Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. М. Пачев, Представление целых чисел изотропными
тернарными квадратичными формами, *Изв. РАН. Сер.
матем.*, 2006, том 70, выпуск 3, 167–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/im676>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:07:06

УДК 511.512

У. М. Пачев

Представление целых чисел изотропными тернарными квадратичными формами

Дискретным эргодическим методом получено полное решение задачи об асимптотике числа представлений целых чисел произвольной целой изотропной тернарной квадратичной формой как по областям на соответствующей поверхности, так и по классам вычетов по заданному модулю.

Библиография: 24 наименования.

§ 1. Введение

Целью настоящей работы является полное решение задачи об асимптотике числа представлений целых чисел произвольной целой изотропной тернарной квадратичной формой (т. е. представляющей нуль нетривиально) при применении так называемого дискретного эргодического метода.

Укажем лишь кратко, что основы этого своеобразного аналитико-алгебраического метода были заложены Ю. В. Линником [1] для изучения распределений целых точек на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = n$ и на гиперboloиде $xy - z^2 = n$, где n – растущий целочисленный параметр (см. также [2]).

В дальнейшем этот метод развивал А. В. Малышев сначала совместно с Ю. В. Линником, затем самостоятельно и со своими учениками (см., например, [3]–[6]).

В развитие метода дальнейший вклад внес также М. Петерс [7], соединивший дискретный эргодический метод с теорией спинорных родов, что позволило ему получить теорему о существовании представлений (но без асимптотики) рациональными положительными тернарными квадратичными формами общего вида. Более завершенные исследования по применению дискретного эргодического метода к положительным тернарным квадратичным формам проведены Ю. Г. Тетериным [8], [9].

Перейдем теперь к такому же краткому описанию ранее проведенных исследований по применению дискретного эргодического метода к решению вопроса о представлении целых чисел неопределенными тернарными квадратичными формами.

Первые и весьма глубокие исследования по применению дискретного эргодического метода к неопределенным тернарным квадратичным формам принадлежат Ю. В. Линнику [10] и Б. Ф. Скубенко [2].

В их работах рассматривается простейшая неопределенная тернарная квадратичная форма

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2^2 \quad (1)$$

и изучается вопрос о распределении целых точек на гиперболической поверхности

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = m, \quad m \neq 0. \quad (2)$$

В дальнейшем результат Ю. В. Линника [10] был несколько обобщен автором [11] на случай форм f , содержащихся в f_0 , т. е. форм вида

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_0\left(\sum_{i=1}^3 c_{1i}x_i, \sum_{i=1}^3 c_{2i}x_i, \sum_{i=1}^3 c_{3i}x_i\right), \quad (3)$$

где $c_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\det(c_{ij}) \neq 0$, $m > 0$, причем рассматривалось распределение целых точек не только по областям поверхности

$$f(x_1, x_2, x_3) = m, \quad m > 0, \quad (4)$$

но и по классам вычетов по заданному модулю.

В случае однополостного гиперboloида, т. е. при $m < 0$, аналогичные результаты были получены А. В. Малышевым совместно с Нгуен Нгор Гой [12]. В краткой заметке [13] сформулирован асимптотический результат, относящийся к изотропным тернарным квадратичным формам в случае двуполостного гиперboloида.

Изотропные тернарные квадратичные формы достаточно общего вида для обоих случаев гиперboloидов рассматривались в работе автора [14]. Во всех перечисленных работах используется дискретный эргодический метод, и все исследованные в них неопределенные тернарные формы являются изотропными формами того или иного вида.

Вопрос о равномерном распределении целых точек на гиперboloидах специального вида изучался также Е. П. Голубевой [15], но другим методом, а в [16], [17] ею намечены подходы к рассмотрению тернарных форм общего вида, но в предположении справедливости гипотезы о нетривиальном сдвиге нулей L -функции Дирихле с квадратичным характером.

Заметим, что дискретный эргодический метод до сих пор не применялся к анизотропным тернарным квадратичным формам. Отметим также, что не удастся распространить безусловный асимптотический результат Дьюка [18] с остаточным членом, относящийся к простейшей форме $f_0 = x_1x_3 - x_2^2$, на другие не эквивалентные ей изотропные формы (или для той же формы f_0 на распределение целых точек по классам вычетов) никаким из существующих методов.

Предлагаемый подход к решению задачи о представлении чисел произвольной изотропной тернарной квадратичной формой состоит в прямом сведении общего случая изотропных тернарных форм к простейшему случаю формы (1), при этом используется “ключевая лемма” для вектор-матриц второго порядка из работы [19].

Как известно [20], для любой изотропной тернарной квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3)$ существуют целое число $\delta \neq 0$ и невырожденная целая матрица $C = (c_{ij})$, $c_{ij} \in \mathbb{Z}$, для которых

$$\delta f(x_1, x_2, x_3) = f_0\left(\sum_{i=1}^3 c_{1i}x_i, \sum_{i=1}^3 c_{2i}x_i, \sum_{i=1}^3 c_{3i}x_i\right). \quad (5)$$

Пусть $f = f(x_1, x_2, x_3)$ – целочисленная примитивная изотропная тернарная квадратичная форма, имеющая вид (2); $m \neq 0$ – целое число. Обозначим через $r(\Lambda_{f,m}; g, b_1, b_2, b_3)$ число целых примитивных точек (x_1, x_2, x_3) с условиями

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_{f,m}, \quad (x_1, x_2, x_3) \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod{g}, \quad (6)$$

где $\Lambda_{f,m}$ – ограниченная квадратируемая область на изотропном гиперboloиде

$$f(x_1, x_2, x_3) = m, \quad m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Наша цель состоит в том, чтобы распространить эргодические теоремы для потоков целых точек на изотропных гиперboloидах и асимптотику для $r(\Lambda_{f,m}; g, b_1, b_2, b_3)$ из работы [14] на изотропные формы f при любом $\delta \neq 0$, род которых, вообще говоря, неоднокласен.

§ 2. Некоторые сведения из арифметики матриц

При изучении с помощью дискретного эргодического метода вопроса о распределении целых точек на изотропных гиперboloидах наиболее естественным вспомогательным аппаратом является аналитическая арифметика матриц второго порядка, развитая в работе [21]. Поэтому приведем необходимые сведения из арифметики матриц второго порядка (см. [21]). Мы рассматриваем квадратные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{Q},$$

над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

При этом, чтобы сохранить аналогию с алгеброй эрмитионов (см. [21]), условимся называть число $N(A) = \det A$ *нормой* матрицы A . Если след матрицы A равен нулю, т. е. $\text{Tr } A = \alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$, то A называется *вектор-матрицей*. Вектор-матрице

$$L = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \gamma & -\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$$

(ясно, что это общий вид вектор-матриц второго порядка), взаимно однозначно сопоставляются бинарная квадратичная форма $\varphi_L = \varphi = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ с определителем $d = d(\varphi) = \alpha\gamma - \beta^2 = N(L)$ и точка $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Говорят, что вектор-матрица L является *приведенной*, если соответствующая ей бинарная квадратичная форма φ_L приведена.

В дальнейшем изложении мы будем существенно пользоваться представлением матрицы A в виде

$$A = l + L, \quad l = \frac{\text{Tr } A}{2}, \quad L = A - l,$$

где $l = lE$ – скалярная матрица.

Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (8)$$

называем *целой*, если a_{ij} – целые числа, т. е. $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Целая матрица (8) называется *примитивной*, если $\text{НОД}(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = 1$. Говорим, что матрица A *делится на матрицу B справа*: A/B , если найдется целая матрица Q , для которой $A = QB$. Аналогично определяем, что A *делится на B слева*: $B \backslash A$, если найдется матрица Q с условием $A = BQ$.

Целые вектор-матрицы L с нормой m будем записывать в виде

$$L = \begin{pmatrix} b & -a \\ c & -b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad N(L) = ac - b^2 = m.$$

Если $\text{НОД}(a, b, c) = 1$, то вектор-матрицу L называем *собственно примитивной*; если $\text{НОД}(a, 2b, c) = 2$, то L называем *несобственно примитивной*.

Число $t = t(A) = \text{НОД}(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ называется *делителем* матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Если $t(A) = 1$, то матрица A называется *примитивной*. Если для некоторого числа $g > 0$ делитель $t(A)$ взаимно прост с g , то матрица A называется *примитивной по модулю g* .

Рассмотрим теперь предложения из арифметики матриц второго порядка, имеющие важные приложения к решению вопроса о распределении целых точек на гиперболоидах.

ЛЕММА 1. 1) Пусть A – невырожденная целая матрица, $N(A) = bc$, $b, c \in \mathbb{Z}$. Тогда найдутся такие целые матрицы B, C , что $A = BC$, $N(B) = b$, $N(C) = c$.

2) Если при этом матрица A примитивна $(\text{mod } c)$, то представление $A = BC$ единственно с точностью до ассоциированности, т. е. если $A = BC = B_1 C_1$, $N(C_1) = N(C) = c$, то найдется матрица E , $N(E) = 1$, для которой

$$C_1 = EC, \quad B_1 = BE^{-1} = B\bar{E}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [21, предложение 2.12].

На использовании леммы 1, являющейся в некотором смысле аналогом основной теоремы о единственности разложения на простые множители, основаны рассмотрения эргодических свойств матричных разложений, применяемых в дискретном эргодическом методе.

Приведем также некоторые сведения из теории поворотов вектор-матриц (см. [21]). Мы будем рассматривать сравнения целых матриц по числовому модулю: $A \equiv B \pmod{m}$, считая при этом, что $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{m}$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Пусть L и L' – вектор-матрицы одинаковой нормы m , т. е. $N(L) = N(L') = m$. Рассмотрим совокупность $M_{L, L'}$ невырожденных матриц W с условием

$$WLW^{-1} = L'. \quad (9)$$

О матрицах $W \in M_{L, L'}$ будем говорить, что они осуществляют гиперболический поворот вектор-матрицы L в вектор-матрицу L' .

Пусть X – произвольная рациональная матрица второго порядка. Для рациональной матрицы

$$W = XL + L'X \quad (10)$$

$$WL = L'W \quad (11)$$

(можно показать, что (10) есть общее решение матричного уравнения (11)). Поэтому если $W = XL + L'X$ – целая невырожденная матрица, то $W \in M_{L,L'}$ и выполнено условие (9).

Следующее предложение относится к теории поворотов вектор-матриц и имеет важное приложение к вопросу о распределении целых точек на гиперболоидах.

ЛЕММА 2. Пусть L и L' – примитивные вектор-матрицы, причем

$$N(L) \equiv N(L') \pmod{r},$$

где $r \neq 0$ – целое число. Тогда:

- 1) если X – целая матрица и $W = XL + L'X$, то $WL \equiv L'W \pmod{r}$;
- 2) при этом если $\text{НОД}(r, 2m) = 1$, то для любого целого числа t , взаимно простого с r , найдется такая целая матрица X , что для матрицы W имеет место сравнение $N(W) \equiv t \pmod{r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы см. в работе [21].

Опираясь на лемму 2, получаем следующее предложение, непосредственно используемое в доказательстве теоремы, в которой рассматривается равномерное распределение целых точек на гиперболоидах как по областям на них, так и по классам вычетов по заданному модулю.

ЛЕММА 3. Пусть $L_0^{(1)}, \dots, L_0^{(\rho(g,m))}$ – представители всех классов вычетов целых вектор-матриц $\pmod{g}$ с условием

$$N(L_0^{(j)}) \equiv m \pmod{g}.$$

Для данного целого положительного числа t сопоставим каждому классу вычетов $L_0^{(j)} \pmod{g}$ совокупность $\gamma_{L_0^{(j)}}^{(t)}$ классов целых матриц $S \pmod{g}$, для которых

$$L_0^{(j)} S \equiv S L_0, \quad N(S) \equiv q^t \pmod{g}. \quad (12)$$

Тогда в каждой совокупности $\gamma_{L_0^{(j)}}^{(t)}$, $j = 1, \dots, \rho(g, m)$, имеется одинаковое число классов вычетов $S \pmod{g}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 и условий (12) найдется целая матрица $T = T_{j_1, j_2}$ с условиями

$$L_0^{(j_2)} T \equiv T L_0^{(j_1)}, \quad N(T) \equiv 1 \pmod{g}. \quad (13)$$

Однако тогда если $S \in \gamma_{j_1}^{(t)}$, то $TS \in \gamma_{j_2}^{(t)}$. Действительно, умножая обе части первого сравнения (13) на матрицу S , получим

$$L_0^{(j_2)} TS \equiv T L_0^{(j_1)} S \pmod{g}.$$

Из этого сравнения в силу первого сравнения (12), в свою очередь, получаем

$$L_0^{(j_2)} TS \equiv T S L_0 \pmod{g},$$

откуда $TS \in \gamma_{j_2}^{(t)}$, так как при этом

$$N(TS) \equiv 1 \pmod{g}.$$

Тем самым, отображение $S \rightarrow TS$ задает взаимно однозначное соответствие между классами матриц $S \pmod{g}$ совокупностей $\gamma_{j_1}^{(t)}$ и $\gamma_{j_2}^{(t)}$, и, значит, каждая из них содержит одинаковое число классов вычетов $S \pmod{g}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для функции $\rho(g, m)$ в лемме 3 имеется формула

$$\rho(g, m) = g^2 \prod_{p|g} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p} \right),$$

где $\left(\frac{-m}{p}\right)$ – символ Лежандра, причем в силу того, что $\rho(g, m)$ – число решений сравнения $x_1 x_3 - x_2^2 \equiv m \pmod{g}$, эту формулу можно сначала доказать для модуля вида $g = p^t$ индукцией по t , где p – простое число, а затем по свойству мультипликативности числа решений сравнения получить ее для любого g . Учитывая эту формулу, а также то, что (см., например, [11])

$$\#\{S \pmod{g} \mid N(S) \equiv q^t \pmod{g}\} = g^3 \prod_{p|g} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right),$$

получим

$$\pi(g, m) = \#\gamma_j^{(t)} = \frac{g^3 \prod_{p|g} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)}{\rho(g, m)} = g \prod_{p|g} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p} \right),$$

где через $\#$ обозначена мощность множества.

К аналитической арифметике матриц второго порядка мы относим и так называемую ключевую лемму дискретного эргодического метода.

КЛЮЧЕВАЯ ЛЕММА (для вектор-матриц). Пусть $L_1, \dots, L_r$ – все приведенные вектор-матрицы второго порядка с нормой m . Пусть в матричных равенствах

$$l + L_i = B_i U_i, \quad N(B_i) = q^s, \quad i = 1, \dots, r, \quad (14)$$

где l – решение сравнения $l^2 + m \equiv 0 \pmod{q^s}$, произвольно выбраны r' равенств так, что для любого $\varepsilon > 0$

$$r' \gg |m|^{\frac{1}{2} - \varepsilon}. \quad (15)$$

Тогда существует такая постоянная $c > 0$, зависящая от ε , что количество w попарно неассоциированных справа матриц B в равенствах (14), которые встретятся в выбранных r' равенствах, удовлетворяет при $|m| \rightarrow \infty$ неравенству

$$w \gg c|m|^{\tau - \varepsilon}, \quad (16)$$

где $0 < \tau < \frac{1}{8}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [19], где А. В. Малышевым и Б. М. Широковым дано новое доказательство ключевой леммы дискретного эргодического метода для вектор-матриц второго порядка, причем в отличие от предшествующих исследований изложение ведется сразу для обоих случаев двуполостного и однополостного гиперболоидов. Это заметно упрощает исследование вопроса о представлении целых чисел произвольными изотропными тернарными квадратичными формами.

Автором [22] дано уточнение ключевой леммы нового варианта дискретного эргодического метода в случае вектор-матриц второго порядка, позволяющее получить некоторые оценки остаточных членов в асимптотических формулах для количества представлений чисел неопределенными тернарными квадратичными формами.

Рассмотрим еще некоторые вопросы теории делимости матриц второго порядка с большой нормой, возникающие при применении дискретного эргодического метода к неопределенным тернарным квадратичным формам. Далее понадобится следующий вариант теоремы Е. В. Подсыпанина [23] о целых точках на детерминантной поверхности.

ЛЕММА 4. Пусть $m \neq 0$ и $g > 0$ – целые числа, B – целая матрица, примитивная $(\bmod g)$, причем

$$N(B) \equiv m \pmod{g}. \quad (17)$$

Пусть Ω_m – ограниченная квадратируемая область на поверхности $N(X) = m$, где X – вещественная матрица, причем $\Omega_m = \sqrt{|m|} T_m \tilde{\Omega}$, где $\tilde{\Omega}$ – фиксированная область на поверхности $N(\tilde{X}) = 1$, $T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix}$ – вещественная матрица с определителем 1, зависящая от m и удовлетворяющая условиям $|t_i| \leq \varkappa$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Пусть $\omega = \omega(\Omega_m)$ – гиперболическая мера области Ω_m , т. е. жорданов объем тела $\{Y \mid Y = tX, X \in \tilde{\Omega}, 0 \leq t \leq 1\}$; $\omega_0 = \frac{\pi^2}{6}$ – гиперболическая мера фундаментальной области группы целочисленных унимодулярных матриц. Обозначим через $\sigma_0(\Omega_m; g, B)$ число целых примитивных матриц M с нормой m и условиями

$$M \in \Omega_m, \quad M \equiv B \pmod{g}.$$

Тогда при $|m| \rightarrow \infty$

$$\sigma_0(\Omega_m; g, B) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\nu(g, m)} \sigma_0(m) + O(g^{-\frac{5}{8}} |m|^{\frac{11}{12} + \varepsilon}),$$

где $\sigma_0(m) = |m| \prod_{p|m} (1 + \frac{1}{p})$, $\nu(g, m)$ – число различных $(\bmod g)$ примитивных $(\bmod g)$ матриц B , удовлетворяющих (17); постоянные, входящие в знак O , зависят только от $\tilde{\Omega}$, $\varkappa$ и $\varepsilon > 0$.

Опираясь на лемму 4, получаем следующий результат о делимости матриц большой нормы, используемый в доказательствах эргодических теорем.

В условиях и обозначениях леммы 4 справедлива

ЛЕММА 5. Пусть $m \neq 0$, $g \equiv 1 \pmod{2}$ – взаимно простые числа, B – целая матрица с условием (17), Ω_m – ограниченная квадратируемая область на

поверхности $N(X) = t$, $\omega = \omega(\Omega_m)$ – ее гиперболическая мера, A_1 и A_2 – невырожденные примитивные матрицы, $N(A_1) = a_1$, $N(A_2) = a_2$, $a_1 \equiv a_2 \equiv 1 \pmod{2}$, причем $a_1 a_2 \mid t$. Обозначим через $\sigma_0(\Omega_m; g, B; A_1, A_2)$ число целых примитивных матриц с нормой t , для которых $M \in \Omega_m$, $M \equiv B \pmod{g}$, $A_1 \setminus M$, M/A_2 .

Тогда при $|m| \rightarrow \infty$

$$\sigma_m(\Omega_0; g, B; A_1, A_2) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\sigma_0(m)}{\gamma(g, m) \sigma_0(a_1) \sigma(a_2)} + O(g^{-\frac{5}{3}} a_1^{\frac{1}{3}} a_2^{\frac{1}{3}} |m|^{\frac{11}{12} + \varepsilon}), \quad (18)$$

где постоянные, входящие в знак O , зависят только от $\tilde{\Omega}$, $\varkappa$ и $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [21].

§ 3. Эргодическая теорема для потока целых точек на простейшем изотропном гиперboloиде

Построение потока целых точек на поверхности простейшего изотропного гиперboloида (2) было дано в работе [14]. Для полноты изложения мы вкратце воспроизведем основные моменты этого построения.

Построение потока целых точек в случае двуполостного гиперboloида приводится в работе [4]. Отметим также, что в [24] рассмотрены эргодические свойства потоков классов положительных бинарных квадратичных форм в гауссовых родах. В нашем построении потока рассматриваются оба случая гиперboloида (2). Точке $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ на гиперboloиде (2) будем сопоставлять вектор-матрицу $L = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$ с нормой $N(L) = t$ и бинарную квадратичную форму $\varphi(X, Y) = x_1 X^2 + 2x_2 XY + x_3 Y^2$ с определителем t . Условия приведенности для вектор-матрицы $L = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 \end{pmatrix}$ с нормой t имеют вид

$$2|x_2| < x_1 < x_2, \quad 0 \leq 2x_2 < x_1 = x_3, \quad 0 < 2x_2 = x_1 \leq x_3$$

в случае двуполостного гиперboloида и

$$0 \leq x_2 < \sqrt{-m}, \quad \sqrt{-m} - x_2 < |x_1| < \sqrt{-m} + x_2$$

в случае однополостного гиперboloида.

Через $r(m)$ обозначаем число приведенных примитивных вектор-матриц с нормой m , а через F_m – множество таких вектор-матриц.

Пусть $q > 0$ – нечетное число, взаимно простое с m , причем

$$\left(\frac{-m}{p} \right) = 1$$

для всех простых делителей числа q . Тогда найдется целое число u , для которого

$$u^2 + m \equiv 0 \pmod{q}. \quad (19)$$

Под потоком $\chi_s = \chi_s(m, q, u)$ длиной s , отвечающим числам m , q , u и множеству F_m , будем понимать совокупность $r(m)$ последовательностей длиной s

целых примитивных вектор-матриц с нормой m , которые строятся следующим образом.

В силу сравнения (19) и леммы 1 можно записать матричное разложение

$$u + L = QU, \quad N(Q) = q, \quad (20)$$

где Q, U – целые матрицы, причем Q – примитивная матрица, определяемая матрицей $u + L$ однозначно с точностью до ассоциированности справа. Ясно, что в силу сравнения (19) можно подобрать целое число l такое, чтобы

$$l \equiv u \pmod{q}, \quad l^2 + m \equiv 0 \pmod{q^s}, \quad \text{НОД}\left(\frac{l^2 + m}{q^s}, q\right) = 1. \quad (21)$$

Из (21) следует, что $N(l + L) = l^2 + m \equiv 0 \pmod{q^s}$, и тогда в силу леммы 1 найдутся целые примитивные матрицы B и U такие, что $l + L = BU$, причем $N(B) = q^s$. Повторно используя лемму 1, получим равенства

$$B = Q_1 \dots Q_s, \quad N(Q_i) = q, \quad i = 1, \dots, s,$$

где $Q_1, \dots, Q_s$ – целые матрицы с нормой q .

Далее нам понадобится понятие “удобной” матрицы, введенное Б. Ф. Скубенко [2] в связи с построением потока целых точек в случае однополостного гиперболоида. Матрица A с нормой $N(A) > 0$ называется *удобной*, если выполнены условия: для вектор-матриц L и $A^{-1}LA$, принадлежащих области приведения F_m , найдется при некоторой целой унимодулярной матрице $\mathcal{E}$ вектор-матрица $\mathcal{E}^{-1}L\mathcal{E} \in F_m$, причем для элементов матрицы $A' = \mathcal{E}A$ выполняется неравенство $\alpha'\beta'\gamma'\delta' < 0$.

Составим матричные равенства

$$l + L_k = B_k U_k, \quad k = 1, \dots, r(m),$$

где $B_k = Q_{k1}Q_{k2} \dots Q_{ks}$, $N(Q_{ki}) = q$.

Особую роль в построении потока вектор-матриц играют матрицы вида

$$P_{ki} = Q_{k1}Q_{k2} \dots Q_{ki}$$

и способ их выбора. В первую очередь требуем, чтобы для матрицы P_{ki} выполнялись условия

$$P_{ki}^{-1}L_k P_{ki} \in F_m.$$

В случае $m < 0$ требуем, чтобы матрицы P_{ki} были удобными. Пользуясь описанным в [14] способом выбора матриц-операторов P_{ki} , получаем некоторую операцию T , ставящую в соответствие вектор-матрице L_k вектор-матрицу $L'_k = P_{k1}^{-1}L_k P_{k1}$ такую, что

$$L'_k = T L_k, \quad T L_k = P_{k1}^{-1} L_k P_{k1},$$

при этом T – обратимая операция, действующая на множестве F_m всех приведенных примитивных вектор-матриц с нормой m . Операция $T = T(m, q, u)$ зависит от m, q и u , причем второму решению $-u$ сравнения (19) отвечает

обратная операция T^{-1} . Операция T задает поток $\chi_s = \chi_s(m, q, u)$ заданной длины s на множестве F_m : каждой вектор-матрице $L_k \in F_m$ отвечает последовательность (цепочка)

$$L_k \rightarrow L_k^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow L_k^{(s-1)}, \quad L_k \in F_m,$$

где $L_k^{(1)}, \dots, L_k^{(s-1)} \in F_m$ определяются рекуррентно:

$$L_k^{(i)} = T L_k^{(i-1)} = T^i L_k, \quad L_k^{(0)} = L_k, \quad i = 1, \dots, s-1,$$

причем $T^i L_k = P_{ki}^{-1} L_k P_{ki}$.

Полный поток $\chi_s(m, q, u)$ состоит из $r(m)$ цепочек; $r(m)$ представляет собой также число приведенных примитивных бинарных квадратичных форм с определителем m .

Следующее предложение, являющееся обобщением результатов А. В. Малышева [4] и Б. Ф. Скубенко [2], выявляет эргодические свойства таким образом построенного потока целых точек на простейшем гиперboloиде (2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \neq 0$ – целое число, g – нечетное число, взаимно простое с m ; b_1, b_2, b_3 – целые числа, удовлетворяющие сравнению

$$f_0(b_1, b_2, b_3) \equiv m \pmod{g}. \quad (22)$$

Пусть $\Lambda_m = \Lambda_{f_0, m}$ – ограниченная квадратуемая область на поверхности гиперboloида (2) с фиксированной проекцией

$$\tilde{\Lambda}_m = \frac{1}{\sqrt{|m|}} \Lambda_m,$$

$\lambda = \lambda(\Lambda_m) > 0$ – ее f_0 -гиперболическая мера (площадь) (см. [11]).

Пусть целые числа q, u удовлетворяют условию (19) и $\text{НОД}(q, 2m) = 1$.

Рассмотрим часть $\chi'_s \subset \chi'_s$ потока $\chi = \chi_s(m, q, u)$, состоящую из $r' \leq r(m)$ цепочек

$$L_k \rightarrow L_k^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow L_k^{(s-1)}, \quad k = 1, \dots, r', \quad (23)$$

длиной s , начинающихся с вектор-матриц $L_k \in F_m$. Тогда если при $|m| \rightarrow \infty$

$$r' \gg r(m)|m|^{-\varepsilon}, \quad (24)$$

где ε – сколь угодно малое положительное число, $j_1, \dots, j_{s_1}$ – любое фиксированное подмножество индексов $j = 0, 1, \dots, s-1$ с условием

$$s_1 \gg \log |m|, \quad (25)$$

и постоянные в оценках (24) и (25) зависят только от q, g и $\tilde{\Lambda}_m$, то цепочки (23) можно разбить на две категории:

- а) “плохие”, которых мало: их общее количество оценивается $o(r')$;
- б) “хорошие”, обладающие свойством эргодичности; если k – индекс, отвечающий “хорошей” цепочке, то

$$\begin{aligned} r_k &= \#\left\{j = 1, \dots, s_1 \mid T^j L_k \in \Lambda_m, T^j L_k \equiv \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 \end{pmatrix} \pmod{g}\right\} \\ &\sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(g, m)} s_1, \end{aligned} \quad (26)$$

где λ_0 – гиперболическая мера области F_m приведения бинарных квадратичных форм;

$$\rho(g, m) = g^2 \prod_{p|g} \left(1 + \frac{\left(\frac{-m}{p}\right)}{p} \right)$$

– число решений сравнения (22); постоянные, входящие в асимптотическую формулу (26), зависят только от q , g и $\tilde{\Lambda}_m$.

Эргодическая теорема 1 непосредственно выводится из следующей “предварительной эргодической теоремы”, имеющей и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Q – целая примитивная матрица с нормой q , причем q , g и $2m$ попарно взаимно просты. Тогда в условиях и обозначениях теоремы 1 цепочки (23) можно разбить на две категории:

- а) “плохие”, количество которых оценивается $o(r')$;
- б) “хорошие”, обладающие свойством эргодичности:

$$r_k(j_1, \dots, j_{s_1}; Q) = \#\{j = j_v \mid v = 1, \dots, s_1, Q \setminus (u + T^j L_k), \\ T^j L_k \in \Lambda_m, T^j L_k \equiv L_0 \pmod{g}\} \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(g, m)} \frac{1}{\sigma_0(q)} s_1, \quad (27)$$

где $\sigma_0(q) = q \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ – число неассоциированных справа целых примитивных матриц с нормой q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [14]) проводится методом от противного и использует ключевую лемму, а также леммы 3, 5.

Теорема 1 выводится теперь из теоремы 2 с помощью соотношения

$$r_k = \sum_{i=1}^{\sigma_0(q)} r_k(j_1, \dots, j_{s_1}; Q^{(i)}),$$

где $Q^{(i)}$ принимает значения из набора попарно неассоциированных справа матриц с нормой q .

§ 4. Эргодическая теорема и теорема перемешивания для целых точек на изотропных гиперboloидах

В настоящем параграфе, обобщая результаты работы [14], мы строим потоки целых примитивных точек (x_1, x_2, x_3) на роде изотропных гиперboloидов $\Sigma_{f,t,m}$ общего вида

$$f_t(x_1, x_2, x_3) = m, \quad t = 1, \dots, h, \quad (28)$$

где h – число классов в роде G_f изотропной тернарной квадратичной формы f .

В работе [14] на число δ , характеризующее изотропную тернарную форму (см. соотношение (5)), налагается условие бесквадратности. Как следует из замечаний в конце работы [16], такое ограничение числа δ не является существенным. На самом деле умножение изотропной формы f на число δ , не являющееся бесквадратным, сводится к умножению формы f на бесквадратное

число. Именно, если $\delta = \delta_1 \delta_0^2$, где δ_1 – бесквадратное число, то для некоторой целой матрицы C имеем

$$\delta_1 \delta_0^2 f(x) = \delta_1 f(\delta_0 x) = f_0(C \delta_0 x) = \delta_0^2 f_0(Cx),$$

откуда получаем

$$\delta_1 f(x) = f_0(Cx).$$

Поэтому достаточно, чтобы δ было бесквадратным числом, особенно при изучении примитивных точек на гиперboloидах.

Пусть теперь $f = f_1, f_2, \dots, f_h$ – все представители классов рода G_f изотропной тернарной квадратичной формы. В силу (5) каждая из форм f_t , $t = 1, \dots, h$, представима в виде

$$\delta f_t(x_1, x_2, x_3) = f_0 \left(\sum_{i=1}^3 c_{1i}^{(t)} x_i, \sum_{i=1}^3 c_{2i}^{(t)} x_i, \sum_{i=1}^3 c_{3i}^{(t)} x_i \right), \quad (29)$$

где $c_{ij}^{(t)} \in \mathbb{Z}$, $\det(c_{ij}^{(t)}) = w \geq 1$, $t = 1, \dots, h$, при одном и том же δ . Поэтому мы будем строить поток $\chi_s(f, m; q, u)$ заданной длины s целых примитивных точек на поверхности гиперboloида (7) как линейное отображение потока точек (вектор-матриц) (23).

Рассмотрим отображения

$$W_t: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= c_{11}^{(t)} x_1 + c_{12}^{(t)} x_2 + c_{13}^{(t)} x_3, \\ \tilde{x}_2 &= c_{21}^{(t)} x_1 + c_{22}^{(t)} x_2 + c_{23}^{(t)} x_3, \\ \tilde{x}_3 &= c_{31}^{(t)} x_1 + c_{32}^{(t)} x_2 + c_{33}^{(t)} x_3, \end{aligned} \quad (31)$$

$t = 1, \dots, h$, (x_1, x_2, x_3) – точка на гиперboloиде (28), а $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ в силу (29) есть точка на простейшем гиперboloиде

$$f_0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \delta m, \quad (32)$$

при этом считаем, что $\text{НОД}(w, mq) = 1$.

Отображение W_t (см. [14]) при наших условиях переводит целые примитивные точки гиперboloида $\Sigma_{f_t, m}$ в целые примитивные точки простейшего гиперboloида (32). Обратное, вообще говоря, не верно. Однако если $W_t^{-1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ – целая примитивная точка гиперboloида $\Sigma_{f_t, m}$, а

$$(\tilde{x}'_1, \tilde{x}'_2, \tilde{x}'_3) \equiv (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \pmod{w}$$

– целая примитивная точка гиперboloида $\Sigma_{f_0, \delta m}$, то $W_t^{-1}(\tilde{x}'_1, \tilde{x}'_2, \tilde{x}'_3)$ – целая примитивная точка гиперboloида $\Sigma_{f_t, m}$.

Рассмотрим теперь совокупность E классов решений $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \pmod{w}$ сравнения

$$f_0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \equiv \delta m \pmod{w} \quad (33)$$

(число решений аналогичного ему сравнения было указано в замечании 1). При этом каждому значению $t = 1, \dots, h$ отвечает подмножество E_t классов $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \pmod{w}$ решений сравнения (33), соответствующих решениям сравнения $f_t(x_1, x_2, x_3) \equiv m \pmod{w}$ при отображении (30), заданном линейным преобразованием (31).

Следующее предложение будет использовано при построении потока целых примитивных точек на роде гиперboloидов (28).

ЛЕММА 6. Для множеств E_t , $t = 1, \dots, h$, имеют место соотношения

$$E_j \cap E_k = \emptyset, \quad j \neq k, \quad (34)$$

$$\bigcup_{t=1}^h E_t = E. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем (34). Допустим, что $E_j \cap E_k \neq \emptyset$, и тогда пусть $X = (x_1, x_2, x_3)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3)$ – решения соответственно сравнений

$$\begin{aligned} f_j(x_1, x_2, x_3) &\equiv m \pmod{w}, \\ f_k(y_1, y_2, y_3) &\equiv m \pmod{w}, \end{aligned}$$

где $f_j, f_k \in G_f$, $j \neq k$, и для некоторых целых матриц C_j и C_k третьего порядка выполнено сравнение

$$XC_j \equiv YC_k \pmod{w}. \quad (36)$$

Тогда для каждого простого $p \mid w$ существуют решения $Y_1 = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)})$, $Y_2 = (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, y_3^{(2)})$, например для второго квадратного сравнения, такие, что

$$YC_k \equiv Y_1C_k \equiv Y_2C_k \pmod{p} \quad (37)$$

и выполнено

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & y_3^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & y_3^{(2)} \end{pmatrix} \not\equiv 0 \pmod{p}. \quad (38)$$

Из (36)–(38) следует, что матрица $C_kC_j^{-1}$ целая. Значит, формы f_j и f_k эквивалентны, а это противоречит тому, что f_j и f_k – представители различных классов в роде G_f . Теперь с учетом (34) доказательство соотношения (35) проводится аналогично комбинаторному доказательству соответствующего утверждения в [6, с. 36–37]. Лемма доказана.

Соотношения (34) и (35) позволяют нам построить поток $\chi_s(m, G_f, u)$ заданной длины s целых примитивных представлений числа m родом G_f изотропной формы f , точнее, поток примитивных точек на наборе изотропных гиперboloидов (28), где целое число u удовлетворяет сравнению $u^2 + \delta m \equiv 0 \pmod{w}$.

Пусть $\chi_s(\delta m, q, u)$ – поток длины s целых примитивных точек $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ простейшего изотропного гиперboloида (32), где q – нечетное простое число, для которого $\left(\frac{-\delta m}{q}\right) = 1$. Каждой точке $\tilde{x}$ в силу леммы 6 взаимно однозначно

отвечают целое число t , $1 \leq t \leq h$, и целая примитивная точка $x = (x_1, x_2, x_3)$ такие, что

$$\delta t = \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 - \tilde{x}_2^2 = \delta f_t(x_1, x_2, x_3).$$

Тем самым поток $\chi_s(\delta t, q, u)$ (его построение было основано на преобразованиях подобия вектор-матриц второго порядка) однозначно индуцирует поток $\chi_s = \chi_s(m, G_f, u)$ на роде G_f , состоящий из цепочек вида

$$(x^{(1)}, f_{t_1}) \rightarrow (x^{(2)}, f_{t_2}) \rightarrow \dots \rightarrow (x^{(s)}, f_{t_s}), \quad (39)$$

где $(x^{(j)}, f_{t_j})$ взаимно однозначно отвечает точке $\tilde{x}^{(j)} = (\tilde{x}_1^{(j)}, \tilde{x}_2^{(j)}, \tilde{x}_3^{(j)})$, причем $f_{t_j}(x^{(j)}) = m$.

Для построенного таким образом потока $\chi_s(m, G_f, u)$ имеет место следующая эргодическая теорема, дающая полное обобщение результатов статей [4], [14].

ТЕОРЕМА 3. Пусть G_f – род примитивной изотропной тернарной квадратичной формы f , имеющий вид (5), где $c_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\det(c_{ij}) = w \geq 1$, $\delta \neq 0$ – целое число. Пусть $q \geq 3$ – простое число, $m \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{|m|} \notin \mathbb{Q}$; b_1, b_2, b_3 – целые числа, удовлетворяющие условиям

$$\text{НОД}(m, wq) = 1, \quad (40)$$

$$f(b_1, b_2, b_3) \equiv m \left(\bmod 8 \frac{w}{\delta} g \right), \quad \text{НОД}(b_1, b_2, b_3, 2) = 1, \quad (41)$$

$$\left(\frac{-\delta m}{q} \right) = 1. \quad (42)$$

Пусть $\Lambda_{f,m}$ – ограниченная квадратуемая область на поверхности гиперболоида (7) с f -гиперболической площадью $\lambda = \lambda(\Lambda_{f,m}) > 0$. Рассмотрим часть χ'_s потока $\chi_s(m, G_f, u)$ примитивных точек поверхности (7), состоящую из r' цепочек (39) длиной $s \gg \log |m|$.

Тогда если при $|m| \rightarrow \infty$ выполнено условие $r' \gg r(\delta m)|\delta m|^{-\varepsilon}$, где $r(\delta m)$ – число примитивных приведенных бинарных квадратичных форм с определителем δm , то цепочки

$$(x^{(k,1)}, f_{t_1^k}) \rightarrow (x^{(k,2)}, f_{t_2^k}) \rightarrow \dots \rightarrow (x^{(k,s)}, f_{t_s^k}), \quad k = 1, \dots, r', \quad (43)$$

можно разбить на две категории:

а) “хорошие” эргодические, для которых

$$r_k = r_k(\chi'_s; \Lambda_{f,m}; g, b_1, b_2, b_3) = \#\{j \mid j = 1, \dots, s, f_{t_j^{(k)}} = f, x^{(k,j)} \in \Lambda_{f,m}, \\ x^{(k,j)} \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod{g}\} \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(\delta f, \delta m, g)} s, \quad (44)$$

где $\rho(\delta f, \delta m, g)$ – число решений сравнения $\delta f(x_1, x_2, x_3) \equiv \delta m \pmod{g}$, λ_0 – полный f -гиперболический телесный угол на поверхности гиперболоида (7);

б) “плохие” в количестве $o(r')$, для которых не выполняется (43).

(Постоянные, входящие в символ асимптотической эквивалентности $\sim$, зависят только от q, g и $\tilde{\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{|m|}} \Lambda_{f,m}$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в работе [14], в силу соотношений (5) и (7) каждое представление числа m изотропной формой $f(x_1, x_2, x_3)$ дает некоторое представление числа δm простейшей формой f_0 , и, наоборот, каждое представление числа m формой f получается из некоторого представления числа δm формой f_0 (см. [20]).

Поэтому, следуя [14], рассматриваем линейное преобразование W_t , однозначно сопоставляющее каждой вещественной точке (x_1, x_2, x_3) гиперболоида $\Sigma_{f_t, m}$ точку $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ простейшего гиперболоида (32). При этом области $\Lambda_{f, m}$ на гиперболоиде (7) отвечает область $\tilde{\Lambda}_{f_0, \delta m}$ на гиперболоиде (32) с f_0 -гиперболическим телесным углом $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\tilde{\Lambda}_{f_0, \delta m})$. Следуя рассуждениям, приведенным в работе [14], получим, что целочисленное линейное преобразование W_t с $\det(c_{ij}^{(t)}) = w$ при введенных условиях переводит примитивную точку (x_1, x_2, x_3) в примитивную точку $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ гиперболоида (32), при этом множитель δ в соотношениях (5) и (29) должен быть бесквадратным числом. Таким образом, получается, что поток $\chi_s(m, G_f, u)$ индуцирован потоком $\chi_s(m, q, u)$, состоящим из цепочек примитивных вектор-матриц вида (23). Учитывая при этом вводные рассуждения, относящиеся к построению потока на роде G_f , и условия (40)–(42), в силу теоремы 1, пользуясь вектор-матрицами, получаем

$$\begin{aligned} r_k &= \#\{j \mid j = 1, \dots, s, f_{t_j^{(k)}} = f, x^{(k, j)} \in \Lambda_{f, m}, x^{(k, j)} \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod{g}\} \\ &\sim \#\{j \mid j = 1, \dots, s, \tilde{L}_k^{(j)} \in \tilde{\Lambda}_{f_0, \delta m}, \tilde{L}_k^{(j)} \equiv (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3) \pmod{g}\} \\ &\sim \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(\delta f, \delta m, g)} s = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(\delta f, \delta m, g)} s. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\text{НОД}(g, m) = 1$, то имеем $\rho(\delta f, \delta m, g) = \rho(f, m, g)$, где $\rho(f, m, g)$ – число решений сравнения $f(x_1, x_2, x_3) \equiv m \pmod{g}$. Величины $\rho(f, m, g)$ и $\rho(\delta f, \delta m, g)$ могут быть выражены через величину $s(f, m, g, (c_{ij}))$, определенную в формулировке теоремы 4.1 статьи [11].

Из эргодической теоремы 3 можно получить следующую теорему перемешивания для целых примитивных точек изотропного гиперболоида (7), отображая поток $\chi_s(m, G_f, u)$ на поток $\chi_s(\delta m, q, u)$ целых примитивных точек гиперболоида (32).

ТЕОРЕМА 4. В обозначениях и условиях теоремы 3 индексы $j = 1, \dots, s$ в цепочках (43) можно разбить на две категории:

а) “хорошо перемешивающие”, для которых

$$\begin{aligned} r^{(j)}(\chi'_s; \Lambda_{f, m}; g, b_1, b_2, b_3) &= \#\{k = 1, \dots, r' \mid f_{t_j^{(k)}} = f, x^{(k, j)} \in \Lambda_{f, m}, \\ x^{(k, j)} &\equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod{g}\} \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(\delta f, \delta m, g)} r'; \end{aligned} \quad (45)$$

б) “плохие” в количестве $o(s)$.

(Постоянные, входящие в (45), зависят только от q, g и $\tilde{\Lambda}$.)

Теорема 4 о перемешивании, в свою очередь, непосредственно приводит к следующей теореме о равномерном распределении целых примитивных точек (x_1, x_2, x_3) на изотропном гиперболоиде (7).

Фиксируя в теореме 4 “хорошо перемешивающий” индекс j , применяя ее к потоку (43) и множеству $\mathcal{Z}_{f,m}$ примитивных точек гиперboloида (7), отображающихся в область приведения на простейшем гиперboloида (32), и обозначая при этом $r(f, m) = \#\mathcal{Z}_{f,m}$, мы получаем следующую теорему о равномерном распределении целых точек на изотропном гиперboloида (7).

ТЕОРЕМА 5. *В условиях и обозначениях теорем 3 и 4 пусть $r(\Lambda_{f,m}; g, b_1, b_2, b_3)$ – число всех целых примитивных точек (x_1, x_2, x_3) на изотропном гиперboloида (7), удовлетворяющих условиям*

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_{f,m}, \quad (x_1, x_2, x_3) \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod{g}.$$

Тогда при $|m| \rightarrow \infty$

$$r(\Lambda_{f,m}; g, b_1, b_2, b_3) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\rho(\delta f, \delta m, g)} r(f, m), \quad (46)$$

где $\lambda = \lambda(\Lambda_{f,m}) > 0$ – f -гиперболическая мера (площадь) области $\Lambda_{f,m}$; λ_0 – полный f -гиперболический телесный угол на поверхности гиперboloида (7); $\rho(\delta f, \delta m, g)$ – число решений сравнения $\delta f(x_1, x_2, x_3) \equiv \delta m \pmod{g}$; постоянные, входящие в асимптотическую формулу (46), зависят только от q, g, δ и $\tilde{\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{|m|}} \Lambda_{f,m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится при использовании замечания 2 (см. также [4]).

Отображая поток (43) на поток вектор-матриц (23) с нормой δm и получив теорему перемешивания по обычной схеме, а из нее, в свою очередь, теорему о равномерном распределении целых примитивных точек на поверхности простейшего гиперboloида (32), мы с помощью приема, использованного при доказательстве теоремы 4.1 статьи [11], получаем следующий вариант теоремы 5 о равномерном распределении целых примитивных точек.

ТЕОРЕМА 6. *В условиях теорем 3 и 4 пусть $r(\Lambda_{f,m}; g, b_1, b_2, b_3)$ – число всех целых примитивных точек (x_1, x_2, x_3) на изотропном гиперboloида (7), удовлетворяющих условиям*

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_{f,m}, \quad (x_1, x_2, x_3) \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod{g}.$$

Тогда при $|m| \rightarrow \infty$

$$r(\Lambda_{f,m}; g, b_1, b_2, b_3) \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{s(\delta f, \delta m, g, (c_{ij}))}{(wg)^2 \prod_{p|wg} \left(1 + \frac{(-\frac{\delta m}{p})}{p}\right)} r(\delta m), \quad (47)$$

где $s(\delta f, \delta m, g, (c_{ij}))$ равно числу различных решений $(x_1, x_2, x_3) \pmod{w}$ сравнения

$$\delta f(gx_1 + b_1, gx_2 + b_2, gx_3 + b_3) \equiv \delta m \pmod{wg},$$

для которых точки

$$\left(\sum_{i=1}^3 c_{1i} x_i, \sum_{i=1}^3 c_{2i} x_i, \sum_{i=1}^3 c_{3i} x_i \right)$$

различны $(\bmod\ wg)$, $r(\delta t)$ – число приведенных примитивных бинарных квадратичных форм с определителем δt ; постоянные, входящие в (47), зависят только от q, g, δ и Λ .

Теоремы 5 и 6 полностью решают вопрос об асимптотике числа примитивных представлений целых чисел изотропной тернарной квадратичной формой произвольного вида как по областям на соответствующей гиперболической поверхности, так и по классам вычетов по заданному модулю.

Представляет большой интерес обобщение полученных результатов на алгебраические числовые поля; но это будет связано с некоторыми трудностями однозначного разложения целых матриц второго порядка на множители над алгебраическим числовым полем.

Список литературы

1. Линник Ю. В., *Эргодические свойства алгебраических полей*, Изд-во ЛГУ, Л., 1967.
2. Скубенко Б. Ф., “Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперboloиде и эргодические теоремы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **26**:5 (1962), 721–752.
3. Малышев А. В., “О представлении целых чисел положительными квадратичными формами”, *Тр. МИАН СССР*, **65** (1962), 1–212.
4. Малышев А. В., “О применении дискретного эргодического метода в аналитической арифметике неопределенных тернарных квадратичных форм”, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **93** (1980), 5–24.
5. Малышев А. В., Пачев У. М., “О представлении целых чисел положительными тернарными квадратичными формами (новый вариант дискретного эргодического метода)”, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **82** (1979), 33–87.
6. Белова Н. Н., Малышев А. В., “Эргодические свойства целых точек на эллипсоидах рода $g[\Omega, 1]$ ”, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **106** (1981), 17–51.
7. Peters M., “Darstellungen durch definite ternare quadratische Formen”, *Acta arithm.*, **34**:1 (1977), 57–80.
8. Тетерин Ю. Г., “О представлении целых чисел положительными тернарными квадратичными формами”, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **121** (1983), 117–156.
9. Тетерин Ю. Г., “Асимптотическая формула для числа представлений вполне положительными тернарными квадратичными формами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:2 (1985), 393–426.
10. Линник Ю. В., “Асимптотическое распределение приведенных бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского”, *Вестн. ЛГУ. Серия матем., физ., хим.*, **2**:1 (1955), 3–23; **5**:2, 3–32; **8**:3, 15–27.
11. Пачев У. М., “О распределении целых точек на некоторых двуполостных гиперboloидах”, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **93** (1980), 87–141.
12. Малышев А. В., Нгуен Нгор Гой, “О распределении целых точек на некоторых однополостных гиперboloидах”, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **121** (1983), 83–93.
13. Карпов А. Н., “О представлении целых чисел изотропными квадратичными формами”, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **151** (1986), 66–67.
14. Пачев У. М., “Эргодические теоремы и теоремы перемешивания для потоков целых точек на некоторых изотропных гиперboloидах”, *Актуальные проблемы теории чисел*, Изд-во МГУ, М., 2002, 133–151.
15. Голубева Е. П., “О представлении больших чисел тернарными квадратичными формами”, *ДАН СССР*, **191**:3 (1970), 519–521.

16. Голубева Е. П., “Асимптотическое распределение целых точек, принадлежащих заданным классам вычетов, на гиперboloидах специального вида”, *Матем. сб.*, **123**:4 (1984), 510–533.
17. Голубева Е. П., “Представление больших чисел тернарными квадратичными формами”, *Матем. сб.*, **129**:1 (1986), 40–54.
18. Duke W., “Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maas forms”, *Invent. math.*, **92**:1 (1988), 73–90.
19. Малышев А. В., Широков Б. М., “Новое доказательство ключевой леммы дискретного эргодического метода для вектор-матриц второго порядка”, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астр.*, 1991, № 2, 34–40.
20. Касселс Дж., *Рациональные квадратичные формы*, Мир, М., 1982.
21. Малышев А. В., Пачев У. М., “Об арифметике матриц второго порядка”, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **93** (1980), 41–86.
22. Пачев У. М., “Об уточнении ключевой леммы дискретного эргодического метода для вектор-матриц второго порядка”, *Чебышевский сборник*, **5**:2 (10) (2004), 89–97.
23. Подсыпанин Е. В., “Распределение целых точек на детерминантной поверхности”, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **93** (1980), 30–40.
24. Пачев У. М., “Эргодические свойства потоков классов положительных бинарных квадратичных форм в гауссовых родах”, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **236** (1997), 149–161.

У. М. ПАЧЕВ (U. M. PACHEV)
Кабардино-Балкарский ордена Дружбы народов
государственный университет
E-mail: Urusbi@rambler.ru

Поступило в редакцию
19.04.2005