Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Городецкий, Регулярность центральных слоев частично гиперболических множеств и приложения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 6, 19–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/im678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 11:00:30

УДК 517.938

А. С. Городецкий

Регулярность центральных слоев частично гиперболических множеств и приложения

Рассматриваются частично гиперболические отображения, близкие к прямому произведению гиперболического на тождественное, и доказывается гёльдерова зависимость центральных слоев такого отображения в C^r -метрике от точки в базе. Использование этого результата позволяет построить открытую область диффеоморфизмов, обладающих довольно необычными свойствами (имеющих транзитивные множества с периодическими точками разных индексов, орбиты с нулевым показателем Ляпунова). Статья завершает серию работ, начатых Ю. С. Ильяшенко и автором.

Библиография: 26 наименований.

§ 1. Введение

Рассмотрим отображение $S: N \rightarrow N$ многообразия N , обладающее локально максимальным гиперболическим множеством $\Lambda \subset N$. Пусть M – гладкое замкнутое многообразие. Свойства малых возмущений отображения $S \times \text{id}_M: N \times M \rightarrow N \times M$ исследовались во многих работах (см., например, [3], [13], [19], [20], [22], [25]). В настоящей статье мы показываем, что центральные слои возмущенного отображения гёльдерово зависят в C^r -метрике от точки в базе. Затем мы используем этот результат, чтобы закончить доказательство следующей теоремы, анонсированной Ю. С. Ильяшенко и автором в [9], [10].

ТЕОРЕМА А. *Для данного конечного интервала $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, и замкнутого многообразия M , $\dim M \geq 3$, найдется такая область $U \subset \text{Diff}^2(M)$, что любой диффеоморфизм $f \in U$ имеет локально максимальное инвариантное множество $\Delta \subset M$ такое, что:*

- (i) *существуют такие два числа l_1 и $l_2 = l_1 + 1$, что гиперболические периодические орбиты с устойчивыми многообразиями размерности l_i плотны в Δ ;*
- (ii) *для любого $\lambda \in I$ найдется плотная в Δ орбита с одним из промежуточных показателей Ляпунова, равным λ .*

ДОБАВЛЕНИЕ. *В качестве множества Δ в теореме А при $\dim M \geq 4$ можно взять некоторый частично гиперболический аттрактор.*

Свойство (i) теоремы А имеет дальнейшие следствия (см. [8], [17]). Отличными от наших методами свойство (i) для некоторых частично гиперболических диффеоморфизмов, близких к прямому произведению, было доказано в [3].

Работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 02-01-00482, 02-01-22002) и CRDF-RM1-2358.

Доказательство теоремы А основано на свойствах косых произведений над подковой и соленоидом [10] и на следующей теореме.

ТЕОРЕМА В. Пусть отображение $\mathfrak{F}: N \times M \rightarrow N \times M$, $\mathfrak{F} = S \times \text{id}_M$, имеет класс гладкости C^{r+1} , $0 \leq r < \infty$. Тогда для любого C^{r+1} -диффеоморфизма $\mathfrak{G}$, достаточно C^{r+1} -близкого к $\mathfrak{F}$, существуют инвариантное множество Δ и гомеоморфизм $\Psi: \Lambda \times M \rightarrow \Delta$. Более того, если $p_1: \Lambda \times M \rightarrow \Lambda$ – проекция на первый сомножитель, то отображение $\Phi = p_1 \circ \Psi^{-1}$, $\Phi: (\Delta, \mathfrak{G}) \rightarrow (\Lambda, S)$ является полусопряжением, слои $\Phi^{-1}(x)$ C^{r+1} -гладкие и гёльдерово зависят от точки $x \in \Lambda$ в C^r -метрике. Показатель и константа в условии Гёльдера могут быть выбраны одними и теми же для всех возмущений в малой C^{r+1} -окрестности отображения $\mathfrak{F}$.

В случае, когда S – диффеоморфизм Аносова на $\mathbb{T}^n$ и $M = \mathbb{T}^k$, этот результат (иными методами) был получен в [18].

Другие многочисленные результаты о гёльдеровых структурах, связанных с равномерной и частичной гиперболичностью, были получены в работах [2], [6], [7], [12], [21], [23].

В. Клепцын и М. Нальский [16], продолжая исследования, проведенные в работе [11], использовали теорему В для построения C^1 -открытого множества диффеоморфизмов с негиперболическими инвариантными эргодическими мерами.

Настоящая статья построена следующим образом. В § 2 напомним понятие внутренне гиперболического отображения и доказываем, что сопряжение двух внутренне гиперболических отображений должно быть гёльдеровым. В § 3 рассматривается малое возмущение прямого произведения гиперболического отображения на тождественное, пространство центральных слоев, снабженное C^0 -метрикой, и доказываем, что индуцированное на этом пространстве отображение является внутренне гиперболическим. Затем в § 4 определяем C^r -метрику в пространстве центральных слоев и доказываем внутреннюю гиперболичность индуцированного отображения в соответствии с C^r -метрикой. Вместе с результатами § 2 (теоремами 2.2 и 2.3) отсюда получаем теорему В. Наконец, в § 5 применяем теорему В и результаты относительно свойств косых произведений специального вида, полученные Ю. С. Ильиашенко и автором в работе [10], для исследования свойств некоторых частично гиперболических отображений. Это позволяет получить доказательство теоремы А.

§ 2. Внутренне гиперболические гомеоморфизмы

В настоящем параграфе докажем теорему 2.2 (аналог теоремы 5 из [9]), которая будет использована в § 3 для доказательства гёльдеровой зависимости в C^r -норме центральных слоев частично гиперболических инвариантных множеств от точки в базе. В п. 2.1 приводятся некоторые известные факты о локально максимальных гиперболических множествах [8, гл. 6 и гл. 18]. В п. 2.2 приведены определение и некоторые свойства внутренне гиперболических гомеоморфизмов [1], [5]. Наконец, в п. 2.3 даны формулировка и доказательство основного результата этого параграфа – теоремы 2.2.

2.1. Гёльдеровость сопряжений гиперболических множеств. Напомним определение локально максимального гиперболического множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Инвариантное гиперболическое множество Λ отображения $S: N \rightarrow N$ называется *локально максимальным*, если существует такая окрестность U множества Λ , что любое S -инвариантное множество в U , содержащее Λ , совпадает с Λ .

Пусть $\Lambda \subset N$ – локально максимальное гиперболическое множество отображения $S: N \rightarrow N$. Пусть $d(\cdot, \cdot)$ – метрика на N .

Напомним стандартные обозначения:

$$x \in W^u(y) \iff d(S^{-n}(x), S^{-n}(y)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (2.1)$$

$$x \in W^s(y) \iff d(S^n(x), S^n(y)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (2.2)$$

$$W_\varepsilon^u(x) = \{z \mid z \in W^u(x), d(f^{-n}(z), f^{-n}(x)) \leq \varepsilon \forall n \in \mathbb{Z}^+\}, \quad (2.3)$$

$$W_\varepsilon^s(x) = \{z \mid z \in W^s(x), d(f^n(z), f^n(x)) \leq \varepsilon \forall n \in \mathbb{Z}^+\}. \quad (2.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Инвариантное гиперболическое множество Λ отображения $S: N \rightarrow N$ обладает *локальной структурой прямого произведения*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что выполнено следующее. Если $d(x, y) < \delta$, то пересечение $W_\varepsilon^u(x) \cap W_\varepsilon^s(y)$ состоит из единственной точки $w(x, y)$, которая принадлежит Λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 [15, теорема 18.4.1]. *Инвариантное гиперболическое множество Λ локально максимально тогда и только тогда, когда оно обладает локальной структурой прямого произведения.*

ТЕОРЕМА 2.1 [15, теорема 19.1.2]. *Пусть Λ и Λ' – локально максимальные гиперболические множества диффеоморфизмов S и S' соответственно и $h: \Lambda \rightarrow \Lambda'$ – топологическое сопряжение, $h = S'hS^{-1}$. Тогда h и h^{-1} гёльдеровы.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Теорема 2.1 впервые была доказана Д.В. Аносовым для диффеоморфизмов, впоследствии получивших название диффеоморфизмов Аносова.

2.2. Внутренне гиперболические гомеоморфизмы: определение и основные свойства. Здесь мы напоминаем понятие внутренне гиперболического гомеоморфизма (в качестве примера можно рассмотреть ограничение диффеоморфизма на свое локально максимальное гиперболическое множество). Этот объект был введен В.М. Алексеевым и М. Якобсоном в работе [1, § 9] под названием *$A^\#$ -гомеоморфизм* для аксиоматизации условий, при которых можно построить марковское разбиение и символическую динамику для гомеоморфизма метрического компакта. Они модифицировали аксиому A^* , введенную Р. Боуэном в [5]. Здесь это понятие позволяет нам доказать обобщение теоремы 2.1 (а именно, теорему 2.2).

Пусть (Λ, d) – компактное метрическое пространство, $S: \Lambda \rightarrow \Lambda$ – липшицев морфизм (т.е. S – гомеоморфизм, S и S^{-1} липшицевы). Определим множества $W^u(x)$, $W^s(x)$, $W_\varepsilon^u(x)$, $W_\varepsilon^s(x)$ формулами (2.1)–(2.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Липшицев морфизм S компактного метрического пространства (Λ, d) называется *внутренне гиперболическим*, если существуют такие $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что выполнено следующее:

(ИН1) если $d(x, y) < \delta$, то существует единственная точка $w = w(x, y) \in \Lambda$ такая, что $w \in W_\varepsilon^u(x) \cap W_\varepsilon^s(y)$;

(ИН2) существует константа $0 < \lambda < 1$ такая, что

$$y \in W_\varepsilon^s(x) \implies d(S^n(x), S^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

$$y \in W_\varepsilon^u(x) \implies d(S^{-n}(x), S^{-n}(y)) \leq \lambda^n d(x, y), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Простейшими примерами являются локально максимальные гиперболические множества (с ляпуновской метрикой; см. (3.1) и (3.1')) и сдвиги Бернулли.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Формально наше определение отличается от определения $A^\#$ -гомеоморфизма, данного В.М. Алексеевым и М. Якобсоном, поскольку мы не требуем непрерывности отображения $(x, y) \rightarrow w(x, y)$, но предполагаем липшицевость гомеоморфизма. Ниже мы покажем, что непрерывность $w(x, y)$ в этом случае следует из остальных условий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $S: \Lambda \rightarrow \Lambda$ – внутренне гиперболическое отображение. Тогда оно является разделяющим, т.е. существует такая константа $\gamma > 0$ (постоянная разделения), что если $d(S^n(x), S^n(y)) \leq \gamma$ для некоторых $x, y \in \Lambda$ и всех $n \in \mathbb{Z}$, то $x = y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $d(S^n(x), S^n(y)) \leq \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, имеем $y \in W_\varepsilon^s(x)$ и $y \in W_\varepsilon^u(x)$. Из свойства (ИН1) следует, что $x = w(x, x)$ – единственная точка пересечения $W_\varepsilon^s(x)$ и $W_\varepsilon^u(x)$, поэтому $x = y$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть отображение $S: \Lambda \rightarrow \Lambda$ является внутренне гиперболическим. Возьмем ε, δ и λ , как в определении 2.3. Для любых точек $x, y \in \Lambda$ и последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \Lambda$ таких, что $d(x, y) < \delta$ и $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow +\infty$, мы имеем $w(x_n, y_n) \rightarrow w(x, y)$, т.е. отображение $w: (x, y) \mapsto W_\varepsilon^u(x) \cap W_\varepsilon^s(y)$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $w_n = w(x_n, y_n) \in \Lambda$. Если $w_n \not\rightarrow w(x, y)$, то в силу компактности Λ мы можем выбрать такую подпоследовательность w_{n_k} , что $\lim_{k \rightarrow \infty} w_{n_k} = w' \neq w(x, y)$. Покажем, что $w' \in W_\varepsilon^s(y)$. Действительно, $w_n \in W_\varepsilon^s(y_n) \implies d(y_n, w_n) \leq \varepsilon$, поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{n_k}, w_{n_k}) = d(y, w') \leq \varepsilon.$$

Теперь покажем, что для всех $l \geq 1$ выполнено $d(S^l(y), S^l(w')) \leq \varepsilon$. Пусть P – константа Липшица для S . Тогда существует такое $N = N(l)$, что $d(y, y_N) < \frac{1-\lambda^l}{2P^l} \varepsilon$ и $d(w', w_N) < \frac{1-\lambda^l}{2P^l} \varepsilon$. Поскольку $d(S^l(y_N), S^l(w_N)) \leq \lambda^l d(y_N, w_N) \leq \lambda^l \varepsilon$, мы имеем

$$\begin{aligned} d(S^l(y), S^l(w')) &\leq d(S^l(y), S^l(y_N)) + d(S^l(y_N), S^l(w_N)) + d(S^l(w_N), S^l(w')) \\ &\leq P^l \frac{1-\lambda^l}{2P^l} \varepsilon + \lambda^l \varepsilon + P^l \frac{1-\lambda^l}{2P^l} \varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

По определению отсюда следует, что $w' \in W_\varepsilon^s(y)$.

Аналогично имеем $w' \in W_\varepsilon^u(x)$. Но по условию (ИН1) существует только одна точка в пересечении $W_\varepsilon^u(x) \cap W_\varepsilon^s(y)$, и поэтому $w' = w(x, y)$. Предложение доказано.

2.3. Гёльдеровость сопряжений: внутренне гиперболический случай. Сформулируем аналог теоремы 2.3 для внутренне гиперболических отображений.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть Λ и Λ' – компактные метрические пространства, липшицеморфизмы $S: \Lambda \rightarrow \Lambda$ и $S': \Lambda' \rightarrow \Lambda'$ внутренне гиперболически и $h: \Lambda \rightarrow \Lambda'$ – топологическое сопряжение, $h = S'hS^{-1}$. Тогда h и h^{-1} гёльдеровы.

Необходимо также иметь возможность оценивать показатель Гёльдера такого сопряжения. Это обеспечивается следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть Λ и Λ' – компактные метрические пространства, липшицеморфизмы $S: \Lambda \rightarrow \Lambda$ и $S': \Lambda' \rightarrow \Lambda'$ внутренне гиперболически с константами λ и λ' соответственно и $h: \Lambda \rightarrow \Lambda'$ – топологическое сопряжение, $h = S'hS^{-1}$. Пусть P – константа Липшица для S и Q – константа Липшица для S^{-1} . Пусть для некоторых $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$ выполнены неравенства

$$\lambda P^\alpha < 1, \quad \lambda Q^\alpha < 1, \quad \lambda' P^{\alpha'} < 1, \quad \lambda' Q^{\alpha'} < 1.$$

Тогда сопряжение h гёльдерово с показателем Гёльдера, равным $\alpha\alpha'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство сходно с доказательством классической теоремы 2.1 (мы следуем идеям, использованным в [15, гл. 19]). Единственная проблема состоит в том, что мы не можем использовать равномерную трансверсальность устойчивых и неустойчивых многообразий. Вместо этого мы применяем лемму 2.2.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\alpha > 0$. Существует такая константа $K > 0$, $K = K(\alpha)$, что для любых $a > 0$, $b > 0$ выполнено следующее неравенство:

$$(a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} \leq K(a + b).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\alpha > 0$ функция $\frac{(1+x)^\alpha}{1+x}$ ограничена при $x \geq 0$. Это дает требуемое неравенство после подстановки $x = \frac{b}{a}$.

ЛЕММА 2.2. Пусть отображение $S: \Lambda \rightarrow \Lambda$ внутренне гиперболично с константой λ . Пусть P – константа Липшица для S и Q – константа Липшица для S^{-1} . Пусть для некоторого $\alpha > 0$ выполнены неравенства $\lambda P^\alpha < 1$, $\lambda Q^\alpha < 1$. Тогда существует такое $L > 1$, что если $w = w(x, y) \in W_\varepsilon^u(x) \cap W_\varepsilon^s(y)$, то

$$d(x, w) + d(w, y) \leq Ld^\alpha(x, y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.2 величина ε – постоянная разделения для отображения S . Существует $L_1 \geq 1$ такое, что если $d(x, y) > \varepsilon$, то $\frac{d(x, w) + d(w, y)}{d^\alpha(x, y)} \leq L_1$. Покажем, что утверждение леммы выполнено для $L = 2L_1$.

Если $w(x, y) = x$ или $w(x, y) = y$, то утверждение леммы очевидно. В противном случае $d(S^k(x), S^k(y)) \geq \varepsilon$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Оценим $d(x, w)$, используя (ИН2) и неравенство $\lambda P^\alpha \leq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} d(x, w) &\leq \lambda^k d(S^k(x), S^k(w)) \\ &\leq \lambda^k L_1 d^\alpha(S^k(x), S^k(y)) \leq \lambda^k L_1 P^{k\alpha} d^\alpha(x, y) \leq L_1 d^\alpha(x, y). \end{aligned}$$

Аналогично, $d(w, y) \leq L_1 d^\alpha(x, y)$.

Таким образом, $d(x, w) + d(w, y) \leq 2L_1 d^\alpha(x, y) \leq Ld^\alpha(x, y)$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть Λ, Λ' – метрические пространства. Отображение $h: \Lambda \rightarrow \Lambda$ называется *локально гёльдеровым с показателем α* , если существуют такие $\gamma > 0$ и $C > 0$, что

$$d_\Lambda(x, y) < \gamma \implies d_{\Lambda'}(h(x), h(y)) \leq C d_\Lambda^\alpha(x, y).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть Λ, Λ' – компактные метрические пространства. Пусть отображение $h: \Lambda \rightarrow \Lambda$ локально гёльдерово с показателем α . Тогда оно гёльдерово с тем же показателем.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В предложении 2.4 показатель α может быть и больше 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.4. По определению 2.4 существуют такие $\gamma > 0$ и $C > 0$, что если $d_\Lambda(x, y) < \gamma$, то $d_{\Lambda'}(h(x), h(y)) \leq C d_\Lambda^\alpha(x, y)$. Пусть $R = \max(C, \gamma^{-\alpha} \text{diam } \Lambda')$.

Теперь если $d_\Lambda(x, y) < \gamma$, то $d_{\Lambda'}(h(x), h(y)) \leq C d_\Lambda^\alpha(x, y) \leq R d_\Lambda^\alpha(x, y)$. Но если $d_\Lambda(x, y) \geq \gamma$, то

$$d_{\Lambda'}(h(x), h(y)) \leq \text{diam } \Lambda' \leq (\gamma^{-\alpha} \text{diam } \Lambda') \gamma^\alpha \leq R d_\Lambda^\alpha(x, y).$$

Итак, отображение h гёльдерово с показателем α (и константой R).

ЛЕММА 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Предположим, что существует такая константа $K_1 > 0$, что для любых $x, y \in \Lambda$, $y \in W_\varepsilon^u(x)$ или $y \in W_\varepsilon^s(x)$, выполнено неравенство $d(h(x), h(y)) \leq K_1 d^{\alpha'}(x, y)$. Тогда отображение h локально гёльдерово с показателем $\alpha\alpha'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.1 и леммы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} d(h(x), h(y)) &\leq d(h(x), h(w)) + d(h(w), h(y)) \leq K_1(d^{\alpha'}(x, w) + d^{\alpha'}(w, y)) \\ &\leq K^{\alpha'} K_1(d(x, w) + d(w, y))^{\alpha'} \leq K^{\alpha'} K_1 L^{\alpha'} d^{\alpha\alpha'}(x, y). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.3. Достаточно показать, что h гёльдерово отдельно вдоль W_ε^u и вдоль W_ε^s . Действительно, тогда по лемме 2.3 следует, что отображение h локально гёльдерово с показателем $\alpha\alpha'$, а по предложению 2.4 это эквивалентно гёльдеровости с тем же показателем.

Поскольку Λ компактно, отображение h равномерно непрерывно. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$. Существует такое $\delta_0 > 0$, что если $d(x, y) < \delta_0$, то выполнено $d(h(x), h(y)) < \varepsilon_0$.

Заметим, что из (2.1) и (2.2) следует, что если $x \in W^u(y)$, то $h(x) \in W^u(h(y))$, и если $x \in W^s(y)$, то $h(x) \in W^s(h(y))$.

Теперь пусть $x \in W^u(y)$ и $d(x, y) = d < \delta_0$. Существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $d(S^n(x), S^n(y)) \leq P^n d < \delta_0 \leq P^{n+1} d$. Следовательно,

$$d(h(S^n(x)), h(S^n(y))) < \varepsilon_0,$$

и, используя неравенство $\lambda' P^{\alpha'} < 1$, мы имеем

$$\begin{aligned} d(h(x), h(y)) &= d(S'^{-n} h(S^n(x)), S'^{-n} h(S^n(y))) \leq \lambda'^n \varepsilon_0 = \lambda'^n \delta_0^{\alpha'} (\varepsilon_0 / \delta_0^{\alpha'}) \\ &\leq (\lambda' P^{\alpha'})^n P^{\alpha'} (\varepsilon_0 / \delta_0^{\alpha'}) d^{\alpha'} < [P^{\alpha'} (\varepsilon_0 / \delta_0^{\alpha'})] d^{\alpha'}(x, y). \end{aligned}$$

Доказательство гёльдеровости h вдоль W_ε^s аналогично (нужно заметить, что h сопрягает S^{-1} и S'^{-1} , и воспользоваться неравенством $\lambda' Q^{\alpha'} < 1$). Теорема доказана.

§ 3. Внутренняя гиперболичность отображения, индуцированного в пространстве центральных слоев с C^0 -метрикой

В настоящем и следующем параграфах мы доказываем теорему В. Для этого мы рассматриваем пространство центральных слоев как метрическое пространство. Отдельный слой является точкой, и метрика задана C^r -расстоянием между слоями. Оказывается, что при этом определенное ниже индуцированное отображение является внутренне гиперболическим (теорема 3.2) и применение теоремы 2.3 немедленно доказывает теорему В.

3.1. Гладкие возмущения прямых произведений и их инвариантные множества. Следующее утверждение есть частный случай теорем 6.1, 6.8 и 7.1 из [13].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть отображение $S: N \rightarrow N$ многообразия N имеет класс гладкости C^{r+1} , $0 \leq r < \infty$, и обладает локально максимальным гиперболическим множеством $\Lambda \subset N$. Пусть $U \subset N$ – такая окрестность Λ , что $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} S^n(U)$. Пусть M – замкнутое многообразие. Рассмотрим отображение $\mathfrak{F}: N \times M \rightarrow N \times M$, $(x, \varphi) \mapsto (S(x), \varphi)$. Тогда для любого C^{r+1} -диффеоморфизма $\mathfrak{G}$, достаточно C^{r+1} -близкого к $\mathfrak{F}$, выполнено следующее:

- (i) существуют инвариантное множество $\Delta \subset U \times M$ и гомеоморфизм $\Psi: \Lambda \times M \rightarrow \Delta$;
- (ii) если $p_1: \Lambda \times M \rightarrow \Lambda$ – проекция на первый сомножитель, то отображение $\Phi = p_1 \circ \Psi^{-1}$, $\Phi: (\Delta, \mathfrak{G}) \rightarrow (\Lambda, S)$, является полусопряжением;
- (iii) центральные слои $\Phi^{-1}(x)$, $x \in \Lambda$, являются C^{r+1} -гладкими и C^{r+1} -стремятся к центральным слоям отображения $\mathfrak{F}$ (т.е. к $\{x\} \times M$), когда $\mathfrak{G}$ стремится к $\mathfrak{F}$ в C^{r+1} -топологии;
- (iv) локальные центрально-устойчивые и центрально-неустойчивые многообразия $\mathfrak{G}$, а также локальные сильно устойчивые и сильно неустойчивые многообразия C^{r+1} -стремятся к соответствующим многообразиям $\mathfrak{F}$, когда $\mathfrak{G}$ стремится к $\mathfrak{F}$ в C^{r+1} -топологии.

Докажем следующее добавление к теореме 3.1

ТЕОРЕМА В'. В условиях теоремы 3.1 центральные слои $\Phi^{-1}(x)$ C^{r+1} -диффеоморфизма $\mathfrak{G}$, достаточно C^{r+1} -близкого к $\mathfrak{F}$, гёльдерово зависят от точки $x \in \Lambda$ в C^r -метрике. Показатель и константа в условии Гёльдера могут быть выбраны одними и теми же для всех возмущений из малой C^{r+1} -окрестности отображения $\mathfrak{F}$.

Обозначим через $\mathfrak{L}^r$ метрическое пространство всех центральных слоев отображения $\mathfrak{G}$ с C^r -метрикой (которая определяется ниже). Отдельный слой $\Phi^{-1}(x)$ является одной точкой в $\mathfrak{L}^r$. Заметим, что $\mathfrak{G}$ отображает слой в слой, поэтому $\mathfrak{G}$ индуцирует корректно определенное отображение $\mathfrak{g}: \mathfrak{L}^r \rightarrow \mathfrak{L}^r$. Для доказательства теоремы В' мы покажем, что отображение $\mathfrak{g}$ внутренне гиперболично. Мы также покажем, что системы $(\Lambda, S|_\Lambda)$ и $(\mathfrak{L}^r, \mathfrak{g})$ сопряжены. После этого применение теоремы 2.3 немедленно дает теорему В'.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть отображение $S: N \rightarrow N$ имеет локально максимальное гиперболическое множество с константой λ (т.е. выполнены (2.5) и (2.6)). Пусть отображение $\mathfrak{F}: N \times M \rightarrow N \times M$, $(x, \varphi) \mapsto (S(x), \varphi)$,

имеет класс гладкости C^{r+1} , $1 \leq r < \infty$. Пусть $\lambda' > \lambda$. Тогда для любого C^{r+1} -дiffeоморфизма $\mathfrak{G}$, достаточно C^{r+1} -близкого к $\mathfrak{F}$, отображение $\mathfrak{g}: \mathfrak{L}^r \rightarrow \mathfrak{L}^r$, индуцированное в пространстве центральных слоев, является внутренне гиперболическим с константой сжатия λ' и системы $(\Lambda, S|_\Lambda)$ и $(\mathfrak{L}^r, \mathfrak{g})$ сопряжены.

Мы докажем теорему 3.2 индукцией по r . Оставшаяся часть этого параграфа содержит доказательство базы индукции. В следующем параграфе мы проведем шаг индукции.

3.2. База индукции: C^0 -метрика. Отображение $S: N \rightarrow N$ имеет локально максимальное множество Λ . В малой окрестности $U(\Lambda)$ существует такое разложение $T_{U(\Lambda)}N = E^s \oplus E^u$, которое вдоль устойчивого распределения сжимает дифференциал отображения S , а вдоль неустойчивого распределения сжимает обратное отображение. Предположим, что в окрестности $U(\Lambda)$ задана ляпуновская метрика:

$$\|DS_x(v)\| \leq \lambda\|v\|, \quad \text{если } v \in E^s(x), x \in \Lambda, \quad (3.1)$$

$$\|DS_x^{-1}(v)\| \leq \lambda\|v\|, \quad \text{если } v \in E^u(x), x \in \Lambda. \quad (3.1')$$

Пусть отображение $\mathfrak{G}$ C^1 -близко к $\mathfrak{F} = S \times \text{id}_M$. Обозначим через $\bar{x}$ центральный слой отображения $\mathfrak{G}$ над точкой $x \in \Lambda$, т. е. $\bar{x} = \Phi^{-1}(x)$ (мы будем использовать это обозначение как для множества $\Phi^{-1}(x)$, так и для точки в $\mathfrak{L}$).

Центральный слой $\bar{x}$ C^1 -близок к соответствующему центральному слою $\{x\} \times M$ отображения $\mathfrak{F}$ и поэтому является графиком некоторого отображения $\hat{x}: M \rightarrow N$. Определим C^0 -расстояние между центральными слоями (т. е. C^0 -метрику в $\mathfrak{L}$) следующим образом:

$$d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{\varphi \in M} d_N(\hat{x}(\varphi), \hat{y}(\varphi)), \quad (3.2)$$

где $d_N(\cdot, \cdot)$ – метрика на N .

Для доказательства теоремы 3.2 при $r = 0$ необходимо показать, что индуцированное отображение $\mathfrak{g}: \mathfrak{L}^0 \rightarrow \mathfrak{L}^0$ есть липшицевоморфизм, удовлетворяющий условиям (IH1) и (IH2) из определения 2.2, и что системы $(\Lambda, S|_\Lambda)$ и $(\mathfrak{L}^0, \mathfrak{g})$ сопряжены. Покажем сначала, что $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию (IH2), если $\mathfrak{G}$ достаточно C^1 -близко к $\mathfrak{F}$.

ЛЕММА 3.1. Для любого $\rho > 0$ существует такая C^1 -окрестность отображения $\mathfrak{F}$, что для любого $\mathfrak{G}$ из этой окрестности выполнены следующие утверждения:

- 1) если $x \in W_{\text{loc}}^s(y)$, то $d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) \leq (\lambda + 3\rho) d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y})$;
- 2) если $x \in W_{\text{loc}}^u(y)$, то $d_{C^0}(\mathfrak{g}^{-1}\bar{x}, \mathfrak{g}^{-1}\bar{y}) \leq (\lambda + 3\rho) d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первую часть леммы. Доказательство второй части аналогично.

Если $x \in W_{\text{loc}}^s(y)$, то для любой точки $(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ сильно устойчивое многообразие $W_{\text{loc}}^{ss}(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ содержит некоторую точку $(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1) \in \bar{y}$. Определим расстояние вдоль сильно устойчивого многообразия между точками $(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ и $(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1)$ как нижнюю грань длин гладких кривых, соединяющих точки $(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ и $(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1)$ и лежащих в $W_{\text{loc}}^{ss}(\hat{x}(\varphi), \varphi)$. Теперь можно определить расстояние $\tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y})$ как максимум расстояний вдоль сильно устойчивых многообразий между точками $(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ и $W_{\text{loc}}^{ss}(\hat{x}(\varphi), \varphi) \cap \bar{y}$ по всем точкам слоя $\bar{x}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если $x \in W_{\text{loc}}^s(y)$, то $\tilde{d}_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) \leq (\lambda + 2\rho) \tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем такие точки $(\hat{x}(\varphi), \varphi) \in \bar{x}$ и $(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1) \in \bar{y}$, что $(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1) \in W_{\text{loc}}^{ss}(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ и расстояние между $\mathfrak{G}(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ и $\mathfrak{G}(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1)$ вдоль сильно устойчивого многообразия равно $\tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y})$. Пусть γ^{ss} – гладкая кривая, соединяющая точки $(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ и $(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1)$, лежащая в $W_{\text{loc}}^{ss}(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ и имеющая длину $|\gamma^{ss}|$, равную расстоянию между $(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ и $(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1)$ вдоль сильно устойчивого многообразия. Ограничение отображения $\mathfrak{F}$ на сильно устойчивое многообразие сжимает с коэффициентом, меньшим $(\lambda + 2\rho)$ (если x и y достаточно близки). Если $\mathfrak{G}$ C^1 -близко к $\mathfrak{F}$, то ограничение $\mathfrak{G}$ на свое сильно устойчивое многообразие сжимает с коэффициентом, не большим $(\lambda + 2\rho)$. Таким образом, $|\mathfrak{G}(\gamma^{ss})| \leq (\lambda + 2\rho)|\gamma^{ss}|$. Заметим, что расстояние между $\mathfrak{G}(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ и $\mathfrak{G}(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1)$ вдоль сильно устойчивого многообразия не превосходит $|\mathfrak{G}(\gamma^{ss})|$. В итоге мы имеем

$$\tilde{d}_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) \leq |\mathfrak{G}(\gamma^{ss})| \leq (\lambda + 2\rho)|\gamma^{ss}| \leq (\lambda + 2\rho)\tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Для любого $\alpha > 0$ существуют такие C^1 -окрестность отображения $\mathfrak{F}$ и $\varepsilon > 0$, что для любого $\mathfrak{G}$ из этой окрестности и любых x, y , $x \in W_\varepsilon^s(y)$, выполнено

$$(1 - \alpha) \tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leq (1 + \alpha) \tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $v \in T_{(x, \varphi)}(N \times M) = T_x N \oplus T_\varphi M$, то $v = v^b + v^c$, $v^b \in T_x N$, $v^c \in T_\varphi M$. Определим θ -конусы

$$K^b = \{v \mid \theta \|v^b\| > \|v^c\|\}, \quad K^c = \{v \mid \theta \|v^c\| > \|v^b\|\}. \quad (3.3)$$

Если v – вектор из касательного пространства к центральному слою $\bar{x}$ отображения $\mathfrak{F}$ в точке $(x, \varphi) \in \bar{x}$, то $v \in K_{(x, \varphi)}^c$. Если v – вектор из касательного пространства к сильно устойчивому многообразию $W_{\text{loc}}^{ss}(x, \varphi)$ в точке $(x_1, \varphi_1) \in W_{\text{loc}}^{ss}(x, \varphi)$, то $v \in K_{(x_1, \varphi_1)}^b$.

То же выполнено для $\mathfrak{G}$, если $\mathfrak{G}$ C^1 -близко к $\mathfrak{F}$, поскольку центральные слои (сильно устойчивые многообразия) отображения $\mathfrak{G}$ C^1 -близки к центральным слоям (сильно устойчивым многообразиям) отображения $\mathfrak{F}$.

Пусть $(\hat{x}(\varphi), \varphi) \in \bar{x}$, $(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1) \in \bar{y}$, $(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1) \in W_{\text{loc}}^{ss}(\hat{x}(\varphi), \varphi)$. Пусть γ^b – кривая в N , соединяющая точки x и y и реализующая расстояние между ними:

$$d = d_N(x, y) = |\gamma^b|.$$

Пусть γ^{ss} – кривая в $W_{\text{loc}}^{ss}(x, \varphi)$, соединяющая точки (x, φ) и (y_1, φ_1) и реализующая расстояние (вдоль сильно устойчивого многообразия) между ними:

$$\tilde{d} = d_{\text{вд } W_{\text{loc}}^{ss}(x, \varphi)}((x, \varphi), (y_1, \varphi_1)) = |\gamma^{ss}|.$$

Пусть $c = d_M(\varphi, \varphi_1)$ и кривая $l \subset M$ соединяет φ и φ_1 и реализует расстояние между ними:

$$c = d_M(\varphi, \varphi_1) = |l|.$$

Наконец, пусть γ^c – поднятие кривой l на слой $\hat{y}$, т. е. γ^c соединяет точки (y, φ) и (y_1, φ_1) , и проекция γ^c на M совпадает с l . Через γ^Δ обозначим проекцию γ^c на N . Поскольку касательный вектор к γ^c в каждой ее точке лежит в K^c , то

$$|\gamma^\Delta| \leq \theta |l| = \theta c.$$

Обозначим через $p_M(\cdot)$ проекцию на M и через $p_N(\cdot)$ – проекцию на N . Поскольку касательный вектор к γ^{ss} в каждой ее точке лежит в K^b , то

$$|p_M(\gamma^{ss})| \leq \theta |p_N(\gamma^{ss})|.$$

Поскольку $c = d_M(\varphi, \varphi_1) \leq |p_M(\gamma^{ss})|$, то

$$\begin{aligned} d &= |\gamma^b| \leq |\gamma^c| + |\gamma^{ss}| \leq |\gamma^\Delta| + |l| + |\gamma^{ss}| \leq \theta c + c + |\gamma^{ss}| \\ &\leq (1 + \theta) |p_M(\gamma^{ss})| + |\gamma^{ss}| \leq (1 + \theta) \theta |p_N(\gamma^{ss})| + |\gamma^{ss}| \\ &\leq (1 + (1 + \theta) \theta) |\gamma^{ss}| = (1 + (1 + \theta) \theta) \tilde{d}. \end{aligned}$$

Далее, поскольку $W_{\text{loc}}^{ss}(x, \varphi)$ C^1 -гладко, то если (x, φ) и (y, φ) достаточно близки (что обеспечивается выбором достаточно малого ε), то

$$\tilde{d} \leq (1 + \theta) d_{N \times M}((x, \varphi), (y_1, \varphi_1)).$$

Но тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{d} &\leq (1 + \theta) d_{N \times M}((x, \varphi), (y_1, \varphi_1)) \leq (1 + \theta) (|\gamma^b| + |\gamma^c|) \\ &\leq (1 + \theta) (|\gamma^b| + |l| + |\gamma^\Delta|) \leq (1 + \theta) (d + c + \theta c) \leq (1 + \theta) (d + \theta(1 + \theta) \tilde{d}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1 - \theta(1 + \theta)^2}{1 + \theta} \tilde{d} \leq d.$$

Таким образом, если θ и ε достаточно малы, то $(1 - \alpha) \tilde{d} \leq d \leq (1 + \alpha) \tilde{d}$. Поскольку это верно для каждой точки $\varphi \in M$, то

$$(1 - \alpha) \tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leq (1 + \alpha) \tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Предложение доказано.

Лемма 3.1 следует теперь из предложений 3.1 и 3.2. Действительно, если $x \in W_{\text{loc}}^s(y)$, то

$$\begin{aligned} d_{C^0}(\mathbf{g}\bar{x}, \mathbf{g}\bar{y}) &\leq (1 + \alpha) \tilde{d}_{C^0}(\mathbf{g}\bar{x}, \mathbf{g}\bar{y}) \\ &\leq (1 + \alpha)(\lambda + 2\rho) \tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leq \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} (\lambda + 2\rho) d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если α достаточно мало, то $d_{C^0}(\mathbf{g}\bar{x}, \mathbf{g}\bar{y}) \leq (\lambda + 3\rho) d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y})$. Лемма 3.1 доказана.

Итак, $\mathbf{g}$ удовлетворяет условию (IH2), если $\mathfrak{G}$ достаточно C^1 -близко к $\mathfrak{F}$.

Покажем теперь, что при тех же предположениях отображение $\mathbf{g}: \mathfrak{L}^0 \rightarrow \mathfrak{L}^0$ удовлетворяет условию (IH1).

Поскольку Λ – локально максимальное гиперболическое множество отображения $S: N \rightarrow N$, существуют такие $\varepsilon > \delta > 0$, что выполнено следующее.

Если $d_N(x, y) < \delta$, то существует единственная такая точка $w = w(x, y) \in \Lambda$, что $\{w\} = W_\varepsilon^u(x) \cap W_\varepsilon^s(y) = W_{3\varepsilon}^u(x) \cap W_{3\varepsilon}^s(y)$. Зафиксируем малое $\rho > 0$, $\rho \ll \delta$. Если $\mathfrak{G}$ достаточно C^1 -близко к $\mathfrak{F}$, то C^0 -расстояние между любым центральным слоем отображения $\mathfrak{G}$ и соответствующим центральным слоем $\mathfrak{F}$ не превосходит ρ (см. [13, теорема 6.8]).

ЛЕММА 3.2. Пусть задана константа $\rho > 0$. Для любого $\mathfrak{G}$, достаточно C^1 -близкого к $\mathfrak{F}$, выполнено следующее. Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – центральные слои отображения $\mathfrak{G}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathfrak{L}^0$, и $d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leq \delta - 2\rho$, то существует единственный центральный слой $\bar{w} \in \mathfrak{L}^0$ отображения $\mathfrak{G}$ такой, что $\bar{w} \in W_{2\varepsilon}^s(\bar{x}) \cap W_{2\varepsilon}^u(\bar{y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что пересечение $W_{2\varepsilon}^u(x) \cap W_{2\varepsilon}^s(y) \subset \mathfrak{L}^0$ не может содержать больше одного центрального слоя отображения $\mathfrak{G}$. Допустим, что пересечение $W_\varepsilon^u(x) \cap W_\varepsilon^s(y)$ не пусто, и возьмем какую-нибудь точку $\bar{w} \in \mathfrak{L}^0$ в этом пересечении. Рассмотрим соответствующие центральные слои $\{x\} \times M$, $\{y\} \times M$ и $\{w\} \times M$ отображения $\mathfrak{F}$. Здесь $x = \Phi(\bar{x})$, $y = \Phi(\bar{y})$ и $w = \Phi(\bar{w})$. По предположению $d_{C^0}(\{x\} \times M, \bar{x}) < \rho$, $d_{C^0}(\{y\} \times M, \bar{y}) < \rho$ и $d_{C^0}(\{w\} \times M, \bar{w}) < \rho$. Более того, $d_{C^0}(\{S^n(x)\} \times M, \mathfrak{g}^n \bar{x}) < \rho$, $d_{C^0}(\{S^n(y)\} \times M, \mathfrak{g}^n \bar{y}) < \rho$ и $d_{C^0}(\{S^n(w)\} \times M, \mathfrak{g}^n \bar{w}) < \rho$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Вместе с леммой 3.1 это дает, что $w \in W_{2\varepsilon+2\rho}^u(x) \cap W_{2\varepsilon+2\rho}^s(y)$. Действительно, для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} d_N(S^k(w), S^k(x)) &= d_{C^0}(\{S^k(w)\} \times M, \{S^k(x)\} \times M) \\ &\leq d_{C^0}(\{S^k(w)\} \times M, \mathfrak{g}^k \bar{w}) + d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{w}, \mathfrak{g}^k \bar{x}) + d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{x}, \{S^k(x)\} \times M) \\ &\leq 2\rho + d_{C^0}(\bar{w}, \bar{x}) \leq 2\rho + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

поэтому $w \in W_{2\varepsilon+2\rho}^s(x)$. Аналогично, $w \in W_{2\varepsilon+2\rho}^u(y)$.

Поскольку $d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leq \delta - 2\rho$, мы имеем

$$\begin{aligned} d_N(x, y) &= d_{C^0}(\{x\} \times M, \{y\} \times M) \\ &\leq d_{C^0}(\{x\} \times M, \bar{x}) + d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) + d_{C^0}(\bar{y}, \{y\} \times M) \leq (\delta - 2\rho) + \rho + \rho = \delta. \end{aligned}$$

В силу выбора δ и ε существует единственная точка $w \in W_{3\varepsilon}^s(x) \cap W_{3\varepsilon}^u(y) = W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$. Единственность доказана.

Теперь докажем существование. Поскольку $d_N(x, y) \leq \delta$, существует точка $w \in W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \in \Lambda$. Рассмотрим соответствующий центральный слой $\bar{w} = \Phi^{-1}(w) \in \mathfrak{L}^0$ отображения $\mathfrak{G}$. Для всех $k \in \mathbb{Z}^+$ мы имеем

$$\begin{aligned} d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{x}, \mathfrak{g}^k \bar{w}) &\leq d_{C^0}(\mathfrak{G}^k \bar{w}, \{S^k(w)\} \times M) \\ &+ d_{C^0}(\{S^k(w)\} \times M, \{S^k(x)\} \times M) + d_{C^0}(\{S^k(x)\} \times M, \mathfrak{g}^k \bar{x}) \leq 2\rho + \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{x} \in W_{\varepsilon+2\rho}^s(\bar{x}) \subset \mathfrak{L}^0$. Лемма доказана, а вместе с ней и условие (IH1) для $\mathfrak{g}$.

ЛЕММА 3.3. Отображение $\mathfrak{g}: \mathfrak{L}^0 \rightarrow \mathfrak{L}^0$, индуцированное в пространстве центральных слоев отображения $\mathfrak{G}$ с C^0 -метрикой, является липшицевым-гомеоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $L = \max_{(x, \varphi) \in N \times M} \|D\mathfrak{G}(x, \varphi)\|$. Напомним, что C^0 -расстояние между центральными слоями $\bar{x}$ и $\bar{y}$ было определено как

$$d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{\varphi \in M} d_N(\hat{x}(\varphi), \hat{y}(\varphi)).$$

Зафиксируем $\varphi \in M$. Пусть γ^b – кривая в $N \times \{\varphi\} \subset N \times M$, соединяющая точки $(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ и $(\hat{y}(\varphi), \varphi)$ и реализующая расстояние между ними, $|\gamma^b| = d_N(\hat{x}(\varphi), \hat{y}(\varphi))$. Обозначим через $p_M(\cdot)$ и $p_N(\cdot)$ проекции на M и N соответственно. Обозначим $\varphi_1 = p_M(\mathfrak{G}(\hat{x}(\varphi), \varphi))$ и $\varphi_2 = p_M(\mathfrak{G}(\hat{y}(\varphi), \varphi))$. Тогда кривая $\mathfrak{G}(\gamma^b)$ соединяет точки $\mathfrak{G}(\hat{x}(\varphi), \varphi) = (\widehat{S(x)}(\varphi_1), \varphi_1)$ и $\mathfrak{G}(\hat{y}(\varphi), \varphi) = (\widehat{S(y)}(\varphi_2), \varphi_2)$.

Обозначим через γ^c поднятие кривой $p_M(\mathfrak{G}(\gamma^b)) \subset M$ на слой $\overline{S(y)} = \mathfrak{g}\bar{y}$, $\gamma^c \subset \mathfrak{g}\bar{y}$, $p_M(\gamma^c) = p_M(\mathfrak{G}(\gamma^b))$, причем γ^c соединяет точки $(\widehat{S(y)}(\varphi_1), \varphi_1) \in \mathfrak{g}\bar{y}$ и $(\widehat{S(y)}(\varphi_2), \varphi_2) \in \mathfrak{g}\bar{y}$. Из неравенства треугольника имеем

$$d_N(\widehat{S(x)}(\varphi_1), \widehat{S(y)}(\varphi_1)) \leq |\gamma^c| + |\mathfrak{G}(\gamma^b)|.$$

Определим θ -конусы K^b и K^c , как в (3.3).

Если $\mathfrak{G}$ C^1 -близко к $\mathfrak{F}$, касательный вектор к кривой $\mathfrak{G}(\gamma^b)$ лежит в конусе K^b в каждой точке. Отсюда следует, что

$$|p_M(\mathfrak{G}(\gamma^b))| \leq \theta |p_N(\mathfrak{G}(\gamma^b))| \leq \theta |\mathfrak{G}(\gamma^b)| \leq \theta L |\gamma^b|.$$

Поскольку центральные слои отображения $\mathfrak{G}$ C^1 -близки к центральным слоям $\mathfrak{F}$ и, в частности, касательный вектор к кривой γ^c лежит в конусе K^c в каждой точке, мы имеем

$$|p_N(\gamma^c)| \leq \theta |p_M(\gamma^c)| = \theta |p_M(\mathfrak{G}(\gamma^b))| \leq \theta |\mathfrak{G}(\gamma^b)| \leq \theta L |\gamma^b|.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} d_N(\widehat{S(x)}(\varphi_1), \widehat{S(y)}(\varphi_1)) &\leq |\gamma^c| + |\mathfrak{G}(\gamma^b)| \leq |p_N(\gamma^c)| + |p_M(\gamma^c)| + |\mathfrak{G}(\gamma^b)| \\ &\leq \theta L |\gamma^b| + L |\gamma^b| + L |\gamma^b| = (2 + \theta) L |\gamma^b| = (2 + \theta) L d_N(\hat{x}(\varphi), \hat{y}(\varphi)). \end{aligned}$$

Поскольку это неравенство выполнено для всех $\varphi \in M$, мы имеем

$$d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) \leq (2 + \theta) L d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Заметим, что поскольку $L = L(\mathfrak{G}) = \max_{(x, \varphi) \in N \times M} \|D\mathfrak{G}(x, \varphi)\|$ равномерно ограничено сверху для всех $\mathfrak{G}$ из малой C^1 -окрестности $\mathfrak{F}$, константа Липшица для $\mathfrak{g}$ может быть выбрана равномерно по всем $\mathfrak{G}$ вблизи $\mathfrak{F}$.

Тем же способом можно доказать, что отображение $\mathfrak{g}^{-1}: \mathfrak{L}^0 \rightarrow \mathfrak{L}^0$ липшицево. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. *Динамические системы $(\Lambda, S|_\Lambda)$ и $(\mathfrak{L}^0, \mathfrak{g})$ топологически сопряжены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Центральные слои были определены как прообразы $\bar{x} = \Phi^{-1}(x)$, $x \in \Lambda$. Поскольку $\Delta = \bigcup_{x \in \Lambda} \Phi^{-1}(x)$, отображение Φ индуцирует отображение $\bar{\Phi}: \mathfrak{L}^0 \rightarrow \Lambda$, $\bar{\Phi}(\bar{x}) = x$ на пространстве центральных слоев. Отображение Φ является полусопряжением, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\mathfrak{G}|_\Delta} & \Delta \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \Lambda & \xrightarrow{S|_\Lambda} & \Lambda \end{array}$$

коммутативна. Следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}^0 & \xrightarrow{\mathfrak{g}} & \mathfrak{L}^0 \\ \bar{\Phi} \downarrow & & \downarrow \bar{\Phi} \\ \Lambda & \xrightarrow{S|_{\Lambda}} & \Lambda \end{array}$$

также коммутативна. Поэтому для доказательства того, что $\bar{\Phi}$ является сопряжением, необходимо лишь проверить, что $\bar{\Phi}$ является гомеоморфизмом. Поскольку отображение $\Phi: \Delta \rightarrow \Lambda$ непрерывно, отображение $\bar{\Phi}: \mathfrak{L}^0 \rightarrow \Lambda$ также непрерывно. Нам нужно лишь показать, что отображение $\bar{\Phi}^{-1}: \Lambda \rightarrow \mathfrak{L}^0$ непрерывно.

Допустим, что это неверно и существуют последовательность точек $\{x_n\} \subset \Lambda$ и точка $y \in \Lambda$ такие, что $x_n \rightarrow y$ в Λ , но $\bar{x}_n \not\rightarrow \bar{y}$ в $\mathfrak{L}^0$. При необходимости переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что для некоторого $\xi > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $d_{C^0}(\bar{x}_n, \bar{y}) > \xi$.

Пусть ε, δ и ρ такие же, как в лемме 3.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Существует такое $l \in \mathbb{N}$, $l = l(\xi, \rho, \mathfrak{G})$, что если $d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) > \xi$, то $d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{x}, \mathfrak{g}^k \bar{y}) > 3\rho$ для некоторого $|k| \leq l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) < 3\rho \ll \delta < \varepsilon$ (в противном случае предложение тривиальным образом выполнено). По лемме 3.2 существует такая точка $\bar{z} \in \mathfrak{L}^0$, что

$$\bar{z} = W_{2\varepsilon}^s(\bar{x}) \cap W_{2\varepsilon}^u(\bar{y}).$$

Допустим, что $d_{C^0}(\bar{y}, \bar{z}) \geq d_{C^0}(\bar{x}, \bar{z})$ (в противном случае рассмотрим отрицательные итерации $\mathfrak{g}: \mathfrak{L}^0 \rightarrow \mathfrak{L}^0$). В частности, отсюда следует, что выполнено неравенство $d_{C^0}(\bar{y}, \bar{z}) \geq \frac{1}{2} \xi$.

По лемме 3.1 имеем

$$d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{z}, \mathfrak{g}^k \bar{y}) \geq (\lambda + 3\rho)^{-k} d_{C^0}(\bar{z}, \bar{y}) \geq \frac{1}{2} \xi (\lambda + 3\rho)^{-k},$$

если $d_{C^0}(\mathfrak{g}^i \bar{z}, \mathfrak{g}^i \bar{y}) < \varepsilon$ при $i = 0, 1, \dots, k-1$ и

$$d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{z}, \mathfrak{g}^k \bar{x}) \leq (\lambda + 3\rho)^k d_{C^0}(\bar{z}, \bar{x})$$

для всех $k \in \mathbb{N}$.

Существуют две возможности: либо $2\varepsilon > d_{C^0}(\bar{z}, \bar{y}) > \frac{6\rho\lambda}{1-\lambda^2}$, либо $d_{C^0}(\bar{z}, \bar{y}) \leq \frac{6\rho\lambda}{1-\lambda^2} \ll 2\varepsilon$ (мы берем ρ достаточно малым, чтобы выполнялось $\frac{6\rho\lambda}{1-\lambda^2} \ll \delta < \varepsilon$).

В первом случае

$$\begin{aligned} d_{C^0}(\bar{x}, \bar{z}) &\leq d_{C^0}(\bar{z}, \bar{y}) + 3\rho, & d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{y}, \mathfrak{g}\bar{z}) &\geq (\lambda + 3\rho)^{-1} d_{C^0}(\bar{y}, \bar{z}), \\ d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{z}) &\leq (\lambda + 3\rho) d_{C^0}(\bar{x}, \bar{z}) \leq (\lambda + 3\rho)(3\rho + d_{C^0}(\bar{z}, \bar{y})). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) &\geq d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{y}, \mathfrak{g}\bar{z}) - d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{z}, \mathfrak{g}\bar{x}) \\
 &\geq \frac{1}{\lambda + 3\rho} d_{C^0}(\bar{y}, \bar{z}) - (\lambda + 3\rho)(3\rho + d_{C^0}(\bar{z}, \bar{y})) \\
 &= \left(\frac{1}{\lambda + 3\rho} - (\lambda + 3\rho) \right) d_{C^0}(\bar{z}, \bar{y}) - 3\rho(\lambda + 3\rho) \\
 &= \frac{1 - (\lambda + 3\rho)^2}{\lambda + 3\rho} d_{C^0}(\bar{y}, \bar{z}) - 3\rho(\lambda + 3\rho) \\
 &> \frac{(1 - (\lambda + 3\rho)^2) 6\rho\lambda}{(\lambda + 3\rho)(1 - \lambda^2)} - 3\rho(\lambda + 3\rho) \geq \frac{6\rho\lambda}{\lambda + 3\rho} - 3\rho(\lambda + 3\rho) \geq 6\rho - 3\rho = 3\rho.
 \end{aligned}$$

Во втором случае

$$d_{C^0}(\bar{z}, \bar{x}) \leq d_{C^0}(\bar{z}, \bar{y}) \leq \frac{6\rho\lambda}{1 - \lambda^2} \ll 2\varepsilon.$$

Возьмем наименьшее $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{\varepsilon}{\lambda + 3\rho} \leq d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{z}, \mathfrak{g}^k \bar{y}) < \varepsilon$. Поскольку

$$d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{z}, \mathfrak{g}^k \bar{y}) \geq (\lambda + 3\rho)^{-k} d_{C^0}(\bar{z}, \bar{y}) \geq \frac{1}{2} \xi (\lambda + 3\rho)^{-k},$$

мы имеем оценку $\frac{1}{2} \xi (\lambda + 3\rho)^{-k} \leq \varepsilon$, т. е. $|k| \leq l = l(\xi, \rho, \mathfrak{G})$.

Поскольку $d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{z}, \mathfrak{g}^k \bar{x}) < d_{C^0}(\bar{x}, \bar{z}) \leq \frac{6\rho\lambda}{1 - \lambda^2} \ll \delta < \varepsilon$, мы имеем

$$d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{x}, \mathfrak{g}^k \bar{y}) \geq d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{z}, \mathfrak{g}^k \bar{y}) - d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{z}, \mathfrak{g}^k \bar{x}) \geq \frac{\varepsilon}{\lambda + 3\rho} - \frac{6\rho\lambda}{1 - \lambda^2} > 3\rho,$$

если ρ достаточно мало. Предложение доказано.

Применим предложение 3.3 к $\bar{x}_n$ и $\bar{y}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Переходя к подпоследовательности, можем предположить, что для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{x}_n, \mathfrak{g}^k \bar{y}) > 3\rho$. Поскольку $x_n \rightarrow y$ в Λ , то $S^k(x_n) \rightarrow S^k(y)$ в Λ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $d_{C^0}(\{S^k(x_n)\} \times M, \{S^k(y)\} \times M) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Мы знаем, что $d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{x}_n, \{S^k(x_n)\} \times M) < \rho$ и $d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{y}, \{S^k(y)\} \times M) < \rho$, но это противоречит неравенству $d_{C^0}(\mathfrak{g}^k \bar{x}_n, \mathfrak{g}^k \bar{y}) > 3\rho$. Лемма доказана.

Леммы 3.1–3.4 доказывают теорему 3.2 для $r = 0$.

§ 4. Динамическая тривиализация и внутренняя гиперболичность для C^r -метрики

Чтобы определить C^r -метрику в пространстве центральных слоев $\mathfrak{L}$, нам потребуются некоторые технические приготовления.

4.1. Динамическая тривиализация. Здесь с небольшими необходимыми нам изменениями воспроизводим некоторые аргументы, предложенные Ч. Пью, М. Шубом и Э. Вилкинсон из [21], касающиеся тривиализации векторных расслоений с заданной динамикой в базе расслоения. В дальнейшем

это позволит нам обойти трудности, связанные с нетривиальностью устойчивого и неустойчивого распределений, а также с нетривиальностью касательного расслоения многообразия M (центрального слоя).

Векторное расслоение E над компактной базой X всегда имеет тривиализующее расслоение (inverse bundle), расслоение E' над X , для которого существует автоморфизм векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E' & \xrightarrow{\tau} & \varepsilon \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\text{id}} & X \end{array}$$

где ε – тривиальное расслоение: $\varepsilon = X \times \mathbb{R}^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Оказывается, верно более сильное утверждение.

ЛЕММА 4.1 (динамическая тривиализация [21, лемма 3.1]). *Для заданного векторного расслоения E с компактной базой X существует такое тривиализующее расслоение E'' над X , что любой изоморфизм векторного расслоения, накрывающий гомеоморфизм базы расслоения*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

продолжается до изоморфизма векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E'' & \xrightarrow{T \oplus T''} & E \oplus E'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Если E и T гладкие, то E'' и T'' также гладкие.

Напомним, что функция, заданная на замкнутом множестве Λ многообразия N , называется *гладкой*, если она может быть продолжена до гладкой функции, определенной в некоторой окрестности Λ . Далее, напомним, что это означает в терминах векторных расслоений. Пусть E – непрерывное векторное расслоение над Λ , где Λ – замкнутое подмножество в N . Тогда E можно локально продолжить до непрерывного расслоения $\tilde{E}$ над U , где U – окрестность Λ в N . Если одно такое продолжение $\tilde{E}$ гладко, то E само называется *гладким*. Отображение расслоения $T: E \rightarrow E$ называется *гладким*, если оно продолжается до гладкого отображения гладкого локального продолжения E . Если E тривиализуемо, то $\tilde{E}$ также тривиализуемо (по крайней мере, будучи ограниченным на достаточно малую окрестность Λ); если $\tilde{E}$ – гладкое продолжение, то $\tilde{E}$ гладко тривиализуемо.

Таким образом, из леммы 4.1 следует, что существуют гладкое расслоение H^b над $U(\Lambda)$, тривиализующее $T_{U(\Lambda)}N$, и C^r -изоморфизм $I^b: H^b \rightarrow H^b$, накрывающий S . Зафиксируем гладкое скалярное произведение на H^b . Умножая I^b на подходящую положительную константу, мы можем предположить, что I^b сжимает H^b намного сильнее, чем DS сжимает E^s . В $U(\Lambda)$ задана

метрика Ляпунова, так что выполнено (3.1) и (3.1'). Вместе с выбранным скалярным произведением на H^b это задает выделенное скалярное произведение на $T_{U(\Lambda)}N \oplus H^b$. Тривиальное расслоение $U(\Lambda) \times \mathbb{R}^n$ имеет собственную внутреннюю евклидову структуру, и тривиализующий автоморфизм

$$T_{U(\Lambda)}N \oplus H^b \cong U(\Lambda) \times \mathbb{R}^n$$

не обязан быть изометрией.

Чтобы обойти отсутствие изометрии, воспользуемся следующим фактом из линейной алгебры. Если $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ – скалярные произведения на одном и том же конечномерном векторном пространстве V , то существует канонический изоморфизм $Q: V \rightarrow V$, который переводит одно скалярное произведение в другое, т. е. для любых $v, w \in V$

$$\langle Qv, Qw \rangle_2 = \langle v, w \rangle_1.$$

Чтобы найти Q , заметим, что для каждого $v \in V$ существует единственный вектор $v' \in V$ такой, что для любого $w \in V$

$$\langle v', w \rangle_2 = \langle v, w \rangle_1.$$

Отображение $T: v \mapsto v'$ является автоморфизмом пространства V , симметрическим и положительно определенным в соответствии со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Положим $Q = \sqrt{T}$, где $\sqrt{T}$ – единственный симметрический положительно определенный квадратный корень из T . Тогда для любых $v, w \in V$

$$\langle Qv, Qw \rangle_2 = \langle Q^2v, w \rangle_2 = \langle Tv, w \rangle_2 = \langle v, w \rangle_1.$$

Применяя этот факт послойно, получаем автоморфизм векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} U(\Lambda) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{a} & T_{U(\Lambda)} \oplus H^b \\ \downarrow & & \downarrow \\ U(\Lambda) & \xrightarrow{\text{id}} & U(\Lambda) \end{array}$$

который переводит евклидову структуру в выделенное скалярное произведение. Поскольку оба скалярных произведения гладко зависят от слоя, автоморфизм a также является гладким.

Определим теперь D_S требованием коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} U(\Lambda) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D_S} & U(\Lambda) \times \mathbb{R}^n \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ T_{U(\Lambda)} \oplus H^b & \xrightarrow{D_S \oplus I^b} & T_{U(\Lambda)} \oplus H^b \\ \downarrow & & \downarrow \\ U(\Lambda) & \xrightarrow{S} & U(\Lambda) \end{array}$$

Ясно, что отображение $D_S: U(\Lambda) \times \mathbb{R}^n \leftarrow$ имеет класс гладкости C^r , множество Λ для него гиперболическое и слой $\mathbb{R}^n$ над точкой $x \in U(\Lambda)$ есть сумма устойчивого и неустойчивого подпространств $P_x^s = a^{-1}(E_x^s \oplus H_x^b)$ и $P_x^u = a^{-1}(E_x^u)$.

4.2. Определение C^r -метрики в пространстве центральных слоев.

Мы уже определили C^0 -метрику в пространстве центральных слоев (3.2). Теперь мы хотим определить C^r -расстояние между центральными слоями $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Эти слои могут рассматриваться как графики отображений $\hat{x}: M \rightarrow N$ и $\hat{y}: M \rightarrow N$. Чтобы определить C^r -расстояние между отображениями $\hat{x}$ и $\hat{y}$, “поднимем” их в пространство струй (для наших целей это удобнее, чем стандартное определение, использующее фиксированный конечный набор карт). Для того чтобы определить расстояние в пространстве струй, мы используем тривиализацию касательных расслоений к $U(\Lambda)$ (построенную в п. 4.1) и к M .

Существует гладкое расслоение H^c над M , тривиализующее касательное расслоение TM , т.е. существует гладкий автоморфизм τ векторных расслоений:

$$\begin{array}{ccc} TM \oplus H^c & \xrightarrow{\tau} & M \times \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array}$$

Будем считать, что на M задана такая риманова метрика, что изоморфизм $TM \oplus H^c \cong M \times \mathbb{R}^m$ является изометрией.

Рассмотрим центральный слой как график отображения $\hat{x}: M \rightarrow N$. Касательное пространство к $\bar{x}$ в точке $(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ есть график линейного отображения

$$L_\varphi: T_\varphi M \rightarrow T_{\hat{x}(\varphi)} N.$$

По L_φ определим линейное отображение

$$\tilde{L}_\varphi: T_\varphi M \oplus H_\varphi^c \rightarrow T_{\hat{x}(\varphi)} N \oplus H_{\hat{x}(\varphi)}^b$$

следующим образом:

$$T_\varphi M \oplus H_\varphi^c \xrightarrow{p} T_\varphi M \xrightarrow{L_\varphi} T_{\hat{x}(\varphi)} N \xrightarrow{i} T_{\hat{x}(\varphi)} N \oplus H_{\hat{x}(\varphi)}^b, \quad (4.1)$$

где p – проекция, i – включение.

Тем самым $\tilde{L}_\varphi \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, где $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ – пространство линейных отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, отображение $\hat{x}: M \rightarrow U(\Lambda)$ поднимается до отображения $\hat{X}: M \rightarrow U(\Lambda) \times L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, и мы можем определить C^1 -расстояние между центральными слоями следующим образом:

$$d_{C^1}(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{\varphi \in M} d_{N^1}(\hat{X}(\varphi), \hat{Y}(\varphi)), \quad N^1 = N \times L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Соответственно, C^r -расстояние между $\bar{x}$ и $\bar{y}$ определяется индуктивно, как C^{r-1} -расстояние между графиками отображений $\hat{X}$ и $\hat{Y}$. Заметим только, что для тривиализации касательного пространства к $U(\Lambda) \times L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ необходимо тривиализовать лишь касательное пространство к $U(\Lambda)$; линейное пространство $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ уже выделено как прямой сомножитель.

4.3. Продолжение отображения в базе до покрывающего изоморфизма. В дальнейшем нам потребуется продолжить малое возмущение отображения базы до отображения расслоения. Здесь мы покажем, что такое продолжение существует (предложение 4.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть X – гладкое риманово многообразие, отображение $\mathbf{h}: X \rightarrow X$ C^r -близко к $\text{id}: X \rightarrow X$. Пусть $\Pi: E \rightarrow X$ – векторное расслоение над X (со слоем $\mathbb{R}^k$). Тогда существует изоморфизм векторного расслоения $\mathbf{H}: E \rightarrow E$, накрывающий $\mathbf{h}$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathbf{H}} & E \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ X & \xrightarrow{\mathbf{h}} & X \end{array}$$

и C^r -близкий к $\text{id}: E \rightarrow E$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем риманову метрику на E следующим образом. Тривиализуем расслоение E так, что можно рассматривать его как подрасслоение тривиального расслоения $X \times \mathbb{R}^k$. Рассмотрим стандартную евклидову структуру на $\mathbb{R}^k$, соответствующую риманову структуре на $X \times \mathbb{R}^k$ и индуцированную метрику на пространстве расслоения E . Эта метрика индуцирует скалярное произведение на каждом слое, совпадает с римановой метрикой на X , и каждый слой ортогонален к касательному пространству к X .

Поскольку $\mathbf{h}$ близко к тождественному, то существует единственная минимальная геодезическая из x в $\mathbf{h}(x)$. Эта дуга является также геодезической в E , если рассматривать x и $\mathbf{h}(x)$ как точки в нулевом сечении. Действительно, иначе нашлась бы другая минимальная геодезическая, соединяющая x и $\mathbf{h}(x)$; она обязана целиком лежать в нулевом сечении (иначе проекция имела бы меньшую длину), но риманова метрика, индуцированная на нулевом сечении, совпадает с метрикой на X , тем самым мы получили две разных геодезических из x в $\mathbf{h}(x)$ на X . Противоречие.

Пространство векторного расслоения E является римановым многообразием. Рассмотрим параллельный перенос вдоль построенной геодезической. Касательное пространство к X перейдет в касательное пространство к X . Пространство, ортогональное к $T_x X$, перейдет в пространство, ортогональное к $T_{\mathbf{h}(x)} X$. Тем самым слой над x линейно отображится в слой над $\mathbf{h}(x)$. Построенное отображение задает искомый изоморфизм $\mathbf{H}: E \rightarrow E$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть заданы отображение $\mathbf{f}: X \rightarrow X$, $\mathbf{f} \in C^r$, и накрывающий его изоморфизм $\mathbf{F}$ векторного расслоения $\Pi: E \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathbf{F}} & E \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ X & \xrightarrow{\mathbf{f}} & X \end{array}$$

Пусть отображение $\mathbf{g}: X \rightarrow X$ C^r -близко к $\mathbf{f}$. Тогда найдется накрывающий его изоморфизм векторного расслоения $\mathbf{G}: E \rightarrow E$, C^r -близкий к $\mathbf{F}$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathbf{G}} & E \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ X & \xrightarrow{\mathbf{g}} & X \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{g}: X \rightarrow X$. Оно C^r -близко к $\text{id}: X \rightarrow X$, следовательно (по предложению 4.1), существует изоморфизм $\mathbf{H}: E \rightarrow E$, накрывающий $\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{g}$ и C^r -близкий к $\text{id}: E \rightarrow E$. Но тогда отображение $\mathbf{F} \circ \mathbf{H}: E \rightarrow E$ является C^r -близким к $\mathbf{F}$ и накрывает $\mathbf{g}: X \rightarrow X$. Предложение доказано.

4.4. Шаг индукции. Мы доказываем теорему 3.2 по индукции. База индукции (теорема 3.2 верна для $r = 0$) проверена в леммах 3.1–3.4. Проведем теперь шаг индукции.

ЛЕММА 4.2. *Предположим, что теорема 3.2 верна для $r = r_0 - 1$. Тогда она верна также и для $r = r_0 > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Касательные расслоения к многообразиям N и M тривиализованы с помощью расслоений H^b и H^c :

$$T_{U(\Lambda)}N \oplus H^b \cong U(\Lambda) \times \mathbb{R}^n, \quad T_M \oplus H^c \cong M \times \mathbb{R}^m.$$

Обозначим через $\widetilde{T_{U(\Lambda)}N \oplus H^b}$ расслоение над $U(\Lambda) \times M$ со слоем $T_x N \oplus H_x^b$ над точкой (x, φ) . Обозначим через $\widetilde{T_M \oplus H^c}$ расслоение над $U(\Lambda) \times M$ со слоем $T_\varphi M \oplus H_\varphi^c$ над точкой (x, φ) . Тем самым задано тривиальное расслоение с базой $U(\Lambda) \times M$:

$$\widetilde{T_{U(\Lambda)}N \oplus H^b} \oplus \widetilde{T_M \oplus H^c} \cong U(\Lambda) \times M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Слоем этого расслоения в точке $(x, \varphi) \in U(\Lambda) \times M$ является $T_x N \oplus H_x^b \oplus T_\varphi M \oplus H_\varphi^c$.

Отображение $\mathfrak{F}: U(\Lambda) \times M \hookleftarrow$ имеет вид $\mathfrak{F} = S \times \text{id}_M$. Поэтому можно определить отображение $D_{\mathfrak{F}}: U(\Lambda) \times M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \hookleftarrow$, накрывающее $\mathfrak{F}$, как $D_{\mathfrak{F}} = D_S \oplus \text{id}$. Действительно, отображение $D_S: U(\Lambda) \times \mathbb{R}^n \hookleftarrow$ накрывает $S: U(\Lambda) \hookleftarrow$, а отображение $\text{id}: M \times \mathbb{R}^m \hookleftarrow$ накрывает $\text{id}_M: M \hookleftarrow$, следовательно, отображение $D_{\mathfrak{F}} = D_S \oplus \text{id}$ накрывает отображение $\mathfrak{F} = S \times \text{id}_M$.

Определенное таким образом отображение $D_{\mathfrak{F}}$ индуцирует отображение

$$\mathfrak{F}^*: L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U(\Lambda) \times M \hookleftarrow,$$

накрывающее отображение $\mathfrak{F}$. Действительно, слой $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ над точкой (x, φ) переводит (линейно) отображение $D_{\mathfrak{F}}$ в слой $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ над точкой $\mathfrak{F}(x, \varphi) = (S(x), \varphi)$. Тем самым график линейного отображения $L: \mathbb{R}_{(x, \varphi)}^m \rightarrow \mathbb{R}_{(x, \varphi)}^M$ перейдет в график некоторого линейного отображения $L^*: \mathbb{R}_{\mathfrak{F}(x, \varphi)}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\mathfrak{F}(x, \varphi)}^M$. Положим $\mathfrak{F}^*(L, x, \varphi) = (L^*, S(x), \varphi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Отображение $\mathfrak{F}^*: L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U(\Lambda) \times M \hookleftarrow$ имеет вид $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}_{\text{гип}}^* \times \text{id}_M$, где $\mathfrak{F}_{\text{гип}}^*: L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U(\Lambda) \hookleftarrow$ – гиперболическое отображение с константой λ (т. е. с той же константой, что и отображение $S: U(\Lambda) \hookleftarrow$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $D_S: U(\Lambda) \times \mathbb{R}^n \hookleftarrow$ оставляет инвариантными подрасслоения P^s и P^u , $P^s \oplus P^u = U(\Lambda) \times \mathbb{R}^n$, причем слои $P_x^s = a^{-1}(E_x^s \oplus H_x^b)$ оно сжимает с коэффициентом не больше λ , а слои $P_x^u = a^{-1}(E_x^u)$ растягивает с коэффициентом не меньше λ^{-1} . Следовательно, расслоение над $U(\Lambda) \times M$ со слоем $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ распадается в сумму двух инвариантных под действием $\mathfrak{F}^*$ подрасслоений:

$$L_x(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = L_x(\mathbb{R}^m, P_x^s) \oplus L_x(\mathbb{R}^m, P_x^u),$$

причем слои $L_x(\mathbb{R}^m, P_x^s)$ отображение $\mathfrak{F}^*$ сжимает с коэффициентом не больше λ , а слои $L_x(\mathbb{R}^m, P_x^u)$ растягивает с коэффициентом не меньше λ^{-1} . Действительно, это прямо следует из того, что если $\mathfrak{F}^*(L, x, \varphi) = (L^*, S(x), \varphi)$, то $L^* = (D_S)_x L$.

Осталось заметить, что действие отображения $\mathfrak{F}^*$ на слой $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ над точкой $(x, \varphi) \in U(\Lambda) \times M$ зависит только от $x \in U(\Lambda)$ и не зависит от $\varphi \in M$. Предложение доказано.

Если отображение $\mathfrak{F}$ имеет класс гладкости C^{r_0+1} , то отображение $\mathfrak{F}^*$ имеет класс гладкости C^{r_0} и, следовательно, к нему (так как по предложению 4.3 $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}_{\text{hyp}}^* \times \text{id}_M$) применима теорема 3.2 (которая по предположению индукции верна при $r = r_0 - 1$), т. е. если отображение $\mathfrak{G}^* \in C^{r_0}$ -близко к отображению $\mathfrak{F}^*$ в окрестности частично гиперболического множества, то отображение, индуцированное в пространстве центральных слоев отображения $\mathfrak{G}^*$ с C^{r_0-1} -метрикой, является внутренне гиперболическим с константой $\lambda' > \lambda$, как утверждается в теореме 3.2.

Пусть отображение $\mathfrak{G}: U(\Lambda) \times M \leftrightarrow$ достаточно C^{r_0+1} -близко к $\mathfrak{F}$. Построим такое отображение $\mathfrak{G}^*$, которое будет C^{r_0} -близко к $\mathfrak{F}^*$ в окрестности частично гиперболического множества, причем центральные слои отображения $\mathfrak{G}^*$ совпадают с поднятием (в силу (4.1)) центральных слоев отображения $\mathfrak{G}$. Поскольку в этом случае C^{r_0} -метрика в пространстве центральных слоев отображения $\mathfrak{G}$ совпадает с C^{r_0-1} -метрикой в пространстве центральных слоев отображения $\mathfrak{G}^*$, этим будет доказана теорема 3.2 для $r = r_0$.

Для того чтобы построить требуемое отображение $\mathfrak{G}^*$, построим сначала отображение расслоения $D_{\mathfrak{G}}: U(\Lambda) \times M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \leftrightarrow$, C^{r_0} -близкое к отображению $D_{\mathfrak{F}}$ и накрывающее отображение $\mathfrak{G}$. Для этого вспомним, что

$$U(\Lambda) \times M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \widetilde{T_{U(\Lambda)}N} \oplus \widetilde{H}^b \oplus \widetilde{TM} \oplus \widetilde{H}^c.$$

Построим отображение $D_{\mathfrak{G}}$ как прямую сумму отображений $D_{\mathfrak{G}}: \widetilde{T_{U(\Lambda)}N} \oplus \widetilde{TM} \leftrightarrow$, $D_{\mathfrak{G}}^b: \widetilde{H}^b \leftrightarrow$ и $D_{\mathfrak{G}}^c: \widetilde{H}^c \leftrightarrow$, накрывающих $\mathfrak{G}$. Отображение $D_{\mathfrak{G}}$ есть дифференциал отображения $\mathfrak{G}$, оно C^{r_0} -близко к отображению $D_{\mathfrak{F}}$. Отображение $D_{\mathfrak{G}}^b$ (по предложению 3.3) можно взять C^{r_0} -гладким и C^{r_0} -близким к отображению $\tilde{I}^b$, где $\tilde{I}^b$ – продолжение автоморфизма $I^b: H^b \rightarrow H^b$ до отображения, накрывающего $\mathfrak{F}$, а именно $\tilde{I}^b(H_{(x,\varphi)}^b) = (I^b(H_x^b))_{(S(x),\varphi)}$. Наконец, отображение $D_{\mathfrak{G}}^c$ (снова по предложению 3.3) можно взять C^{r_0} -близким к отображению $\tilde{\text{id}}: \widetilde{H}^c \rightarrow \widetilde{H}^c$, где $\tilde{\text{id}}$ – продолжение отображения $\text{id}: H^c \rightarrow H^c$ до отображения, накрывающего $\mathfrak{F}$, а именно $\tilde{\text{id}}(H_{(x,\varphi)}^c) = H_{(S(x),\varphi)}^c$. Тогда отображение $D_{\mathfrak{G}} = D_{\mathfrak{G}} \oplus D_{\mathfrak{G}}^b \oplus D_{\mathfrak{G}}^c$ будет C^{r_0} -близко к отображению $D_{\mathfrak{F}} = D_{\mathfrak{F}} \oplus \tilde{I}^b \oplus \tilde{\text{id}}$.

Пусть $L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \subset L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ – множество линейных отображений с нормой не больше 1. Определим отображение $\mathfrak{G}^*: L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U(\Lambda) \times M \leftrightarrow$, накрывающее $\mathfrak{G}: U(\Lambda) \times M \leftrightarrow$, следующим образом. Если $L \in L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, то положим

$$\mathfrak{G}^*(L, x, \varphi) = (L^*, \mathfrak{G}(x, \varphi)),$$

где график отображения L^* есть образ графика отображения L под действием $D_{\mathfrak{G}}$. Если матрица отображения $D_{\mathfrak{G}}$, ограниченного на слой $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ над точкой (x, φ) , имеет вид $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, то

$$L^* = (AL + B)(CL + D)^{-1}.$$

Поскольку $D_{\mathfrak{G}}$ близко к $D_{\mathfrak{F}}$, матрица отображения $D_{\mathfrak{F}}$ имеет вид $\begin{pmatrix} (D_S)_x & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, а $L \in L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (т.е. $\|L\| \leq 1$), то отображение $\mathfrak{G}^*$ корректно определено и C^{r_0} -близко к ограничению отображения $\mathfrak{F}^*$ на $L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U(\Lambda) \times M$.

Итак, нам осталось лишь доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Центральные слои отображения G^* совпадают с поднятиями (в силу (4.1)) центральных слоев отображения G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\mathfrak{F}^*$ имеет инвариантное частично гиперболическое множество $\Delta_{\mathfrak{F}}^* = \{0\} \times \Lambda \times M$, гомеоморфное $\Lambda \times M$, которое является максимальным инвариантным множеством в некоторой своей окрестности. Отображение $\mathfrak{G}^*$, являясь C^{r_0} -близким к $\mathfrak{F}^*$, также имеет частично гиперболическое множество $\Delta_{\mathfrak{G}}^*$, гомеоморфное $\Lambda \times M$, являющееся максимальным инвариантным множеством в некоторой своей окрестности.

Рассмотрим ограничение расслоения над $U(\Lambda) \times M$ со слоем $L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ на инвариантное частично гиперболическое множество $\Delta_{\mathfrak{G}}$ отображения $\mathfrak{G}$. Обозначим это ограничение через $L_{\mathfrak{G}}$. Отображение $\mathfrak{G}^*$ накрывает отображение $\mathfrak{G}$, поэтому множество $\Delta_{\mathfrak{G}}^*$ можно рассматривать как сечение расслоения $L_{\mathfrak{G}}$. То, что $\Delta_{\mathfrak{G}}^*$ является максимальным инвариантным множеством для $\mathfrak{G}^*$, означает, что $\Delta_{\mathfrak{G}}^*$ является единственным инвариантным сечением расслоения $L_{\mathfrak{G}}$ под действием $\mathfrak{G}^*|_{L_{\mathfrak{G}}}$. Формула (3.3) определяет отображение $\Delta_{\mathfrak{G}}$ в $L_{\mathfrak{G}}$. При этом отображении оператор $L: T_{\varphi}M \rightarrow T_xN$, $(x, \varphi) \in \Delta_{\mathfrak{G}}$, график которого есть касательное пространство к центральному слою, проходящему через точку (x, φ) , переходит в $L^*: T_{\varphi}M \oplus H_{\varphi}^c \rightarrow T_xN \oplus H_x^b$, где $H_{\varphi}^c \subset \text{Ker } L^*$, $\text{Im } L^* \subset T_xN$. Но поскольку касательные пространства к центральным слоям отображения $\mathfrak{G}$ инвариантны под действием $D\mathfrak{G}$, а отображение $D_{\mathfrak{G}}$ выбрано так, что разложение $T(M \times N) \oplus \widetilde{H}^b \oplus \widetilde{H}^c$ является инвариантным, то сечение, определяемое таким поднятием, обязано быть инвариантным относительно $\mathfrak{G}^*|_{L_{\mathfrak{G}}}$. В силу единственности оно совпадает с $\Delta_{\mathfrak{G}}^*$, что и означает, что центральные слои отображения $\mathfrak{G}^*$ совпадают с поднятиями (в силу (4.1)) центральных слоев отображения $\mathfrak{G}$. Предложение доказано.

Итак, лемма 4.2 доказана. Вместе с базой индукции это доказывает теорему 3.2, и применение теоремы 2.3 дает теорему B'.

§ 5. Некоторые свойства частично гиперболических множеств: доказательство теоремы A

Здесь мы доказываем теорему A и добавление к ней.

Заметим, что для доказательства на самом деле достаточно п. 5.3. Тем не менее, мы сначала описываем свойства косых произведений над сдвигом Бернулли и их гладких реализаций. Эта конструкция несколько проще и имеет отдельные приложения. Например, такие системы появляются при бифуркациях седлоузлов цикла, обладающего несколькими гомоклиническими поверхностями (теорема B из [9]).

5.1. Ступенчатые и мягкие косые произведения над сдвигом Бернулли. Здесь приводятся некоторые определения и утверждения, которые понадобятся в п. 5.2. Пусть Σ^2 – пространство всех бесконечных в обе стороны последовательностей из 0 и 1, а σ – сдвиг Бернулли $\Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$. Метрика на Σ^2

определяется следующим образом:

$$d_{\Sigma^2}(\omega, \omega') = 2^{-k}, \quad k = \min\{j \in \mathbb{Z}^+ \mid \omega_j \neq \omega'_j \text{ или } \omega_{-j} \neq \omega'_{-j}\}. \quad (5.1)$$

Заметим, что сдвиг Бернулли $\sigma: \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$ внутренне гиперболичен, если Σ^2 снабжено метрикой (5.1).

Рассмотрим отображение

$$F: \Sigma^2 \times S^1 \rightarrow \Sigma^2 \times S^1, \quad (\omega, \varphi) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(\varphi)). \quad (5.2)$$

Заметим, что отображение F , применяемое к слою над точкой ω в базе, зависит не от всей последовательности ω , а только от ее элемента ω_0 . Будем называть такие косые произведения *ступенчатыми* косыми произведениями.

Рассмотрим также отображение

$$G: \Sigma^2 \times S^1 \rightarrow \Sigma^2 \times S^1, \quad (\omega, \varphi) \mapsto (\sigma\omega, f_\omega(\varphi)), \quad (5.3)$$

где $f_\omega: S^1 \rightarrow S^1$ зависит от всей последовательности ω . Назовем такие косые произведения *мягкими*.

В работе [10] доказана следующая теорема (здесь мы приводим измененную, но эквивалентную формулировку).

ТЕОРЕМА 5.1. *Существуют такие диффеоморфизмы $g_0, g_1: S^1 \rightarrow S^1$, g_0 и g_1 могут быть взяты произвольно близкими к $\text{id} \in \text{Diff}^2(S^1)$, и такой интервал $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, что для любых $C > 1$, $\beta > \log_2 L$, где*

$$L = \max_{i \in \{0,1\}} \max_{\varphi \in S^1} (\|Dg_i(\varphi)\|, \|Dg_i^{-1}(\varphi)\|), \quad (5.4)$$

и достаточно малых окрестностей $U_0(g_0)$ и $U_1(g_1)$ в $\text{Diff}^2(S^1)$ выполнено следующее. Предположим, что отображение G , (5.3), удовлетворяет следующим условиям:

$$f_\omega \in U_{\omega_0} \quad \text{для любого } \omega \in \Sigma^2, \quad (5.5)$$

$$d_{C^1}(f_\omega, f_{\omega'}) \leq C(d_{\Sigma^2}(\omega, \omega'))^\beta \quad \text{для любых } \omega, \omega' \in \Sigma^2. \quad (5.6)$$

Тогда отображение G обладает следующими свойствами:

- (i) *периодические орбиты отображения G с мультипликатором вдоль окружности по модулю, большим единицы, плотны в $\Sigma^2 \times S^1$; то же выполнено для периодических орбит с мультипликатором по модулю меньше единицы;*
- (ii) *для любого $\lambda \in I$ существует орбита, плотная в $\Sigma^2 \times S^1$, с показателем Ляпунова вдоль окружности, равным λ ;*
- (iii) *если орбита последовательности $\omega \in \Sigma^2$ под действием сдвига Бернулли σ плотна в Σ^2 , то для любого $\varphi \in S^1$ орбита точки (ω, φ) под действием G плотна в $\Sigma^2 \times S^1$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Для ступенчатых косых произведений выполнено следующее утверждение (см. [9], [10]). Существует такой интервал $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, и такие открытые множества $U_0, U_1 \subset \text{Diff}^1(S^1)$, что для любых $f_0, f_1, f_j \in U_j$ отображение F , (5.2), имеет свойства (i)–(iii), сформулированные в теореме 5.1 для отображения G .

5.2. Гладкая реализация и доказательство теоремы А. Рассмотрим стандартную подкову Смейла, реализованную как отображение попарно непересекающихся прямоугольников. Пусть $D = D_0 \cup D_1$, $D' = D'_0 \cup D'_1$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$, $D'_0 \cap D'_1 = \emptyset$. Пусть $S: D \rightarrow D'$ – такое отображение, что $S|_{D_i}: D_i \rightarrow D'_i$ – ограничение на D_i линейного гиперболического отображения с константами сжатия и растяжения, равными $\lambda \in (0, 1)$ и $\lambda^{-1} > 1$ соответственно. Заметим, что константа λ может быть выбрана произвольно малой с помощью подходящего выбора прямоугольников D и D' .

Хорошо известно, что отображение S имеет инвариантное множество Λ , гомеоморфное Σ^2 , и $S|_\Lambda$ сопряжено сдвигу Бернулли $\sigma: \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$.

Рассмотрим локально постоянную функцию $i: D \rightarrow \{0, 1\}$, определенную следующим образом: $i(x) = j \Leftrightarrow x \in D_j$. Косое произведение

$$\mathfrak{F}: D \times S^1 \rightarrow D' \times S^1, \quad \mathfrak{F}(x, \varphi) = (S(x), f_{i(x)}(\varphi)), \quad (5.7)$$

называется *гладкой реализацией* системы (5.2).

Легко видеть, что $\mathfrak{F}|_{\Lambda \times S^1}$ сопряжено отображению F , (5.2). Множество $\Lambda \times S^1$ является частично гиперболическим для $\mathfrak{F}$, а его центральные слои являются слоями проекции на первый сомножитель: $\Lambda \times S^1 \rightarrow \Lambda$, $\Lambda \simeq \Sigma^2$.

Идея доказательства теоремы А состоит в следующем. Возьмем g_0 и g_1 , как в теореме 5.1. Рассмотрим отображение $\mathfrak{F}$, (5.7), – гладкую реализацию отображения F , (5.2), с $f_0 = g_0$ и $f_1 = g_1$. Если $\mathfrak{G}$ есть C^2 -малое возмущение такого отображения $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{G}$ также имеет частично гиперболическое инвариантное множество, которое сопряжено мягкому косому произведению G , (5.3). Более того, ограничение этого сопряжения на любой центральный слой является диффеоморфизмом. Если бы это отображение G удовлетворяло условиям теоремы 5.1, то отображение $\mathfrak{G}$ обладало бы свойствами (i) и (ii) из теоремы А. Чтобы быть уверенными, что отображение G действительно удовлетворяет условиям теоремы 5.1, необходимо действовать следующим образом.

Пусть S – стандартная подкова Смейла, $S: D \rightarrow D'$. Рассмотрим отображение $\mathfrak{F}_0 = S \times \text{id}_{S^1}$. Тогда по теореме В существует такая C^2 -окрестность (обозначим эту окрестность через V_1) отображения $\mathfrak{F}_0$, что для любого отображения $\mathfrak{G}$ из V_1 его центральные слои Гёльдера зависят от точки в Λ в C^1 -норме с равномерными показателем Гёльдера и константой Гёльдера. Системы $(\Lambda, S|_\Lambda)$ и (Σ^2, σ) сопряжены, и сопряжение также Гёльдерово. Следовательно, существуют такие константы $C > 1$ и $\beta > 0$, что ограничение любого отображения $\mathfrak{G} \in V_1$ на его инвариантное частично гиперболическое множество сопряжено некоторому отображению G вида (5.3), для которого выполнено условие (5.6).

Далее, определим функцию $L: V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом. Если ограничение отображения $\mathfrak{G} \in V_1$ на его инвариантное частично гиперболическое множество сопряжено отображению G , (5.3), то

$$L(\mathfrak{G}) = \max_{\omega \in \Sigma^2} \max_{\varphi \in S^1} (\|Df_\omega(\varphi)\|, \|Df_\omega^{-1}(\varphi)\|).$$

Заметим, что $L(\mathfrak{F}_0) = 1$. Существует такая C^2 -окрестность отображения $\mathfrak{F}_0$ (обозначим ее через V_2), что $V_2 \subset V_1$ и для любого $\mathfrak{G} \in V_2$ значение $L(\mathfrak{G})$ близко к 1, а именно $\log_2 L < \beta$.

По теореме 5.1 диффеоморфизмы g_0 и g_1 могут быть взяты произвольно близкими к $\text{id} \in \text{Diff}^2(S^1)$. Возьмем такие диффеоморфизмы g_0 и g_1 , что гладкая реализация отображения F , (5.2), с $f_0 = g_0$ и $f_1 = g_1$ принадлежит V_2 .

Тогда для любого достаточно C^2 -малого возмущения $\mathfrak{G}$ этой гладкой реализации его ограничение на инвариантное частично гиперболическое множество сопряжено мягкому косому произведению G , (5.3), для которого выполнены все условия теоремы 5.1 (условие (5.6) и неравенство $\log_2 L < \beta$, где L такое же, как в (5.4), выполнены в силу выбора V_1 и V_2 ; условие (5.5) выполнено, потому что центральные слои возмущенного отображения C^2 -близки к центральным слоям рассматриваемой гладкой реализации). Итак, G обладает свойствами (i) и (ii) из утверждения теоремы 5.1, поэтому $\mathfrak{G}$ имеет свойства (i) и (ii) из утверждения теоремы А. Теорема А доказана.

5.3. Косые произведения над соленоидом и доказательство добавления. Конструкция, с помощью которой доказывается добавление, очень похожа на конструкцию, приведенную в пп. 5.1, 5.2. Единственное отличие состоит в том, что теперь мы должны рассмотреть малые возмущения прямого произведения отображения, имеющего гиперболический аттрактор (вместо подковы Смейла), на тождественное отображение. Возьмем для этого соленоид Смейла–Вильямса $\mathbf{S}: T \rightarrow T$, $T = S^1 \times B$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbf{S}(s, z) = (2s, \frac{1}{3}z + \exp\{2\pi i s\})$. Рассмотрим теперь косое произведение

$$G: T \times S^1 \rightarrow T \times S^1, \quad (x, \varphi) \mapsto (\mathbf{S}(x), f_x(\varphi)), \quad x \in T, \quad \varphi \in S^1. \quad (5.8)$$

При любом выборе f_x отображение (5.8) имеет максимальный аттрактор Δ . Обозначим его проекцию на базу T вдоль слоев S^1 через Λ . Последнее множество является исходным соленоидом, и это обстоятельство не зависит от f_x .

Аналогом теоремы 5.1 для косых произведений над соленоидом является следующая теорема (общий подход и полное доказательство свойства (i) приведены в работе [10]).

ТЕОРЕМА 5.2. *Для любых $C > 1, \beta > 0$ произвольно близко к $\text{id} \in \text{Diff}^2(S^1)$ существуют такие C^2 -открытые множества $U_0, U_1 \subset \text{Diff}^2(S^1)$, что выполнено следующее. Пусть отображение G , (5.8), удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) $f_x \in U_0$, если $x = (s, z) \in \Lambda_0 := \{\frac{1}{8} \leq s \leq \frac{1}{2}\}$;
- 2) $f_x \in U_1$, если $x = (s, z) \in \Lambda_1 := \{\frac{5}{8} \leq s \leq 1\}$;
- 3) если $L = \max_{x \in \Lambda} \max_{\varphi \in S^1} (\|Df_x(\varphi)\|, \|Df_x^{-1}(\varphi)\|)$, то $2^{-\beta}L < 1$;
- 4) $\|D_\varphi^2 f_x\| < T$, $\|D_\varphi^2 f_x^{-1}\| < T$ для некоторой константы $T > 0$ и любых значений x, φ ;
- 5) $d_{C^1}(f_x, f_y) \leq C(d_\Lambda(x, y))^\beta$ для любых $x, y \in \Lambda$.

Тогда отображение G имеет следующие свойства:

(i) периодические орбиты отображения G с мультипликатором вдоль окружности по модулю больше единицы плотны в $\Lambda \times S^1$; то же выполнено для периодических орбит с мультипликатором вдоль окружности по модулю меньше единицы;

(ii) существует такой интервал $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, что для любого $\lambda \in I$ существует плотная в $\Lambda \times S^1$ орбита с показателем Ляпунова вдоль окружности, равным λ ;

(iii) если орбита точки $x \in \Lambda$ под действием отображения $\mathbf{S}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ плотна в Λ , то для любого $\varphi \in S^1$ орбита точки (x, φ) под действием G плотна в $\Lambda \times S^1$.

Теперь мы можем рассуждать почти так же, как и в п. 5.2. А именно, рассмотрим прямое произведение отображения соленоида Смейла–Вильямса $\mathbf{S}$ на тождественное отображение окружности. По теореме В существует такая C^2 -окрестность W_1 отображения $\mathbf{S} \times \text{id}$, что любое отображение $\mathfrak{G}$ из W_1 имеет частично гиперболическое множество Δ с центральными слоями класса гладкости C^2 , которые гёльдерово зависят от точки в базе в C^1 -норме. Более того, показатель Гёльдера и константа Гёльдера могут быть выбраны одними и теми же для любого отображения $\mathfrak{G}$ из W_1 . Из этого следует, что любое отображение $\mathfrak{G} \in W_1$, ограниченное на свое инвариантное частично гиперболическое множество Δ , сопряжено косому произведению G , (5.8), которое удовлетворяет свойствам 4), 5) с равномерными константами $\beta > 0$ и $C > 1$. Ограничение этого сопряжения на любой центральный слой является диффеоморфизмом. При фиксированном $\beta > 0$ мы можем выбрать другую окрестность $W_2 \subset W_1$ таким образом, что для любого отображения $\mathfrak{G} \in W_2$ соответствующее косое произведение дополнительно удовлетворяет свойству 3).

Рассмотрим множества $U_0, U_1 \subset \text{Diff}^2(S^1)$ такие, как в теореме 5.2. Если U_0, U_1 достаточно близки к тождественному отображению, то существует такое открытое подмножество в W_2 , что для любого отображения $\mathfrak{G}$ из этого подмножества соответствующее косое произведение удовлетворяет также и свойствам 1) и 2). По теореме 5.2 это косое произведение имеет свойства (i)–(iii) из утверждения теоремы 5.2. Из этого следует, что отображение $\mathfrak{G}$ имеет свойства (i), (ii) из утверждения теоремы А. Добавление доказано.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору Ю. С. Ильяшенко, за постоянную поддержку и безграничное терпение. Я также благодарю Э. Вилкинсон, М. Шуба и Д. Долгопята за их интерес к моей работе, Д. В. Аносова за его замечания, которые привели к существенному улучшению текста, а также Корнельский университет, США, и лично Дж. Гукенхаймера за гостеприимство.

Список литературы

1. Alekseev V. M., Yakobson M., “Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems”, *Phys. Rep.*, **75**:5 (1981), 290–325.
2. Аносов Д. В., *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны*, Тр. МИАН СССР, **90**, Наука, М., 1967.
3. Bonatti C., Diaz L. J., “Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms”, *Ann. of Math.*, **143**:2 (1996), 357–396.
4. Bonatti C., Viana M., “SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting”, *Israel J. Math.*, **115** (2000), 157–193.
5. Bowen R., “Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377–397.
6. Brin M., “Hölder continuity of invariant distributions”, *Smooth ergodic theory and its applications*, Proc. AMS Summer Research Institute held at the University of Washington (Seattle, WA, July 26–August 13, 1999), **69**, eds. A. Katok, R. de la Llave, Ya. Pesin, H. Weiss, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
7. Брин М. И., Песин Я. Б., “Частично гиперболические динамические системы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:1 (1974), 170–212.
8. Dawson S., Grebogi C., Sauer T., Yorke J., “Obstructions to shadowing when a Lyapunov exponent fluctuates about zero”, *Phys. Rev. Lett.*, **73**:14 (1994), 1927–1930.

9. Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С., “Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **33**:2 (1999), 16–30.
10. Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С., “Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом”, Тр. МИАН, **231**, Наука; МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2000, 90–112.
11. Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С., Клепцын В. А., Нальский М. Б., “Неустрашимость нулевых показателей Ляпунова”, *Функциональный анализ и его приложения*, **39**:1 (2005), 27–38.
12. Hasselblatt B., “Regularity of the Anosov splitting and of horospheric foliations”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **14**:4 (1994), 645–666.
13. Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M., *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
14. Pyashenko Yu., Li W., *Nonlocal bifurcations*, Mathematical Surveys and Monographs, **66**, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.
15. Katok A., Hasselblatt B., *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, **54**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
16. Клепцын В. А., Нальский М. Б., “Устойчивость существования негиперболических мер для C^1 -диффеоморфизмов”, *Функцион. анализ и его прилож.*, 2006 (в печати).
17. Kostelich E. J., Kan Ittai, Grebogi C., Ott E., Yorke J., “Unstable dimension variability: a source of nonhyperbolicity in chaotic systems”, *Physica D*, **109**:1–2 (1997), 81–90.
18. Nițică V., Török A., “Cohomology of dynamical systems and rigidity of partially hyperbolic actions of higher-rank lattices”, *Duke Math. J.*, **79**:3 (1995), 751–810.
19. Nițică V., Török A., “An open dense set of stably ergodic diffeomorphisms in a neighborhood of a non-ergodic one”, *Topology*, **40**:2 (2001), 259–278.
20. Pesin Ya. B., *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity*, Zür. Lect. Adv. Math., European Mathematical Society, Zürich, 2004.
21. Pugh C., Shub M., Wilkinson A., “Hölder foliations”, *Duke Math. J.*, **86**:3 (1997), 517–546.
22. Ruelle D., Wilkinson A., “Absolutely singular dynamical foliations”, *Comm. Math. Phys.*, **219**:3 (2001), 481–487.
23. Schmeling J., Siegmund-Schultze Ra., “Hölder continuity of the holonomy maps for hyperbolic basic sets. I”, *Ergodic theory and related topics. III*, Proc. 3rd Int. Conf. (Güstrow, 1990), **1514**, 1992, 174–191.
24. Shub M., *Global stability of dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, 1987.
25. Shub M., Wilkinson A., “Pathological foliations and removable zero exponents”, *Invent. Math.*, **139**:3 (2000), 495–508.
26. Yuan G.-Ch., Yorke J. A., “An open set of maps for which every point is absolutely nonshadowable”, *Proc. Amer. Math.*, **128** (2000), 909–918.

А. С. ГОРОДЕЦКИЙ (A. S. GORODETSKI)
 California Institute of Technology
 E-mail: asgor@mccme.ru

Поступило в редакцию
 11.07.2001
 20.12.2005