем моменты по r порядка λ , m определяются формулой

$$M_{\lambda, m}[F](e) = (F(r, e), \eta(r) r^\lambda \ln^m r), \quad M_{\lambda, m}[F](e) \in S'(\Gamma),$$

где $\eta(r)$ – бесконечно дифференцируемая финитная функция, равная единице на носителе F .

ЛЕММА 3.1. Пусть $F(r, e) \in W'_J$. Тогда ее можно представить в виде $F(r, e) = F_1(r, e) + F_0(r, e)$, где носитель F_1 отделен от нуля, а F_0 имеет компактный носитель и сколь угодно много моментов, равных нулю. При этом если $(F(r, e), \varphi(e))_e \equiv 0$ в S'_J для некоторого семейства $\varphi(e) \in \mathcal{E}$, то можно считать, что такими же будут F_1 и F_0 , т.е.

$$(F_1(r, e), \varphi(e))_e \equiv 0, \quad (F_0(r, e), \varphi(e))_e \equiv 0 \quad \text{в } S'_J, \quad \varphi(e) \in \mathcal{E}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{F}(r, e) = F(r, e)\eta(r)$, где $\eta(r)$ удовлетворяет условиям (1.9). Отметим, что $(\tilde{F}(r, e), \varphi(e))_e \equiv 0$, $\varphi(e) \in \mathcal{E}$, так что и все моменты для $\tilde{F}$ также будут ортогональны к $\mathcal{E}$. Перенумеруем все $\lambda \in J$, $\operatorname{Re} \lambda \leq M$. Пусть $\{\lambda_i, i = 1, \dots, Q\}$ – множество таких λ . Пусть также $L = \sup_i n(\lambda_i)$. Подберем множество бесконечно дифференцируемых функций

$$\left\{ \omega_{ij}(r) : \operatorname{supp} \omega_{ij} \subset [2, 3], \int r^{\lambda_i} \ln^{m_j} r \omega_{ij}(r) dr = \delta_{ij}, \right. \\ \left. i = 1, \dots, Q, j = 0, 1, \dots, L \right\}.$$

Это возможно, так как функции $\{r^{\lambda_i} \ln^{m_j}\}$ линейно независимы. Пусть

$$\Psi(r, e) = \sum_{i=1}^Q \sum_{j=0}^L \omega_{ij}(r) M_{\lambda_i, m_j}[\tilde{F}](e).$$

Положим

$$F_1(r, e) = F(r, e) - \tilde{F}(r, e) + \Psi(r, e), \quad F_0(r, e) = \tilde{F}(r, e) - \Psi(r, e).$$

Теперь легко проверяется, что требуемые свойства выполнены.

Аналогично теоремам 2.1, 2.2 доказываются следующие теоремы о представлении асимптотически однородных обобщенных функций из $W_{\bar{J}}$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , причем $-\operatorname{Re} \beta - 1 \notin \operatorname{pr} J$ и $L \geq -\operatorname{Re} \beta - 1$. Если число $l \in \mathbb{C}$ таково, что

$$-\operatorname{Re} \beta - \operatorname{Re} l - 1 \notin \mathbb{Z}_+, \quad (3.2)$$

то $F(r, e) \in \operatorname{AO}_\rho(W_{\bar{J}})$ тогда и только тогда, когда

$$F(r, e) = F_0(r, e) + F_1(r, e), \quad F_0(r, e), F_1(r, e) \in W'_{\bar{J}}, \quad (3.3)$$

где $F_0(r, e)$ имеет компактный носитель и удовлетворяет условиям

$$M_{\lambda, m}[F_0](e) \equiv 0, \quad \lambda \in J, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq L, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda), \quad (3.4)$$

а $F_1(r, e)$ представляется в следующем виде: существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная по r функция $\gamma(r, e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому соотношению

$$\gamma(r, e) \sim r^{N+l} \rho(r) B(e), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.5)$$

с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$, такие, что для любой функции $\psi(r, e) \in W_{\bar{J}}$

$$(F_1(r, e), \psi(r, e)) = \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-l} (\psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e))) \right) dr. \quad (3.6)$$

При этом справедлива формула

$$\frac{1}{\rho(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (-1)^N \frac{\Gamma(\beta + 1 + l + N)}{\Gamma(\beta + 1 + l)} r_+^\beta(r) B(e) \quad \text{в } W'_{\bar{J}}. \quad (3.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть $\mathcal{E}$ – некоторое подпространство в $S(\Gamma)$. Если в условиях теоремы 3.1 полагать, что $(F(r, e), \varphi(e)) \equiv 0$ в $S'_{\bar{J}}$ для $\varphi(e) \in \mathcal{E}$, то можно считать, что

$$(F_0(r, e), \varphi(e)) \equiv 0, \quad (\gamma(r, e), \varphi(e)) \equiv 0$$

для $\varphi(e) \in \mathcal{E}$.

Действительно, для F_0 это утверждение следует из леммы 3.1, а для $\gamma(r, e)$ – из доказательства теоремы 2.2, в котором используется лемма для пространства $W_{\bar{J}}$, аналогичная лемме 2.3 (см. (2.17)). Поскольку первообразная берется только по r , ортогональность к подпространству $\mathcal{E} \in S(\Gamma)$ сохраняется.

Напомним, что если $\mu \in \mathbb{C}$, то $\bar{J}_\mu = \{(\lambda, n(\lambda)) : \lambda \in J, \operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \mu\}$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , $-\operatorname{Re} \beta - 1 \in \operatorname{pr} J$, $L \geq -\operatorname{Re} \beta - 1$ и число $l \in \mathbb{C}$ таково, что

$$-\operatorname{Re} \beta - \operatorname{Re} l - 1 \notin \mathbb{Z}_+. \quad (3.8)$$

Тогда обобщенная функция $F(r, e)$ принадлежит $\text{AO}_\rho(W_{\bar{J}})$, если и только если

$$F(r, e) = F_0(r, e) + F_1(r, e), \quad F_0(r, e), F_1(r, e) \in W'_{\bar{J}}, \quad (3.9)$$

где $F_0(r, e)$ имеет компактный носитель и удовлетворяет условиям

$$M_{\lambda, m}[F_0](e) \equiv 0, \quad \lambda \in J, \quad \text{Re } \lambda \leq L, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda), \quad (3.10)$$

а $F_1(r, e)$ представляется в следующем виде: существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная по r функция $\gamma(r, e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому соотношению

$$\gamma(r, e) \sim r^{N+l} \rho(r) B(e), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.11)$$

с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$, такие, что для любой функции $\psi(r, e) \in W_{\bar{J}}$

$$\begin{aligned} (F_1(r, e), \psi(r, e)) &= \\ &= \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-l} (D_{\bar{J}-\beta-1})(\psi(r, e) - \Omega_{-\text{Re } \beta-1}[\psi](r, e)) \right) dr. \end{aligned} \quad (3.12)$$

При этом справедлива формула

$$\frac{1}{\rho(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \begin{cases} C_1 r_+^\beta B(e) & \text{при } -\beta - 1 \notin J, \\ -C_2 \Delta_{-\beta-1, n(-\beta-1)}(r) B(e) & \text{при } -\beta - 1 \in J. \end{cases} \quad (3.13)$$

Здесь коэффициенты C_1 и C_2 определяются формулами (2.34), а $D_{\bar{J}-\beta-1}$ — формулой (2.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторое подпространство $S(\Gamma)$. Аналогично замечанию 3.1 показывается, что если в условиях теоремы 3.2 полагать, что $(F(r, e), \varphi(e)) \equiv 0$ в $S'_{\bar{J}}$ для $\varphi(e) \in \mathcal{E}$, то можно считать, что $(F_0(r, e), \varphi(e)) \equiv 0$, $(\gamma(r, e), \varphi(e)) \equiv 0$ для $\varphi(e) \in \mathcal{E}$.

Пространство $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ и асимптотические однородные обобщенные функции на нем определены в § 1 (см. определение 1.1).

Следующая теорема в сочетании с теоремой 3.1 дает описание обобщенных функций из класса $\text{AO}_\rho(V_{\bar{J}, \mathcal{F}})$ в некритическом случае.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\bar{J}$ — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β , причем $-\text{Re } \beta - 1 \notin \text{pr } J$ и $F(r, e) \in W'_{\bar{J}}$. Тогда если $F(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{\bar{J}, \mathcal{F}})$, то $F(r, e)$ продолжается до $\hat{F}(r, e) \in \text{AO}_\rho(W_{\bar{J}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $W_{\bar{J}_\emptyset} \subset V_{\bar{J}, \mathcal{F}} \subset W_{\bar{J}}$, то $F(r, e) \in \text{AO}_\rho(W_{\bar{J}_\emptyset})$ продолжается (см. лемму 2.7) до $\tilde{F}(r, e) \in \text{AO}_\rho(W_{\bar{J}})$. Тем самым, $\tilde{F}(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{\bar{J}, \mathcal{F}})$. Рассмотрим разность $\tilde{F}(r, e) - F(r, e)$. Так как F и $\tilde{F}$ совпадают на $W_{\bar{J}_\emptyset}$, то $\text{supp}(\tilde{F} - F) \subset \{0\} \times \Gamma$. Поэтому существуют M и обобщенные функции

$$B_{\lambda, m}(e) \in S'(\Gamma), \quad \lambda \in J, \quad \text{Re } \lambda < M, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda),$$

такие, что

$$\begin{aligned} \tilde{F}(r, e) - F(r, e) &= \sum_{\substack{\lambda \in J \\ |\lambda| \leq M}} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \Delta_{\lambda, m}(r) B_{\lambda, m}(e) \\ &= \left(\sum_{\substack{\lambda \in J \\ \operatorname{Re} \lambda < -\operatorname{Re} \beta - 1}} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} + \sum_{\substack{\lambda \in J \\ -\operatorname{Re} \beta - 1 < \operatorname{Re} \lambda < M}} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \right) \Delta_{\lambda, m}(r) B_{\lambda, m}(e). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Поскольку $\tilde{F} - F \in \operatorname{AO}_\rho(V_{\bar{J}, \mathcal{F}})$, а квазиасимптотика второго слагаемого согласно лемме 2.1 тривиальна относительно $\rho(k)$ на $W_{\bar{J}}$, то первое слагаемое обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$. Покажем, что на самом деле первое слагаемое в (3.14) на основных функциях из $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ равно нулю.

Фиксируем $\lambda \in J$, $\operatorname{Re} \lambda < -\operatorname{Re} \beta - 1$, и положим

$$\psi(r, e) = r^\lambda \eta(r) \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \frac{1}{m!} A_\lambda^m C_{\lambda, 0}(e) \ln^m r \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}, \quad C_{\lambda, 0}(e) \in \mathcal{E}_\lambda.$$

Здесь A_λ – нильпотентный оператор в $\mathcal{E}_\lambda$ (см. определение 1.1). Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho(k)} \left(\sum_{\substack{\lambda \in J \\ \operatorname{Re} \lambda < -\operatorname{Re} \beta - 1}} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \Delta_{\lambda, m}(kr) B_{\lambda, m}(e), \psi(r, e) \right) \\ &= \frac{1}{k \rho(k)} \left(\sum_{m=0}^{n(\lambda)} \Delta_{\lambda, m}(r) B_{\lambda, m}(e), \psi\left(\frac{r}{k}, e\right) \right) \\ &= \frac{1}{k^{\lambda+1} \rho(k)} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \mathcal{D}_{\lambda, m} \ln^m k \sim \frac{\ln^{n(\lambda)} k}{\rho(k) k^{\lambda+1}} \mathcal{D}_{\lambda, n(\lambda)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \operatorname{const}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь $\mathcal{D}_{\lambda, m}$, $\mathcal{D}_{\lambda, n(\lambda)}$ – величины, не зависящие от k .

Поскольку $\operatorname{Re} \beta + \operatorname{Re} \lambda + 1 < 0$, это возможно, только если

$$\mathcal{D}_{\lambda, n(\lambda)} = 0 \quad \forall C_{\lambda, 0}(e) \in \mathcal{E}_\lambda.$$

Теперь из (3.15) вытекает, что

$$\frac{\ln^{n(\lambda)-1} k}{\rho(k) k^{\lambda+1}} \mathcal{D}_{\lambda, n(\lambda)-1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \operatorname{const}.$$

Это возможно, только если

$$\mathcal{D}_{\lambda, n(\lambda)-1} = 0 \quad \forall C_{\lambda, 0}(e) \in \mathcal{E}_\lambda,$$

по индукции, далее, заключаем, что

$$\mathcal{D}_{\lambda, m} = 0, \quad \lambda \in J, \quad \operatorname{Re} \lambda < -\operatorname{Re} \beta - 1, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda).$$

Таким образом, первое слагаемое в (3.14) на пространстве $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ равно нулю. Теперь функция

$$\widehat{F}(r, e) = \widetilde{F}(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ -\operatorname{Re} \beta - 1 < \operatorname{Re} \lambda < M}} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \Delta_{\lambda, m}(r) B_{\lambda, m}(e)$$

дает нужное продолжение. Теорема доказана.

Для описания асимптотически однородных функций в критическом случае мы проведем некоторые вспомогательные построения, проясняющие структуру пространств $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$, и докажем несколько лемм.

Поскольку оператор A_λ нильпотентен, то в $\mathcal{E}_\lambda$ существует базис

$$\{\chi_{l, m}^\lambda(e) \in \mathcal{E}_\lambda, \quad l = 1, \dots, q_\lambda, \quad m = 0, 1, \dots, m_l^\lambda\} \quad (3.16)$$

такой, что при любом $l = 1, \dots, q_\lambda$

$$A_\lambda \chi_{l, 0}^\lambda(e) = 0, \quad A_\lambda \chi_{l, m}^\lambda(e) = \chi_{l, m-1}^\lambda(e), \quad 1 \leq m \leq m_l^\lambda. \quad (3.17)$$

Пусть $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$. Фиксируем $\lambda \in J$ и в соотношении (1.12) выделим слагаемое, соответствующее этому λ :

$$\psi(r, e) \sim \dots + r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r, e) + \dots, \quad \text{где} \quad \omega_\lambda[\psi](r, e) = \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \ln^m r \frac{1}{m!} A_\lambda^m C_{\lambda, 0}(e). \quad (3.18)$$

Разлагая $C_{\lambda, 0}(e)$ и $\omega_\lambda[\psi](r, e)$ по базису (3.16):

$$C_{\lambda, 0}(e) = \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{s=0}^{m_l^\lambda} a_{l, s} \chi_{l, s}^\lambda(e), \quad \omega_\lambda[\psi](r, e) = \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=0}^{m_l^\lambda} [\omega_\lambda[\psi](r, e)]_{l, m} \chi_{l, m}^\lambda(e), \quad (3.19)$$

и сравнивая ω_λ в (3.18) и (3.19), нетрудно получить соотношения

$$[\omega_\lambda[\psi](r, e)]_{l, m} = \left(r \frac{d}{dr} \right) [\omega_\lambda[\psi](r, e)]_{l, m-1} = \dots = \left(r \frac{d}{dr} \right)^m [\omega_\lambda[\psi](r, e)]_{l, 0}, \quad (3.20)$$

$$\omega_\lambda[\psi](r, e) = \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=0}^{m_l^\lambda} \chi_{l, m}^\lambda(e) \left(r \frac{d}{dr} \right)^m \sum_{s=0}^{m_l^\lambda} \frac{a_{l, s}}{s!} \ln^s r. \quad (3.21)$$

Пусть $\mu \in \mathbb{C}$; напомним, что $J_\mu = \{\lambda \in J: \operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \mu\}$. Обозначим

$$E_\mu = \bigoplus_{\lambda \in J_\mu} \mathcal{E}_\lambda = \operatorname{Lin}\{\chi_{l, m}^\lambda(e): \lambda \in J_\mu, \quad l = 1, \dots, q_\lambda, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda)\}. \quad (3.22)$$

Пусть

$$\{\chi_{l, m}^{\lambda*}(e) \in S'(\Gamma): \lambda \in J_\mu, \quad l = 1, \dots, q_\lambda, \quad 0 \leq m \leq n(\lambda)\} \quad (3.23)$$

– некоторое биортогональное семейство обобщенных функций из $S'(\Gamma)$, т.е. семейство со свойствами

$$(\chi_{l, m}^{\lambda*}(e), \chi_{l', m'}^{\lambda'}(e)) = \delta_{l, l'; m, m'}^{\lambda, \lambda'}, \quad \lambda' \in J_\mu, \quad l' = 1, \dots, q_{\lambda'}, \quad 0 \leq m' \leq n(\lambda'), \quad (3.24)$$

где $\delta_{l,l';m,m'}^{\lambda,\lambda'}$ – символ Кронекера. Выбор такого семейства неоднозначен. В дальнейшем мы этим воспользуемся. Далее, положим

$$V_{\mu,\mathcal{F}} = \left\{ \psi(r, e) \in W_{\bar{J}}: \psi(r, e) \sim \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m}(e) \ln^m r, \right. \\ \left. C_{\lambda,m}(e) = \frac{1}{m!} A_\lambda^m C_{\lambda,0}(e), \operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \mu \right\}, \quad (3.25)$$

т.е. $V_{\mu,\mathcal{F}}$ состоит из тех функций $\psi(r, e) \in W_{\bar{J}}$, асимптотическое разложение в нуле которых удовлетворяет условиям $C_{\lambda,m}(e) = \frac{1}{m!} A_\lambda^m C_{\lambda,0}(e)$ только для точек λ таких, что $\operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \mu$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , причем $-\operatorname{Re} \beta - 1 \in \operatorname{pr} J$, $F(r, e) \in W_{\bar{J}}'$ и $F(r, e) \in \operatorname{AO}_\rho(V_{\bar{J},\mathcal{F}})$. Тогда $F(r, e)$ продолжается до $\hat{F}(r, e) \in \operatorname{AO}_\rho(V_{-\beta-1,\mathcal{F}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $F(r, e) \in \operatorname{AO}_\rho(V_{\overline{J \setminus J_{-\beta-1}}, \mathcal{F}})$. Так как $-\operatorname{Re} \beta - 1 \notin \operatorname{pr} J \setminus J_{-\beta-1}$ (напомним, что $J_{-\beta-1} = \{\lambda \in J: \operatorname{Re} \lambda = -\operatorname{Re} \beta - 1\}$), по теореме 3.3 обобщенная функция $F(r, e)$ продолжается до $\hat{F}(r, e) \in \operatorname{AO}_\rho(W_{\overline{J \setminus J_{-\beta-1}}})$. Доопределим теперь $\hat{F}$ на функциях $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}_{-\beta-1}, \mathcal{F}}$ вида

$$\psi(r, e) = r^{-\beta-1} \eta(r) \left(C_0(e) + \dots + \frac{1}{m!} A^m C_0(e) + \dots \right), \quad C_0(e) \in \mathcal{E}_{-\beta-1},$$

по формуле

$$(\hat{F}(r, e), \psi(r, e)) = (F(r, e), \psi(r, e)). \quad (3.26)$$

Очевидно, что таким образом доопределенная обобщенная функция $\hat{F}$ даст нужное продолжение. Лемма доказана.

Пусть теперь $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β . Пусть $\mu \in J$; положим $J^\mu = (J \setminus J_\mu) \cup \{\mu\}$, $\bar{J}^\mu(m) = (\bar{J} \setminus \bar{J}_\mu) \cup \{(\mu, m)\}$. Множество J^μ состоит из всех точек $\lambda \in J$, кроме тех, для которых $\operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \mu$, однако $\mu \in J^\mu$. Множество $\bar{J}^\mu(m)$ состоит из пар $(\lambda, n(\lambda)) \in \bar{J}^\mu$, но вместо пары $(\mu, n(\mu))$ взята пара (μ, m) .

Обозначим через $\prod_{E_{-\beta-1}}[\cdot]$ проектор на $E_{-\beta-1}$ (см. (3.22)):

$$\prod_{E_{-\beta-1}} [\psi](e) = \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=0}^{m_l^\lambda} (\chi_{l,m}^{\lambda*}(e), \psi(e)) \chi_{l,m}^\lambda(e), \quad \psi(e) \in S(\Gamma);$$

в частности, если $\varphi(e) \in E_{-\beta-1}$, то $\prod_{E_{-\beta-1}}[\varphi](e) = \varphi(e)$. Поэтому если $\varphi(r, e) \in V_{-\beta-1,\mathcal{F}}$, то $\prod_{E_{-\beta-1}}[\varphi](r, e) \in V_{-\beta-1,\mathcal{F}}$.

Пусть теперь $F(r, e) \in W'_{\bar{J}}$. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} F_2(r, e) &= \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=0}^{m_l^\lambda} (F(r, e), \chi_{l,m}^\lambda(e)) \chi_{l,m}^{\lambda*}(e) \\ &= \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=0}^{m_l^\lambda} g_{l,m}^\lambda(r) \chi_{l,m}^{\lambda*}(e), \quad g_{l,m}^\lambda(r) = (F(r, e), \chi_{l,m}^\lambda(e)), \end{aligned} \quad (3.27)$$

такую, что

$$(F_2(r, e), \varphi(r, e)) = \left(F(r, e), \prod_{E=-\beta-1} [\varphi](r, e) \right), \quad \varphi(r, e) \in W_{\bar{J}}. \quad (3.28)$$

Заметим, что если $F(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{-\beta-1, \mathcal{F}})$, то $F_2(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{-\beta-1, \mathcal{F}})$. Ясно также, что $g_{l,m}^\lambda(r) \in S'_{\bar{J}}$ и $g_{l,m}^\lambda(r) \in \text{AO}_\rho(S_{\bar{J} \setminus J_{-\beta-1}})$.

Фиксируем $\lambda \in J_{-\beta-1}$ и $0 \leq l \leq q_\lambda$. Согласно (3.21) имеем

$$\psi_l^\lambda(r, e) = \eta(r) r^\lambda \sum_{m=0}^{m_l^\lambda} \chi_{l,m}^\lambda(e) \left(r \frac{d}{dr} \right)^m \sum_{s=0}^{m_l^\lambda} b_s \ln^s r \in V_{-\beta-1, \mathcal{F}}, \quad (3.29)$$

где $\eta(r)$ удовлетворяет условиям (1.9) и $b_0, \dots, b_{m_l^\lambda}$ — произвольные числа. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (F_2(kr, e), \psi_l^\lambda(r, e)) &= \frac{1}{\rho(k)} \sum_{m=0}^{m_l^\lambda} \left(g_{l,m}^\lambda(kr), \eta(r) r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m \sum_{s=0}^{m_l^\lambda} b_s \ln^s r \right) \\ &= \frac{1}{\rho(k)} \left(\sum_{m=0}^{m_l^\lambda} (-1)^m \left(\frac{d}{dr} r \right)^m r^\lambda \eta(r) g_{l,m}^\lambda(kr), \sum_{s=0}^{m_l^\lambda} b_s \ln^s r \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Отметим, что если в слагаемом, получаемом после применения формулы Лейбница при раскрытии производных, содержится хотя бы одна производная от $\eta(r)$, то это слагаемое имеет предел, так как носитель $\eta'(r)$ отделен от нуля. Это следует из того, что $g_{l,m}^\lambda(r) \in \text{AO}_\rho(S_{\bar{J}_\emptyset})$, а $S_{\bar{J}_\emptyset} \subset S_{\bar{J} \setminus J_{-\beta-1}}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \left(\sum_{m=0}^{m_l^\lambda} (-1)^m \left(\frac{d}{dr} r \right)^m r^\lambda g_{l,m}^\lambda(kr), \eta(r) \sum_{s=0}^{m_l^\lambda} b_s \ln^s r \right) \\ = \frac{1}{\rho(k)} \left(G_l^\lambda(kr), \eta(r) r^\lambda \sum_{s=0}^{m_l^\lambda} b_s \ln^s r \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где

$$G_l^\lambda(r) = \sum_{m=0}^{m_l^\lambda} (-1)^m r^{-\lambda} \left(\frac{d}{dr} r \right)^m r^\lambda g_{l,m}^\lambda(r). \quad (3.32)$$

Отсюда вытекает, что $G_l^\lambda(r) \in \text{AO}_\rho(S_{\bar{J}^\lambda(m_l^\lambda)})$. Тем самым доказана следующая

ЛЕММА 3.3. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, и пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , $-\operatorname{Re} \beta - 1 \in \operatorname{pr} J$, $F(r, e) \in W_{\bar{J}}$, причем $F(r, e) \in \operatorname{AO}_{\rho}(V_{-\beta-1, \mathcal{F}})$. Тогда обобщенные функции $g_{l,m}^{\lambda}(r)$, $G_l^{\lambda}(r)$, определяемые формулами (3.27), (3.32), удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} g_{l,m}^{\lambda}(r) &\in \operatorname{AO}_{\rho}(S_{\bar{J} \setminus J_{-\beta-1}}), \quad \lambda \in J_{-\beta-1}, \quad l = 1, \dots, q_{\lambda}, \quad m = 1, 2, \dots, m_l^{\lambda}, \\ g_{l,0}^{\lambda}(r) &= G_l^{\lambda}(r) - \sum_{m=1}^{m_l^{\lambda}} (-1)^m r^{-\lambda} \left(\frac{d}{dr} r \right)^m r^{\lambda} g_{l,m}^{\lambda}(r), \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $G_l^{\lambda}(r) \in \operatorname{AO}_{\rho}(S_{\bar{J}^{\lambda}(m_l^{\lambda})})$. При этом обобщенная функция $F_2(r, e)$, определяемая формулой (3.27), принадлежит $\operatorname{AO}_{\rho}(V_{-\beta-1, \mathcal{F}})$.

Справедливо и обратное утверждение.

ЛЕММА 3.4. Пусть заданы допустимое множество $\bar{J}$, автомодельная функция $\rho(k)$ порядка β , $-\operatorname{Re} \beta - 1 \in \operatorname{pr} J$, множество $\mathcal{F} = \{\mathcal{E}_{\lambda}, A_{\lambda} : \lambda \in J_{-\beta-1}, \mathcal{E}_{\lambda} \in S(\Gamma)\}$ и соответствующее ему пространство $V_{-\beta-1, \mathcal{F}}$. Пусть для $\lambda \in J_{-\beta-1}$ заданы обобщенные функции

$$\begin{aligned} g_{l,m}^{\lambda}(r) &\in S'_{\bar{J}}, \quad g_{l,m}^{\lambda}(r) \in \operatorname{AO}_{\rho}(S_{\bar{J} \setminus J_{-\beta-1}}), \quad l = 1, \dots, q_{\lambda}, \quad m = 1, \dots, m_l^{\lambda}, \\ G_l^{\lambda}(r) &\in \operatorname{AO}_{\rho}(S_{\bar{J}^{\lambda}(m_l^{\lambda})}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Тогда

$$F_2(r, e) = \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_{\lambda}} \sum_{m=0}^{m_l^{\lambda}} g_{l,m}^{\lambda}(r) \chi_{l,m}^{\lambda*}(e) \in \operatorname{AO}_{\rho}(V_{-\beta-1, \mathcal{F}}), \quad (3.35)$$

где

$$g_{l,0}^{\lambda} = G_l^{\lambda}(r) - \sum_{m=1}^{m_l^{\lambda}} (-1)^m r^{-\lambda} \left(\frac{d}{dr} r \right)^m r^{\lambda} g_{l,m}^{\lambda}(r), \quad \lambda \in J_{-\beta-1}, \quad l = 1, \dots, q_{\lambda}. \quad (3.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что (3.35) имеет смысл на функциях из $V_{-\beta-1, \mathcal{F}}$. Действительно, если $g(r) \in S'_{\bar{J}}$, то $r^{-\lambda} \left(\frac{d}{dr} r \right)^m r^{\lambda} g(r)$ также принадлежит $S'_{\bar{J}}$. (Она принадлежит даже большему пространству, если $\lambda \in J$ и $m > 0$; см. утверждение 2.1.) Кроме того, если $\lambda \in J_{-\beta-1}$ и $\psi(r, e) \in V_{-\beta-1, \mathcal{F}}$, то $(\chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e)) \in S_{\bar{J}^{\lambda}(m_l^{\lambda})}$. Поэтому если $G(r) \in S'_{\bar{J}^{\lambda}(m_l^{\lambda})}$, то $G(r) \chi_{l,0}^{\lambda*}(e) \in V'_{-\beta-1, \mathcal{F}}$, $\lambda \in J_{-\beta-1}$.

Далее, из (3.34) и (3.36) следует, что $F_2(r, e) \in \operatorname{AO}_{\rho}(W_{\bar{J} \setminus J_{-\beta-1}})$. Для доказательства леммы теперь достаточно показать, что $F(r, e)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на функциях вида (3.29). Из условий леммы вытекает справедливость соотношения (3.31). Далее, рассуждая, как и при доказательстве леммы 3.3, получаем справедливость соотношения (3.30). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , $F(r, e) \in W_{\bar{J}}$, причем $F(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{-\beta-1, \mathcal{F}})$. Пусть обобщенные функции $g_{l,m}^\lambda$ и $F_2(r, e)$ определяются формулами (3.27). Положим $F_1(r, e) = F(r, e) - F_2(r, e)$. Тогда

$$F_1(r, e) \in \text{AO}_\rho(W_{\overline{J \setminus J_{-\beta-1}}}), \quad (F_1(r, e), \varphi(e)) \equiv 0 \quad \text{в } S_{\bar{J}} \quad \forall \varphi \in E_{-\beta-1}. \quad (3.37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию и лемме 3.3 имеем $F_1(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{-\beta-1, \mathcal{F}})$, а следовательно, выполнено первое утверждение в (3.37). Пусть $\psi(r) \in S_{\bar{J}}$, а $\varphi(e) \in E_{-\beta-1}$ (см. (3.22)). Имеем

$$\begin{aligned} (F_1(r, e), \psi(r)\varphi(e)) &= (F(r, e), \psi(r)\varphi(e)) - (F_2(r, e), \psi(r)\varphi(e)) \\ &= (F(r, e), \psi(r)\varphi(e)) - \left(\sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=0}^{m_l^\lambda} (F(r, e), \chi_{l,m}^\lambda(e)) \chi_{l,m}^{\lambda*}(e), \psi(r)\varphi(e) \right) \\ &= (F(r, e), \psi(r)\varphi(e)) - \left(F(r, e), \psi(r) \prod_{E_{-\beta-1}} [\varphi](e) \right) = 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.6. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , причем $-\text{Re } \beta - 1 \in \text{pr } J$, и $F(r, e) \in W_{\bar{J}}$. Тогда $F(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{\bar{J}, \mathcal{F}})$ в том и только в том случае, если на $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$

$$F(r, e) = F_2(r, e) + F_1(r, e),$$

где $F_1(r, e) \in W'_{\bar{J}} \cap \text{AO}_\rho(W_{\overline{J \setminus J_{-\beta-1}}})$, причем

$$(F_1(r, e), \varphi(e))_e \equiv 0 \quad \text{на } S_{\bar{J}} \quad \forall \varphi \in E_{-\beta-1}, \quad (3.38)$$

и $F_2(r, e)$ определяется соотношением (3.35), в котором

$$g_{l,m}^\lambda(r) \in S'_{\bar{J}} \cap \text{AO}_\rho(S_{\bar{J} \setminus J_{-\beta-1}}), \quad \lambda \in J_{-\beta-1}, \quad l = 1, \dots, q_\lambda, \quad m = 1, 2, \dots, m_l^\lambda, \quad (3.39)$$

а обобщенные функции имеют вид

$$g_{l,0}^\lambda(r) = G_l^\lambda(r) - \sum_{m=1}^{m_l^\lambda} (-1)^m r^{-\lambda} \left(\frac{d}{dr} r \right)^m r^\lambda g_{l,m}^\lambda(r), \quad (3.40)$$

где

$$G_l^\lambda(r) \in S'_{\bar{J}} \cap \text{AO}_\rho(S_{\bar{J}^\lambda(m_l^\lambda)}). \quad (3.41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{\bar{J}, \mathcal{F}})$; тогда по лемме 3.2 имеем $F(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{-\beta-1, \mathcal{F}})$. Определим $F_2(r, e)$ и $g_{l,m}^\lambda(r)$ по формуле (3.27). Тогда по лемме 3.3 получим соотношения (3.39)–(3.41). Полагая теперь $F_1(r, e) = F(r, e) - F_2(r, e)$, по лемме 3.5 получаем соотношение (3.38).

Обратно, по лемме 3.4 имеем $F_2(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{-\beta-1, \mathcal{F}})$, а так как $F_1(r, e) \in \text{AO}_\rho(W_{\overline{J \setminus J_{-\beta-1}}})$, ортогональна к $E_{\beta-1}$, то $F_1(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{-\beta-1, \mathcal{F}})$. Отсюда следует, что $F(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{-\beta-1, \mathcal{F}})$, поэтому $F(r, e) \in \text{AO}_\rho(V_{\bar{J}, \mathcal{F}})$. Лемма доказана.

Теперь мы можем дать описание асимптотически однородных функций на $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ в критическом случае.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $\bar{J}$ – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , причем $-\operatorname{Re} \beta - 1 \in \operatorname{pr} J$, $F(r, e) \in W_{\bar{J}}'$, и пусть в $W_{\bar{J}}$ задано подпространство $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$. При этом в $\mathcal{E}_\lambda$ выберем базис $\{\chi_{l,m}^\lambda(e)\}$, определенный формулами (3.16), (3.17), а в $S'(\Gamma)$ – биортогональную систему $\{\chi_{l,m}^{\lambda*}(e)\}$ (см. (3.23), (3.24)). Пусть также заданы числа $L \geq -\operatorname{Re} \beta - 1$ и $\varkappa \in \mathbb{C}$, удовлетворяющее соотношению

$$-\operatorname{Re} \beta - 1 - \operatorname{Re} \varkappa \notin \mathbb{Z}_+. \quad (3.42)$$

Для того чтобы $F(r, e) \in \operatorname{AO}_\rho(V_{\bar{J}, \mathcal{F}})$, необходимо и достаточно, чтобы на пространстве $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$

$$F(r, e) = F_0(r, e) + F_1(r, e) + F_2(r, e), \quad (3.43)$$

где $F_0(r, e) \in W_{\bar{J}}'$ имеет компактный носитель и

$$M_{\lambda,m}[F_0](e) \equiv 0, \quad \lambda \in J, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq L, \quad m = 0, 1, \dots, n(\lambda); \quad (3.44)$$

обобщенная функция $F_1(r, e)$ принадлежит $W_{\bar{J}}'$ и для любой $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (F_1(r, e), \psi(r, e)) &= \\ &= \int_1^\infty \left(\gamma_1(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\varkappa} (\psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e)) \right) dr \end{aligned} \quad (3.45)$$

с некоторыми $N \in \mathbb{Z}_+$ и функцией $\gamma_1(r, e)$, непрерывной по $r > 0$ со значениями в $S'(\Gamma)$, такими, что

$$\begin{aligned} (\gamma_1(r, e), \varphi(e)) &\equiv 0 \quad \forall \varphi(e) \in E_{-\beta-1} = \bigoplus_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \mathcal{E}_\lambda, \\ \gamma_1(r, e) &\sim r^{N+\varkappa} \rho(r) B_1(e), \quad r \rightarrow +\infty, \quad \text{на } S(\Gamma), \end{aligned} \quad (3.46)$$

где $B_1(e) \in S'(\Gamma)$; обобщенная функция $F_2(r, e) \in W_{\bar{J}}'$ определяется формулой (3.35), в которой обобщенные функции $g_{l,m}^\lambda(r)$, $\lambda \in J_{-\beta-1}$, $l = 1, \dots, q_\lambda$, $m = 1, \dots, m_l^\lambda$, задаются соотношениями

$$(g_{l,m}^\lambda(r), \varphi(r)) = \int_1^\infty \gamma_{l,m}^\lambda(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\varkappa} (\varphi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\varphi](r)) dr \quad (3.47)$$

для любой $\varphi(r) \in S_{\bar{J}}$, где $\gamma_{l,m}^\lambda(r)$ – непрерывные функции по $r > 0$, удовлетворяющие асимптотическим соотношениям

$$\gamma_{l,m}^\lambda(r) \sim b_{l,m}^\lambda r^{N+\varkappa} \rho(r), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.48)$$

а обобщенные функции имеют вид

$$g_{l,0}^\lambda(r) = G_l^\lambda(r) - \sum_{m=1}^{m_l^\lambda} (-1)^m r^{-\lambda} \left(\frac{d}{dr} r \right)^m r^\lambda g_{l,m}^\lambda(r), \quad (3.49)$$

где $G_l^\lambda(r)$ для любой $\varphi(r) \in S_{\bar{J}}$ задаются формулами

$$\begin{aligned} (G_l^\lambda(r), \varphi(r)) &= \\ &= \int_1^\infty \Gamma_l^\lambda(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\varkappa} r^\lambda \left(r \frac{d}{dr}\right)^{m_l^\lambda+1} r^{-\lambda} (\varphi(r) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\varphi](r)) dr, \end{aligned} \quad (3.50)$$

в которых $\Gamma_l^\lambda(r)$ – непрерывные функции по r , удовлетворяющие асимптотическим соотношениям

$$\Gamma_l^\lambda(r) \sim B_l^\lambda r^{N+\varkappa} \rho(r), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3.51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из лемм 2.9, 2.10, 3.6, теорем 2.1, 2.2, 3.1 и замечаний 2.3, 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. В условиях теоремы 3.4, полагая $\chi_{l, m_l^\lambda+1}^{\lambda*}(e) = 0$, обобщенная функция $F_2(r, e) \in W_J'$ для любой $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ может быть также представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} (F_2(r, e), \psi(r, e)) &= \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=1}^{m_l^\lambda+1} \int_1^\infty \hat{\gamma}_{l,m}^\lambda(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^Q \\ &\times \left(r^{-\varkappa} \left(\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right) r^{-\lambda} \chi_{l, m-1}^{\lambda*}(e), \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e) \right)_e \right) dr \end{aligned} \quad (3.52)$$

с некоторыми $Q \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывными функциями $\hat{\gamma}_{l,m}^\lambda(r)$, удовлетворяющими асимптотическим оценкам

$$\hat{\gamma}_{l,m}^\lambda(r) \sim c_{\lambda, m, l} r^{Q+\varkappa} \rho(r), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.53)$$

где $c_{\lambda, m, l}$ – некоторые постоянные. При этом каждое слагаемое в (3.52) корректно определено и асимптотически однородно относительно $\rho(k)$.

Действительно, из (3.35), учитывая соотношения (3.47)–(3.51) и обозначая $-\Gamma_l^\lambda(r) = \gamma_{l, m_l^\lambda+1}^\lambda(r)$, для любой функции $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ имеем

$$\begin{aligned} (F_2(r, e), \psi(r, e)) &= \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=0}^{m_l^\lambda} (g_{l,m}^\lambda(r), (\chi_{l,m}^{\lambda*}(e), \psi(r, e))_e) \\ &= \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=1}^{m_l^\lambda+1} \int_1^\infty \gamma_{l,m}^\lambda(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N \\ &\times \left(r^{-\varkappa} \left[(\chi_{l,m}^{\lambda*}(e), \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e))_e \right. \right. \\ &\left. \left. - r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda} (\chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e))_e \right] \right) dr, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где для непрерывных функций $\gamma_{l,m}^\lambda(r)$ выполняются асимптотические соотношения (3.48), а $\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) \in S'(\Gamma)$ определены в (3.23), (3.24). Обозначая $\psi(r, e) = \Omega_{-\text{Re } \beta - 1}[\psi](r, e)$ через τ и используя технику взаимных сокращений (добавляя подходящие слагаемые и вычитая их), каждое слагаемое в (3.54) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \gamma_{l,m}^\lambda(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\varkappa} \sum_{p=0}^{m-1} \left(r^\lambda \left(r \frac{d}{dr}\right) r^{-\lambda}\right)^p \left[(\chi_{l,m-p}^{\lambda*}, \tau)_e \right. \\ & \quad \left. - r^\lambda \left(r \frac{d}{dr}\right) r^{-\lambda} (\chi_{l,m-(p+1)}^{\lambda*}, \tau)_e \right] dr \\ & = \sum_{p=0}^{m-1} \int_1^\infty \gamma_{l,m}^\lambda(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\varkappa} \left(r^\lambda \left(r \frac{d}{dr}\right) r^{-\lambda}\right)^p B_{l,m-p}^\lambda(r) dr, \end{aligned} \quad (3.55)$$

где $B_{l,m-p}^\lambda(r) = (\chi_{l,m-p}^{\lambda*}, \tau)_e - r^\lambda \left(r \frac{d}{dr}\right) r^{-\lambda} (\chi_{l,m-(p+1)}^{\lambda*}, \tau)_e$. Пользуясь “коммутиционными соотношениями”

$$\left[r^a, r \frac{d}{dr}\right] = -ar^a, \quad \left[\frac{d}{dr}, r \frac{d}{dr}\right] = \frac{d}{dr}, \quad (3.56)$$

каждое слагаемое в сумме из (3.55) теперь можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \gamma_{l,m}^\lambda(r) \left[r \left(\frac{d}{dr}\right)^{N+1} + c \left(\frac{d}{dr}\right)^N \right] r^{-\varkappa} \left(r^\lambda \left(r \frac{d}{dr}\right) r^{-\lambda}\right)^{p-1} B_{l,m-p}^\lambda(r) dr \\ & = \int_1^\infty \gamma_{l,m,1}^\lambda(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^{N+1} r^{-\varkappa} \left(r^\lambda \left(r \frac{d}{dr}\right) r^{-\lambda}\right)^{p-1} B_{l,m-p}^\lambda(r) dr, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где c – некоторая постоянная, зависящая от $\varkappa$ и λ , а $\gamma_{l,m,1}^\lambda(r)$ – сумма функции $r\gamma_{l,m}^\lambda(r)$ и первообразной $\gamma_{l,m}^\lambda(r)$, умноженной на c . При этом справедливо асимптотическое соотношение

$$\gamma_{l,m,1}^\lambda(r) \sim \tilde{c} r^{N+1+\varkappa} \rho(r), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3.58)$$

Далее по индукции получим, что каждое слагаемое в (3.55) представляется в виде

$$\int_1^\infty \gamma_{l,m,p}^\lambda(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^{N+p} r^{-\varkappa} B_{l,m-p}^\lambda(r) dr. \quad (3.59)$$

При этом для непрерывной функции $\gamma_{l,m,p}^\lambda(r)$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\gamma_{l,m,p}^\lambda(r) \sim \tilde{c} r^{N+p+\varkappa} \rho(r), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3.60)$$

Теперь из (3.54), (3.55), (3.59), (3.60), взяв нужное число первообразных от соответствующих непрерывных функций γ и увеличив при этом соответствующим образом число производных, получаем представление (3.52).

Пусть $F(r, e) \in \text{АО}_\rho(V_{J,\mathcal{F}})$, т. е. существует предел

$$\frac{1}{\rho(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} G(r, e) \quad \text{в } V'_{J,\mathcal{F}}. \quad (3.61)$$

Вычислим предельную функцию $G(r, e)$. В некритическом случае ответ дается теоремой 3.1 (см. (3.7)). В критическом случае справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.4. Тогда:

1) если $-\operatorname{Re} \beta - 1 \in \operatorname{pr} J$, но $-\beta - 1 \notin J$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)}(F(kr, e), \psi(r, e)) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} C(r_+^\beta B_1(e), \psi(r, e)) \\ &+ \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} C B_l^\lambda (-\beta - 1 - \lambda)^{m_l^\lambda} (r_+^\beta \chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e)) \\ &+ \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=1}^{m_l^\lambda} C b_{l,m}^\lambda (r_+^\beta \Psi_{l,m}^\lambda(e), \psi(r, e)), \end{aligned} \quad (3.62)$$

где

$$\Psi_{l,m}^\lambda(e) = \chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - (-\beta - 1 - \lambda)^m \chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \quad (B_1(e), \varphi(e)) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}_{-\beta-1}; \quad (3.63)$$

2) если $-\beta - 1 \in J$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)}(F(kr, e), \psi(r, e)) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} C(r_+^\beta B_1(e), \psi(r, e)) \\ &+ \sum_{\substack{\lambda \in J_{-\beta-1} \\ \lambda \neq -\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} C B_l^\lambda (-\beta - 1 - \lambda)^{m_l^\lambda} (r_+^\beta \chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e)) \\ &+ \sum_{l=1}^{q_\lambda} C B_l^{-\beta-1} (m_l^{-\beta-1}!) (\Delta_{-\beta-1, m_l^{-\beta-1}}(r) \chi_{l,0}^{(-\beta-1)*}(e), \psi(r, e)) \\ &+ \sum_{\substack{\lambda \in J_{-\beta-1} \\ \lambda \neq -\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=1}^{m_l^\lambda} C b_{l,m}^\lambda (r_+^\beta \Psi_{l,m}^\lambda(e), \psi(r, e)) + \sum_{l=1}^{q_{-\beta-1}} \sum_{m=1}^{m_l^{-\beta-1}} C b_{l,m}^{-\beta-1} \\ &\times \left(r_+^\beta, \left(\chi_{l,m}^{(-\beta-1)*}(e) - r^{-\beta-1} \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{\beta+1} \chi_{l,0}^{(-\beta-1)*}(e), \psi(r, e) \right)_e \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Здесь

$$C = (-1)^N \frac{\Gamma(\beta + 1 + \varkappa + N)}{\Gamma(\beta + 1 + \varkappa)} \quad (3.65)$$

и $B_1(e) \in S'(\Gamma)$ определяется соотношением (3.46), причем

$$(B_1(e), \varphi(e)) \equiv 0 \quad \forall \varphi(e) \in E_{-\beta-1} = \bigoplus_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \mathcal{E}_\lambda, \quad (3.66)$$

а числа $b_{l,m}^\lambda$ и B_l^λ определяются соотношениями (3.48) и (3.51) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.4 для $F(r, e)$ справедлива формула (3.43), при этом квазиасимптотическое поведение $F_0(r, e)$ в силу леммы 2.1

тривиально. Обобщенная функция $F_1(r, e)$ представляется формулой (3.45), и в силу ортогональности γ_1 (см. (3.46)) в формуле (3.45) вместо $\Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e)$ можно подставлять $\bar{\Omega}_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e)$. Аналогично, как и при доказательстве леммы 2.2, показывается, что для любой функции $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$

$$\frac{1}{\rho(k)} (F_1(kr, e), \psi(r, e)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} C(r_+^\beta B_1(e), \psi(r, e))$$

с постоянной C , определяемой формулой (3.65), и функцией $B_1(e) \in S'(\Gamma)$, удовлетворяющей условию (3.66) (см. (3.46)). Вычислим теперь предельную функцию для $F_2(r, e)$. Фиксируем $\lambda \in J_{-\beta-1}$, соответствующее ему l и $\varkappa$, удовлетворяющее (3.42). Пользуясь (3.35), (3.36), с учетом (3.40), (3.41) и (3.50) для любой функции $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (G_l^\lambda(kr) \chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e)) &= \frac{1}{k\rho(k)} \left(G_l^\lambda(r), \left(\chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi\left(\frac{r}{k}, e\right) \right)_e \right) \\ &= \frac{1}{k\rho(k)} \int_1^\infty \Gamma_l^\lambda(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\varkappa} D_\lambda \left(\chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi\left(\frac{r}{k}, e\right) \right. \\ &\quad \left. - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi]\left(\frac{r}{k}, e\right) \right)_e dr \\ &= \frac{1}{k^{N+\varkappa}\rho(k)} \int_{1/k}^\infty \Gamma_l^\lambda(kr) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\varkappa} D_\lambda (\chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e) \\ &\quad - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e))_e dr \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} B_l^\lambda \int_0^\infty r^{\beta+N+\varkappa} \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\varkappa} D_\lambda (\chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e) \\ &\quad - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e))_e dr. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Здесь мы воспользовались асимптотическим соотношением (3.51) и тем, что

$$\Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1} \left[\psi\left(\frac{r}{k}, e\right) \right] (r, e) = \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1} [\psi](r, e) \left(\frac{r}{k}, e \right).$$

Заметим, что в (3.67) вместо $\Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi]$ можно подставить $\bar{\Omega}_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi]$, так как добавление слагаемого

$$\left(\chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \sum_{\mu \in J_{-\beta-1}} r^\mu \omega_\mu[\psi](r, e) \right)_e = r^\lambda [\omega_\lambda[\psi](r, e)]_{l,0}(r)$$

в силу $D_\lambda r^\lambda [\omega_\lambda[\psi](r, e)]_{l,0}(r) = 0$ ничего не меняет. Интегрируя теперь (3.67) по частям и замечая, что при этом внеинтегральные члены обращаются в нуль, при $\lambda \neq -\beta - 1$ получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (G_l^\lambda(kr) \chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e)) \\ \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} C B_l^\lambda \int_0^\infty r^\beta D_\lambda (\chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e))_e dr \\ = C B_l^\lambda (-\beta - 1 - \lambda)^{m_l^\lambda + 1} (r_+^\beta \chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e)). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Здесь в последнем равенстве мы учли, что $D_\lambda = r^\lambda \left(r \frac{d}{dr}\right)^{m_l^\lambda + 1} r^{-\lambda}$, и снова проинтегрировали по частям $m_l^\lambda + 1$ раз, замечая, что внеинтегральные члены обращаются в нуль.

Если $\lambda = -\beta - 1$, то из (3.67) (см. (1.26)) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (G_l^{-\beta-1}(kr) \chi_{l,0}^{(-\beta-1)*}(e), \psi(r, e)) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} C B_l^\lambda \int_0^\infty \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)^{m_l^{-\beta-1}} \\ &\quad \times r^{\beta+1} (\chi_{l,0}^{(-\beta-1)*}(e), \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e))_e dr \\ &= C B_l^\lambda (m_l^{-\beta-1}!) (\Delta_{-\beta-1, m_l^{-\beta-1}}(r) \chi_{l,0}^{(-\beta-1)*}(e), \psi(r, e)). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Вычислим квазиасимптотику оставшихся слагаемых в представлении F_2 (см. (3.54)). Наряду с $\lambda \in J_{-\beta-1}$ и l фиксируем еще одно из $m = 1, 2, \dots, m_l^\lambda$. Для любой функции $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} &\left(g_{l,m}^\lambda(kr) \chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - (-1)^m r^{-\lambda} \left(\frac{d}{dr} r \right)^m r^\lambda g_{l,m}^\lambda(kr) \chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e) \right) \\ &= \frac{1}{k \rho(k)} \left(g_{l,m}^\lambda(r) \chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - (-1)^m r^{-\lambda} \left(\frac{d}{dr} r \right)^m r^\lambda g_{l,m}^\lambda(r) \chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi\left(\frac{r}{k}, e\right) \right) \\ &= \frac{1}{k \rho(k)} \int_1^\infty \gamma_{l,m}^\lambda(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\varkappa} \\ &\quad \times \left(\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda} \chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi\left(\frac{r}{k}, e\right) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi]\left(\frac{r}{k}, e\right) \right)_e dr \\ &= \frac{1}{k^{N+\varkappa} \rho(k)} \int_{1/k}^\infty \gamma_{l,m}^\lambda(kr) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\varkappa} \\ &\quad \times \left(\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda} \chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e) \right)_e dr \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} b_{l,m}^\lambda \int_0^\infty r^{\beta+N+\varkappa} \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\varkappa} \\ &\quad \times \left(\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - \chi_{l,0}^{\lambda*}(e) r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda}, \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e) \right)_e dr \\ &= C b_{l,m}^\lambda \int_0^\infty r^\beta \left(\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - \chi_{l,0}^{\lambda*}(e) r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda}, \psi(r, e) \right. \\ &\quad \left. - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e) \right)_e dr. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Здесь мы пользовались асимптотическим соотношением (3.48) и интегрированием по частям N раз. При этом учли, что внеинтегральные члены равны нулю. Это вытекает из того факта, что

$$\begin{aligned} &\left(\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - \chi_{l,0}^{\lambda*}(e) r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda}, \sum_{\mu \in J_{-\beta-1}} r^\mu \omega_\mu[\psi](r, e) \right)_e \\ &= \left(\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - \chi_{l,0}^{\lambda*}(e) r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda}, r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r, e) \right)_e \end{aligned}$$

$$= r^\lambda [\omega_\lambda[\psi]]_{l,m}(r) - r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m [\omega_\lambda[\psi]]_{l,0}(r) = 0 \quad (3.71)$$

(см. (3.20)), а следовательно, для вычисления внеинтегральных членов в нуле можно в (3.70) вместо $\Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi]$ подставлять $\bar{\Omega}_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi]$.

Если $\lambda \neq -\beta - 1$, то, так как $\psi(r, e)$ в своем асимптотическом разложении в нуле не содержит слагаемых с $r^{-\beta-1}$, продолжая соотношение (3.70), имеем

$$\begin{aligned} & Cb_{l,m}^\lambda \left(r_+^\beta, (\chi_{l,m}^{\lambda*}(e), \psi(r, e)) \right. \\ & \quad \left. - Cb_{l,m}^\lambda \int_0^\infty r^\beta r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda} (\chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e))_e dr \right. \\ & \quad \left. = Cb_{l,m}^\lambda (r_+^\beta, (\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - (-\beta - 1 - \lambda)^m \chi_{l,0}^{\lambda*}(e), \psi(r, e))_e) \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

В последнем равенстве мы проинтегрировали по частям, учли, что внеинтегральные члены обращаются в нуль, и воспользовались тождеством

$$r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda} \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e) = \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1} \left[r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda} \psi \right](r, e). \quad (3.73)$$

Если $\lambda = -\beta - 1$, то, продолжая соотношение (3.70), имеем

$$\begin{aligned} & Cb_{l,m}^\lambda \int_0^\infty r^\beta \left(\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - \chi_{l,0}^{\lambda*}(e) r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda}, \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e) \right)_e dr \\ & \quad = Cb_{l,m}^\lambda \left(r_+^\beta, \left(\chi_{l,m}^{(-\beta-1)*}(e) - r^{-\beta-1} \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{\beta+1} \chi_{l,0}^{(-\beta-1)*}(e), \psi(r, e) \right)_e \right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Теперь из соотношений (3.67)–(3.74) следуют утверждения (3.62)–(3.64).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. В условиях теоремы 3.4 и замечания 3.3, если положить $\chi_{l,m}^{\lambda*} \chi_{l,m}^{\lambda+1}(e) = 0$, для любой функции $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho(k)} (F_2(kr, e), \psi(r, e)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} C \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=1}^{m_l^\lambda+1} c_{\lambda,l,m} \int_0^\infty r^\beta \\ & \quad \times \left(\chi_{l,m}^{\lambda*} - r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{-\lambda} \chi_{l,m-1}^{\lambda*}(e), \psi(r, e) - \Omega_{-\operatorname{Re} \beta - 1}[\psi](r, e) \right)_e dr. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Доказательство соотношения (3.75) аналогично доказательству соотношения (3.70).

Из утверждения 3.1 непосредственно вытекает описание однородных обобщенных функций на $V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$, которое мы сформулируем в виде двух теорем.

ТЕОРЕМА 3.5. *Обобщенная функция $F(r, e) \in V'_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ однородна степени β , причем $-\beta - 1 \notin J$, тогда и только тогда, когда*

$$F(r, e) = r_+^\beta \Psi(e), \quad \Psi(e) \in S'(\Gamma). \quad (3.76)$$

Доказательство следует из соотношений (3.62) и (3.63).

ТЕОРЕМА 3.6. *Обобщенная функция $F(r, e) \in V'_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ однородна степени β , причем $-\beta - 1 \in J$, тогда и только тогда, когда существуют постоянные*

$$A_l, A_{l,m}, \quad l = 1, \dots, q_{-\beta-1}, \quad m = 1, \dots, m_l^{-\beta-1},$$

и обобщенная функция

$$\Phi(e) \in S'(\Gamma), \quad (\Phi(e), \varphi(e)) = 0 \quad \forall \varphi(e) \in \mathcal{E}_{-\beta-1} \quad (3.77)$$

такие, что для любой функции $\psi(r, e) \in V_{\bar{J}, \mathcal{F}}$ имеем

$$\begin{aligned} (F(r, e), \psi(r, e)) &= (r_+^\beta \Phi(e), \psi(r, e)) + \sum_{l=1}^{q_{-\beta-1}} A_l (\Delta_{-\beta-1, m_l^{-\beta-1}}(r) \chi_{l,0}^{(-\beta-1)*}(e), \psi(r, e)) \\ &+ \sum_{l=1}^{q_{-\beta-1}} \sum_{m=1}^{m_l^{-\beta-1}} A_{l,m} \left(r_+^\beta, \left(\chi_{l,m}^{(-\beta-1)*}(e) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r^{-\beta-1} \left(r \frac{d}{dr} \right)^m r^{\beta+1} \chi_{l,0}^{(-\beta-1)*}(e), \psi(r, e) \right)_e \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Доказательство следует из соотношений (3.64).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Наряду с представлением (3.78), если $\chi_{l, m_l^\lambda+1}^{\lambda*}(e) = 0$, справедливо также представление

$$\begin{aligned} (F(r, e), \psi(r, e)) &= (r_+^\beta B_1(e), \psi(r, e)) + \sum_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \sum_{l=1}^{q_\lambda} \sum_{m=1}^{m_l^\lambda+1} d_{\lambda,l,m} \\ &\times \left(r_+^\beta, \left(\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) - r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right) r^{-\lambda} \chi_{l,m-1}^{\lambda*}(e), \psi(r, e) \right)_e \right), \end{aligned} \quad (3.79)$$

где $d_{\lambda,l,m}$ – некоторые постоянные, а для обобщенной функции $B_1(e)$ выполняется соотношение (3.66).

§ 4. Обобщенные функции, асимптотически однородные относительно однопараметрических групп линейных преобразований

В этом параграфе приведено описание асимптотически однородных обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^n)$ вдоль траекторий, определяемых мультипликативной однопараметрической группой $\{U_k = e^{E \ln k}, k > 0\}$ линейных преобразований $\mathbb{R}^n$. В жордановом представлении матрица инфинитезимального оператора этой группы имеет стандартную жорданову форму $E = \Lambda + \mathcal{N}$, где Λ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят компоненты вектора

$$\sigma = \mu + i\nu, \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \mu_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$$

(см. (1.17)), а элементы нильпотентной матрицы $\mathcal{N}$ – все нули, кроме, быть может, единиц, стоящих над главной диагональю. Положим $\Lambda = M + iL$, где M и L – диагональные матрицы, на главных диагоналях которых стоят компоненты векторов μ и ν . Соответствующие однопараметрические группы преобразований обозначим

$$\{Q_k = e^{\Lambda \ln k}, k > 0\}, \quad \{V_k = e^{M \ln k}, k > 0\}. \quad (4.1)$$

Напомним (см. обсуждение в начале § 1), что координаты векторов в этой реализации могут быть комплексными. Обозначим также

$$|\mu| = \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

Отметим, что $|\mu| = \sum_{i=1}^n \sigma_i$, так как каждой компоненте σ_i вектора σ соответствует ей сопряженная компонента той же кратности, т.е. $\det U_k = k^{|\mu|}$. В § 1 мы ввели понятие обобщенного сферического представления $F(r, e) \in W'_J$ для обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, поэтому

$$(f, \varphi) = (F(r, e), \psi(r, e)), \quad \psi(r, e) = \varphi(U_r e), \quad r > 0, \quad e \in \Gamma,$$

где $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, а Γ – допустимая поверхность (см. (3.25)). Здесь J определяется формулой (1.19), а соответствующие каждому $\lambda \in J$ числа $n(\lambda)$ вычисляются из асимптотического разложения (1.20).

Пусть $\mathcal{P}$ – пространство многочленов в $\mathbb{R}^n$. Каждому λ из J соответствует следующее подпространство многочленов, однородных относительно группы $\{Q_k, k > 0\}$, степени λ :

$$\mathcal{E}_\lambda = \{P(e)|_{e \in \Gamma} : P(e) \in \mathcal{P}, P(Q_k e) = k^\lambda P(e)\}. \quad (4.2)$$

Заметим, что в том базисе, в котором E имеет жорданову форму, выполнено соотношение

$$P(e) = \sum_{\substack{\lambda \in J \\ (\sigma, j) = \lambda}} a_j e^j, \quad e \in \mathbb{R}^n, \quad e^j = e_1^{j_1} \dots e_n^{j_n}.$$

Отметим также, что многочлены, однородные относительно группы $\{Q_k, k > 0\}$, степени λ будут однородны относительно группы $\{V_k, k > 0\}$ степени $\operatorname{Re} \lambda = \varkappa$. Теперь, учитывая, что для $\varkappa \in \operatorname{pr} J$ пространства $\mathcal{E}_\lambda$ при $\operatorname{Re} \lambda = \varkappa$ попарно не пересекаются, введем пространство

$$E_\varkappa = \bigoplus_{\substack{\lambda \in J \\ \operatorname{Re} \lambda = \varkappa}} \mathcal{E}_\lambda; \quad E_\varkappa = \{P(e)|_{e \in \Gamma} : P(e) \in \mathcal{P}, P(V_k e) = k^\varkappa P(e)\}. \quad (4.3)$$

В жордановом базисе многочлены $P(e) \in E_\varkappa$ имеют вид

$$P(e) = \sum_{(\mu, j) = \varkappa} a_j e^j. \quad (4.4)$$

Ранее формулами (1.21) мы определили нильпотентные операторы A_λ и A_λ^+ на $\mathcal{E}_\lambda$. Мы неявно воспользовались тем фактом, что многочлен, однородный относительно группы $\{Q_k, k > 0\}$, степени λ однозначно восстанавливается по своим значениям на допустимой поверхности Γ . Формулы (1.21) в действительности правильно было бы записать следующим образом:

$$\begin{aligned} A_\lambda [P(e)|_{e \in \Gamma}] &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[e_l \varepsilon_{k,l} \frac{\partial}{\partial e_k} P(e) \right] \Big|_{e \in \Gamma}, \\ A_\lambda^+ [P(e)|_{e \in \Gamma}] &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[e_l \varepsilon_{l,k} \frac{\partial}{\partial e_k} P(e) \right] \Big|_{e \in \Gamma}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\varepsilon_{k,l}$ – компоненты нильпотентной матрицы $\mathcal{N}$.

Операторы A_λ и A_λ^+ можно продолжить на все пространства $S(\Gamma)$. Для этого введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть заданы однопараметрическая группа V , допустимая поверхность Γ и число $\lambda \in \mathbb{C}$. Для любой функции $\varphi(e) \in S(\Gamma)$ определим оператор продолжения $\text{cont}_{V,\lambda}[\varphi](e)$ как однородное относительно группы V степени λ продолжение функции $\varphi(e)$ с Γ на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ясно, что

$$\text{cont}_{V,\lambda}[\varphi](e) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad \text{cont}_{V,\lambda}[\varphi](V_k e) = k^\lambda \text{cont}_{V,\lambda}[\varphi](e).$$

В частности, отметим, что если $t = V_s e$, $s > 0$, $e \in \Gamma$, то, разрешая последнее соотношение относительно s и e , запишем однородное продолжение следующим образом: $\text{cont}_{V,\varkappa}[\varphi](t) = s^\varkappa(t) \varphi(e(t))$. Теперь вместо формул (4.5) можно записать

$$\begin{aligned} A_\lambda \varphi(e) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e_l \varepsilon_{k,l} \frac{\partial}{\partial e_k} \text{cont}_{V,\varkappa}[\varphi](e), \\ A_\lambda^+ \varphi(e) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e_l \varepsilon_{l,k} \frac{\partial}{\partial e_k} \text{cont}_{V,\varkappa}[\varphi](e). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь V определена формулой (4.1), а $\varkappa = \text{Re } \lambda$. Соотношения (4.6) имеют смысл для любой функции $\varphi(e) \in S(\Gamma)$. Отметим, что правые части в формулах (4.6) имеют один и тот же вид для всех $\lambda \in J$, $\text{Re } \lambda = \varkappa$. Это позволяет определить операторы A и A^+ на $E_\varkappa$ формулами (4.6) единым образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть заданы однопараметрическая группа V , допустимая поверхность Γ , число $\lambda \in \mathbb{C}$ и обобщенная функция $f(e) \in S'(\mathbb{R}^n)$, носитель $\text{supp } f$ которой ограничен и отделен от нуля. Для любой функции $\varphi(e) \in S(\Gamma)$ определим оператор ограничения $\text{rest}_{V,\lambda}$ следующим образом:

$$(\text{rest}_{V,\lambda}[f](e), \varphi(e)) = (f(e), \text{cont}_{V,\lambda}[\varphi](e)).$$

Следуя общей схеме (см. § 3), в пространстве $E_\lambda = \bigoplus_{\substack{\lambda \in J \\ \text{Re } \lambda = \varkappa}} \mathcal{E}_\lambda$ обозначим через

$$\{\chi_{l,m}^\lambda(e) \in \mathcal{E}_\lambda, \lambda \in J_\mu, l = 1, \dots, q_\lambda, m = 0, 1, \dots, m_l^\lambda\}$$

базис, в котором матрица нильпотентного оператора $A = \bigoplus_{\lambda \in J_{\mathcal{K}}} A_{\lambda}$, определяемого формулой (4.6), имеет канонический вид, т. е. такой, что

$$A\chi_{l,0}^{\lambda}(e) = 0, \quad A\chi_{l,m}^{\lambda}(e) = \chi_{l,m-1}^{\lambda}(e), \quad m = 1, \dots, m_l^{\lambda}. \quad (4.7)$$

Далее, построим специальное биортогональное семейство обобщенных функций $\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) \in S'(\Gamma)$ такое, что

$$(\chi_{l',m'}^{\lambda'*}(e), \chi_{l,m}^{\lambda}(e)) = \delta_{l,l';m,m'}^{\lambda,\lambda'}.$$

Для этого, считая $e_1, \dots, e_n$ координатами вектора e в жордановом представлении для генератора группы $\{U_k, k > 0\}$ матрицы E , введем в $E_{\mathcal{K}}$ билинейную форму, положив

$$\langle h_j, h_i \rangle = \delta_{ji}, \quad h_j = \frac{1}{\sqrt{j!}} e^j, \quad j \in \bigcup_{\substack{\lambda \in J \\ \operatorname{Re} \lambda = \kappa}} \{j \in \mathbb{Z}_+^n : (\sigma, j) = \lambda\},$$

так что в этой билинейной форме набор $\{h_j\}$ образует ортонормированный базис в пространстве многочленов $E_{\mathcal{K}}$. Можно показать, что оператор A^+ , определенный в (4.6), сопряжен к оператору A относительно таким образом введенной билинейной формы, т. е.

$$\langle P(e), AQ(e) \rangle = \langle A^+P(e), Q(e) \rangle, \quad P(e), Q(e) \in E_{\mathcal{K}}.$$

Отсюда следует, что матрицы операторов A и A^+ в этом базисе взаимно транспонированы. Обозначим через

$$\{\widehat{\chi}_{l,m}^{\lambda}(e), \lambda \in J_{\mathcal{K}}, l = 1, \dots, q_{\lambda}, m = 0, 1, \dots, m_l^{\lambda}\}$$

биортогональный базис в $E_{\mathcal{K}}$, т. е.

$$(\widehat{\chi}_{l',m'}^{\lambda'}(e), \chi_{l,m}^{\lambda}(e)) = \delta_{l,l';m,m'}^{\lambda,\lambda'}.$$

Можно показать, что матрица оператора A в базисе χ и матрица оператора A^+ в базисе $\widehat{\chi}$ транспонированы друг к другу. Это означает, что

$$\begin{aligned} A^+ \widehat{\chi}_{l,m}^{\lambda}(e) &= \widehat{\chi}_{l,m+1}^{\lambda}(e), & A^+ \widehat{\chi}_{l,m_l^{\lambda}}^{\lambda} &= 0, \\ \lambda \in J_{\mathcal{K}}, & l = 1, \dots, q_{\lambda}, & m = 0, 1, \dots, m_l^{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Поскольку на базисных векторах пространства $E_{\mathcal{K}}$

$$\frac{1}{\sqrt{j!}} \left(\frac{\partial}{\partial e} \right)^j \frac{1}{\sqrt{j!}} e^i = \delta_{ji},$$

$$\text{то } \widehat{\chi}_{l',m'}^{\lambda'} \left(\frac{\partial}{\partial e} \right) \chi_{l,m}^{\lambda}(e) = \delta_{l,l';m,m'}^{\lambda,\lambda'}.$$

Теперь в качестве семейства обобщенных функций $\chi_{l,m}^{\lambda*}(e) \in S'(\Gamma)$, образующих биортогональное семейство к семейству основных функций (4.7) из $E_{\mathcal{K}}$,

можно рассмотреть, например, семейство обобщенных функций на $S'(\Gamma)$, определяемых формулой

$$(\chi_{l,m}^{\lambda*}(e), \varphi(e)) = \left(\text{rest}_{V, \varkappa} \left[\hat{\chi}_{l,m}^{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial e} \right) g \right] (e), \varphi(e) \right), \quad \varphi(e) \in S(\Gamma), \quad (4.9)$$

где $(\frac{\partial}{\partial e})^j = (\frac{\partial}{\partial e_1})^{j_1} \dots (\frac{\partial}{\partial e_n})^{j_n}$, а $g(e) \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеет ограниченный носитель, отделенный от нуля, и $(g(e), 1) = 1$. В частности, в качестве $g(e)$ можно взять $\delta(e - e_0)$, где e_0 – произвольная точка допустимой поверхности Γ .

ПРИМЕР 4.1. Пусть i – мультииндекс, $(\sigma, i) = \lambda$. Покажем, что обобщенным сферическим представлением обобщенной функции $\delta^{(i)}(t)$ является

$$F(r, e) = \text{rest}_{V, \text{Re } \lambda} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \delta(t - t_0) \right] (e) \Delta_{\lambda, 0}(r).$$

Действительно, учитывая, что $C_{\lambda, 0}(e) = \sum_{(\sigma, j) = \lambda} \frac{1}{j!} \varphi^j(0) e^j$, для любой функции $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} (F(r, e), \varphi(U_r e)) &= \left(\text{rest}_{V, \text{Re } \lambda} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \delta(t - t_0) \right] (e), C_{\lambda, 0}(e) \right)_e \\ &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \delta(t - t_0), \text{cont}_{V, \text{Re } \lambda} \left[\sum_{(\sigma, j) = \lambda} \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(0) e^j \right] (t) \right) \\ &= \left(\delta^{(i)}(t - t_0), \sum_{(\sigma, j) = \lambda} \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(0) t^j \right) = (-1)^{|i|} \varphi^{(i)}(0). \end{aligned}$$

Напомним, что если функция $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель, то ее моменты определяются по формуле

$$M_j[f] = (f(t), t^j), \quad j \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (4.10)$$

ЛЕММА 4.1. Пусть обобщенная функция $f(t)$ принадлежит $S'(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } f$ – компакт. Тогда для любого целого числа $L > 0$ существует $Q \in \mathbb{Z}_+$ такое, что если

$$M_j[f] = 0, \quad |j| < Q, \quad (4.11)$$

то найдется такой обобщенный сферический представитель $F(r, e)$ функции $f(t)$, что

$$M_{\lambda, m}[F](e) = (F(r, e), r^\lambda \ln^m r) \equiv 0 \quad \text{в } S'(\Gamma) \quad (4.12)$$

при $\lambda \in J$, $|\lambda| < L$, $m = 0, \dots, n(\lambda)$. Обратно, для любого целого Q существует L такое, что если выполнено (4.12), то имеет место (4.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что существуют постоянные c и C такие, что $c|j| \leq \text{Re}(\sigma, j) \leq C|j|$. Пусть теперь $F_1(r, e)$ – какое-то обобщенное

сферическое представление $f(t)$, и пусть $\varphi(e) \in \mathcal{E}_\lambda$ для $\lambda \in J$, $|\lambda| < CL$. Поскольку $\text{supp } F_1$ – компакт и $\varphi = \sum_{(\sigma,j)=\lambda} a_j e^j$, имеем

$$\begin{aligned} (f(t), \varphi(t)) &= (F_1(r, e), \varphi(U_r e)) = \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \left(F_1(r, e), r^\lambda \ln^m r \frac{1}{m!} A_\lambda^m \varphi(e) \right) \\ &= \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \left(M_{\lambda, m}[F_1](e), \frac{1}{m!} A_\lambda^m \varphi(e) \right) = 0 \end{aligned}$$

(см. (1.27), (1.28)). Теперь, если Q достаточно велико, искомое представление задается формулой

$$F(r, e) = F_1(r, e) - \sum_{\lambda \in J, |\lambda| < L} \sum_{m=0}^{n(\lambda)} M_{\lambda, m}[F_1](e) \Delta_{\lambda, m}(r).$$

Обратное утверждение легко следует из того факта, что для любого j , $|j| < Q$, найдется $\lambda = (\sigma, j) \in J$, $|\lambda| < L$, если L достаточно велико. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Пусть $f_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеет ограниченный носитель и $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Пользуясь леммами 2.1, 4.1, нетрудно показать, что если

$$M_j[f_0] = 0 \quad \forall j: |j| \leq \frac{-\alpha - |\mu|}{\min_i \mu_i}, \quad (4.13)$$

то обобщенная функция f_0 обладает тривиальной квазиасимптотикой по группе $\{U_k, k > 0\}$ относительно $\rho(k)$.

Описание асимптотически однородных обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^n)$ вдоль траекторий, определяемых однопараметрической группой $\{U_k = e^{E \ln k}, k > 0\}$, в некритическом случае приведено в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть заданы автомодельная функция $\rho(k)$ порядка α , причем

$$-\text{Re}(\alpha + |\mu|) \notin \text{pr } J, \quad (4.14)$$

число $L > \frac{-\alpha - |\mu|}{\min_i \mu_i}$ и число $\varkappa$ такое, что

$$-\text{Re}(\alpha + |\mu| + \varkappa) \notin \mathbb{Z}_+. \quad (4.15)$$

Тогда для того, чтобы $f(t) \in \text{AO}_\rho^U(S(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t), \quad (4.16)$$

где обобщенная функция $f_0(t)$ имеет компактный носитель и

$$M_j[f_0] = 0 \quad \text{при } |j| \leq L, \quad (4.17)$$

а обобщенная функция $f_1(t)$ определяется следующим образом: существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная по r функция $\gamma(r, e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому условию

$$\gamma(r, e) \sim r^{N+|\mu|+\varkappa-1} \rho(r) B(e), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (4.18)$$

с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$, такие, что

$$(f_1(t), \varphi(t)) = \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-\varkappa} (\varphi(U_r e) - \Omega_{-\operatorname{Re}(\alpha+|\mu|)}[\varphi(U_r e)](r, e))) \right)_e dr. \quad (4.19)$$

При этом для любой функции $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(U_k t), \varphi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (-1)^N \frac{\Gamma(\alpha + |\mu| + \varkappa + N)}{\Gamma(\alpha + |\mu| + \varkappa)} (r_+^{\alpha+|\mu|-1} B(e), \varphi(U_r e)). \quad (4.20)$$

Здесь $\Omega_q[\varphi(U_r e)](r, e)$ определяется формулой (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 1.2 и теорем 3.1, 3.3.

В критическом случае имеет место

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть заданы автомодельная функция $\rho(k)$ порядка α , причем

$$-\operatorname{Re}(\alpha + |\mu|) \in \operatorname{pr} J, \quad (4.21)$$

число $L > \frac{-\alpha-|\mu|}{\min_i \mu_i}$, точка $t_0 \in \Gamma$ и число $\varkappa$ такое, что

$$-\operatorname{Re}(\alpha + |\mu| + \varkappa) \notin \mathbb{Z}_+. \quad (4.22)$$

Для того чтобы $f(t) \in \operatorname{AO}_\rho^U(S(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t), \quad (4.23)$$

где $f_0(t)$ имеет компактный носитель и

$$M_j[f_0] = 0 \quad \text{при} \quad |j| \leq L; \quad (4.24)$$

обобщенная функция $f_1(t)$ определяется следующим образом: существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная по r функция $\gamma(r, e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому условию

$$\gamma(r, e) \sim r^{N+|\mu|+\varkappa-1} \rho(r) B(e), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (4.25)$$

с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$ и условию

$$(\gamma(r, e), \psi(e)) \equiv 0 \quad \forall \psi(e) \in E_{-\alpha-|\mu|}, \quad (4.26)$$

такие, что для любой функции $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$

$$(f_1(t), \varphi(t)) = \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-\varkappa} (\varphi(U_r e) - \Omega_{-\operatorname{Re}(\alpha+|\mu|)}[\varphi(U_r e)](r, e))) \right)_e dr, \quad (4.27)$$

$a(f_2(t), \varphi(t))$ для $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$ определяется как линейная комбинация по всем $\lambda \in J_{-\alpha-|\mu|}$ и всем полиномам P_λ , пробегающим некоторый базис в $\mathcal{E}_\lambda$, следующего вида

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\kappa} \left(\text{rest}_{V, -(\text{Re } \alpha + |\mu|)} \left[\left((A^+ P_\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - r^\lambda \left(r \frac{d}{dr} \right) r^{-\lambda} P_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \delta(t - t_0) \right] (e), (\varphi(U_r e) \right. \\ \left. - \Omega_{-\text{Re}(\alpha + |\mu|)}[\varphi(U_r e)](r, e)) \right) dr, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где непрерывная функция $\gamma(r)$, зависящая от λ и полинома $P_\lambda(e)$, удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\gamma(r) \sim b r^{N+|\mu|+\kappa-1} \rho(r), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (4.29)$$

с некоторой постоянной b , зависящей от γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 1.2, теоремы 3.4 и соотношений (3.52) согласно (4.8). Обратное утверждение очевидно.

Из теорем 3.5, 3.6, пользуясь утверждениями 1.2, 3.1, получим описание однородных обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^n)$ вдоль траекторий, определяемых однопараметрической группой $\{U_k, k > 0\}$.

ТЕОРЕМА 4.3. Для того чтобы обобщенная функция $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ была однородной степени α относительно траекторий, определяемых однопараметрической группой $\{U_k = e^{E\tau}, \tau = \ln k, k > 0\}$ такой, что собственные значения матрицы E равны $\sigma_i = \mu_i + i\nu_i, i = 1, \dots, n, \mu_i > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $f(t)$ представлялась в виде:

1) если $-\alpha - |\mu| \notin J = \{\lambda: (\sigma, j) = \lambda, j \in \mathbb{Z}_+^n\}$, то

$$(f(t), \psi(t)) = (r_+^{\alpha+|\mu|-1} \Psi(e), \psi(U_r e)), \quad \psi(t) \in S(\mathbb{R}^n), \quad r > 0, \quad e \in \Gamma, \quad (4.30)$$

где Γ – допустимая поверхность и $\Psi(e) \in S'(\Gamma)$;

2) если $-\alpha - |\mu| \in J$, то

$$\begin{aligned} (f(t), \psi(t)) = (r_+^{\alpha+|\mu|-1} \Phi(e), \psi(U_r e)) \\ + \left(r_+^{\alpha+|\mu|-1}, \left(\text{rest}_{V, -(\text{Re } \alpha + |\mu|)} \left[\left((A_{-\alpha-|\mu|}^+ P) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - r^{-\alpha-|\mu|} \left(r \frac{d}{dr} \right) r^{\alpha+|\mu|} P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \delta(t - t_0) \right] (e), \psi(U_r e) \right) \right)_e, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где $P(e) \in \mathcal{E}_{-\alpha-|\mu|}$, а обобщенная функция $\Phi \in S'(\Gamma)$ удовлетворяет условию

$$(\Phi(e), \varphi(e)) = 0 \quad \forall \varphi(e) \in \mathcal{E}_{-\alpha-|\mu|}; \quad (4.32)$$

здесь $\mathcal{E}_{-\alpha-|\mu|}$ определено формулой (4.2), t_0 – любая фиксированная точка на Γ , а сужение обобщенной функции с $S(\mathbb{R}^n)$ на $S(\Gamma)$ однородное степени

$-\operatorname{Re} \alpha - |\mu|$ относительно однопараметрической группы $\{V_k, k > 0\}$ (при каждом фиксированном r) задается определением 4.2. Оператор $A_{-\alpha-|\mu|}^+$ определен в формуле (4.6).

Отметим, что если $A_{-\alpha-|\mu|}^+ P(e) = 0$, то второе слагаемое в соотношении (4.31) равно $(P(\frac{\partial}{\partial t})\delta(t), \psi(t))$. Отсюда легко вытекает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Всякая обобщенная функция, сосредоточенная в начале координат и однородная относительно группы $\{U_k, k > 0\}$ степени α , имеет вид $P(\frac{\partial}{\partial t})\delta(t)$. Здесь $P(e)$ – многочлен, однородный степени $-\alpha - |\mu|$ относительно группы $\{Q_k, k > 0\}$ (т. е. многочлен, имеющий в жордановых координатах вид $\sum_{(\sigma, j)=-\alpha-|\mu|} a_j e^j$) и такой, что*

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e_l \varepsilon_{l,k} \frac{\partial}{\partial e_k} P(e) = 0,$$

где $\varepsilon_{k,l}$ – матричные элементы нильпотентной части матрицы E .

Список литературы

1. Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, “Асимптотически однородные обобщенные функции по специальным группам преобразований”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 23–66; англ. пер.: Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav’yalov, “Generalized functions asymptotically homogeneous along special transformation groups”, *Sb. Math.*, **200**:6 (2009), 803–844.
2. Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, “Асимптотически однородные обобщенные функции в нуле и уравнения в свертках с ядрами, символы которых – квазиоднородные многочлены”, *Докл. РАН*, **426**:3 (2009), 300–303; англ. пер.: Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav’yalov, “Asymptotically homogeneous generalized functions at zero and convolution equations with kernels quasi-homogeneous polynomial symbols”, *Dokl. Math.*, **79**:3 (2009), 356–359.
3. Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, “Асимптотически квазиоднородные обобщенные функции”, *Докл. РАН*, **421**:2 (2008), 157–161; англ. пер.: Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav’yalov, “Asymptotically quasi-homogeneous distributions”, *Dokl. Math.*, **78**:1 (2008), 503–507.
4. Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, “Асимптотически однородные обобщенные функции и граничные свойства функций, голоморфных в трубчатых конусах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:6 (2006), 45–92; англ. пер.: Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav’yalov, “Asymptotically homogeneous generalized functions and boundary properties of functions holomorphic in tubular cones”, *Izv. Math.*, **70**:6 (2006), 1117–1164.
5. Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, “Асимптотически однородные обобщенные функции в сферическом представлении и некоторые применения”, *Докл. РАН*, **405**:1 (2005), 18–21; англ. пер.: Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav’yalov, “Asymptotically homogeneous generalized functions in spherical representation and applications”, *Dokl. Math.*, **72**:3 (2005), 839–842.
6. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985; пер. с англ.: E. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., **508**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

7. O. von Grudzinski, *Quasihomogeneous distributions*, North-Holland Math. Stud., **165**, North-Holland, Amsterdam, 1991.
8. В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожджинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, М., 1986.
9. Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: Н. Н. Schaefer, *Topological vector spaces*, Macmillan, New York, 1966.
10. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции и действия над ними*, вып. 1, Физматгиз, М., 1959; нем. пер.: I. M. Gelfand, G. E. Schilow, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen). I: Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen*, VEB, Berlin, 1960.

Ю. Н. Дрожджинов (Yu. N. Drozhzhinov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: drozzin@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
10.01.2011
29.04.2011

Б. И. Завьялов (B. I. Zavialov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: bzavial@mi.ras.ru