Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Пирковский, Гомологические размерности и изоморфизмы Ван ден Берга для ядерных алгебр Фреше, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 4, 65–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/im6792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 06:03:30

УДК 517.986.2+512.664.2

А. Ю. Пирковский

Гомологические размерности и изоморфизмы Ван ден Берга для ядерных алгебр Фреше

Показано, что для ядерной алгебры Фреше–Аренса–Майкла A , имеющей конечную слабую биразмерность, справедливо равенство $w.\text{dg } A = w.\text{db } A$, где $w.\text{dg } A$ – слабая глобальная размерность, а $w.\text{db } A$ – слабая биразмерность алгебры A . При дополнительном предположении, что алгебра A обладает проективной бимодульной резольвентой конечного типа и имеет конечную биразмерность, установлена оценка $\text{db } A \leq \text{dg } A + 1$, где $\text{dg } A$ – глобальная размерность, а $\text{db } A$ – биразмерность алгебры A . Для ядерных алгебр Фреше–Аренса–Майкла, удовлетворяющих соотношениям Ван ден Берга $\text{VdB}(n)$, получены равенства $\text{dg } A = \text{db } A = w.\text{dg } A = w.\text{db } A = n$. В качестве приложения вычислены гомологические размерности гладкого и комплексно-аналитического квантовых тором.

Библиография: 82 наименования.

Ключевые слова: ядерная алгебра Фреше, глобальная размерность, биразмерность, изоморфизмы Ван ден Берга, гомологии Хохшильда.

§ 1. Введение

Среди всевозможных числовых гомологических инвариантов ассоциативных алгебр наиболее популярна, пожалуй, глобальная размерность. Также важную роль играет биразмерность (она же – размерность Хохшильда, или когомологическая размерность), определяемая в терминах обращения в нуль групп когомологий Хохшильда. Кроме того, имеются “слабые”, или “плоские”, разновидности этих размерностей – слабая глобальная размерность и слабая биразмерность. Все эти четыре гомологические характеристики имеют смысл как в контексте классической гомологической алгебры [1], т. е. для алгебр над произвольным полем, не снабженных топологией, так и в контексте функционального анализа – для локально выпуклых топологических алгебр над полем комплексных чисел [2].

Следуя [2], [3], для заданной $\mathbb{C}$ -алгебры A обозначим через $\text{dg } A$ ее глобальную размерность, через $\text{db } A$ – ее биразмерность, через $w.\text{dg } A$ – ее слабую глобальную размерность и через $w.\text{db } A$ – ее слабую биразмерность. Во многих простейших случаях все эти размерности равны друг другу. Например, хорошо известно, что для алгебры многочленов $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ (рассматриваемой в контексте классической гомологической алгебры) все они равны n . Аналогичные примеры существуют и в гомологической теории банаховых и топологических алгебр (см. [2], [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00867), Федерального агентства по образованию (АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы”, проект № 2.1.1/2775) и Программы Президента РФ “Поддержка молодых российских ученых” (грант МК-1173.2009.1).

© А. Ю. Пирковский, 2012

В общем случае вышеупомянутые гомологические размерности связаны друг с другом неравенствами

$$w.\mathrm{dg}\, A \leqslant \mathrm{dg}\, A, \quad w.\mathrm{db}\, A \leqslant \mathrm{db}\, A, \quad \mathrm{dg}\, A \leqslant \mathrm{db}\, A, \quad w.\mathrm{dg}\, A \leqslant w.\mathrm{db}\, A. \quad (1.1)$$

Если рассматривать эти неравенства в контексте классической гомологической алгебры, то существуют примеры, показывающие, что каждое из них может быть строгим. Например, неравенствам $w.\mathrm{dg}\, A < \mathrm{dg}\, A$ и $w.\mathrm{db}\, A < \mathrm{db}\, A$ удовлетворяет групповая алгебра $\mathbb{C}G$ любой бесконечной периодической абелевой группы G : известно, что $w.\mathrm{db}\, \mathbb{C}G = 0$ [4], в то время как $\mathrm{dg}\, \mathbb{C}G > 0$ в силу бесконечности группы G . Неравенства $\mathrm{dg}\, A < \mathrm{db}\, A$ и $w.\mathrm{dg}\, A < w.\mathrm{db}\, A$ “обслуживаются” алгеброй $\mathbb{C}(t)$ рациональных функций: с одной стороны, $\mathrm{dg}\, \mathbb{C}(t) = 0$ (так как $\mathbb{C}(t)$ – поле и все $\mathbb{C}(t)$ -модули свободны), а с другой стороны, $w.\mathrm{db}\, \mathbb{C}(t) > 0$ (это следует, например, из результатов работы [4]). Те же неравенства имеют место в случае, когда $A = \mathcal{O}_q^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^2)$ – алгебраический квантовый тор (см. пример 9.13): с одной стороны, $\mathrm{dg}\, \mathcal{O}_q^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^2) = w.\mathrm{dg}\, \mathcal{O}_q^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^2) = 1$, если параметр q не является корнем из единицы [5], а с другой стороны, $\mathrm{db}\, \mathcal{O}_q^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^2) = w.\mathrm{db}\, \mathcal{O}_q^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^2) = 2$ (см. также замечание 11.7).

В теории топологических алгебр ситуация с неравенствами (1.1) исследована несколько хуже. С одной стороны, легко привести примеры топологических (и даже банаховых) алгебр, удовлетворяющих строгим неравенствам $w.\mathrm{dg}\, A < \mathrm{dg}\, A$ и $w.\mathrm{db}\, A < \mathrm{db}\, A$. Такова, например, алгебра непрерывных функций $C(\Omega)$ на любом бесконечном компакте Ω : известно, что $w.\mathrm{db}\, C(\Omega) = 0$ ввиду аменабельности алгебры $C(\Omega)$ (см. [2, гл. VII, теорема 2.6]), в то время как $\mathrm{dg}\, C(\Omega) > 0$ [6]; более того, $\mathrm{dg}\, C(\Omega) \geqslant 2$ в силу теоремы А. Я. Хелемского о глобальной размерности [7]. С другой стороны, в рамках естественных классов топологических алгебр, по-видимому, до сих пор не найдено ни одной алгебры A , для которой выполнялось бы строгое неравенство $\mathrm{dg}\, A < \mathrm{db}\, A$ или $w.\mathrm{dg}\, A < w.\mathrm{db}\, A$. Эта проблема была явно сформулирована А. Я. Хелемским [8] в 1994 г. и, по-видимому, остается пока открытой даже для весьма широкого класса так называемых $\widehat{\otimes}$ -алгебр (т. е. полных локально выпуклых алгебр с совместно непрерывным умножением).

Наряду с этой проблемой представляет интерес и следующий вопрос противоположного характера: существует ли какой-либо естественный и достаточно широкий класс алгебр, для которых имеет место равенство $\mathrm{dg}\, A = \mathrm{db}\, A$ или $w.\mathrm{dg}\, A = w.\mathrm{db}\, A$? Насколько известно автору, в контексте классической гомологической алгебры результаты такого рода существуют лишь для конечномерных алгебр¹ [9], [10] и алгебр, конечномерных по модулю радикала Джекобсона, предполагаемого нильпотентным [11]. В контексте же локально выпуклых топологических алгебр такие вопросы, по-видимому, не изучались.

По ряду причин принято считать, что среди различных классов топологических векторных пространств, изучаемых в функциональном анализе, наиболее близкими к конечномерным являются ядерные пространства. Поэтому исходя из вышеупомянутых “чисто алгебраических” результатов естественно исследовать вопрос о выполнении равенств $\mathrm{dg}\, A = \mathrm{db}\, A$ или $w.\mathrm{dg}\, A = w.\mathrm{db}\, A$ именно в классе ядерных алгебр. В этом и состоит главная цель настоящей работы.

Основной результат первой половины работы – теорема 6.6, утверждающая, что для ядерной алгебры Фреше–Аренса–Майкла A (см. определения

¹Разумеется, здесь идет речь только о результатах общего характера; конкретных же примеров алгебр, для которых справедливы оба эти равенства, гораздо больше.

в § 2), удовлетворяющей условию $w.db A < \infty$, справедливо равенство $w.dg A = w.db A$. Для размерностей dg и db получить аналогичный результат пока, к сожалению, не удастся; тем не менее, мы показываем (теорема 7.14), что если $db A < \infty$ и алгебра A удовлетворяет одному из двух дополнительных условий, то выполнено неравенство $db A \leq dg A + 1$. Первое дополнительное условие заключается в том, что алгебра A обладает проективной бимодульной резольвентой, состоящей из конечно порожденных бимодулей (в этом случае мы говорим, что A – алгебра конечного типа). Алгебр конечного типа довольно много; таковы, например, многие алгебры гладких и голоморфных функций на многообразиях, а также некоторые их некоммутативные аналоги (см. § 7). Альтернативное условие состоит в том, что подлежащее локально выпуклое пространство алгебры A удовлетворяет условиям (Ω) и (DN) Д. Фогта (см. [12, гл. IV]; примеры таких алгебр также см. в § 7).

Во второй половине работы мы будем исследовать алгебры, гомологии и когомологии Хохшильда которых связаны между собой определенными соотношениями, напоминающими изоморфизмы Пуанкаре в топологии многообразий. В контексте классической гомологической алгебры эти соотношения были впервые систематически рассмотрены М. Ван ден Бергом [13], поэтому мы называем их *соотношениями* (или *изоморфизмами*) *Ван ден Берга*. В теории топологических алгебр соотношениям Ван ден Берга удовлетворяют многие алгебры гладких, голоморфных и обобщенных функций, некоторые пополнения универсальных обертывающих алгебр (в частности, сверхоболочки П. К. Рашевского [14], весовые пополнения Р. Гудмана [15], [16] и алгебры аналитических функционалов Г. Л. Литвинова [17]–[19]), а также гладкий и комплексно-аналитический квантовые торы [20], [21] (см. § 9–11). Основным результатом этой части работы – теорема 9.20, утверждающая, что если ядерная алгебра Фреше–Аренса–Майкла A удовлетворяет условию Ван ден Берга $VdB(n)$, то справедливы равенства $dg A = db A = w.dg A = w.db A = n$. В качестве следствия мы показываем, что для n -мерных гладкого и комплексно-аналитического квантовых торов все четыре размерности dg , db , $w.dg$ и $w.db$ равны n . Этот результат интересно сравнить с вышеупомянутой теоремой Дж. Макконнелла и Дж. Петтита [5], утверждающей, что в случае общего положения глобальная размерность n -мерного алгебраического квантового тора равна единице.

Главными техническими инструментами, использованными при доказательстве основных результатов настоящей работы, являются развитая в § 3 техника ядерных морфизмов дуальных пар и факторизационные леммы из § 4. Эти методы, относящиеся скорее к общей теории локально выпуклых пространств, чем к гомологической теории локально выпуклых алгебр, уже были частично использованы автором [22] для решения проблемы существования инъективных модулей над некоторыми классическими алгебрами Фреше. В настоящей работе эти методы существенно обобщены и систематизированы. Не исключено, что они могут оказаться полезными и для решения других задач.

§ 2. Предварительные сведения

В этом параграфе мы напомним некоторые определения и факты о топологических векторных пространствах, алгебрах и модулях. Все векторные пространства и алгебры в настоящей работе будут рассматриваться над полем

комплексных чисел $\mathbb{C}$. Алгебры по умолчанию предполагаются ассоциативными и унитарными (т.е. обладающими единицей), а гомоморфизмы алгебр – сохраняющими единичные элементы. Модули над алгебрами также предполагаются унитарными (т.е. единица алгебры действует на модуле как тождественное преобразование).

Категория всех векторных пространств будет обозначаться через $\mathbf{Vect}$, категория алгебр – через $\mathbf{Alg}$. Если A, B – алгебры, то обозначим через $A\text{-Mod}$, $\text{Mod-}A$ и $A\text{-Mod-}B$ соответственно категории левых A -модулей, правых A -модулей и A - B -бимодулей. Полная подкатегория в $\mathbf{Vect}$, состоящая из пространств не более чем счетной размерности, будет обозначаться через $\mathbf{Vect}_\omega$. Аналогичный смысл имеют обозначения $\mathbf{Alg}_\omega$, $A\text{-Mod}_\omega$ и т.п.

Термин “локально выпуклое пространство” (ЛВП) всегда будет означать векторное пространство, снабженное локально выпуклой топологией (в отличие от большинства руководств по теории топологических векторных пространств, мы не требуем хаусдорфовости рассматриваемых ЛВП). В то же время термин “полное ЛВП” будет означать полное хаусдорфово ЛВП. Пополнение ЛВП E определяется как пополнение ассоциированного с ним хаусдорфова ЛВП $E_{\text{sep}} = E/\{0\}$ и обозначается через $\tilde{E}$ или $E^\sim$. Категория всех полных ЛВП будет обозначаться через $\mathbf{LCS}$.

Проективное тензорное произведение ЛВП E и F будет обозначаться через $E \otimes_\pi F$, а его пополнение (полное проективное тензорное произведение) – через $E \hat{\otimes} F$. Предположим для простоты обозначений, что E и F хаусдорфовы, и напомним (см., например, [23, гл. III, § 6]), что базы окрестностей нуля в пространствах $E \otimes_\pi F$ и $E \hat{\otimes} F$ могут быть построены следующим образом. Для каждой пары подмножеств $U \subset E$ и $V \subset F$ рассмотрим множество²

$$U \otimes V = \{x \otimes y : x \in U, y \in V\} \subset E \otimes F \quad (2.1)$$

и обозначим через $\Gamma(U \otimes V)$ его абсолютно выпуклую оболочку. Тогда если U пробегает какую-либо базу абсолютно выпуклых окрестностей нуля в E , а V – какую-либо базу абсолютно выпуклых окрестностей нуля в F , то множества вида $\Gamma(U \otimes V)$ образуют базу окрестностей нуля в $E \otimes_\pi F$, а их замыкания $\overline{\Gamma(U \otimes V)}$ в пространстве $E \hat{\otimes} F$ – базу окрестностей нуля в $E \hat{\otimes} F$. Напомним также, что топология на пространствах $E \otimes_\pi F$ и $E \hat{\otimes} F$ определяется семейством всевозможных проективных тензорных полунорм $p \otimes q$, где p пробегает произвольное направленное определяющее семейство полунорм на E , а q – на F .

Пространство непрерывных линейных отображений между ЛВП E и F будет обозначаться через $\mathcal{L}(E, F)$. Для каждого ЛВП G и каждого $u \in \mathcal{L}(E, F)$ имеем линейные отображения

$$\begin{aligned} u_{G,*} : \mathcal{L}(G, E) &\rightarrow \mathcal{L}(G, F), & \varphi &\mapsto u \circ \varphi, \\ u_G^* : \mathcal{L}(F, G) &\rightarrow \mathcal{L}(E, G), & \varphi &\mapsto \varphi \circ u, \end{aligned}$$

естественные по G в очевидном смысле.

Пусть E, F – ЛВП. Для любых подмножеств $S \subset E$ и $U \subset F$ положим

$$M(S, U) = \{\varphi \in \mathcal{L}(E, F) : \varphi(S) \subset U\}.$$

²Разумеется, если $U \subset E$ и $V \subset F$ – векторные подпространства, то их тензорное произведение как подмножеств в E и F не совпадает с их тензорным произведением как векторных пространств. Тем не менее, использование символа $\otimes$ в данном контексте является общепринятым и не приводит к недоразумениям.

Если $\mathfrak{S}$ – некоторая фиксированная система ограниченных подмножеств пространства E , то множества вида $M(S, U)$, где S пробегает $\mathfrak{S}$, а U – произвольную предбазу окрестностей нуля в F , образуют предбазу окрестностей нуля для некоторой локально выпуклой топологии на $\mathcal{L}(E, F)$. Эта топология называется *топологией равномерной сходимости* на элементах из $\mathfrak{S}$. Пространство $\mathcal{L}(E, F)$, снабженное топологией равномерной сходимости на *всех* ограниченных подмножествах пространства E , будет обозначаться через $\mathcal{L}_b(E, F)$. Отметим, что для нормированных пространств E и F топология на пространстве $\mathcal{L}_b(E, F)$ задается обычной операторной нормой; нормированное пространство $\mathcal{L}_b(E, F)$ мы будем иногда обозначать просто $\mathcal{L}(E, F)$.

Напомним (см., например, [23], [24]), что *дуальной парой* векторных пространств называется пара векторных пространств (E, F) вместе с невырожденной билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times F \rightarrow \mathbb{C}$. Сокращенно такая дуальная пара будет обозначаться через $\langle E, F \rangle$. *Полярной* подмножества $S \subset E$ называется множество

$$S^\circ = \{y \in F: |\langle x, y \rangle| \leq 1 \ \forall x \in S\} \subset F$$

(т. е. S° – это поляр в смысле [24] и абсолютная поляр в смысле [23]).

Векторное пространство, сопряженное к ЛВП E , будет обозначаться через E' , а линейный оператор из F' в E' , сопряженный к непрерывному линейному оператору $u: E \rightarrow F$, через u' . Если не оговорено противное, пространство E' будет снабжаться сильной топологией, т. е. топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах; таким образом, $E' = \mathcal{L}_b(E, \mathbb{C})$.

Пусть E – векторное пространство. Следуя [25], будем называть *диск* в E любое абсолютно выпуклое подмножество $B \subset E$. Для диска $B \subset E$ положим

$$E_B = \text{span } B = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda B.$$

Подпространство E_B всегда будет рассматриваться как полунормированное пространство относительно функционала Минковского множества B . Тожественное вложение пространства E_B в E будем обозначать через $\varkappa_B$. Отметим, что если E – ЛВП и диск B ограничен, то отображение $\varkappa_B$ непрерывно. Диск B называется *банаховым диском*, если E_B – банахово пространство.

Пусть дана обратная система³ $\mathcal{E} = (E_i, \varphi_{ij}, I)$ локально выпуклых пространств со связующими отображениями $\varphi_{ij}: E_j \rightarrow E_i$, $i < j$. Положим $E = \varprojlim E_i$. Напомним, что обратная система $\mathcal{E}$ называется *приведенной*, если образ каждой канонической проекции $E \rightarrow E_i$ плотен в E_i . Если $I = \mathbb{N}$, а все пространства E_i являются пространствами Фреше, то для приведенности системы $\mathcal{E}$ достаточно, чтобы связующие отображения $\varphi_{i, i+1}$ имели плотные образы [27, гл. II, § 3, п. 5]. Это условие достаточно для того, чтобы $\varprojlim^1 E_i = 0$ [28, теорема 5.1], где $\varprojlim^1$ – первый производный функтор функтора обратного предела. Напомним в этой связи (см., например, [28] или [29]), что в общем случае пространство $\varprojlim^1 E_i$ определяется как коядро отображения

$$\Delta: \prod_{i=1}^{\infty} E_i \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \Delta(x)_i = x_i - \varphi_{i, i+1}(x_{i+1}).$$

³Следуя [26], мы предпочитаем термин “обратная система” терминам “обратный спектр” и “проективный спектр”, а термин “обратный предел” – термину “проективный предел”.

Пусть E – векторное пространство, p – полунорма на E . Факторпространство $E_p^0 = E/p^{-1}(0)$ является нормированным пространством относительно факторнормы полунормы p . Его пополнение будет обозначаться через E_p , а отображение $E \rightarrow E_p$, $x \mapsto x + p^{-1}(0)$, через τ_p . Если E – топологическое векторное пространство, а полунорма p непрерывна, то и отображение τ_p непрерывно. В этом случае пара (E_p, τ_p) (или само пространство E_p) будет называться *сопутствующим пространству E банаховым пространством*, соответствующим полунорме p . Если p, q – непрерывные полунормы на E , причем $p \leq Cq$ для некоторого $C > 0$ (в этом случае будем писать $p \prec q$), то существует непрерывное линейное отображение $\tau_{pq}: E_q \rightarrow E_p$, удовлетворяющее соотношению $\tau_{pq}\tau_q = \tau_p$.

Предположим теперь, что пространство E локально выпукло, и зафиксируем произвольное направленное (относительно порядка $\prec$) семейство непрерывных полунорм $\mathcal{P}$ на E , определяющее его топологию. Тогда банаховы пространства E_p и отображения τ_{pq} (где p пробегает $\mathcal{P}$) образуют приведенную обратную систему, а отображения τ_p , $p \in \mathcal{P}$, определяют каноническое непрерывное линейное отображение $\tau: E \rightarrow \varprojlim (E_p, \tau_{pq}, \mathcal{P})$. Известно (см., например, [23, гл. II, § 5] или [26, гл. 5]), что пространство $\varprojlim E_p$ отождествляется с пополнением пространства E , а отображение τ – с каноническим отображением из E в его пополнение. Как следствие, если пространство E полно, то τ – топологический изоморфизм.

Топологической алгеброй в настоящей работе будет называться алгебра A , снабженная локально выпуклой топологией, относительно которой операция умножения $A \times A \rightarrow A$ раздельно непрерывна. Если A полна, а умножение в A совместно непрерывно, то она называется $\widehat{\otimes}$ -алгеброй [2], [30]. Умножение в $\widehat{\otimes}$ -алгебре A однозначно определяет непрерывное линейное отображение $A \widehat{\otimes} A \rightarrow A$, $a \otimes b \mapsto ab$ (отсюда и название “ $\widehat{\otimes}$ -алгебра”).

Множество всех автоморфизмов алгебры A будет обозначаться через $\text{Aut}(A)$. Если A – топологическая алгебра, то через $\text{Aut}(A)$ также будет обозначаться множество всех ее топологических автоморфизмов (к путанице это не приведет).

Полунорма $\|\cdot\|$ на алгебре A называется *субмультипликативной*, если она удовлетворяет условию $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ для всех $a, b \in A$. Топологическая алгебра A называется *локально m -выпуклой* [31], если ее топология может быть задана некоторым семейством субмультипликативных полунорм. Полная локально m -выпуклая алгебра называется *алгеброй Аренса–Майкла* [26]. Отметим, что всякая банахова алгебра является алгеброй Аренса–Майкла, а всякая алгебра Аренса–Майкла – $\widehat{\otimes}$ -алгеброй. Под *алгеброй Фреше* в настоящей работе будет пониматься метризуемая (но не обязательно локально m -выпуклая) $\widehat{\otimes}$ -алгебра.

Пусть A – алгебра. Ее пополнение относительно топологии, порожденной семейством всех субмультипликативных полунорм на A , называется ее *оболочкой Аренса–Майкла* и обозначается через $\hat{A}$ (см. [26], [30]). Каноническое отображение из A в $\hat{A}$ обозначается через ι_A . Оболочка Аренса–Майкла обладает следующим универсальным свойством, полностью ее характеризующим: если B – алгебра Аренса–Майкла и $\varphi: A \rightarrow B$ – гомоморфизм, то существует единственный непрерывный гомоморфизм $\widehat{\varphi}: \hat{A} \rightarrow B$, удовлетворяющий условию $\widehat{\varphi} \circ \iota_A = \varphi$.

Если A – алгебра, а p – субмультипликативная полунорма на A , то легко видеть, что $p^{-1}(0)$ – двусторонний идеал в A , сопутствующее банахово пространство A_p – банахова алгебра, а каноническое отображение τ_p – гомоморфизм алгебр. Поэтому из вышеизложенного следует (см. также [31] или [26, гл. 5]), что если A – алгебра Аренса–Майкла, а $\mathcal{P}$ – любое направленное определяющее семейство субмультипликативных полунорм на A , то существует изоморфизм топологических алгебр $\tau: A \rightarrow \varprojlim (A_p, \tau_{pq}, \mathcal{P})$, называемый иногда *разложением Аренса–Майкла* алгебры A .

Пусть A – топологическая алгебра, B – банахова алгебра, $\varphi: A \rightarrow B$ – непрерывный гомоморфизм с плотным образом. Определим полунорму p на A формулой $p(a) = \|\varphi(a)\|$, $a \in A$. Легко видеть, что p непрерывна, субмультипликативна и существует единственный изометрический изоморфизм банаховых алгебр $\iota: A_p \rightarrow B$, удовлетворяющий условию $\iota\tau_p = \varphi$. В соответствии с этим нам будет удобно несколько расширить данное выше определение и назвать *сопутствующей алгебре A банаховой алгеброй* любую пару вида (B, φ) , где B – банахова алгебра, а $\varphi: A \rightarrow B$ – непрерывный гомоморфизм с плотным образом. Если (A_1, φ_1) и (A_2, φ_2) – сопутствующие алгебре A банаховы алгебры, то мы будем использовать обозначение $(A_1, \varphi_1) \prec (A_2, \varphi_2)$, если существует такой (необходимо единственный) непрерывный гомоморфизм $\varphi_{12}: A_2 \rightarrow A_1$, что $\varphi_{12}\varphi_2 = \varphi_1$. Это эквивалентно тому, что $p_1 \prec p_2$, где $p_i = \|\varphi_i(\cdot)\|$, $i = 1, 2$.

Пусть A – алгебра. *Левым топологическим A -модулем* будем называть левый A -модуль X , снабженный локально выпуклой топологией, относительно которой все отображения $X \rightarrow X$, $x \mapsto a \cdot x$ (где $a \in A$), непрерывны. Если A – топологическая алгебра, то будем дополнительно требовать, чтобы все отображения $A \rightarrow X$, $a \mapsto a \cdot x$ (где $x \in X$), также были непрерывными. Если X и Y – левые топологические A -модули, то *морфизм* из X в Y – это непрерывное линейное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x)$ для всех $a \in A$, $x \in X$. Морфизмы из X в Y образуют векторное пространство, обозначаемое через $\mathbf{h}_A(X, Y)$.

Если A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, то левый топологический A -модуль X называется *левым A - $\widehat{\otimes}$ -модулем*, если он полон и отображение $A \times X \rightarrow X$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$, совместно непрерывно. В этом случае определено непрерывное линейное отображение $A \widehat{\otimes} X \rightarrow X$, $a \otimes x \mapsto a \cdot x$.

Если A – алгебра Аренса–Майкла, а X – левый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль, то на X существует определяющая направленная система полунорм $\mathcal{P}$, обладающая тем свойством, что все сопутствующие банаховы пространства X_p , $p \in \mathcal{P}$, являются A - $\widehat{\otimes}$ -модулями, а все канонические отображения τ_p и τ_{pq} – морфизмами A -модулей. Следовательно, всякий $\widehat{\otimes}$ -модуль над алгеброй Аренса–Майкла является приведенным обратным пределом банаховых $\widehat{\otimes}$ -модулей (см. [21, предложение 3.5]).

Аналогичным образом определяются правые топологические A -модули, топологические A - B -бимодули, а также правые A - $\widehat{\otimes}$ -модули и A - B - $\widehat{\otimes}$ -бимодули. Если A , B – $\widehat{\otimes}$ -алгебры, то через $A\text{-mod}$, $\text{mod-}A$ и $A\text{-mod-}B$ обозначим соответственно категории левых A - $\widehat{\otimes}$ -модулей, правых A - $\widehat{\otimes}$ -модулей и A - B - $\widehat{\otimes}$ -бимодулей. Алгебра, противоположная к алгебре A , будет обозначаться через A^{op} . Имеют место изоморфизмы категорий

$$\text{mod-}A \cong A^{\text{op}}\text{-mod}, \quad A\text{-mod-}B \cong A \widehat{\otimes} B^{\text{op}}\text{-mod} \cong \text{mod-}B \widehat{\otimes} A^{\text{op}}. \quad (2.2)$$

В частности, $A\text{-mod-}A \cong A^e\text{-mod} \cong \text{mod-}A^e$, где $A^e = A \widehat{\otimes} A^{\text{op}}$.

Пусть A – алгебра, X – A -бимодуль, α – эндоморфизм алгебры A . Введем на пространстве X новую структуру A -бимодуля, полагая по определению $a \circ x = a \cdot x$ и $x \circ a = x \cdot \alpha(a)$ для $a \in A$, $x \in X$. Полученный таким образом бимодуль обозначается через X_α . Аналогичным образом определяется бимодуль ${}_\alpha X$. Легко видеть, что если A – топологическая алгебра (соответственно, $\widehat{\otimes}$ -алгебра), эндоморфизм α непрерывен, а X – топологический A -бимодуль (соответственно, A - $\widehat{\otimes}$ -бимодуль), то X_α и ${}_\alpha X$ – также топологические A -бимодули (соответственно, A - $\widehat{\otimes}$ -бимодули).

ЛЕММА 2.1. Пусть A – алгебра Аренса–Майкла, и пусть X – левый банахов A - $\widehat{\otimes}$ -модуль. Тогда существует такая сопутствующая алгебре A банахова алгебра (B, φ) , что X обладает структурой левого банахова B -модуля, согласованной с φ в том смысле, что $a \cdot x = \varphi(a) \cdot x$ для всех $a \in A$, $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку A – алгебра Аренса–Майкла, существует такая непрерывная субмультипликативная полунорма p на A , что

$$\|a \cdot x\| \leq p(a)\|x\|, \quad a \in A, \quad x \in X. \quad (2.3)$$

Положим $(B, \varphi) = (A_p, \tau_p)$. Из (2.3) следует, что существует непрерывное билинейное отображение $B \times X \rightarrow X$, $(b, x) \mapsto b \cdot x$, удовлетворяющее условию $\varphi(a) \cdot x = a \cdot x$ для всех $a \in A$, $x \in X$. Выполнение аксиом B -модуля для X очевидным образом следует из плотности $\text{Im } \varphi$ в B .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Разумеется, аналогичные утверждения справедливы для правых банаховых A - $\widehat{\otimes}$ -модулей и для банаховых A - $\widehat{\otimes}$ -бимодулей.

Пусть A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, X – правый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль, Y – левый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль. Обозначим через $N_{X,Y}$ замыкание в пространстве $X \widehat{\otimes} Y$ линейной оболочки всевозможных элементов вида $x \cdot a \otimes y - x \otimes a \cdot y$, где $x \in X$, $y \in Y$, $a \in A$. Проективное A -модульное тензорное произведение $X \widehat{\otimes}_A Y$ определяется как пополнение факторпространства $(X \widehat{\otimes} Y)/N_{X,Y}$. Для любых непрерывных полунорм p на X и q на Y через $p \otimes_A q$ обозначим полунорму на $X \widehat{\otimes}_A Y$, являющуюся продолжением по непрерывности определенной на пространстве $(X \widehat{\otimes} Y)/N_{X,Y}$ факторполунормы полунормы $p \otimes q$. Топология на пространстве $X \widehat{\otimes}_A Y$ порождается семейством всех полунорм вида $p \otimes_A q$. Множества вида $\overline{\Gamma(U \otimes_A V)}$, где U и V – окрестности нуля в X и Y соответственно, а подмножество $U \otimes_A V \subset X \widehat{\otimes}_A Y$ определяется так же, как и в (2.1), образуют базу окрестностей нуля в $X \widehat{\otimes}_A Y$. Отметим, что, как и в чисто алгебраической ситуации, проективное A -модульное тензорное произведение допускает абстрактное теоретико-категорное описание (см. [2, гл. II, § 4, п. 1]).

Пусть A , B – алгебры, X – левый топологический A -модуль, Y – правый топологический B -модуль. Нетрудно видеть, что пространство $X \widehat{\otimes} Y$ является топологическим A - B -бимодулем относительно операций, определенных формулой

$$a \cdot (x \otimes y) \cdot b = (a \cdot x) \otimes (y \cdot b), \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad a \in A, \quad b \in B.$$

Если, кроме того, A и B – $\widehat{\otimes}$ -алгебры, а X и Y – $\widehat{\otimes}$ -модули, то $X \widehat{\otimes} Y$ – $\widehat{\otimes}$ -бимодуль.

Пусть теперь по-прежнему A и B – алгебры, X – левый топологический A -модуль, Y – левый топологический B -модуль. Снабдим пространство

$\mathcal{L}(X, Y)$ структурой B - A -бимодуля, полагая

$$(b \cdot \varphi \cdot a)(x) = b \cdot \varphi(a \cdot x), \quad \varphi \in \mathcal{L}(X, Y), \quad a \in A, \quad b \in B, \quad x \in X. \quad (2.4)$$

Введем на пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ топологию равномерной сходимости на каком-либо семействе $\mathfrak{S}$ ограниченных подмножеств модуля X и предположим дополнительно, что

$$a \cdot S \in \mathfrak{S} \quad \forall a \in A, \quad S \in \mathfrak{S}. \quad (2.5)$$

Тогда нетрудно проверить, что $\mathcal{L}(X, Y)$ является топологическим B - A -бимодулем. Отметим, что условие (2.5) заведомо выполнено, если $\mathfrak{S}$ состоит из всех ограниченных подмножеств в X , так что $\mathcal{L}_b(X, Y)$ – топологический B - A -бимодуль. Если, кроме того, A и B – $\widehat{\otimes}$ -алгебры, а X и Y – банаховы $\widehat{\otimes}$ -модули, то нетрудно проверить, что и $\mathcal{L}_b(X, Y)$ – банахов $\widehat{\otimes}$ -бимодуль.

Напомним, что *сильнейшая локально выпуклая топология* на векторном пространстве E определяется системой всех полунорм на E . Пространство E , наделенное этой топологией, будет в дальнейшем обозначаться через E_s .

Следующее утверждение доказано в [21] (см. также [32, добавление 2]). Для удобства дальнейших ссылок приведем его формулировку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. (i) *Всякое сильнейшее ЛВП полно.*

(ii) *Если E – сильнейшее ЛВП, а $F \subset E$ – векторное подпространство, то F замкнуто и дополняемо в E , топология на F , унаследованная из E , совпадает с сильнейшей и фактортопология на E/F совпадает с сильнейшей.*

(iii) *Если E, F – сильнейшие ЛВП не более чем счетной размерности, то всякое билинейное отображение из $E \times F$ в произвольное ЛВП совместно непрерывно.*

(iv) *Если A – алгебра не более чем счетной размерности, то A_s является $\widehat{\otimes}$ -алгеброй. Если X – левый A -модуль не более чем счетной размерности, то X_s является левым A_s - $\widehat{\otimes}$ -модулем.*

(v) *Пусть A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, X – правый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль, Y – левый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль. Предположим, что X и Y имеют не более чем счетную размерность и топология на каждом из них является сильнейшей локально выпуклой. Тогда алгебраическое тензорное произведение $X \otimes_A Y$, снабженное сильнейшей локально выпуклой топологией, совпадает с $X \widehat{\otimes}_A Y$.*

Напомним теперь некоторые определения и факты из гомологической теории топологических алгебр (см. [2], [3], [26], [30]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Полную аддитивную подкатегорию $\mathcal{C} \subset \text{LCS}$ будем называть *допустимой*, если она удовлетворяет следующим условиям (ср. [2], [30]):

($\mathcal{C}1$) если $E \in \mathcal{C}$ и ЛВП F изоморфно E , то и $F \in \mathcal{C}$;

($\mathcal{C}2$) если $E \in \mathcal{C}$ и $E_0 \subset E$ – дополняемое векторное подпространство, то и $E_0 \in \mathcal{C}$;

($\mathcal{C}3$) если $E, F \in \mathcal{C}$, то и $E \widehat{\otimes} F \in \mathcal{C}$.

Допустимую подкатегорию $\mathcal{C} \subset \text{LCS}$ будем называть *строго допустимой*, если она удовлетворяет следующему (более сильному, чем ($\mathcal{C}2$)) условию:

($\mathcal{C}2'$) если $E \in \mathcal{C}$ и $E_0 \subset E$ – замкнутое векторное подпространство, то $E_0 \in \mathcal{C}$ и $(E/E_0)^\sim \in \mathcal{C}$.

Отметим, что большинство категорий полных ЛВП, используемых в функциональном анализе, строго допустимы. Таковы, например, категория $\mathbf{Ban}$ банаховых пространств, категория $\mathbf{Fr}$ пространств Фреше и многие другие. Категория $(\mathbf{DF})$ -пространств и категория пространств типа (s) (см. определение 7.7) допустимы, но не строго допустимы.

Пусть $\mathcal{C}$ – полная подкатегория в $\mathbf{LCS}$. Обозначим через $\mathbf{alg}(\mathcal{C})$ категорию всех $\widehat{\otimes}$ -алгебр, подлежащие пространства которых являются объектами категории $\mathcal{C}$. Морфизмы в $\mathbf{alg}(\mathcal{C})$ – это непрерывные гомоморфизмы алгебр. Аналогичным образом, для $\widehat{\otimes}$ -алгебры A через $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ будем обозначать полную подкатегорию в $A\text{-mod}$, состоящую из тех модулей, подлежащие пространства которых являются объектами категории $\mathcal{C}$. Сходный смысл имеют обозначения $\mathbf{mod}\text{-}A(\mathcal{C})$ и $A\text{-mod}\text{-}B(\mathcal{C})$.

Пусть A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра и $\mathcal{C} \subset \mathbf{LCS}$ – допустимая подкатегория. Короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ называется *допустимой*, если она расщепляется в категории $\mathcal{C}$ (или, что эквивалентно, в категории $\mathbf{LCS}$). Легко видеть, что последовательность (2.6) допустима тогда и только тогда, когда отображение i топологически инъективно (т.е. осуществляет гомеоморфизм на свой образ), отображение p открыто, а подпространство $\text{Ker } p$ (совпадающее с $\text{Im } i$) дополняемо в Y . Морфизм $i: X \rightarrow Y$ (соответственно, морфизм $p: Y \rightarrow Z$) называется *допустимым мономорфизмом* (соответственно, *допустимым эпиморфизмом*), если он входит в допустимую последовательность вида (2.6). Цепной комплекс $C_\bullet = (C_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ называется *допустимым*, если он точен и расщепляется в категории $\mathcal{C}$, или, что эквивалентно, если для каждого $n \in \mathbb{Z}$ короткая последовательность $0 \rightarrow \text{Ker } d_n \rightarrow C_n \rightarrow \text{Ker } d_{n-1} \rightarrow 0$ в категории $A\text{-mod}$ точна и допустима. *Резольвентой* модуля $X \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ называется пара $(C_\bullet, \varepsilon)$, состоящая из положительного цепного комплекса $C_\bullet = (C_n, d_n)_{n \geq 0}$ в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ и морфизма $\varepsilon: C_0 \rightarrow X$, такая, что последовательность $\cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \rightarrow 0$ представляет собой допустимый комплекс. *Длиной* резольвенты $(C_\bullet, \varepsilon)$ называется наименьшее $n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющее условию $C_m = 0$ при $m > n$ (или ∞ , если такого n не существует). Аддитивный ковариантный функтор $F: A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ – абелева категория, называется *точным слева* (соответственно, *точным справа*), если для каждой короткой допустимой последовательности (2.6) последовательность $0 \rightarrow F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z)$ (соответственно, последовательность $F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z) \rightarrow 0$) точна. Функтор F называется *точным*, если он одновременно точен слева и справа (или, эквивалентно, если он переводит каждый допустимый комплекс из категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ в точный).

Далее будем предполагать, что $A \in \mathbf{alg}(\mathcal{C})$. Левый модуль $P \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ называется *проективным*, если для каждого допустимого эпиморфизма $X \rightarrow Y$ в $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ индуцированное отображение $\mathbf{h}_A(P, X) \rightarrow \mathbf{h}_A(P, Y)$ сюръективно. Эквивалентно, P проективен тогда и только тогда, когда функтор

$$\mathbf{h}_A(P, \cdot): A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Vect}$$

точен. Левый модуль из категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ называется *свободным*, если он изоморфен A -модулю $A \widehat{\otimes} E$ для некоторого ЛВП $E \in \mathcal{C}$. Известно, что всякий

свободный модуль проективен, причем не только в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$, но и в категории $A\text{-mod}$.

Зафиксируем произвольный модуль $X \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ и рассмотрим морфизм умножения $\pi_{A,X}: A \widehat{\otimes} X \rightarrow X$, $a \otimes x \mapsto a \cdot x$. Известно, что $\pi_{A,X}$ – допустимый эпиморфизм в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$. Отсюда следует, что категория $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ обладает достаточным количеством проективных объектов, т.е. для каждого $X \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ существуют проективный модуль $P \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ и допустимый эпиморфизм $P \rightarrow X$. Отсюда, в свою очередь, следует, что каждый A -модуль $X \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ обладает *проективной резольвентой*, т.е. резольвентой $(P_\bullet, \varepsilon)$, в которой все модули P_n , $n \geq 0$, проективны.

Отметим, что левый A -модуль $P \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ проективен тогда и только тогда, когда морфизм умножения $\pi_{A,P}$ – ретракция. Отсюда немедленно следует, что всякий проективный модуль в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ проективен и в категории $A\text{-mod}$.

Левый модуль $P \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ называется *строго проективным*, если для каждого сюръективного морфизма $X \rightarrow Y$ в $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ индуцированное отображение $\mathbf{h}_A(P, X) \rightarrow \mathbf{h}_A(P, Y)$ сюръективно. Легко видеть, что свободный конечно порожденный A -модуль A^n , где $n \in \mathbb{N}$, строго проективен. Отсюда следует, что конечно порожденный модуль $P \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ строго проективен тогда и только тогда, когда он является ретрактом модуля A^n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В частности, строго проективный конечно порожденный модуль в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ строго проективен и в категории $A\text{-mod}$.

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория и $F: A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$ – аддитивный ковариантный функтор. Наличие достаточного количества проективных объектов в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ позволяет стандартным образом определить *левые производные функторы* $L_n F: A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$, $n \geq 0$ (см. [2, гл. III, § 3]). Напомним, что на объектах категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ функторы $L_n F$ действуют по правилу $L_n F(X) = H_n(F(P_\bullet))$, где $P_\bullet$ – какая-либо проективная резольвента модуля X , а H_n обозначает n -ю группу гомологий. Нетрудно видеть, что это определение не зависит от выбора категории $\mathcal{C}$ в том смысле, что, определяя функтор $L_n F$ для $\mathcal{C} = \text{LCS}$, а затем ограничивая его на подкатегорию $A\text{-mod}(\mathcal{C}) \subset A\text{-mod}$, мы получим тот же функтор $L_n F: A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$.

Аналогичным образом (с заменой гомологий на когомологии) определяются *правые производные функторы* $R^n F$ контравариантного функтора $F: A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$. Отметим также, что определить правые производные ковариантного функтора в общем случае не удастся из-за возможного отсутствия в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ достаточного количества инъективных объектов [22], [33], но это можно сделать, если A – банахова алгебра, а $\mathcal{C}$ – категория банаховых пространств [2, гл. III, § 3].

Зафиксируем модули $X \in \text{mod-}A(\mathcal{C})$ и $Y \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$. Производные функторы Ext и Tor определяется следующим образом:

$$\text{Ext}_A^n(\cdot, Y) = R^n \mathbf{h}_A(\cdot, Y): A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Vect},$$

$$\text{Tor}_n^A(X, \cdot) = L_n(X \widehat{\otimes}_A (\cdot)): A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Vect}.$$

Отметим, что функтор Tor можно определять и как производный функтор по первому аргументу [2, гл. III, § 4]. Отметим также, что на пространствах Tor_n^A имеется каноническая (вообще говоря, нехаусдорфова) топология, позволяющая рассматривать Tor_n^A как функтор со значениями в категории локально

выпуклых пространств (см. [2, гл. III, § 4]). Функтор Ext , как и функтор Tor , может рассматриваться как функтор от двух аргументов (см. [2, гл. III, § 4], [30]), однако ввиду возможного отсутствия в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ достаточного количества инъективных объектов (см. выше) его, вообще говоря, нельзя определять как производный функтор по второму аргументу.

Проективной гомологической размерностью (или просто *гомологической размерностью*) ненулевого $A\text{-}\widehat{\otimes}$ -модуля $X \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ называется величина

$$\begin{aligned} \text{dh}_A X &= \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{Ext}_A^{n+1}(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in A\text{-mod}(\mathcal{C})\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{Ext}_A^{p+1}(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in A\text{-mod}(\mathcal{C}), \forall p \geq n\}. \end{aligned}$$

Если такого $n \in \mathbb{Z}_+$ не существует, полагают $\text{dh}_A X = \infty$. Для $X = 0$ обычно полагают $\text{dh}_A X = -\infty$. Известно, что модуль $X \neq 0$ проективен тогда и только тогда, когда $\text{dh}_A X = 0$. Более общим образом, гомологическая размерность модуля X равна длине его самой короткой проективной резольвенты. Отсюда следует, что гомологическая размерность модуля X , вычисленная в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$, совпадает с его гомологической размерностью как объекта категории $A\text{-mod}$.

Все приведенные выше определения и факты переносятся на категории правых $\widehat{\otimes}$ -модулей и $\widehat{\otimes}$ -бимодулей; при этом удобно использовать изоморфизмы (2.2). В частности, $\widehat{\otimes}$ -бимодуль $X \in A\text{-mod-}A(\mathcal{C})$ свободен тогда и только тогда, когда он изоморфен бимодулю вида $A \widehat{\otimes} E \widehat{\otimes} A$ для некоторого ЛВП $E \in \mathcal{C}$. Если A — $\widehat{\otimes}$ -алгебра, а M — $A\text{-}\widehat{\otimes}$ -бимодуль, то пространство n -мерных гомологий Хохшильда и пространство n -мерных когомологий Хохшильда алгебры A с коэффициентами в M определяются соответственно формулами

$$\mathcal{H}_n(A, M) = \text{Tor}_n^{A^e}(M, A), \quad \mathcal{H}^n(A, M) = \text{Ext}_A^n(A, M).$$

Отметим, что пространство $\mathcal{H}^0(A, M)$ изоморфно центру бимодуля M . Напомним также, что для любых $X \in \text{mod-}A(\mathcal{C})$ и $Y \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ имеют место изоморфизмы

$$\text{Tor}_n^A(X, Y) \cong \mathcal{H}_n(A, Y \widehat{\otimes} X), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Если $X, Y \in A\text{-mod}(\text{Ban})$, то существуют изоморфизмы

$$\text{Ext}_A^n(X, Y) \cong \mathcal{H}^n(A, \mathcal{L}(X, Y)), \quad n \in \mathbb{Z}_+;$$

при этом алгебра A не предполагается банаховой.

Глобальной размерностью $\widehat{\otimes}$ -алгебры $A \in \text{alg}(\mathcal{C})$ называется величина

$$\text{dg } A = \sup\{\text{dh}_A X : X \in A\text{-mod}(\mathcal{C})\}.$$

Формально это определение зависит от выбора категории $\mathcal{C}$, однако нам неизвестно, так ли это на самом деле. Так или иначе, в случаях, когда надо будет явно указать, какая категория $\mathcal{C}$ используется для вычисления глобальной размерности, мы будем записывать $\text{dg}_{\mathcal{C}} A$ вместо $\text{dg } A$. *Биразмерность* $\widehat{\otimes}$ -алгебры $A \in \text{alg}(\mathcal{C})$ определяется как $\text{db } A = \text{dh}_{A^e} A$; эта величина уже не зависит от выбора категории $\mathcal{C}$ (см. выше). Известно, что для любой $\widehat{\otimes}$ -алгебры A справедливо неравенство $\text{dg } A \leq \text{db } A$ [2, гл. III, § 5].

Напомним теперь определения плоского топологического модуля и слабых гомологических размерностей. Хотя эти понятия можно ввести для произвольных $\widehat{\otimes}$ -модулей над произвольными $\widehat{\otimes}$ -алгебрами, мы по ряду причин (см. [34,

замечание 2.5], а также [35, замечание 7.2]) ограничимся рассмотрением случая модулей Фреше над алгебрами Фреше. Как и выше, мы для определенности будем рассматривать только левые модули; случаи правых модулей и бимодулей сводятся к случаю левых модулей при помощи изоморфизмов (2.2).

Итак, пусть A – алгебра Фреше. Категория пространств Фреше будет в дальнейшем обозначаться через $\mathbf{Fr}$. Левый A -модуль Фреше X называется *плоским*, если функтор

$$(\cdot) \hat{\otimes}_A X : \mathbf{mod}\text{-}A(\mathbf{Fr}) \rightarrow \mathbf{Vect}$$

точен. Известно, что всякий проективный модуль Фреше является плоским.

Слабой гомологической размерностью ненулевого левого A -модуля Фреше X называется величина

$$\begin{aligned} \mathrm{w.dh}_A X &= \min \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ \mid \begin{array}{l} \mathrm{Tor}_{n+1}^A(Y, X) = 0 \text{ и пространство } \mathrm{Tor}_n^A(Y, X) \\ \text{хаусдорфово } \forall Y \in \mathbf{mod}\text{-}A(\mathbf{Fr}) \end{array} \right\} \\ &= \min \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ \mid \begin{array}{l} \mathrm{Tor}_{p+1}^A(Y, X) = 0 \text{ и пространство } \mathrm{Tor}_n^A(Y, X) \\ \text{хаусдорфово } \forall Y \in \mathbf{mod}\text{-}A(\mathbf{Fr}), \forall p \geq n \end{array} \right\} \end{aligned}$$

(см. [3, предложение 2.5.4], [34, предложение 4.1]). Если такого $n \in \mathbb{Z}_+$ не существует, полагают $\mathrm{w.dh}_A X = \infty$. Для $X = 0$ обычно полагают $\mathrm{w.dh}_A X = -\infty$. Известно, что модуль $X \neq 0$ является плоским тогда и только тогда, когда $\mathrm{w.dh}_A X = 0$. Более общим образом, слабая гомологическая размерность модуля X равна длине его самой короткой *плоской резольвенты*, т. е. резольвенты, состоящей из плоских модулей (см. там же). Поскольку каждый проективный модуль Фреше является плоским, справедливо неравенство $\mathrm{w.dh}_A X \leq \mathrm{dh}_A X$.

Слабой глобальной размерностью алгебры Фреше A называется величина

$$\mathrm{w.dg} A = \sup \{ \mathrm{w.dh}_A X : X \in A\text{-}\mathbf{mod}(\mathbf{Fr}) \}.$$

Слабая биразмерность алгебры Фреше A определяется как $\mathrm{w.db} A = \mathrm{w.dh}_{A^e} A$. Очевидно, $\mathrm{w.db} A \leq \mathrm{db} A$ и $\mathrm{w.dg} A \leq \mathrm{dg} A$ (где $\mathrm{dg} = \mathrm{dg}_{\mathbf{Fr}}$). Кроме того, известно, что $\mathrm{w.dg} A \leq \mathrm{w.db} A$ (см. [3, предложение 2.5.7], [34, предложение 4.7]).

В завершение этого параграфа напомним некоторые факты об эпиморфизмах и гомологических эпиморфизмах $\hat{\otimes}$ -алгебр. Пусть $\mathcal{C}$ – строго допустимая подкатегория в $\mathbf{LCS}$. Известно, что гомоморфизм $f : A \rightarrow B$ в категории $\mathbf{alg}(\mathcal{C})$ является эпиморфизмом (в категорном смысле) тогда и только тогда, когда отображение

$$\mu_B : B \hat{\otimes}_A B \rightarrow B, \quad b_1 \otimes_A b_2 \mapsto b_1 b_2, \quad (2.7)$$

– топологический изоморфизм. Это равносильно тому, что для любых модулей $X \in \mathbf{mod}\text{-}B(\mathcal{C})$ и $Y \in B\text{-}\mathbf{mod}(\mathcal{C})$ отображение

$$X \hat{\otimes}_A Y \rightarrow X \hat{\otimes}_B Y, \quad x \otimes_A y \mapsto x \otimes_B y, \quad (2.8)$$

является топологическим изоморфизмом. Доказательства этих фактов для категории колец приведены в [36, гл. XI, § 1]. Для категорий топологических алгебр доказательства аналогичны (см. [21, предложение 6]).

Пусть $f : A \rightarrow B$ – гомоморфизм в категории $\mathbf{alg}(\mathcal{C})$, и пусть

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{\varepsilon_A} P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \dots \quad (2.9)$$

– цепной комплекс в категории $A\text{-mod-}A(\mathcal{C})$. Применяя функтор $B \hat{\otimes}_A (\cdot) \hat{\otimes}_A B$ и обозначая через ε_B композицию отображений

$$B \hat{\otimes}_A P_0 \hat{\otimes}_A B \xrightarrow{1_B \otimes \varepsilon_A \otimes 1_B} B \hat{\otimes}_A A \hat{\otimes}_A B \cong B \hat{\otimes}_A B \xrightarrow{\mu_B} B,$$

получаем цепной комплекс

$$0 \leftarrow B \xleftarrow{\varepsilon_B} B \hat{\otimes}_A P_0 \hat{\otimes}_A B \leftarrow B \hat{\otimes}_A P_1 \hat{\otimes}_A B \leftarrow \dots \quad (2.10)$$

в категории $B\text{-mod-}B(\mathcal{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Гомоморфизм $f: A \rightarrow B$ в категории $\text{alg}(\mathcal{C})$ называется *гомологическим эпиморфизмом*, если для некоторой проективной бимодульной резольвенты (2.9) алгебры A в категории $A\text{-mod-}A(\mathcal{C})$ комплекс (2.10) расщепим в категории LCS (и, следовательно, определяет проективную бимодульную резольвенту алгебры B в категории $B\text{-mod-}B(\mathcal{C})$).

Нетрудно проверить (см. [37, § 1]), что всякий гомологический эпиморфизм $\hat{\otimes}$ -алгебр является эпиморфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Легко видеть, что если указанное в определении 2.5 условие выполняется хотя бы для одной проективной бимодульной резольвенты алгебры A , то оно выполняется и для всех таких резольвент (поскольку все такие резольвенты гомотопически эквивалентны).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Взаимосвязь между понятиями эпиморфизма и гомологического эпиморфизма становится более прозрачной, если интерпретировать эти понятия на функторном языке. А именно, справедливы следующие утверждения:

- 1) гомоморфизм $f: A \rightarrow B$ в категории $\text{alg}(\mathcal{C})$ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда порожденный им функтор $B\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow A\text{-mod}(\mathcal{C})$ является полным вложением;
- 2) гомоморфизм $f: A \rightarrow B$ в категории $\text{alg}(\mathcal{C})$ является гомологическим эпиморфизмом тогда и только тогда, когда порожденный им функтор между ограниченными производными категориями $D^b(B\text{-mod}(\mathcal{C})) \rightarrow D^b(A\text{-mod}(\mathcal{C}))$ является полным вложением.

Подробности можно найти в работе [21, § 6] и цитированной в ней литературе.

Гомологические эпиморфизмы (под названием “абсолютные локализации”) были впервые введены Дж. Тэйлором в [37]. Впоследствии они переоткрывались по меньшей мере трижды – В. Гейгле и Х. Ленцингом [38], А. Ниманом и Э. Раницки [39] в чисто алгебраическом контексте и Р. Майером [40] в контексте борнологических алгебр. Базовый пример гомологического эпиморфизма – вложение алгебры многочленов $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ (с сильнейшей локально выпуклой топологией) в алгебру $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ целых функций (см. [37]). Примеры и общие факты о гомологических эпиморфизмах можно найти в работах [21], [37]–[47].

Для удобства дальнейших ссылок выделим следующее свойство гомологических эпиморфизмов, установленное Тэйлором.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8 (см. [37, предложения 1.4, 1.7]). Пусть $f: A \rightarrow B$ – гомологический эпиморфизм в категории $\text{alg}(\mathcal{C})$. Тогда для каждого бимодуля

$X \in B\text{-mod-}B(\mathcal{C})$ и каждого $i \in \mathbb{Z}_+$ существуют изоморфизмы векторных пространств

$$\mathcal{H}_i(A, X) \cong \mathcal{H}_i(B, X), \quad \mathcal{H}^i(A, X) \cong \mathcal{H}^i(B, X).$$

Помимо описанной выше разновидности гомологической алгебры в категориях локально выпуклых модулей (ее также называют “топологическая гомология”), нам также понадобится классическая (в духе Картана–Эйленберга [1]) гомологическая алгебра в категориях модулей, не снабженных топологией. Условимся в этой связи о следующих обозначениях. Если A – алгебра, то производные функторы Ext_A^n и Tor_n^A , понимаемые в чисто алгебраическом смысле, будут обозначаться через $\text{Ext}_{A, \text{alg}}^n$ и $\text{Tor}_n^{A, \text{alg}}$ соответственно; аналогичный смысл будет придаваться обозначениям $\mathcal{H}_{\text{alg}}^n$, $\mathcal{H}_n^{\text{alg}}$, dg_{alg} , db_{alg} , $\mathbf{h}_A^{\text{alg}}$ и т. п. Иногда, чтобы подчеркнуть отличие между “чисто алгебраическими” и определенными выше “топологическими” производными функторами, мы будем использовать для последних обозначения $\text{Ext}_{A, \text{top}}^n$, $\text{Tor}_n^{A, \text{top}}$, $\mathcal{H}_{\text{top}}^n$ и $\mathcal{H}_n^{\text{top}}$.

§ 3. Ядерные морфизмы дуальных пар

В этом и следующем параграфах развивается техника, которая будет в дальнейшем использоваться при исследовании гомологических размерностей ядерных алгебр Фреше. Мы вводим понятие дуальной пары локально выпуклых пространств, обсуждаем канонические отображения Гротендика, ассоциированные с дуальными парами, вводим понятие ядерного морфизма дуальных пар и доказываем простейшие свойства ядерных морфизмов. Отметим, что наше понятие ядерного морфизма обобщает как классическое понятие ядерного оператора между локально выпуклыми пространствами, так и понятие ядерного морфизма банаховых дуальных пар (см. [48], [2, гл. II, § 2, п. 4]).

Результаты этого и следующего параграфов будут формулироваться и доказываться в несколько более общем виде, чем требуется для дальнейших приложений. В принципе, для целей этой статьи достаточно было бы ограничиться рассмотрением ядерных морфизмов между банаховыми дуальными парами. Однако нам представляется, что как само понятие ядерного морфизма, так и доказываемые в следующем параграфе факторизационные леммы могут оказаться полезными и в других ситуациях (ср. [22]).

Пусть $\langle E, F \rangle$ – дуальная пара векторных пространств. Предположим, что каждое из пространств E, F снабжено локально выпуклой топологией и что билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ раздельно непрерывна. В такой ситуации будем говорить, что $\langle E, F \rangle$ – *дуальная пара локально выпуклых пространств*. Очевидно, формула $y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$ задает вложение F в E' , непрерывное относительно слабой топологии $\sigma(E', E)$ на E' . Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять F с соответствующим подпространством в E' , а E – с соответствующим подпространством⁴ в F' .

Морфизмом из дуальной пары $\langle E_1, F_1 \rangle$ в дуальную пару $\langle E_2, F_2 \rangle$ будем называть пару (u, v) , где $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $v \in \mathcal{L}(F_2, F_1)$, причем $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$ для всех $x \in E_1$, $y \in F_2$. Ясно, что при этом $v = u'|_{F_2}$ и $u = v'|_{E_1}$, так что

⁴Разумеется, термин “подпространство” здесь используется в чисто алгебраическом смысле, т. е. топология на F (соответственно, на E) может не совпадать ни с одной из стандартных топологий на сопряженном пространстве E' (соответственно, F').

пара (u, v) однозначно определена любым из операторов u, v . Дуальные пары ЛВП и их морфизмы образуют категорию, закон композиции в которой определяется формулой $(u_1, v_1) \circ (u_2, v_2) = (u_1 \circ u_2, v_2 \circ v_1)$. В дальнейшем мы будем называть морфизмом дуальных пар сам оператор u (или же v) и использовать обозначение $u: \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ (соответственно, $v: \langle F_2, E_2 \rangle \rightarrow \langle F_1, E_1 \rangle$).

Пусть $\langle E, F \rangle$ – дуальная пара ЛВП и G – произвольное ЛВП. Снабдим пространство $\mathcal{L}(F, G)$ топологией равномерной сходимости на ограниченных равностепенно непрерывных (относительно двойственности $\langle E, F \rangle$) подмножествах пространства F . Получающееся в результате ЛВП обозначим через $\mathcal{L}_{\text{be}}(F, G)$. Каноническое отображение Гротендика определяется формулой

$$\gamma_{G,E}: G \otimes_{\pi} E \rightarrow \mathcal{L}_{\text{be}}(F, G), \quad z \otimes x \mapsto \langle x, \cdot \rangle z. \quad (3.1)$$

Отметим, что $\gamma_{G,E}$ непрерывно ввиду очевидного включения

$$\gamma_{G,E}(\Gamma(U \otimes V)) \subset M(V^{\circ}, U),$$

где $U \subset G$ и $V \subset E$ – окрестности нуля.

В некоторых случаях отображение $\gamma_{G,E}$ может быть продолжено до непрерывного линейного отображения из $G \hat{\otimes} E$ в $\mathcal{L}_{\text{be}}(F, G)$; это отображение мы будем обозначать также через $\gamma_{G,E}$,

$$\gamma_{G,E}: G \hat{\otimes} E \rightarrow \mathcal{L}_{\text{be}}(F, G), \quad z \otimes x \mapsto \langle x, \cdot \rangle z. \quad (3.2)$$

Очевидно, такое продолжение заведомо единственно, и оно существует, если пространство $\mathcal{L}_{\text{be}}(F, G)$ полно или если образ отображения (3.1) содержится в некотором полном подпространстве пространства $\mathcal{L}_{\text{be}}(F, G)$. Отметим три важных частных случая такой ситуации.

ПРИМЕР 3.1 (ср. [2, гл. II, § 2, п. 4]). Пусть E, F, G – банаховы пространства. В этом случае форма $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ совместно непрерывна (см., например, [23, гл. III, теорема 5.1]), откуда легко следует, что всякое ограниченное подмножество в F равностепенно непрерывно. Следовательно, $\mathcal{L}_{\text{be}}(F, G) = \mathcal{L}_{\text{b}}(F, G)$ – банахово пространство, и определено непрерывное линейное отображение

$$\gamma_{G,E}: G \hat{\otimes} E \rightarrow \mathcal{L}_{\text{b}}(F, G), \quad z \otimes x \mapsto \langle x, \cdot \rangle z.$$

ПРИМЕР 3.2. Пусть F – борнологическое ЛВП, G – полное ЛВП, $E = F'$. Из теоремы о биполяре следует, что свойства равностепенной непрерывности (относительно двойственности $\langle F, F' \rangle$) и ограниченности для подмножеств в F эквивалентны, так что $\mathcal{L}_{\text{be}}(F, G) = \mathcal{L}_{\text{b}}(F, G)$. Кроме того, пространство $\mathcal{L}_{\text{b}}(F, G)$ полно ввиду полноты G и борнологичности F (см. [49]), поэтому определено непрерывное линейное отображение

$$\gamma_{G,F'}: G \hat{\otimes} F' \rightarrow \mathcal{L}_{\text{b}}(F, G), \quad z \otimes f \mapsto \langle \cdot, f \rangle z.$$

ПРИМЕР 3.3. Пусть E, G – полные ЛВП, $F = E'$. Обозначим через $\mathcal{L}_e(E', G)$ пространство $\mathcal{L}(E', G)$, снабженное топологией равномерной сходимости на равностепенно непрерывных множествах. Поскольку каждое равностепенно непрерывное подмножество в E' ограничено (см., например, [23, гл. III, § 4]), справедливо равенство $\mathcal{L}_{\text{be}}(E', G) = \mathcal{L}_e(E', G)$. Обозначим через E'_{τ} пространство E' , снабженное топологией Макки $\tau(E', E)$. Известно, что образ отображения $\gamma_{G,E}: G \otimes E \rightarrow \mathcal{L}(E', G)$ содержится в подпространстве

$\mathcal{L}_e(E'_\tau, G) \subset \mathcal{L}_e(E', G)$, которое полно ввиду полноты E и G (см. [23, гл. IV, § 9]). Следовательно, определено непрерывное линейное отображение

$$\gamma_{G,E}: G \widehat{\otimes} E \rightarrow \mathcal{L}_e(E', G), \quad z \otimes x \mapsto \langle x, \cdot \rangle z.$$

Наша ближайшая цель – обобщить на случай дуальных пар классическое понятие ядерного линейного оператора (см., например, [23, гл. III, § 7]). Пусть E_1 и E_2 – ЛВП, (λ_n) – числовая последовательность, удовлетворяющая условию $\sum_n |\lambda_n| < \infty$, (f_n) – равномерно непрерывная последовательность в E'_1 и (y_n) – последовательность в E_2 , содержащаяся в некотором ограниченном банаховом диске $B \subset E_2$. Тогда для каждого $x \in E_1$ ряд $\sum_n \lambda_n f_n(x) y_n$ абсолютно сходится в $(E_2)_B$, а значит, сходится в E_2 в силу непрерывности вложения $(E_2)_B \rightarrow E_2$. Сопоставляя каждому $x \in E_1$ сумму этого ряда в E_2 , получаем непрерывный линейный оператор

$$u: E_1 \rightarrow E_2, \quad u(x) = \sum_n \lambda_n f_n(x) y_n.$$

Напомним, что линейный оператор $u: E_1 \rightarrow E_2$ называется *ядерным*, если он имеет указанный выше вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть $u: \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ – морфизм дуальных пар ЛВП. Будем называть его *ядерным морфизмом*, если он имеет вид

$$u(x) = \sum_n \lambda_n \langle x, f_n \rangle y_n, \quad x \in E_1, \quad (3.3)$$

где $\sum_n |\lambda_n| < \infty$, (f_n) – последовательность в F_1 , содержащаяся в некотором ограниченном равномерно непрерывном относительно двойственности $\langle E_1, F_1 \rangle$ банаховом диске $B_1 \subset F_1$, а (y_n) – последовательность в E_2 , содержащаяся в некотором ограниченном равномерно непрерывном относительно двойственности $\langle E_2, F_2 \rangle$ банаховом диске $B_2 \subset E_2$.

Формулу (3.3) будем сокращенно записывать в виде $u = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, f_n \rangle y_n$, подразумевая сходимости ряда на каждом элементе из E_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Очевидно, ядерный морфизм дуальных пар $u: \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ является ядерным (в обычном смысле) линейным оператором из E_1 в E_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Если E_1, E_2 – произвольные ЛВП, то нетрудно видеть, что непрерывный линейный оператор $u: E_1 \rightarrow E_2$ является ядерным в обычном смысле тогда и только тогда, когда он является ядерным морфизмом дуальных пар $\langle E_1, E'_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, E'_2 \rangle$. Это следует из того, что всякое ограниченное подмножество в E_2 равномерно непрерывно относительно двойственности $\langle E_2, E'_2 \rangle$ (см. пример 3.2), и того, что поляр U° всякой абсолютно выпуклой окрестности нуля $U \subset E_1$ является ограниченным банаховым диском в E'_1 (см., например, [12, замечание 24.5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Непосредственно из определения 3.4 видно, что морфизм дуальных пар $u: \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ ядерный тогда и только тогда, когда его сопряженный морфизм $u': \langle F_2, E_2 \rangle \rightarrow \langle F_1, E_1 \rangle$ ядерный. Если при этом $u = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, f_n \rangle y_n$ (где последовательности (λ_n) , (f_n) и (y_n) такие, как в определении 3.4), то $u' = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, y_n \rangle f_n$.

Как следствие, если E_1, E_2 – банаховы пространства, то линейный оператор $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ является ядерным тогда и только тогда, когда его сопряженный оператор u' является ядерным морфизмом дуальных пар $\langle E'_2, E_2 \rangle \rightarrow \langle E'_1, E_1 \rangle$. Отметим в этой связи, что из ядерности оператора u' в обычном смысле, вообще говоря, не следует ядерность оператора u (см., например, [50, § 16, п. 8]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Если $\langle E_k, F_k \rangle$, $k = 1, 2$, – дуальные пары банаховых пространств, то нетрудно видеть, что определение 3.4 эквивалентно определению ядерного морфизма из [48] (см. также [2, гл. II, § 2, п. 4]). В самом деле, мы уже отметили в примере 3.1, что всякое ограниченное подмножество одного из пространств банаховой дуальной пары автоматически равностепенно непрерывно относительно двойственности. Следовательно, наложенные в определении 3.4 условия на последовательности $(f_n), (y_n)$ сводятся к ограниченности этих последовательностей. Таким образом, морфизм u банаховых дуальных пар является ядерным тогда и только тогда, когда он принадлежит образу отображения Гротендика $\gamma_{F_1, E_2} : F_1 \hat{\otimes} E_2 \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2)$ (ср. [48], [2, гл. II, § 2, п. 4]).

В оставшейся части параграфа мы установим некоторые простейшие свойства ядерных морфизмов дуальных пар, аналогичные соответствующим свойствам ядерных операторов.

ЛЕММА 3.9. Пусть $u : \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ – морфизм дуальных пар ЛВП, и пусть $B \subset E_1$ – ограниченное равностепенно непрерывное множество. Тогда множество $u(B) \subset E_2$ также ограничено и равностепенно непрерывно. Если, кроме того, B – банахов диск, то и $u(B)$ – банахов диск.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность $u(B)$ следует из ограниченности B и непрерывности u , а его равностепенная непрерывность – из того, что u сопряжен непрерывному линейному оператору $u' : F_2 \rightarrow F_1$. Если B – диск, то $u(B)$, очевидно, также является диском, причем полунормированное пространство $F_{u(B)}$ является нормированным ввиду ограниченности множества $u(B)$. Наконец, если B – банахов диск, то пространство $F_{u(B)}$ полно, так как оно изоморфно факторпространству банахова пространства E_B (см. [51, гл. 0, § A.5]). Следовательно, $u(B)$ – банахов диск.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. (i) Если $u, v : \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ – ядерные морфизмы дуальных пар, то для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ морфизм $\lambda u + \mu v$ также ядерный.

(ii) Пусть даны морфизмы дуальных пар

$$\langle E_1, F_1 \rangle \xrightarrow{u} \langle E_2, F_2 \rangle \xrightarrow{v} \langle E_3, F_3 \rangle.$$

Если один из морфизмов u, v ядерный, то таков же и морфизм $v \circ u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) очевидно с учетом того, что сумма двух банаховых дисков – банахов диск (см. [51, гл. 0, § A.5]). Докажем утверждение (ii). Предположим, что морфизм u ядерный, и представим его в виде

$$u = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, f_n \rangle y_n,$$

где последовательности $(\lambda_n), (f_n)$ и (y_n) такие, как в определении 3.4. Тогда

$$v \circ u = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, f_n \rangle v(y_n)$$

и из леммы 3.9 следует ядерность морфизма $v \circ u$.

Предположим теперь, что морфизм v ядерный, и представим его в виде

$$v = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, f_n \rangle y_n,$$

где последовательности (λ_n) , (f_n) и (y_n) такие, как в определении 3.4. Тогда

$$v \circ u = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, u'(f_n) \rangle y_n$$

и ядерность морфизма $v \circ u$ снова следует из леммы 3.9.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\langle E, F \rangle$ – дуальная пара ЛВП, и пусть $B \subset F$ – равномерно непрерывный ограниченный банахов диск. Для каждого $x \in E$ положим $q_B(x) = \sup\{|\langle f, x \rangle| : f \in B\}$. Нетрудно видеть, что q_B – это в точности функционал Минковского множества B° , которое является окрестностью нуля в E ввиду равномерной непрерывности множества B . Следовательно, q_B – непрерывная полунорма на E , и определено сопутствующее пространству E банахово пространство E_{q_B} (см. §2). Из определения банаховых пространств E_{q_B} и F_B следует, что двойственность между E и F порождает непрерывную билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $E_{q_B} \times F_B$ по формуле

$$\langle \tau_{q_B}(x), y \rangle = \langle x, \varkappa_B(y) \rangle, \quad x \in E, \quad y \in F_B. \quad (3.4)$$

Ясно, что эта форма невырождена по второму аргументу (т.е. из $\langle \cdot, y \rangle = 0$ следует, что $y = 0$). Чтобы установить ее невырожденность по первому аргументу, заметим, что отображение $E_{q_B} \rightarrow F'_B$, порожденное этой формой, изометрично, поскольку изометрично его ограничение на плотное подпространство $E_{q_B}^0 = E/q_B^{-1}(0)$. Следовательно, отображение $E_{q_B} \rightarrow F'_B$ инъективно, а это и означает, что форма (3.4) невырождена по первому аргументу.

Таким образом, билинейная форма (3.4) невырождена и превращает $\langle E_{q_B}, F_B \rangle$ в дуальную пару банаховых пространств. Кроме того, непосредственно из (3.4) следует, что $(\tau_{q_B}, \varkappa_B) : \langle E, F \rangle \rightarrow \langle E_{q_B}, F_B \rangle$ – морфизм дуальных пар.

Следующее предложение обобщает хорошо известный факт о том, что линейный оператор между ЛВП является ядерным тогда и только тогда, когда он пропускается через ядерный оператор между банаховыми пространствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. *Следующие свойства морфизма $u : \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ дуальных пар ЛВП эквивалентны:*

- (i) морфизм u ядерный;
- (ii) морфизм u допускает разложение

$$\begin{array}{ccc} \langle E_1, F_1 \rangle & \xrightarrow{u} & \langle E_2, F_2 \rangle \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \psi \\ \langle X_1, Y_1 \rangle & \xrightarrow{v} & \langle X_2, Y_2 \rangle \end{array}$$

где $\langle X_k, Y_k \rangle$, $k = 1, 2$, – дуальные пары банаховых пространств, φ , ψ , v – морфизмы дуальных пар, причем морфизм v ядерный;

(iii) морфизм u допускает разложение

$$\begin{array}{ccc} \langle E_1, F_1 \rangle & \xrightarrow{u} & \langle E_2, F_2 \rangle \\ \tau_{q_{B_1}} \downarrow & & \uparrow \varkappa_{B_2} \\ \langle (E_1)_{q_{B_1}}, F_{B_1} \rangle & \xrightarrow{v} & \langle (E_2)_{B_2}, (F_2)_{q_{B_2}} \rangle \end{array} \quad (3.5)$$

где $B_1 \subset F_1$ и $B_2 \subset E_2$ – равностепенно непрерывные ограниченные банаховы диски, а v – ядерный морфизм дуальных пар.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\implies$ (iii). Представим морфизм u в виде (3.3), где последовательности (λ_n) , (f_n) и (y_n) и банаховы диски $B_1 \subset F_1$ и $B_2 \subset E_2$ такие, как в определении 3.4. Нетрудно видеть, что формула

$$v(\tilde{x}) = \sum_n \lambda_n \langle \tilde{x}, f_n \rangle y_n, \quad \tilde{x} \in (E_1)_{q_{B_1}},$$

корректно определяет ядерный морфизм дуальных пар

$$v: \langle (E_1)_{q_{B_1}}, F_{B_1} \rangle \rightarrow \langle (E_2)_{B_2}, (F_2)_{q_{B_2}} \rangle,$$

делающий диаграмму (3.5) коммутативной.

Импликация (iii) $\implies$ (ii) очевидна.

Импликация (ii) $\implies$ (i) следует из предложения 3.10.

§ 4. Факторизационные леммы

Леммы, доказываемые в этом параграфе, составляют “аналитическое ядро” настоящей работы, поскольку на них основаны все наши дальнейшие результаты о гомологических размерностях ядерных алгебр Фреше. Материал этого параграфа развивает методы, примененные автором в работе [22].

Пусть $u: \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ – морфизм дуальных пар ЛВП. Зафиксируем произвольное ЛВП G и рассмотрим оператор

$$(u')_G^*: \mathcal{L}_{\text{be}}(F_1, G) \rightarrow \mathcal{L}_{\text{be}}(F_2, G), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ u'.$$

Заметим, что для любого ограниченного равностепенно непрерывного подмножества $B \subset F_2$ и любой окрестности нуля $U \subset G$ имеет место включение

$$(u')_G^*(M(u'(B), U)) \subset M(B, U). \quad (4.1)$$

Поскольку множество $u'(B) \subset F_1$ ограничено и равностепенно непрерывно согласно лемме 3.9, из включения (4.1) следует, что оператор $(u')_G^*$ непрерывен.

Предположим теперь, что для $k = 1, 2$ определены непрерывные линейные отображения Гротендика (см. (3.2))

$$\gamma_{G, E_k}: G \hat{\otimes} E_k \rightarrow \mathcal{L}_{\text{be}}(F_k, G), \quad z \otimes x \mapsto \langle \cdot, x \rangle z. \quad (4.2)$$

Нетрудно проверить, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\text{be}}(F_1, G) & \xrightarrow{(u')_G^*} & \mathcal{L}_{\text{be}}(F_2, G) \\ \gamma_{G, E_1} \uparrow & & \uparrow \gamma_{G, E_2} \\ G \hat{\otimes} E_1 & \xrightarrow{1_G \otimes u} & G \hat{\otimes} E_2 \end{array}$$

коммутативна.

ЛЕММА 4.1. Пусть $u: \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ – ядерный морфизм дуальных пар ЛВП, и пусть G – произвольное ЛВП. Тогда существует естественное по G непрерывное линейное отображение $\sigma_G: \mathcal{L}_{\text{be}}(F_1, G) \rightarrow G \hat{\otimes} E_2$ со следующим свойством: если для $k = 1, 2$ определены непрерывные линейные отображения Гротендика (4.2), то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\text{be}}(F_1, G) & \xrightarrow{(u')^*_G} & \mathcal{L}_{\text{be}}(F_2, G) \\ \gamma_{G, E_1} \uparrow & \searrow \sigma_G & \uparrow \gamma_{G, E_2} \\ G \hat{\otimes} E_1 & \xrightarrow{1_G \otimes u} & G \hat{\otimes} E_2 \end{array} \quad (4.3)$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим морфизм u в виде (3.3), где $\sum_n |\lambda_n| < \infty$, (f_n) и (y_n) – последовательности в F_1 и E_2 соответственно, содержащиеся в ограниченных равностепенно непрерывных банаховых дисках $B_1 \subset F_1$ и $B_2 \subset E_2$ соответственно. Очевидно, ряд $\sum_n \lambda_n f_n \otimes y_n$ абсолютно сходится в $(F_1)_{B_1} \hat{\otimes} (E_2)_{B_2}$, а значит, сходится в $F_1 \otimes E_2$. Положим

$$v = \sum_n \lambda_n f_n \otimes y_n \in F_1 \hat{\otimes} E_2$$

и зададим линейное отображение $\sigma_G: \mathcal{L}_{\text{be}}(F_1, G) \rightarrow G \hat{\otimes} E_2$ формулой

$$\sigma_G(\varphi) = (\varphi \otimes 1_{E_2})(v) = \sum_n \lambda_n \varphi(f_n) \otimes y_n. \quad (4.4)$$

Покажем, что отображение σ_G удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Отметим, во-первых, что σ_G естественно по G в очевидном смысле. Поэтому в оставшейся части доказательства мы не будем использовать индекс G , т. е. будем писать σ вместо σ_G и $(u')^*$ вместо $(u')^*_G$.

Покажем, что отображение σ непрерывно. Для этого зафиксируем базисную окрестность нуля в $G \hat{\otimes} E_2$ вида $\overline{\Gamma(V \otimes W)}$, где $V \subset G$ и $W \subset E_2$ – окрестности нуля. Поскольку последовательность (y_n) ограничена, существует такое $\lambda > 0$, что $y_n \in \lambda W$ для всех n . Положим $S = \{f_n: n \in \mathbb{N}\}$. Поскольку множество S ограничено и равностепенно непрерывно, множество $M(S, \lambda^{-1}V)$ является окрестностью нуля в $\mathcal{L}_{\text{be}}(F_1, G)$. Для каждого $\varphi \in M(S, \lambda^{-1}V)$ имеем $\varphi(f_n) \in \lambda^{-1}V$, поэтому $\varphi(f_n) \otimes y_n \in V \otimes W$ для всех n и из (4.4) мы видим, что $\sigma(\varphi) \in \overline{\Gamma(V \otimes W)}$. Таким образом, справедливо включение

$$\sigma(M(S, \lambda^{-1}V)) \subset \overline{\Gamma(V \otimes W)},$$

которое доказывает непрерывность отображения σ .

Предположим теперь, что для $k = 1, 2$ определены непрерывные линейные отображения (4.2), и докажем коммутативность диаграммы (4.3). Поскольку отображение u' имеет вид $u' = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, y_n \rangle f_n$ (см. замечание 3.7), для каждого $\varphi \in \mathcal{L}(F_1, G)$ и каждого $h \in F_2$ получаем равенства

$$(u')^*(\varphi)(h) = \varphi(u'(h)) = \sum_n \lambda_n \langle h, y_n \rangle \varphi(f_n) = \gamma_{G, E_2}(\sigma(\varphi))(h).$$

Это доказывает коммутативность верхнего треугольника в диаграмме (4.3).

Для доказательства коммутативности нижнего треугольника зафиксируем произвольные $z \in G$ и $x \in E_1$. Пользуясь формулами (3.3) и (4.4), получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (\sigma\gamma_{G,E_1})(z \otimes x) &= \sigma(\langle x, \cdot \rangle z) = \sum_n \lambda_n \langle x, f_n \rangle z \otimes y_n = z \otimes \sum_n \lambda_n \langle x, f_n \rangle y_n \\ &= z \otimes u(x) = (\mathbf{1}_G \otimes u)(z \otimes x). \end{aligned}$$

Следовательно, диаграмма (4.3) коммутативна, и лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $u: E \rightarrow F$ – ядерное линейное отображение полных ЛВП E и F . Тогда для любого полного ЛВП G существует естественное по G непрерывное линейное отображение $\sigma_G: \mathcal{L}_e(E', G) \rightarrow G \hat{\otimes} F$, делающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_e(E', G) & \xrightarrow{(u')^*_G} & \mathcal{L}_e(F', G) \\ \gamma_{G,E} \uparrow & \searrow \sigma_G & \uparrow \gamma_{G,F} \\ G \hat{\otimes} E & \xrightarrow{\mathbf{1}_G \otimes u} & G \hat{\otimes} F \end{array} \quad (4.5)$$

коммутативной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 3.6 отображение u определяет ядерный морфизм дуальных пар $u: \langle E, E' \rangle \rightarrow \langle F, F' \rangle$. С учетом примера 3.3 видим, что он удовлетворяет всем условиям леммы 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $u: E \rightarrow F$ – ядерное линейное отображение борнологических ЛВП E и F . Тогда для любого полного ЛВП G существует естественное по G непрерывное линейное отображение $\sigma_G: \mathcal{L}_b(F, G) \rightarrow G \hat{\otimes} E'$, делающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_b(F, G) & \xrightarrow{u^*_G} & \mathcal{L}_b(E, G) \\ \gamma_{G,F'} \uparrow & \searrow \sigma_G & \uparrow \gamma_{G,E'} \\ G \hat{\otimes} F' & \xrightarrow{\mathbf{1}_G \otimes u'} & G \hat{\otimes} E' \end{array} \quad (4.6)$$

коммутативной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечаниям 3.6, 3.7 имеем ядерный морфизм дуальных пар $u': \langle F', F \rangle \rightarrow \langle E', E \rangle$. С учетом примера 3.2 видим, что u' удовлетворяет всем условиям леммы 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть $u: E \rightarrow F$ – ядерное линейное отображение полных ЛВП E и F . Тогда для любого борнологического ЛВП G существует естественное по G непрерывное линейное отображение $\rho_G: \mathcal{L}_b(G, E) \rightarrow F \hat{\otimes} G'$, делающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_b(G, E) & \xrightarrow{u_{G,*}} & \mathcal{L}_b(G, F) \\ \gamma_{E,G'} \uparrow & \searrow \rho_G & \uparrow \gamma_{F,G'} \\ E \hat{\otimes} G' & \xrightarrow{u \otimes \mathbf{1}_{G'}} & F \hat{\otimes} G' \end{array} \quad (4.7)$$

коммутативной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейное отображение $d_{G,E}: \mathcal{L}_b(G, E) \rightarrow \mathcal{L}_e(E', G')$, сопоставляющее каждому оператору его сопряженный. Используя теорему о биполяре, нетрудно проверить, что для любого абсолютно выпуклого замкнутого ограниченного множества $B \subset G$ и любой абсолютно выпуклой замкнутой окрестности нуля $U \subset E$ справедливо равенство

$$d_{G,E}(M(B, U)) = M(U^\circ, B^\circ) \cap \text{Im } d_{G,E}.$$

Следовательно, отображение $d_{G,E}$ непрерывно (и, более того, топологически инъективно). С учетом примеров 3.2, 3.3 получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{L}_e(E', G') & \xrightarrow{(u')_{G'}^*} & \mathcal{L}_e(F', G') \\
 & \nearrow d_{G,E} & & & \nwarrow d_{G,F} \\
 & \mathcal{L}_b(G, E) & \xrightarrow{u_{G,*}} & \mathcal{L}_b(G, F) & \\
 \gamma_{G',E} \nearrow & \uparrow \gamma_{E,G'} & & \uparrow \gamma_{F,G'} & \nwarrow \gamma_{G',F} \\
 E \hat{\otimes} G' & \xrightarrow{u \otimes 1_{G'}} & F \hat{\otimes} G' & & \\
 \uparrow c_{G',E} & & \uparrow c_{G',F} & & \\
 G' \hat{\otimes} E & \xrightarrow{1_{G'} \otimes u} & G' \hat{\otimes} F & &
 \end{array} \quad (4.8)$$

в которой через $c_{G',E}$ и $c_{G',F}$ обозначены канонические изоморфизмы, переставляющие тензорные сомножители. В силу следствия 4.2 существует естественное по G непрерывное линейное отображение $\sigma_G: \mathcal{L}_e(E', G') \rightarrow G' \hat{\otimes} F$, которое, будучи встроено в диаграмму (4.8), оставляет ее коммутативной. Нетрудно проверить, что отображение $\rho_G = c_{G',F} \circ \sigma_G \circ d_{G,E}$ искомое.

В дальнейшем нам понадобится вариант леммы 4.1 для топологических модулей. Прежде чем его формулировать, дадим некоторые необходимые определения. Пусть $\langle E, F \rangle$ – дуальная пара ЛВП. Предположим, что на E введена структура правого, а на F – левого топологического модуля над некоторой алгеброй A и что для всех $x \in E$, $y \in F$ и $a \in A$ имеет место равенство $\langle x \cdot a, y \rangle = \langle x, a \cdot y \rangle$. В этом случае будем говорить, что $\langle E, F \rangle$ – *дуальная пара топологических A -модулей*. Морфизм дуальных пар топологических модулей $(u, v): \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ – это морфизм дуальных пар ЛВП, в котором u и v – морфизмы A -модулей. Легко проверить, что на самом деле в этом определении достаточно требовать, чтобы хотя бы один из операторов u , v был морфизмом A -модулей, второй при этом окажется морфизмом A -модулей автоматически. Морфизм дуальных пар топологических A -модулей назовем *ядерным*, если он ядерный как морфизм дуальных пар ЛВП.

Отметим, что если $\langle E, F \rangle$ – дуальная пара топологических A -модулей, то для любого левого топологического A -модуля G пространство $\mathcal{L}_{be}(F, G)$ является топологическим A -бимодулем относительно операций (2.4). В самом деле, для каждого $a \in A$ отображение $F \rightarrow F$, $x \mapsto a \cdot x$, является морфизмом дуальных пар $\langle E, F \rangle \rightarrow \langle E, F \rangle$, поэтому из леммы 3.9 следует, что семейство $\mathfrak{S}$ всех ограниченных равномерно непрерывных подмножеств модуля F удовлетворяет условию (2.5).

Предположим теперь, что морфизм u из леммы 4.1 является морфизмом дуальных пар топологических модулей над некоторой алгеброй A и что G – левый топологический A -модуль. Тогда из вышеизложенного следует, что все объекты в диаграмме (4.3) являются топологическими A -бимодулями, и прямая проверка показывает, что все отображения в (4.3), кроме, быть может, σ_G , являются морфизмами A -бимодулей. К сожалению, по причине возможного отсутствия у рассматриваемых модулей свойства аппроксимации не удастся доказать, что отображение σ_G также является морфизмом A -бимодулей (подробное обсуждение см. в [22, замечание 1.2]). Следующая простая алгебраическая лемма позволит нам в дальнейшем обойти эту трудность.

ЛЕММА 4.5. *Пусть A – произвольная алгебра. Предположим, что дана коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha} & M_2 \\ & \searrow \beta & \uparrow \gamma \\ & & N_1 \xrightarrow{\varepsilon} N_2 \end{array}$$

в которой M_1, M_2, N_1, N_2 – A -бимодули, $\alpha, \gamma, \varepsilon$ – морфизмы A -бимодулей, а β, δ – произвольные отображения. Тогда $\delta\alpha$ – морфизм A -бимодулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямой проверкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Пусть A – алгебра и $\mathcal{C}$ – какая-либо полная подкатегория в категории всех левых топологических A -модулей (соответственно, дуальных пар топологических A -модулей). Назовем морфизм категории $\mathcal{C}$ *биядерным* (ср. [52]), если он представим в виде композиции двух ядерных морфизмов категории $\mathcal{C}$.

ЛЕММА 4.7. *Пусть $u: \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ – биядерный морфизм дуальных пар топологических модулей над некоторой алгеброй A , и пусть G – левый топологический A -модуль. Представим морфизм u в виде $u = u_2 \circ u_1$, где $u_1: \langle E_1, F_1 \rangle \rightarrow \langle E_0, F_0 \rangle$ и $u_2: \langle E_0, F_0 \rangle \rightarrow \langle E_2, F_2 \rangle$ – ядерные морфизмы дуальных пар топологических A -модулей, и предположим, что для $k = 0, 1, 2$ определены непрерывные линейные отображения Гротендика (4.2). Тогда существует естественный по G непрерывный морфизм A -бимодулей $\sigma_G: \mathcal{L}_{be}(F_1, G) \rightarrow G \hat{\otimes} E_2$, делающий диаграмму (4.3) коммутативной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через σ_1 и σ_2 отображения, построенные исходя из u_1 и u_2 по схеме, указанной в лемме 4.1. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}_{be}(F_1, G) & \xrightarrow{(u'_1)^*} & \mathcal{L}_{be}(F_0, G) & \xrightarrow{(u'_2)^*} & \mathcal{L}_{be}(F_2, G) \\ \uparrow \gamma_{G, E_1} & \searrow \sigma_1 & \uparrow \gamma_{G, E_0} & \searrow \sigma_2 & \uparrow \gamma_{G, E_2} \\ G \hat{\otimes} E_1 & \xrightarrow{1_G \otimes u_1} & G \hat{\otimes} E_0 & \xrightarrow{1_G \otimes u_2} & G \hat{\otimes} E_2 \end{array}$$

Для завершения доказательства остается положить $\sigma = \sigma_2 \circ (u'_1)^*$ и воспользоваться леммой 4.5.

СЛЕДСТВИЕ 4.8. Пусть $u: E \rightarrow F$ – биядерный морфизм в категории полных правых топологических модулей над некоторой алгеброй A . Тогда для любого полного левого топологического A -модуля G существует естественный по G непрерывный морфизм A -бимодулей $\sigma_G: \mathcal{L}_e(E', G) \rightarrow G \hat{\otimes} F$, делающий диаграмму (4.5) коммутативной.

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Пусть $u: E \rightarrow F$ – биядерный морфизм в категории борнологических левых топологических модулей над некоторой алгеброй A . Тогда для любого полного левого топологического A -модуля G существует естественный по G непрерывный морфизм A -бимодулей $\sigma_G: \mathcal{L}_b(F, G) \rightarrow G \hat{\otimes} E'$, делающий диаграмму (4.6) коммутативной.

СЛЕДСТВИЕ 4.10. Пусть $u: E \rightarrow F$ – биядерный морфизм в категории полных левых топологических модулей над некоторой алгеброй A . Тогда для любого борнологического левого топологического A -модуля G существует естественный по G непрерывный морфизм A -бимодулей $\rho_G: \mathcal{L}_b(G, E) \rightarrow F \hat{\otimes} G'$, делающий диаграмму (4.7) коммутативной.

§ 5. Проективные тензорные произведения и приведенные обратные пределы

Хорошо известно (см., например, монографию [53, §41, п. 6]), что полное проективное тензорное произведение локально выпуклых пространств перестановочно с операцией приведенного обратного предела. В этом параграфе мы доказываем аналогичный результат в контексте локально выпуклых модулей. По-видимому, пока этот результат известен лишь в некоторых специальных случаях⁵ (см. [54, предложение 3.2.11], [35, лемма 7.1]). Не исключено, что приведенное ниже доказательство может представлять интерес даже в случае, когда $A = \mathbb{C}$ и локально выпуклые A -модули – это просто локально выпуклые пространства, поскольку, на наш взгляд, оно несколько проще вышеупомянутого доказательства в [53].

Напомним (см. §2), что для полунормированного пространства E его пополнение $\tilde{E}$ определяется как пополнение нормированного пространства $E_{\text{sep}} = E/\{0\}$. Легко видеть, что для вектора $x \in E$ условия $x \in \{0\}$ и $\|x\| = 0$ равносильны. Отсюда следует, что факторотображение $E \rightarrow E_{\text{sep}}$ и каноническое отображение $E \rightarrow \tilde{E}$ изометричны. Если F – банахово пространство, то каждое непрерывное линейное отображение $\varphi: E \rightarrow F$ пропускается через пополнение $\tilde{E}$ с сохранением нормы. Следовательно, имеет место изометрический изоморфизм $\mathcal{L}(E, F) \cong \mathcal{L}(\tilde{E}, F)$; в частности, $E' \cong \tilde{E}'$.

ЛЕММА 5.1. Пусть X, Y – полунормированные пространства, $\varphi: X \rightarrow Y$ – непрерывное линейное отображение. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) отображение φ изометрично и имеет плотный образ;
- (ii) отображение $\varphi': Y' \rightarrow X'$ – изометрический изоморфизм.

⁵ Автор имеет неподтвержденную информацию, что сходный результат был независимо получен К. Подарой; однако ее работа пока не опубликована и недоступна даже в виде препринта, поэтому мы не можем привести точную ссылку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к отображению φ функтор пополнения, получаем непрерывное линейное отображение $\tilde{\varphi}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$, которое изометрично тогда и только тогда, когда изометрично отображение φ . Следовательно, отображение φ удовлетворяет условию (i) тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi}$ – изометрический изоморфизм. С другой стороны, из обсуждения, предшествующего формулировке леммы, следует, что мы можем отождествить отображения φ' и $\tilde{\varphi}'$. Таким образом, лемма свелась к хорошо известному утверждению о том, что линейный оператор между банаховыми пространствами является изометрическим изоморфизмом тогда и только тогда, когда его сопряженный оператор является изометрическим изоморфизмом (см., например, [55, ч. 0, гл. В, § 3, п. 9]).

ЛЕММА 5.2. Пусть $X_k, Y_k, k = 1, 2$, – полунормированные пространства, и пусть $\varphi_k: X_k \rightarrow Y_k, k = 1, 2$, – изометрические линейные отображения с плотными образами. Тогда отображение

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2: X_1 \otimes_{\pi} X_2 \rightarrow Y_1 \otimes_{\pi} Y_2$$

изометрично и имеет плотный образ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку отображение $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ представляется в виде композиции

$$X_1 \otimes_{\pi} X_2 \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \mathbf{1}_{X_2}} Y_1 \otimes_{\pi} X_2 \xrightarrow{\mathbf{1}_{Y_1} \otimes \varphi_2} Y_1 \otimes_{\pi} Y_2,$$

достаточно рассмотреть случай, когда $X_2 = Y_2 = E$ и $\varphi_2 = \mathbf{1}_E$. Пользуясь сопряженной ассоциативностью⁶ (см., например, [2, гл. II, теорема 2.17]), мы можем отождествить отображение $(\varphi_1 \otimes \mathbf{1}_E)'$ с отображением

$$(\varphi'_1)_{E,*}: \mathcal{L}(E, Y'_1) \rightarrow \mathcal{L}(E, X'_1), \quad \psi \mapsto \varphi'_1 \circ \psi.$$

В силу леммы 5.1 отображение φ'_1 – изометрический изоморфизм. Следовательно, таково же отображение $(\varphi'_1)_{E,*}$, а вместе с ним и отображение $(\varphi_1 \otimes \mathbf{1}_E)'$. Остается еще раз воспользоваться леммой 5.1.

ЛЕММА 5.3. Пусть A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, и пусть $\varphi_1: X_1 \rightarrow Y_1$ – морфизм правых A - $\widehat{\otimes}$ -модулей, $\varphi_2: X_2 \rightarrow Y_2$ – морфизм левых A - $\widehat{\otimes}$ -модулей. Предположим, что φ_1 и φ_2 имеют плотные образы. Тогда для любых непрерывных полунорм p_1 на Y_1 и p_2 на Y_2 справедливо равенство

$$(p_1 \circ \varphi_1) \otimes_A (p_2 \circ \varphi_2) = (p_1 \otimes_A p_2) \circ (\varphi_1 \otimes_A \varphi_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 5.2 к изометрическим отображениям полунормированных пространств

$$\varphi_k: (X_k, p_k \circ \varphi_k) \rightarrow (Y_k, p_k), \quad k = 1, 2,$$

мы видим, что полунормы

$$(p_1 \circ \varphi_1) \otimes (p_2 \circ \varphi_2), \quad (p_1 \otimes p_2) \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \quad (5.1)$$

⁶Хотя закон сопряженной ассоциативности обычно формулируется в контексте банаховых или нормированных пространств, нетрудно видеть, что он дословно переносится на полунормированные пространства.

на пространстве $X_1 \otimes X_2$ равны. Следовательно, равны и их продолжения по непрерывности на пространство $X_1 \widehat{\otimes} X_2$, а значит, и соответствующие им факторполунормы на пространстве $(X_1 \widehat{\otimes} X_2)/N_{X_1, X_2}$. Обозначим факторполунорму второй из полунорм (5.1) через q . Для завершения доказательства остается установить, что

$$q = (p_1 \otimes_A p_2) \circ (\varphi_1 \otimes_A \varphi_2). \quad (5.2)$$

Для этого сначала заметим, что из плотности образов морфизмов φ_1 и φ_2 легко следует, что подпространство $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(N_{X_1, X_2})$ плотно в N_{Y_1, Y_2} . Поэтому для каждого $u \in X_1 \widehat{\otimes} X_2$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} q(u + N_{X_1, X_2}) &= \inf \{ (p_1 \otimes p_2)((\varphi_1 \otimes \varphi_2)(u + v)) : v \in N_{X_1, X_2} \} \\ &= \inf \{ (p_1 \otimes p_2)((\varphi_1 \otimes \varphi_2)(u) + w) : w \in N_{Y_1, Y_2} \} \\ &= (p_1 \otimes_A p_2)((\varphi_1 \otimes \varphi_2)(u) + N_{Y_1, Y_2}) \\ &= (p_1 \otimes_A p_2)((\varphi_1 \otimes_A \varphi_2)(u + N_{X_1, X_2})). \end{aligned}$$

Это доказывает равенство (5.2) и завершает доказательство леммы.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, и пусть $(X_\alpha, \varphi_{\alpha\alpha'}, S)$ и $(Y_\beta, \psi_{\beta\beta'}, T)$ – приведенные обратные системы в категориях $\mathbf{mod}\text{-}A$ и $A\text{-}\mathbf{mod}$ соответственно. Положим $X = \varprojlim X_\alpha$, $Y = \varprojlim Y_\beta$ и обозначим через $\varphi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ и $\psi_\beta: Y \rightarrow Y_\beta$ соответствующие канонические проекции. Тогда отображение

$$\begin{aligned} \tau: X \widehat{\otimes}_A Y &\rightarrow \varprojlim (X_\alpha \widehat{\otimes}_A Y_\beta, \varphi_{\alpha\alpha'} \otimes_A \psi_{\beta\beta'}, S \times T), \\ x \otimes y &\mapsto (\varphi_\alpha(x) \otimes_A \psi_\beta(y))_{(\alpha, \beta) \in S \times T}, \end{aligned}$$

является топологическим изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Z = \varprojlim X_\alpha \widehat{\otimes}_A Y_\beta$ и обозначим через $\sigma_{\alpha\beta}: Z \rightarrow X_\alpha \widehat{\otimes}_A Y_\beta$ каноническую проекцию. Для каждого $(\alpha, \beta) \in S \times T$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X \widehat{\otimes}_A Y & \xrightarrow{\tau} & Z \\ & \searrow \varphi_\alpha \otimes_A \psi_\beta & \swarrow \sigma_{\alpha\beta} \\ & X_\alpha \widehat{\otimes}_A Y_\beta & \end{array}$$

Пользуясь леммой 5.3, заключаем, что для любых непрерывных полунорм p_α на X_α и q_β на Y_β справедливы равенства

$$(p_\alpha \circ \varphi_\alpha) \otimes_A (q_\beta \circ \psi_\beta) = (p_\alpha \otimes_A q_\beta) \circ (\varphi_\alpha \otimes_A \psi_\beta) = (p_\alpha \otimes_A q_\beta) \circ \sigma_{\alpha\beta} \circ \tau. \quad (5.3)$$

Введем следующее временное обозначение: для ЛВП E через $\mathcal{P}(E)$ обозначим семейство всех непрерывных полунорм на E . Нетрудно видеть, что топологии на пространствах $X \widehat{\otimes}_A Y$ и Z задаются соответственно системами полунорм

$$\begin{aligned} \{ (p_\alpha \circ \varphi_\alpha) \otimes_A (q_\beta \circ \psi_\beta) : (\alpha, \beta) \in S \times T, p_\alpha \in \mathcal{P}(X_\alpha), q_\beta \in \mathcal{P}(Y_\beta) \}, \\ \{ (p_\alpha \otimes_A q_\beta) \circ \sigma_{\alpha\beta} : (\alpha, \beta) \in S \times T, p_\alpha \in \mathcal{P}(X_\alpha), q_\beta \in \mathcal{P}(Y_\beta) \}. \end{aligned}$$

Объединяя этот факт с формулой (5.3), мы видим, что отображение τ топологически инъективно и, как следствие, его образ $Z_0 = \text{Im } \tau$ замкнут в Z . С другой стороны, для каждого $(\alpha, \beta) \in S \times T$ подмножество $\sigma_{\alpha\beta}(Z_0) = \text{Im}(\varphi_\alpha \otimes_A \psi_\beta)$ плотно в $X_\alpha \widehat{\otimes}_A Y_\beta$, откуда с учетом [56, предложение 2.5.6] следует, что Z_0 плотно в Z . В итоге $Z_0 = Z$ и τ – топологический изоморфизм, что и требовалось доказать.

§ 6. Сравнение слабой глобальной размерности со слабой биразмерностью

В этом параграфе мы покажем, что для ядерной алгебры Фреше–Аренса–Майкла, удовлетворяющей условию $\text{w.db } A < \infty$, справедливо равенство $\text{w.dg } A = \text{w.db } A$.

Сначала напомним следующий известный алгебраический факт (см. [29, теорема 3.5.8]).

ЛЕММА 6.1. Пусть $C_{\bullet,0} \leftarrow C_{\bullet,1} \leftarrow \dots$ – обратная последовательность цепных комплексов абелевых групп, и пусть $C_\bullet = \varprojlim C_{\bullet,\nu}$. Предположим, что $\varprojlim^1 C_{n,\nu} = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ канонический гомоморфизм $H_n(C_\bullet) \rightarrow \varprojlim H_n(C_{\bullet,\nu})$ может быть вложен в короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 H_{n+1}(C_{\bullet,\nu}) \rightarrow H_n(C_\bullet) \rightarrow \varprojlim H_n(C_{\bullet,\nu}) \rightarrow 0.$$

Хотя данное утверждение доказано в [29, теорема 3.5.8] при более сильном предположении, что для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ обратная последовательность абелевых групп $(C_{n,\nu})$ удовлетворяет (алгебраическому) условию Миттаг–Леффлера, нетрудно видеть, что в его доказательстве используется лишь то, что $\varprojlim^1 C_{n,\nu} = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

ЛЕММА 6.2. Пусть A – алгебра Фреше и $Y = \varprojlim Y_\nu$ – счетный приведенный обратный предел в категории $\text{mod-}A(\text{Fr})$. Тогда для любого $X \in A\text{-mod}(\text{Fr})$ и любого $n \in \mathbb{Z}_+$ каноническое отображение

$$\text{Tor}_n^A(Y, X) \rightarrow \varprojlim \text{Tor}_n^A(Y_\nu, X)$$

вкладывается в короткую точную последовательность векторных пространств

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 \text{Tor}_{n+1}^A(Y_\nu, X) \rightarrow \text{Tor}_n^A(Y, X) \rightarrow \varprojlim \text{Tor}_n^A(Y_\nu, X) \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_\bullet \rightarrow X$ – проективная резольвента модуля X в категории $A\text{-mod}(\text{Fr})$. В силу теоремы 5.4 имеет место изоморфизм цепных комплексов пространств Фреше

$$Y \widehat{\otimes}_A P_\bullet \cong \varprojlim Y_\nu \widehat{\otimes}_A P_\bullet.$$

Поскольку для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ обратная система $(Y_\nu \widehat{\otimes}_A P_n)$, очевидно, приведена, справедливо равенство $\varprojlim^1 Y_\nu \widehat{\otimes}_A P_n = 0$ (см. § 2). Применяя лемму 6.1, получаем требуемую точную последовательность.

ЛЕММА 6.3. Пусть A – алгебра Фреше–Аренса–Майкла, $X \in A\text{-mod}(\text{Fr})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Предположим, что $\text{Tor}_{n+1}^A(Y, X) = 0$ для любого $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$, но существует такой $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$, что $\text{Tor}_n^A(Y, X) \neq 0$. Тогда существует банахов модуль $Z \in \text{mod-}A(\text{Ban})$, удовлетворяющий условию $\text{Tor}_n^A(Z, X) \neq 0$. Если при этом пространство $\text{Tor}_n^A(Y, X)$ нехаусдорфово, то модуль Z может быть выбран так, что и пространство $\text{Tor}_n^A(Z, X)$ нехаусдорфово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим модуль Y в виде приведенного обратного предела последовательности правых банаховых A -модулей: $Y = \varprojlim Y_\nu$ (см. § 2). Применяя лемму 6.2, получаем непрерывную биекцию

$$\text{Tor}_n^A(Y, X) \rightarrow \varprojlim \text{Tor}_n^A(Y_\nu, X).$$

Следовательно, $\text{Tor}_n^A(Y_\nu, X) \neq 0$ для некоторого ν . Если, кроме того, пространство $\text{Tor}_n^A(Y, X)$ нехаусдорфово, то и пространство $\text{Tor}_n^A(Y_\nu, X)$ нехаусдорфово для некоторого ν .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Пусть A – алгебра Фреше–Аренса–Майкла, и пусть $X \in A\text{-mod}(\text{Fr})$, причем $\text{w.dh}_A X < \infty$. Тогда

$$\text{w.dh}_A X = \min \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ \mid \begin{array}{l} \text{Tor}_{p+1}^A(Y, X) = 0 \text{ и пространство } \text{Tor}_n^A(Y, X) \\ \text{хаусдорфово } \forall Y \in \text{mod-}A(\text{Ban}), \forall p \geq n \end{array} \right\}. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d = \text{w.dh}_A X$. Обозначим через $\bar{d}$ правую часть формулы (6.1). Ясно, что $\bar{d} \leq d$. Возможны следующие случаи.

1) Существует такой модуль $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$, что $\text{Tor}_d^A(Y, X) \neq 0$. Применяя лемму 6.3 при $n = d$, получаем такой модуль $Z \in \text{mod-}A(\text{Ban})$, что $\text{Tor}_d^A(Z, X) \neq 0$. Следовательно, в этом случае $\bar{d} = d$.

2) Для любого модуля $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$ справедливо равенство $\text{Tor}_d^A(Y, X) = 0$, но существует такой модуль $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$, что пространство $\text{Tor}_{d-1}^A(Y, X)$ нехаусдорфово. Применяя лемму 6.3 при $n = d - 1$, получаем такой модуль $Z \in \text{mod-}A(\text{Ban})$, что пространство $\text{Tor}_{d-1}^A(Z, X)$ нехаусдорфово. Следовательно, и в этом случае $\bar{d} = d$.

Напомним одну стандартную конструкцию (см. [26, гл. 7, § 1, п. 3]), которая будет использована в доказательстве следующей леммы. Пусть A – банахова алгебра, а M – правый банахов A -модуль. Будем рассматривать $\mathcal{L}(A, M)$ как правый банахов A -модуль относительно операции $(\varphi \cdot a)(b) = \varphi(ab)$, где $a, b \in A$ и $\varphi \in \mathcal{L}(A, M)$. Рассмотрим отображение

$$L^{A, M}: M \rightarrow \mathcal{L}(A, M), \quad L^{A, M}(x): a \mapsto x \cdot a, \quad x \in M, \quad a \in A.$$

Известно, что $L^{A, M}$ – морфизм в категории $\text{mod-}A(\text{Ban})$ и, кроме того, он является допустимым мономорфизмом (в самом деле, отображение $\mathcal{L}(A, M) \rightarrow M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$, является левым обратным к $L^{A, M}$). Если же M является банаховым A -бимодулем, то и $\mathcal{L}(A, M)$ – банахов A -бимодуль относительно операций (2.4), и нетрудно проверить, что $L^{A, M}$ – морфизм A -бимодулей.

ЛЕММА 6.5. Пусть A – ядерная алгебра Фреше–Аренса–Майкла, и пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Предположим, что $\mathcal{H}_{n+1}(A, M) = 0$ для всех $M \in A\text{-mod-}A(\text{Fr})$, но существует такой бимодуль $M \in A\text{-mod-}A(\text{Fr})$, что $\mathcal{H}_n(A, M) \neq 0$. Тогда существуют бимодуль $X \in A\text{-mod-}A(\text{Ban})$ и сопутствующая алгебре A банахова алгебра B , удовлетворяющие условиям $\text{Tor}_n^A(B', X) \neq 0$ и $\text{Tor}_n^A(X, B') \neq 0$.

Если при этом пространство $\mathcal{H}_n(A, M)$ нехаусдорфово, то X и B могут быть выбраны так, что пространства $\text{Tor}_n^A(B', X)$ и $\text{Tor}_n^A(X, B')$ также нехаусдорфовы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем A -бимодуль Фреше M , для которого $\mathcal{H}_n(A, M) \neq 0$. С учетом леммы 6.3 мы можем с самого начала считать, что M – банахов A -бимодуль.

В силу леммы 2.1 и замечания 2.2 существует такая сопутствующая алгебре A банахова алгебра (A_1, φ_1) , что M обладает структурой банахова A_1 -бимодуля, согласованной с φ_1 . Пользуясь ядерностью алгебры A , найдем такую сопутствующую алгебре A банахову алгебру $(A_2, \varphi_2) \succ (A_1, \varphi_1)$, что канонический гомоморфизм $\varphi_{12}: A_2 \rightarrow A_1$ биядерен как гомоморфизм банаховых алгебр (т.е. имеет вид $\varphi_{12} = fg$, где f и g – ядерные гомоморфизмы банаховых алгебр). Будем рассматривать φ_{12} как биядерный морфизм в категории $A\text{-mod}(\text{Ban})$. Применяя следствие 4.9, получаем коммутативную диаграмму банаховых A -бимодулей

$$\begin{array}{ccc} M \xrightarrow{L^{A_1, M}} \mathcal{L}(A_1, M) & \xrightarrow{(\varphi_{12})_M^*} & \mathcal{L}(A_2, M) \\ & \searrow \sigma_M \quad \nearrow \gamma_{M, A'_2} & \\ & M \widehat{\otimes} A'_2 & \end{array} \quad (6.2)$$

Переходя к гомологиям, получаем цепочку непрерывных линейных отображений

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n(A, M) &\rightarrow \mathcal{H}_n(A, \mathcal{L}(A_1, M)) \rightarrow \mathcal{H}_n(A, M \widehat{\otimes} A'_2) \\ &\cong \text{Tor}_n^A(A'_2, M) \rightarrow \mathcal{H}_n(A, \mathcal{L}(A_2, M)). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Будем рассматривать A_1 -бимодуль M как банахов A_2 -бимодуль, полученный отступлением вдоль гомоморфизма φ_{12} . Легко проверяется, что композиция горизонтальных морфизмов в диаграмме (6.2) совпадает с каноническим вложением $L^{A_2, M}$ и является, следовательно, допустимым мономорфизмом. Из условия $\mathcal{H}_{n+1}(A, \cdot) = 0$ получаем, что функтор $\mathcal{H}_n(A, \cdot)$ точен слева и, следовательно, композиция отображений в цепочке (6.3) – инъекция.

Таким образом, пространство $\mathcal{H}_n(A, M)$ непрерывно и инъективно отображается в пространство $\text{Tor}_n^A(A'_2, M)$. Отсюда следует, что $\text{Tor}_n^A(A'_2, M) \neq 0$; более того, если пространство $\mathcal{H}_n(A, M)$ нехаусдорфово, то и пространство $\text{Tor}_n^A(A'_2, M)$ нехаусдорфово.

Для завершения доказательства воспользуемся тем, что при стандартном отождествлении A -бимодулей с A^{op} -бимодулями (2.2) для любого A -бимодуля Фреше N и любого $i \in \mathbb{Z}_+$ имеет место топологический изоморфизм $\mathcal{H}_i(A^{\text{op}}, N) \cong \mathcal{H}_i(A, N)$. Следовательно, мы можем повторить проведенные выше рассуждения с алгеброй A^{op} вместо A и с тем же самым бимодулем M , а затем воспользоваться топологическим изоморфизмом $\text{Tor}_n^A(M, A'_2) \cong \text{Tor}_n^{A^{\text{op}}}((A_2^{\text{op}})', M)$.

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть A – ядерная алгебра Фреше–Аренса–Майкла. Предположим, что $\text{w.db } A < \infty$. Тогда справедливо равенство

$$\text{w.dg } A = \text{w.db } A.$$

Более того, $\text{w.db } A = \text{w.dh}_A B'$, где B – некоторая сопутствующая алгебре A банахова алгебра, рассмотренная как левый или как правый банахов A -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $d = \text{w.db } A$. Возможны следующие случаи.

1) Существует такой A -бимодуль Фреше M , что $\mathcal{H}_d(A, M) \neq 0$. Применяя лемму 6.5 при $n = d$, получаем банахов A -бимодуль X и сопутствующую алгебре A банахову алгебру B , удовлетворяющие условиям $\text{Tor}_d^A(B', X) \neq 0$ и $\text{Tor}_d^A(X, B') \neq 0$. Следовательно, в этом случае $\text{w.dh}_A B' = d$ как в $A\text{-mod}(\text{Fr})$, так и в $\text{mod-}A(\text{Fr})$.

2) Для любого A -бимодуля Фреше M справедливо равенство $\mathcal{H}_d(A, M) = 0$, но существует такой A -бимодуль Фреше M , что пространство $\mathcal{H}_{d-1}(A, M)$ нехаусдорфово. Применяя лемму 6.5 при $n = d-1$, получаем банахов A -бимодуль X и сопутствующую алгебре A банахову алгебру B , для которых пространства $\text{Tor}_{d-1}^A(B', X)$ и $\text{Tor}_{d-1}^A(X, B')$ нехаусдорфовы. Следовательно, и в этом случае $\text{w.dh}_A B' = d$ как в $A\text{-mod}(\text{Fr})$, так и в $\text{mod-}A(\text{Fr})$.

§ 7. Сравнение глобальной размерности с биразмерностью

От сравнения слабых размерностей w.dg и w.db перейдем теперь к сравнению “сильных” размерностей dg и db . Как уже упоминалось во введении, для этого нам придется наложить на рассматриваемые алгебры одно из двух ограничений, одно из которых носит скорее алгебраический, нежели топологический характер, а другое, наоборот, формулируется исключительно в терминах теории топологических векторных пространств.

Начнем с обсуждения первого ограничения, которое нам в дальнейшем понадобится как в “локально выпуклом”, так и в “чисто алгебраическом” контекстах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть A – алгебра, X – левый A -модуль. Будем говорить, что X – модуль *строго конечного типа*, если он обладает резольвентой в категории $A\text{-Mod}$, состоящей из конечно порожденных проективных модулей.

Назовем алгебру A *алгеброй конечного типа*, если она имеет строго конечный тип как левый A^e -модуль.

Например, всякий конечно порожденный модуль над нётеровой алгеброй является модулем строго конечного типа. Как следствие, всякая нётерова алгебра является алгеброй конечного типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Пусть A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, X – левый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль. Будем говорить, что X – модуль *строго конечного типа*, если он обладает резольвентой в категории $A\text{-mod}$, состоящей из конечно порожденных строго проективных модулей.

Назовем $\widehat{\otimes}$ -алгебру A *алгеброй конечного типа*, если она имеет строго конечный тип как левый $A^e\text{-}\widehat{\otimes}$ -модуль.

ПРИМЕР 7.3. Пусть A – любая из следующих $\widehat{\otimes}$ -алгебр:

- 1) $A = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ – алгебра формальных степенных рядов, снабженная топологией покоэффициентной сходимости;
- 2) $A = \mathcal{O}(U)$ – алгебра голоморфных функций на полиобласти $U = U_1 \times \dots \times U_n \subset \mathbb{C}^n$, снабженная топологией равномерной сходимости на компактах;
- 3) $A = \mathcal{O}(K)$ – алгебра ростков голоморфных функций на компакте $K \subset \mathbb{C}^n$ вида $K = K_1 \times \dots \times K_n$, где K_i , $1 \leq i \leq n$, – компакты в $\mathbb{C}$, снабженная стандартной топологией прямого предела (см., например, [57, гл. IV, § 4, п. 3]);

4) $A = C^\infty(D)$ – алгебра гладких функций на области $D \subset \mathbb{R}^n$, снабженная топологией равномерной сходимости на компактах со всеми частными производными;

5) $A = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – алгебра обобщенных функций на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем, снабженная топологией сильного сопряженного пространства к $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Известно, что каждая из этих алгебр обладает так называемой “свободной бимодульной резольвентой Кошуля” длины n и поэтому является $\widehat{\otimes}$ -алгеброй конечного типа (см. [22, § 2]). Для алгебр $\mathcal{O}(U)$, $C^\infty(D)$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ это было доказано Дж. Тэйлором [37], а для алгебр $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ и $\mathcal{O}(K)$ доказательство в сущности ничем не отличается от доказательства Тэйлора, поэтому мы его не приводим.

ПРИМЕР 7.4. Пусть M – гладкое компактное многообразие, $A = C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на M . Как показал А. Конн [58, ч. II, лемма 44], если эйлерова характеристика многообразия M равна нулю, то $C^\infty(M)$ – $\widehat{\otimes}$ -алгебра конечного типа.

Используя следующее простое наблюдение, можно получить ряд других примеров $\widehat{\otimes}$ -алгебр конечного типа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Пусть $\mathcal{C}$ – строго допустимая подкатегория в LCS. Если $A \rightarrow B$ – гомологический эпиморфизм в категории $\mathbf{alg}(\mathcal{C})$ и A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра конечного типа, то такова же и алгебра B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения гомологического эпиморфизма следует, что достаточно показать, что функтор $B \widehat{\otimes}_A (\cdot) \widehat{\otimes}_A B$ переводит строго проективные конечно порожденные A - $\widehat{\otimes}$ -бимодули в строго проективные конечно порожденные B - $\widehat{\otimes}$ -бимодули. Для свободных конечно порожденных бимодулей это очевидно, а общий случай немедленно следует из соображений функториальности.

ПРИМЕР 7.6. В работах [21], [37], [44]–[47] был приведен ряд примеров гомологических эпиморфизмов вида $A_s \rightarrow B$, где A – нётерова алгебра, а B – $\widehat{\otimes}$ -алгебра. Из предложения 7.5 немедленно следует, что все такие алгебры B являются алгебрами конечного типа. Таковы, в частности, алгебра аналитических функционалов [17]–[19] на разрешимой односвязной группе Ли, ассоциативная свёрхоболочка [14] конечномерной алгебры Ли, весовые пополнения [15], [16] универсальной обертывающей алгебры нильпотентной алгебры Ли, а также оболочки Аренса–Майкла ряда некоммутативных конечно порожденных алгебр.

Второе – альтернативное – ограничение, которое мы будем налагать на рассматриваемые алгебры, фактически зависит только от топологий на этих алгебрах. Напомним (см., например, [12]), что пространство s *быстро убывающих последовательностей* определяется следующим образом:

$$s = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|x\|_k = \sum_n |x_n| n^k < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Топология на этом пространстве определяется семейством норм $\{\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{N}\}$. Известно, что s – ядерное пространство Фреше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.7. Будем называть ЛВП E *пространством типа (s)* , если оно топологически изоморфно дополняемому подпространству пространства s .

Пространства типа (s) допускают характеризацию во внутренних терминах; именно, это в точности те ядерные пространства Фреше, которые удовлетворяют условиям (DN) и (Ω) Д. Фогта [12, предложение 31.7]. Явный вид этих условий нам не понадобится, поэтому мы его здесь не приводим.

Хорошо известно (ср. [59] и [12, лемма 31.1]), что существует топологический изоморфизм $s \hat{\otimes} s \cong s$. Отсюда немедленно следует, что пространства типа (s) образуют допустимую подкатегорию в LCS.

ПРИМЕР 7.8. Многие классические пространства гладких функций являются пространствами типа (s) ; таковы, например, пространство $C^\infty(M)$ гладких функций на произвольном компактном многообразии M , пространство $\mathcal{D}(K)$ гладких функций на $\mathbb{R}^n$ с носителем в компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и ряд других (см. [12, § 31] и [60]). Кроме того, пространством типа (s) является пространство $\mathcal{O}(X)$ голоморфных функций на любом комплексном аффинном алгебраическом многообразии X и, более общим образом, на любом приведенном комплексном пространстве X , удовлетворяющем так называемому условию Лиувилля [61], [62] (это означает, что всякая ограниченная плурисубгармоническая функция на X локально постоянна).

Если говорить не о пространствах, а об алгебрах типа (s) , то примеров становится еще больше. Во-первых, каждое из вышеупомянутых функциональных пространств типа (s) является алгеброй Фреше относительно поточечного умножения. Далее, само пространство s является алгеброй типа (s) как относительно поточечного, так и относительно сверточного умножения. Наконец, если G – компактная группа Ли, то пространство $C^\infty(G)$ также можно рассматривать как алгебру типа (s) относительно сверточного умножения. Разумеется, многие из рассмотренных выше алгебр неунитальны, однако ясно, что присоединение единицы к неунитальной алгебре типа (s) снова дает алгебру типа (s) .

Напомним, что категория всех локально выпуклых пространств квазиабелева и обладает достаточным количеством инъективных объектов (см. [28], [63]). Следовательно, каждый аддитивный ковариантный функтор на этой категории со значениями в любой абелевой категории обладает классическими правыми производными функторами. В частности, это верно для функтора $\mathcal{L}(E, \cdot)$ со значениями в категории векторных пространств. Его производные функторы обычно обозначаются через Ext^n (см., например, [28], [64], [65]), однако мы будем обозначать их через $\text{Ext}_{\text{LCS}}^n$, чтобы избежать путаницы с функторами Ext^n для локально выпуклых модулей.

В дальнейшем нам понадобится следующий результат, полученный Д. Фогтом и М. Вагнером [66] (см. также [12, теорема 30.1]): если $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ – точная последовательность ядерных пространств Фреше, причем пространство E обладает свойством (Ω) , а пространство G – свойством (DN), то эта последовательность расщепляется. На языке производных функторов это означает, что $\text{Ext}_{\text{LCS}}^1(G, E) = 0$ при указанных ограничениях на пространства E и G . В частности, это заведомо так, если E и G – пространства типа (s) .

ЛЕММА 7.9. Пусть A – алгебра Фреше, P – проективный левый A -модуль Фреше, и пусть $Y = \varprojlim Y_\nu$ – счетный приведенный обратный предел в

категории $A\text{-mod}(\text{Fr})$. Предположим, что выполнено одно из следующих двух условий:

- (i) P строго проективен и конечно порожден;
- (ii) P и Y – пространства типа (s) .

Тогда $\varprojlim^1 \mathbf{h}_A(P, Y_\nu) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Поскольку модуль P – ретракт свободного модуля A^n для некоторого $n \in \mathbb{N}$, обратная последовательность векторных пространств $\mathbf{h}_A(P, Y_\nu)$ является ретрактом последовательности $\mathbf{h}_A(A^n, Y_\nu) \cong Y_\nu^n$. Однако последовательность Y_ν^n состоит из пространств Фреше и приведена, поэтому $\varprojlim^1 Y_\nu^n = 0$ (см. § 2).

(ii) Поскольку P – ретракт свободного модуля $A \hat{\otimes} P$, обратная последовательность векторных пространств $\mathbf{h}_A(P, Y_\nu)$ является ретрактом обратной последовательности $\mathbf{h}_A(A \hat{\otimes} P, Y_\nu) \cong \mathcal{L}(P, Y_\nu)$. С другой стороны, из вышеупомянутой теоремы Фогта–Вагнера следует, что $\text{Ext}_{\text{ics}}^1(P, Y) = 0$. Согласно [65, предложение 5.1.5] последнее условие влечет⁷ равенство $\varprojlim^1 \mathcal{L}(P, Y_\nu) = 0$.

Для удобства дальнейшего использования переформулируем лемму 6.1 в “цепном” виде.

ЛЕММА 7.10. Пусть дана обратная последовательность $C_0^\bullet \leftarrow C_1^\bullet \leftarrow \dots$ коцепных комплексов абелевых групп, и пусть $C^\bullet = \varprojlim C_\nu^\bullet$. Предположим, что $\varprojlim^1 C_\nu^n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда канонический гомоморфизм $H^n(C^\bullet) \rightarrow \varprojlim H^n(C_\nu^\bullet)$ может быть вложен в короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 H^{n-1}(C_\nu^\bullet) \rightarrow H^n(C^\bullet) \rightarrow \varprojlim H^n(C_\nu^\bullet) \rightarrow 0.$$

ЛЕММА 7.11. Пусть A – алгебра Фреше, X – левый A -модуль Фреше, и пусть $Y = \varprojlim Y_\nu$ – счетный приведенный обратный предел в категории $A\text{-mod}(\text{Fr})$. Предположим, что выполнено одно из следующих двух условий:

- (i) X – модуль строго конечного типа;
- (ii) A , X и Y – пространства типа (s) .

Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ каноническое отображение

$$\text{Ext}_A^n(X, Y) \rightarrow \varprojlim \text{Ext}_A^n(X, Y_\nu)$$

вкладывается в короткую точную последовательность векторных пространств

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 \text{Ext}_A^{n-1}(X, Y_\nu) \rightarrow \text{Ext}_A^n(X, Y) \rightarrow \varprojlim \text{Ext}_A^n(X, Y_\nu) \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_\bullet \rightarrow X$ – проективная резольвента модуля X в категории $A\text{-mod}(\text{Fr})$. Очевидно, имеет место изоморфизм цепных комплексов векторных пространств

$$\mathbf{h}_A(P_\bullet, Y) \cong \varprojlim \mathbf{h}_A(P_\bullet, Y_\nu).$$

Если выполнено условие (i), то мы можем предполагать, что все модули P_n строго проективны и конечно порождены, а если условие (ii) – что все они являются пространствами типа (s) . В обоих случаях $\varprojlim^1 \mathbf{h}_A(P_n, Y_\nu) = 0$ согласно

⁷Хотя предложение 5.1.5 в [65] доказано в предположении, что все пространства Y_n банаховы, нетрудно видеть, что то же самое доказательство применимо и в случае, когда Y_n – пространства Фреше.

лемме 7.9. Применяя лемму 7.10, получаем требуемую точную последовательность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.12. Пусть A – алгебра Фреше–Аренса–Майкла, X – левый A -модуль Фреше, причем $\mathrm{dh}_A X < \infty$. Предположим также, что выполнено одно из следующих двух условий:

- (i) X – модуль строго конечного типа;
- (ii) A и X – пространства типа (s) .

Положим

$$\bar{d} = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \mathrm{Ext}_A^{p+1}(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in A\text{-mod}(\mathrm{Ban}), \forall p \geq n\}.$$

Тогда $\bar{d} \leq \mathrm{dh}_A X \leq \bar{d} + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d = \mathrm{dh}_A X$. Ясно, что $\bar{d} \leq d$. Зафиксируем такой модуль $Y \in A\text{-mod}(\mathrm{Fr})$, что $\mathrm{Ext}_A^d(X, Y) \neq 0$. Поскольку пространства типа (s) образуют допустимую подкатегорию в LCS , в случае (ii) мы можем, не ограничивая общности, предполагать, что Y – пространство типа (s) . Представим модуль Y в виде приведенного обратного предела последовательности левых банаховых A -модулей: $Y = \varprojlim Y_\nu$. Применяя лемму 7.11, получаем короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 \mathrm{Ext}_A^{d-1}(X, Y_\nu) \rightarrow \mathrm{Ext}_A^d(X, Y) \rightarrow \varprojlim \mathrm{Ext}_A^d(X, Y_\nu) \rightarrow 0.$$

Следовательно, либо $\mathrm{Ext}_A^d(X, Y_\nu) \neq 0$ для некоторого ν , либо $\mathrm{Ext}_A^{d-1}(X, Y_\nu) \neq 0$ для некоторого ν . В первом случае получаем равенство $d = \bar{d}$, во втором – оценку $d \leq \bar{d} + 1$.

ЛЕММА 7.13. Пусть A – ядерная алгебра Фреше–Аренса–Майкла, и пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Предположим, что $\mathcal{H}^{n+1}(A, M) = 0$ для всех $M \in A\text{-mod-}A(\mathrm{Ban})$, но существует такой $M \in A\text{-mod-}A(\mathrm{Ban})$, что $\mathcal{H}^n(A, M) \neq 0$. Тогда существует такая сопутствующая алгебре A банахова алгебра B , что $\mathrm{Ext}_A^n(B', M) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем банахов A -бимодуль M , для которого $\mathcal{H}^n(A, M) \neq 0$. Пусть $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ и φ_{12} – те же, что в доказательстве леммы 6.5. Будем рассматривать φ_{12} как биядерный морфизм в категории $\mathrm{mod-}A(\mathrm{Ban})$. Применяя следствие 4.8, получаем коммутативную диаграмму банаховых A -бимодулей

$$\begin{array}{ccccc} M \hat{\otimes} A_2 & \xrightarrow{\mathbf{1}_M \otimes \varphi_{12}} & M \hat{\otimes} A_1 & \xrightarrow{\pi_{M, A_1}} & M \\ & \searrow \gamma_{M, A_2} & \nearrow \sigma_M & & \\ & \mathcal{L}(A'_2, M) & & & \end{array} \quad (7.1)$$

где через π_{M, A_1} обозначен морфизм умножения. Переходя к когомологиям, получаем цепочку линейных отображений

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(A, M \hat{\otimes} A_2) &\rightarrow \mathcal{H}^n(A, \mathcal{L}(A'_2, M)) \cong \mathrm{Ext}_A^n(A'_2, M) \\ &\rightarrow \mathcal{H}^n(A, M \hat{\otimes} A_1) \rightarrow \mathcal{H}^n(A, M). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Будем рассматривать A_1 -бимодуль M как банахов A_2 -бимодуль, полученный отступлением вдоль гомоморфизма φ_{12} . Легко видеть, что композиция горизонтальных морфизмов в диаграмме (7.1) совпадает с морфизмом умножения π_{M, A_2} и является, следовательно, допустимым эпиморфизмом. Из условия леммы получаем, что функтор $\mathcal{H}^n(A, \cdot)$ точен справа на категории

$A\text{-mod-}A(\text{Ban})$ и, следовательно, композиция отображений в цепочке (7.2) – сюръекция. Таким образом, пространство $\text{Ext}_A^n(A'_2, M)$ сюръективно отображается на $\mathcal{H}^n(A, M)$ и, следовательно, отлично от нуля. Тем самым лемма доказана.

ТЕОРЕМА 7.14. *Пусть A – ядерная алгебра Фреше–Аренса–Майкла. Предположим, что $\text{db } A < \infty$ и выполнено одно из следующих двух условий:*

- (i) A – алгебра конечного типа;
- (ii) A – алгебра типа (s) .

Тогда справедливы неравенства

$$\text{dg}_{\mathcal{C}} A \leq \text{db } A \leq \text{dg}_{\mathcal{C}} A + 1,$$

где $\mathcal{C}$ – любая допустимая подкатегория в LCS, содержащая Fr. Более того, $\text{db } A \leq \text{dh}_A B' + 1$, где B – некоторая сопутствующая алгебре A банахова алгебра, рассмотренная как правый $A\text{-}\widehat{\otimes}$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $d = \text{db } A$ и

$$\bar{d} = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{H}^{p+1}(A, M) = 0 \quad \forall M \in A\text{-mod-}A(\text{Ban}), \forall p \geq n\}.$$

Согласно предложению 7.12 возможен один из следующих двух случаев:

1) $\bar{d} = d$; применяя лемму 7.13 при $n = d$, получаем банахов A -бимодуль M и сопутствующую алгебре A банахову алгебру B , для которых $\text{Ext}_A^d(B', M) \neq 0$, следовательно, в этом случае $\text{dh}_A B' = \text{dg } A = d$;

2) $\bar{d} = d - 1$; применяя лемму 7.13 при $n = d - 1$, получаем банахов A -бимодуль M и сопутствующую алгебре A банахову алгебру B , для которых $\text{Ext}_A^{d-1}(B', M) \neq 0$, следовательно, в этом случае $\text{dg } A \geq \text{dh}_A B' \geq d - 1$.

§ 8. О сильнейших локально выпуклых топологиях

В этом параграфе, носящем вспомогательный характер, мы соберем несколько несложных фактов об алгебрах и модулях, снабженных сильнейшей локально выпуклой топологией.

Обозначим через Str полную подкатегорию в LCS, состоящую из сильнейших ЛВП, а через Str_{ω} – ее полную подкатегорию, состоящую из сильнейших ЛВП не более чем счетной размерности. Напомним (см. § 2), что векторное пространство E , снабженное сильнейшей локально выпуклой топологией, обозначается через E_s . Очевидно, сопоставление $E \mapsto E_s$ представляет собой функтор, осуществляющий изоморфизм категорий Vect и Str , а значит, и категорий Vect_{ω} и Str_{ω} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Пусть A – алгебра не более чем счетной размерности. Функтор $s: A\text{-Mod}_{\omega} \rightarrow A_s\text{-mod}(\text{Str}_{\omega})$ является изоморфизмом категорий и осуществляет биекцию между классом точных последовательностей в $A\text{-Mod}_{\omega}$ и классом допустимых последовательностей в $A_s\text{-mod}(\text{Str}_{\omega})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что функтор s может рассматриваться как функтор между указанными категориями, следует из п. (iv) предложения 2.3. Очевидно, s – изоморфизм категорий. Наконец, последнее утверждение следует из п. (ii) предложения 2.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Пусть A – алгебра не более чем счетной размерности, X – правый $A_s \widehat{\otimes}$ -модуль, Y – проективный конечно порожденный левый A -модуль. Тогда $X \otimes_A Y = X \widehat{\otimes}_{A_s} Y_s$ как векторные пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $Y = A$ утверждение очевидно, а общий случай следует из соображений аддитивности и функториальности.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.3. Разумеется, если дополнительно к условиям предложения 8.2 потребовать, чтобы X был $A_s \widehat{\otimes}$ -бимодулем, а Y – A -бимодулем, то $X \otimes_A Y$ и $X \widehat{\otimes}_{A_s} Y_s$ будут равны как A -бимодули.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. Пусть A – алгебра не более чем счетной размерности, и пусть $X \in A\text{-Mod}_\omega$. Справедливы следующие утверждения:

(i) для всех модулей $Y \in A_s\text{-mod}$ и всех $i \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ext}_{A_s, \text{top}}^i(X_s, Y) \cong \text{Ext}_{A, \text{alg}}^i(X, Y)$$

как векторные пространства;

(ii) если X – модуль строго конечного типа, то для всех $Y \in \text{mod-}A_s$ и всех $i \in \mathbb{Z}$

$$\text{Tor}_i^{A_s, \text{top}}(Y, X_s) \cong \text{Tor}_i^{A, \text{alg}}(Y, X)$$

как векторные пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \rightarrow X$ – проективная резольвента в $A\text{-Mod}_\omega$. Согласно предложению 8.1 комплекс $P_s \rightarrow X_s$ является проективной резольвентой в $A_s\text{-mod}(\text{Str}_\omega)$, а значит, и в $A_s\text{-mod}$.

(i) С учетом изложенного выше для любого $Y \in A_s\text{-mod}$ имеют место изоморфизмы векторных пространств

$$\text{Ext}_{A, \text{alg}}^i(X, Y) \cong \text{H}^i(\mathbf{h}_A^{\text{alg}}(P, Y)) = \text{H}^i(\mathbf{h}_{A_s}(P_s, Y)) \cong \text{Ext}_{A_s, \text{top}}^i(X_s, Y).$$

(ii) Если X – модуль строго конечного типа, то мы можем предполагать, что все A -модули P_i конечно порождены. С учетом изложенного выше и предложения 8.2 для любого $Y \in \text{mod-}A_s$ имеют место изоморфизмы векторных пространств

$$\text{Tor}_i^{A, \text{alg}}(Y, X) \cong \text{H}_i\left(Y \otimes_A P\right) = \text{H}_i\left(Y \widehat{\otimes}_{A_s} P_s\right) \cong \text{Tor}_i^{A_s, \text{top}}(Y, X_s).$$

Предложение доказано.

Заметим, что согласно п. (v) предложения 2.3 мы имеем $(X \otimes Y)_s = X_s \widehat{\otimes} Y_s$ для всех $X, Y \in \text{Vect}_\omega$. Следовательно, $(A^e)_s = (A_s)^e$, и $A_s\text{-mod-}A_s \cong (A^e)_s\text{-mod}$ для любой алгебры $A \in \text{Alg}_\omega$. Применяя предложение 8.4 к алгебре A^e и модулю $X = A$, получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 8.5. Пусть A – алгебра не более чем счетной размерности, и пусть $M \in A_s\text{-mod-}A_s$. Справедливы следующие утверждения:

(i) для всех $i \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{H}_{\text{top}}^i(A_s, M) \cong \mathcal{H}_{\text{alg}}^i(A, M)$$

как векторные пространства;

(ii) если A – алгебра конечного типа, то для всех $i \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{H}_i^{\text{top}}(A_s, M) \cong \mathcal{H}_i^{\text{alg}}(A, M)$$

как векторные пространства.

§ 9. Обратимые бимодули и изоморфизмы Ван ден Берга

В этом параграфе мы обсудим понятие обратимого топологического бимодуля, рассмотрим условие Ван ден Берга $\text{VdB}(n)$ для топологических алгебр, приведем примеры алгебр, удовлетворяющих этому условию, и покажем, что если A – ядерная алгебра Фреше–Аренса–Майкла, удовлетворяющая условию $\text{VdB}(n)$, то $\text{dg } A = \text{db } A = \text{w.dg } A = \text{w.db } A = n$.

На протяжении параграфа $\mathcal{C}$ – любая строго допустимая подкатегория в LCS .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Пусть A, B – $\widehat{\otimes}$ -алгебры из $\text{alg}(\mathcal{C})$. Будем называть бимодуль $P \in A\text{-mod-}B(\mathcal{C})$ *обратимым* (относительно $\mathcal{C}$), если существует такой бимодуль $Q \in B\text{-mod-}A(\mathcal{C})$, что $P \widehat{\otimes}_B Q \cong A$ в $A\text{-mod-}A(\mathcal{C})$ и $Q \widehat{\otimes}_A P \cong B$ в $B\text{-mod-}B(\mathcal{C})$. Бимодуль Q будем в этом случае называть *обратным* к P .

Разумеется, определение 9.1 имеет “чисто алгебраический” прототип (см. [67, гл. II, определение 2.4]): если A и B – алгебры, то A - B -бимодуль P называется *обратимым* (в алгебраическом смысле), если существует такой B - A -бимодуль Q , что $P \otimes_B Q \cong A$ в $A\text{-Mod-}A$ и $Q \otimes_A P \cong B$ в $B\text{-Mod-}B$. Известно (см. [67, гл. II, теорема 3.4]), что всякий обратимый в алгебраическом смысле A - B -бимодуль P конечно порожден как левый A -модуль и как правый B -модуль. Следовательно, если размерность алгебр A и B не более чем счетна, то же самое верно и для модуля P , и поэтому сильнейшее ЛВП P_s является A_s - B_s - $\widehat{\otimes}$ -бимодулем (см. предложение 2.3, (iv)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Пусть A и B – алгебры не более чем счетной размерности, и пусть P – обратимый A - B -бимодуль. Тогда A_s - B_s - $\widehat{\otimes}$ -бимодуль P_s обратим в категории $A_s\text{-mod-}B_s(\text{Str}_\omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \in B\text{-Mod-}A$ – бимодуль, обратный к P . Из вышеизложенного следует, что его размерность также не более чем счетна, поэтому согласно п. (v) предложения 2.3 бимодуль $Q_s \in B_s\text{-mod-}A_s(\text{Str}_\omega)$ является обратным к P_s в смысле определения 9.1.

Напомним (см. [67, гл. II, теорема 3.5]), что в “чисто алгебраической” ситуации бимодули P и Q полностью определяют друг друга, поскольку имеют место изоморфизмы бимодулей

$$P \cong \mathbf{h}_B^{\text{alg}}(Q, B), \quad Q \cong \mathbf{h}_A^{\text{alg}}(P, A).$$

Наша ближайшая цель – обобщить это утверждение на случай $\widehat{\otimes}$ -модулей.

Пусть A – алгебра и X, Y – левые топологические A -модули. Пространство $\mathbf{h}_A(X, Y)$ будет в дальнейшем снабжаться топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах (см. § 2). Если X является топологическим A - B -бимодулем, а Y – топологическим A - C -бимодулем (где B и C –

какие-либо алгебры), то пространство $\mathbf{h}_A(X, Y)$ становится топологическим B - C -бимодулем относительно операций

$$(b \cdot \varphi \cdot c)(x) = \varphi(x \cdot b) \cdot c, \quad \varphi \in \mathbf{h}_A(X, Y), \quad b \in B, \quad c \in C$$

(ср. (2.4)). Введем также следующее обозначение: если A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, а X – левый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль, то изоморфизм $A \widehat{\otimes}_A X \rightarrow X$, $a \otimes x \mapsto a \cdot x$, будем обозначать через $\mu_{A, X}$. В случае правого $\widehat{\otimes}$ -модуля X аналогичный изоморфизм будем обозначать через $\mu_{X, A}$.

ТЕОРЕМА 9.3. Пусть $\widehat{\otimes}$ -бимодули P и Q такие, как в определении 9.1. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) изоморфизмы $f: P \widehat{\otimes}_B Q \rightarrow A$ и $g: Q \widehat{\otimes}_A P \rightarrow B$ можно выбрать таким образом, что они будут удовлетворять условиям типа ассоциативности

$$\begin{aligned} f\left(p \otimes_B q\right) \cdot p' &= p \cdot g\left(q \otimes_A p'\right), & p, p' \in P, \quad q \in Q, \\ g\left(q \otimes_A p\right) \cdot q' &= q \cdot f\left(p \otimes_B q'\right), & p \in P, \quad q, q' \in Q; \end{aligned}$$

(ii) отображения

$$\begin{aligned} h_P: P &\rightarrow \mathbf{h}_B(Q, B), & p &\mapsto \left(q \mapsto g\left(q \otimes_A p\right)\right), \\ h_Q: Q &\rightarrow \mathbf{h}_A(P, A), & q &\mapsto \left(p \mapsto f\left(p \otimes_B q\right)\right), \end{aligned} \tag{9.1}$$

являются непрерывными биективными морфизмами топологических A - B -бимодулей (соответственно, топологических B - A -бимодулей);

(iii) если $\mathcal{C} \subset \text{Fr}$, то морфизмы (9.1) являются топологическими изоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Утверждение доказывается дословно так же, как и в алгебраическом случае (см. [67, гл. II, предложение 3.1, лемма 3.3]), поэтому мы его доказательство не приводим.

Заметим, что в утверждениях (ii) и (iii) отображения h_P и h_Q равноправны. Поэтому мы докажем эти утверждения только для отображения h_P , которое будем для простоты обозначать просто h .

(ii) Непосредственно проверяется, что h – морфизм A - B -бимодулей (ср. [67, гл. II, § 3]). Покажем, что он непрерывен. Зафиксируем базисную окрестность нуля $M(D, U)$ в $\mathbf{h}_B(Q, B)$, где $D \subset Q$ – ограниченное множество, а $U \subset B$ – окрестность нуля. Из непрерывности отображения $G: Q \times P \rightarrow B$, $G(q, p) = g(q \otimes_A p)$, следует, что $G(D \times V) \subset U$ для некоторой окрестности нуля $V \subset P$. Это эквивалентно включению $h(V) \subset M(D, U)$, которое и доказывает непрерывность морфизма h .

Построим теперь отображение, обратное к h . Положим $u = f^{-1}(1) \in P \widehat{\otimes}_B Q$ и рассмотрим отображение

$$h_1: \mathbf{h}_B(Q, B) \rightarrow P, \quad h_1(\varphi) = \mu_{P, B}\left(\mathbf{1}_P \otimes_B \varphi\right)(u).$$

Покажем сначала, что $h_1 h = \mathbf{1}_P$. Для этого зафиксируем произвольный $p \in P$ и заметим, что для любых $p' \in P$ и $q \in Q$ справедливы равенства

$$\left(\mathbf{1}_P \otimes_B h(p)\right)\left(p' \otimes_B q\right) = p' \otimes_B g\left(q \otimes_A p\right) = \left(\mathbf{1}_P \otimes_B g\right)\left(p' \otimes_B q \otimes_A p\right),$$

откуда следует, что

$$\left(\mathbf{1}_P \otimes_B h(p) \right) (v) = \left(\mathbf{1}_P \otimes_B g \right) \left(v \otimes_A p \right), \quad v \in P \widehat{\otimes}_B Q. \quad (9.2)$$

Заметим теперь, что первое из условий ассоциативности (i) может быть записано в виде

$$\mu_{A,P} \left(f \otimes_A \mathbf{1}_P \right) = \mu_{P,B} \left(\mathbf{1}_P \otimes_B g \right). \quad (9.3)$$

Используя соотношения (9.2) и (9.3), получаем равенства

$$\begin{aligned} (h_1 h)(p) &= \mu_{P,B} \left(\mathbf{1}_P \otimes_B h(p) \right) (u) \\ &= \mu_{P,B} \left(\mathbf{1}_P \otimes_B g \right) \left(u \otimes_A p \right) = \mu_{A,P} \left(f \otimes_A \mathbf{1}_P \right) \left(u \otimes_A p \right) = p. \end{aligned}$$

Таким образом, $h_1 h = \mathbf{1}_P$.

Покажем теперь, что $h h_1 = \mathbf{1}_{\mathbf{h}_B(Q,B)}$. Зафиксируем $\varphi \in \mathbf{h}_B(Q, B)$ и $q \in Q$ и заметим, что

$$[(h h_1)(\varphi)](q) = \left[g \circ \left(\mathbf{1}_Q \otimes_A \mu_{P,B} \right) \circ \left(\mathbf{1}_Q \otimes_A \mathbf{1}_P \otimes_B \varphi \right) \right] \left(q \otimes_A u \right), \quad (9.4)$$

$$\varphi(q) = \left[\varphi \circ \mu_{Q,A} \circ \left(\mathbf{1}_Q \otimes_A f \right) \right] \left(q \otimes_A u \right). \quad (9.5)$$

С другой стороны, легко проверить, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & Q \widehat{\otimes}_A P \widehat{\otimes}_B B & \xrightarrow{\mathbf{1}_Q \otimes \mu_{P,B}} & Q \widehat{\otimes}_A P \\ & \nearrow \mathbf{1}_Q \otimes \mathbf{1}_P \otimes \varphi & & \searrow g \otimes \mathbf{1}_B & \searrow g \\ Q \widehat{\otimes}_A P \widehat{\otimes}_B Q & \xrightarrow{g \otimes \mathbf{1}_Q} & B \widehat{\otimes}_B Q & \xrightarrow{\mathbf{1}_B \otimes \varphi} & B \widehat{\otimes}_B B \xrightarrow{\mu_{B,B}} B \\ & \searrow \mathbf{1}_Q \otimes f & & \searrow \mu_{B,Q} & \nearrow \varphi \\ & & Q \widehat{\otimes}_A A & \xrightarrow{\mu_{Q,A}} & Q \end{array}$$

коммутативна. Отсюда и из равенств (9.4), (9.5) следует, что $h h_1 = \mathbf{1}_{\mathbf{h}_B(Q,B)}$. Таким образом, отображение h_1 обратнo к h , и, следовательно, h – биекция.

(iii) Поскольку P и Q – пространства Фреше, существуют такие ограниченные подмножества $D_1 \subset P$ и $D_2 \subset Q$, что $u \in \overline{\Gamma(D_1 \otimes_B D_2)}$ (см., например, [23, гл. III, теорема 6.4]). Зафиксируем замкнутую окрестность нуля $U \subset P$ и подберем окрестности нуля $V \subset P$ и $W \subset B$ так, чтобы $\mu_{P,B}(V \otimes_B W) \subset U$. Пусть $\lambda > 0$ таково, что $D_1 \subset \lambda V$; тогда, очевидно, $u \in \overline{\Gamma(V \otimes_B \lambda D_2)}$. Теперь для произвольного $\varphi \in M(\lambda D_2, W)$ получаем

$$h_1(\varphi) = \mu_{P,B}(\mathbf{1}_P \otimes_B \varphi)(u) \in \mu_{P,B}(\overline{\Gamma(V \otimes_B W)}) \subset U.$$

Следовательно, $h_1(M(\lambda D_2, W)) \subset U$, и отображение $h_1 = h^{-1}$ непрерывно, т. е. h – топологический изоморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.4. Если $\mathcal{C} \subset \text{Fr}$, то каждый обратимый бимодуль $P \in A\text{-mod-}B(\mathcal{C})$ строго проективен в $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ и $\text{mod-}B(\mathcal{C})$ (см. [68, предложение 5.2.6]). Автору неизвестно, справедлив ли аналогичный результат для произвольной $\mathcal{C}$; сложность заключается в том, что в неметризуемом случае

функтор проективного тензорного произведения не обязан переводить сюръекции в сюръекции.

ПРИМЕР 9.5. Пусть A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра и $\alpha \in \text{Aut}(A)$. Как и в чисто алгебраическом случае (см. [67, гл. II, предложение 5.2]), легко проверить, что $A\widehat{\otimes}$ -бимодуль A_α (см. §2) обратим и его обратным является бимодуль $A_{\alpha^{-1}} \cong {}_\alpha A$.

ПРИМЕР 9.6. Пусть M – гладкое многообразие и E – гладкое комплексное линейное расслоение над M . Тогда модуль его гладких сечений $\Gamma^\infty(E)$ обратим как $C^\infty(M)$ -бимодуль Фреше и его обратным является бимодуль $\Gamma^\infty(E^*)$ (см. [68, следствие 5.3.4]).

ПРИМЕР 9.7. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ – пространство Штейна и $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ – когерентные аналитические пучки на X . Если один из них локально свободен, то имеет место изоморфизм $\mathcal{O}(X)$ -бимодулей Фреше $\mathcal{F}(X) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{G}(X) \cong (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})(X)$ (см. [69] или [54, теорема 4.2.4]). Следовательно, если $\mathcal{L}$ – линейный аналитический пучок на X , то $\mathcal{L}(X)$ – обратимый $\mathcal{O}(X)$ -бимодуль Фреше, и его обратным является бимодуль $\mathcal{L}^{-1}(X)$, где $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$.

ПРИМЕР 9.8. Покажем, что, в отличие от чисто алгебраической ситуации, обратимый $\widehat{\otimes}$ -бимодуль не обязан быть конечно порожденным как левый (или как правый) модуль. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $A_n = C^\infty(\mathbb{P}^n)$, где $\mathbb{P}^n$ – n -мерное комплексное проективное пространство. Пусть $P_n = \Gamma^\infty(\gamma_n^1)$, где γ_n^1 – каноническое комплексное линейное расслоение над $\mathbb{P}^n$. Согласно примеру 9.6 модуль P_n обратим как A_n -бимодуль Фреше. Модифицируя соответствующие рассуждения из [70, пример 2] (используя классы Чжэня вместо классов Штифеля–Уитни), нетрудно показать, что γ_n^1 не является прямым слагаемым тривиального n -мерного расслоения. Применяя C^∞ -аналог теоремы Серра–Суона (см. [71, гл. II, §5]), получаем, что P_n не является прямым слагаемым свободного A_n -модуля ранга n и, следовательно (с учетом того, что P_n проективен в алгебраическом смысле), не может быть порожден n элементами.

Положим теперь $A = \prod_n A_n$ и $P = \prod_n P_n$. Из перестановочности проективных тензорных произведений с прямыми произведениями (см. [2, гл. II, теорема 5.19] или теорему 5.4) нетрудно вывести, что P – обратимый A -бимодуль Фреше. Если бы он был конечно порожденным (как левый или как правый A -модуль) и порождался бы, скажем, t элементами, то легко видеть, что P_t как A_t -модуль тоже порождался бы t элементами. Полученное противоречие показывает, что P не является конечно порожденным A -модулем.

Следующий класс алгебр был впервые рассмотрен М. Ван ден Бергом [13]. Мы будем пользоваться обозначениями, предложенными М. Фаринати [72].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.9. Пусть A – алгебра и $n \in \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что A удовлетворяет алгебраическому условию Ван ден Берга $\text{VdB}^{\text{alg}}(n)$, если существует такой обратимый A -бимодуль $L \in A\text{-Mod-}A$, что для каждого бимодуля $X \in A\text{-Mod-}A$ и каждого $i \in \mathbb{Z}$ существует изоморфизм векторных пространств

$$\mathcal{H}_{\text{alg}}^i(A, X) \cong \mathcal{H}_{n-i}^{\text{alg}}\left(A, L \otimes_A X\right). \quad (9.6)$$

Следующая топологическая разновидность условия Ван ден Берга была впервые использована, по-видимому, автором [68].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.10. Пусть A — $\widehat{\otimes}$ -алгебра из $\mathbf{alg}(\mathcal{C})$ и $n \in \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что A удовлетворяет топологическому условию Ван ден Берга $\mathrm{VdB}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{top}}(n)$, если существует такой обратимый A - $\widehat{\otimes}$ -бимодуль $L \in A\text{-mod-}A(\mathcal{C})$, что для каждого бимодуля $X \in A\text{-mod-}A(\mathcal{C})$ и каждого $i \in \mathbb{Z}$ существует изоморфизм векторных пространств

$$\mathcal{H}_{\mathrm{top}}^i(A, X) \cong \mathcal{H}_{n-i}^{\mathrm{top}}\left(A, L \widehat{\otimes}_A X\right). \quad (9.7)$$

Бимодуль L , фигурирующий в определении 9.9 (или, смотря по смыслу, в определении 9.10), мы будем (следуя [72]) называть *дуализирующим бимодулем* для A .

ЗАМЕЧАНИЕ 9.11. Пусть алгебра A удовлетворяет условию $\mathrm{VdB}^{\mathrm{alg}}(n)$. Если в формуле (9.6) положить $X = A \otimes A$, то получим изоморфизмы векторных пространств

$$\mathcal{H}_{\mathrm{alg}}^i(A, A \otimes A) \cong \mathcal{H}_{n-i}^{\mathrm{alg}}(A, L \otimes A) \cong \mathrm{Tor}_{n-i}^{A, \mathrm{alg}}(A, L),$$

и, таким образом,

$$\mathcal{H}_{\mathrm{alg}}^i(A, A \otimes A) \cong \begin{cases} L, & \text{если } i = n, \\ 0, & \text{если } i \neq n. \end{cases} \quad (9.8)$$

Аналогичная формула (с очевидными модификациями) справедлива и в топологическом случае.

Отметим, что во всех известных случаях изоморфизмы (9.8) являются на самом деле изоморфизмами A -бимодулей. Как показано в [13], при некоторых дополнительных условиях для алгебры A из существования изоморфизмов A -бимодулей (9.8) следует, что A удовлетворяет условию $\mathrm{VdB}^{\mathrm{alg}}(n)$. Это является весьма удобным достаточным условием для выполнения алгебраического условия Ван ден Берга. Для $\widehat{\otimes}$ -алгебр сходное утверждение доказано в [68, теорема 5.2.4].

ПРИМЕР 9.12. Алгебра многочленов $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ удовлетворяет условию $\mathrm{VdB}^{\mathrm{alg}}(n)$ с дуализирующим бимодулем A . Это легко следует (см., например, [37, предложение 4.5]) из того, что A обладает свободной бимодульной резольвентой Кошуля длины n .

ПРИМЕР 9.13. Пусть $\mathbf{q} = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ — комплексная $(n \times n)$ -матрица, удовлетворяющая условию $q_{ii} = 1$ и $q_{ij} = q_{ji}^{-1}$ для всех i, j (такие матрицы обычно называют *мультипликативно антисимметрическими*). Напомним, что n -мерным квантовым аффинным пространством (см., например, [73], [74]) называется алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^n)$ с образующими $x_1, \dots, x_n$ и соотношениями $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$, $i, j = 1, \dots, n$, а n -мерным квантовым тором (см., например, [5], [74]) — алгебра⁸ $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ с образующими $x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}$ и соотношениями $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$ и $x_i x_i^{-1} = x_i^{-1} x_i = 1$, $i, j = 1, \dots, n$. В однопараметрическом случае, т. е. в случае, когда $q_{ij} = q$ для всех $i < j$, эти алгебры обозначаются через $\mathcal{O}_q^{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{O}_q^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ соответственно.

⁸Эти алгебры часто обозначаются через $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ соответственно. Мы добавили верхний индекс “alg”, желая зарезервировать обозначения $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ для введенных в [21] аналитических аналогов этих алгебр (см. далее § 11).

Пусть A – любая из алгебр $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$. Известно, что A удовлетворяет условию $\text{VdB}^{\text{alg}}(n)$ с дуализирующим бимодулем A_α , где автоморфизм $\alpha \in \text{Aut}(A)$ однозначно определен формулой

$$x_j \mapsto \prod_{i=1}^n q_{ij} x_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.9)$$

Для $A = \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ это следует из [13, предложение 2], а для $A = \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ – из [72, теорема 6] с учетом того факта, что вложение $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ является гомологическим эпиморфизмом (см. [75, предложение 2.1]). Впрочем, выполнение условия Ван ден Берга для указанных алгебр можно проверить и непосредственно, воспользовавшись построенными в [75], [76] “квантовыми резольвентами Кошуля”.

ПРИМЕР 9.14. Пусть $A = U(\mathfrak{g})$ – универсальная обертывающая алгебра конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Положим $n = \dim \mathfrak{g}$. Тогда A удовлетворяет условию $\text{VdB}^{\text{alg}}(n)$ с дуализирующим бимодулем A_α , где α – некоторый автоморфизм алгебры A (см. [13, предложение 3, лемма 5]). Отметим, что этот автоморфизм можно построить в явном виде, используя двойственность Пуанкаре между гомологиями и когомологиями алгебр Ли (см. [77, теорема 6.10]) и соотношения между гомологиями (когомологиями) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и гомологиями (когомологиями) Хохшильда алгебры $U(\mathfrak{g})$ (см. [1, гл. XIII, теорема 5.1]). А именно, автоморфизм α однозначно определен формулой

$$\alpha(u) = u - \chi(u), \quad u \in \mathfrak{g},$$

где $\chi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ – характер, соответствующий одномерному $\mathfrak{g}$ -модулю $(\bigwedge^n \mathfrak{g})^*$. Мы не доказываем последнюю формулу, поскольку она в дальнейшем использоваться не будет.

Общие результаты и дальнейшие примеры, относящиеся к алгебраическому условию Ван ден Берга, можно найти в работах [13], [72]. Приведем теперь несколько примеров $\widehat{\otimes}$ -алгебр, удовлетворяющих топологическому условию Ван ден Берга.

ПРИМЕР 9.15. Пусть A – любая из $\widehat{\otimes}$ -алгебр, рассмотренных в примере 7.3. Как уже упоминалось ранее, каждая из этих алгебр точно так же, как и алгебра многочленов из примера 9.12, обладает свободной бимодульной резольвентой Кошуля длины n и поэтому удовлетворяет условию $\text{VdB}_{\mathcal{C}}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем A (см. [22, § 2]). В качестве $\mathcal{C}$ в случаях 1), 2) и 4) примера 7.3 можно взять любую строго допустимую подкатегорию в LCS , содержащую все ядерные пространства Фреше, а в случаях 3) и 5) – любую строго допустимую подкатегорию в LCS , содержащую все ядерные (DF)-пространства.

ПРИМЕР 9.16. Пусть M – гладкое многообразие, $A = C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на M . Положим $n = \dim M$ и обозначим через $T^n(M)$ A -бимодуль гладких n -поливекторных полей на M . Тогда A удовлетворяет условию $\text{VdB}_{\mathcal{C}}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $T^n(M)$ (см. [68, следствие 5.4.3]). При этом в качестве $\mathcal{C}$ можно взять любую строго допустимую подкатегорию в LCS , содержащую все ядерные пространства Фреше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.17. Пусть A – алгебра конечного типа, удовлетворяющая условию $\text{VdB}^{\text{alg}}(n)$ с дуализирующим бимодулем L и имеющая не более чем счетную размерность. Тогда $\widehat{\otimes}$ -алгебра A_s удовлетворяет условию $\text{VdB}_{\text{LCS}}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем L_s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя следствие 8.5, предложение 8.2 и замечание 8.3, для каждого A_s - $\widehat{\otimes}$ -бимодуля X получаем изоморфизмы векторных пространств

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{top}}^i(A_s, X) &\cong \mathcal{H}_{\text{alg}}^i(A, X) \cong \mathcal{H}_{n-i}^{\text{alg}}\left(A, L \underset{A}{\otimes} X\right) \\ &\cong \mathcal{H}_{n-i}^{\text{alg}}\left(A, L_s \underset{A_s}{\widehat{\otimes}} X\right) \cong \mathcal{H}_{n-i}^{\text{top}}\left(A_s, L_s \underset{A_s}{\widehat{\otimes}} X\right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 9.18. Пусть A – любая из алгебр, рассмотренных в примерах 9.12–9.14. Тогда $\widehat{\otimes}$ -алгебра A_s удовлетворяет условию $\text{VdB}_{\text{LCS}}^{\text{top}}(n)$.

Перейдем теперь к вычислению гомологических размерностей алгебр, удовлетворяющих условию Ван ден Берга.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.19. (i) Если A – ненулевая алгебра, удовлетворяющая условию $\text{VdB}^{\text{alg}}(n)$, то $\text{db}_{\text{alg}} A = \text{w.db}_{\text{alg}} A = n$.

(ii) Если $A \in \text{alg}(\mathcal{C})$ – ненулевая алгебра, удовлетворяющая условию $\text{VdB}_{\mathcal{C}}^{\text{top}}(n)$, то $\text{db} A = n$; если же $\mathcal{C} = \text{Fr}$, то и $\text{w.db} A = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем утверждение (ii); утверждение (i) доказывается аналогично. Во-первых, из соотношения (9.7) очевидным образом следует, что $\text{db} A \leq n$ и, тем более (в случае $\mathcal{C} = \text{Fr}$), $\text{w.db} A \leq n$. С другой стороны, из формулы (9.8) (точнее, из ее топологического аналога) вытекает, что $\text{db} A \geq n$ и, таким образом, $\text{db} A = n$. Предположим теперь, что $\mathcal{C} = \text{Fr}$. Полагая $i = 0$ в (9.7), получаем изоморфизмы

$$\mathcal{H}_n\left(A, L \underset{A}{\widehat{\otimes}} X\right) \cong \mathcal{H}^0(A, X) \cong Z(X),$$

где через $Z(X)$ обозначен центр бимодуля X (см. § 2). Поскольку $1_A \in Z(A)$, мы имеем $\mathcal{H}^0(A, A) \neq 0$, и поэтому $\mathcal{H}_n(A, L) \neq 0$. Следовательно, $\text{w.db} A \geq n$. Поскольку противоположное неравенство уже было установлено выше, окончательно получаем равенство $\text{w.db} A = n$.

Сформулируем основной результат параграфа.

ТЕОРЕМА 9.20. Пусть A – ненулевая ядерная алгебра Фреше–Аренса–Майкла, удовлетворяющая условию $\text{VdB}_{\text{Fr}}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $L \in A\text{-mod-}A(\text{Fr})$. Тогда

$$\text{w.dg} A = \text{w.db} A = \text{dg}_{\mathcal{C}} A = \text{db} A = n,$$

где $\mathcal{C}$ – любая допустимая подкатегория в LCS , содержащая Fr . Более того, для любого ненулевого левого банахова A -модуля X найдется сопутствующая алгебре A банахова алгебра B , удовлетворяющая условию $\text{Tor}_n^A(B' \underset{A}{\widehat{\otimes}} L, X) \neq 0$. В частности, $\text{w.dh}_A X = \text{dh}_A X = n$.

Для доказательства теоремы 9.20 нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 9.21. Пусть $\mathcal{C} \subset \text{LCS}$ – любая строго допустимая подкатегория, A, B – $\widehat{\otimes}$ -алгебры из $\text{alg}(\mathcal{C})$, $L \in A\text{-mod-}B(\mathcal{C})$ – $\widehat{\otimes}$ -бимодуль, проективный в $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ и $\text{mod-}B(\mathcal{C})$. Тогда для любых $X \in \text{mod-}A(\mathcal{C})$, $Y \in B\text{-mod}(\mathcal{C})$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет место топологический изоморфизм

$$\text{Tor}_n^A(X, L \widehat{\otimes}_B Y) \cong \text{Tor}_n^B(X \widehat{\otimes}_A L, Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_\bullet \rightarrow X$ – проективная резольвента модуля X в $\text{mod-}A(\mathcal{C})$. Из проективности модуля L в $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ следует, что комплекс

$$P_\bullet \widehat{\otimes}_A L \rightarrow X \widehat{\otimes}_A L \rightarrow 0 \quad (9.10)$$

допустим, а из проективности L в $\text{mod-}B(\mathcal{C})$ – что все модули $P_i \widehat{\otimes}_A L$, $i \in \mathbb{Z}_+$, проективны в $\text{mod-}B(\mathcal{C})$. Следовательно, (9.10) – проективная резольвента модуля $X \widehat{\otimes}_A L$ в $\text{mod-}B(\mathcal{C})$, и

$$\text{Tor}_n^A(X, L \widehat{\otimes}_B Y) = H_n(P_\bullet \widehat{\otimes}_A (L \widehat{\otimes}_B Y)) \cong H_n((P_\bullet \widehat{\otimes}_A L) \widehat{\otimes}_B Y) = \text{Tor}_n^B(X \widehat{\otimes}_A L, Y),$$

что и требовалось доказать.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 9.20, напомним (см. § 2), что для любой $\widehat{\otimes}$ -алгебры A и любого A - $\widehat{\otimes}$ -бимодуля M пространство $\mathcal{H}^0(A, M)$ изоморфно центру бимодуля M . Рассмотрим отображение

$$\delta_M: M \rightarrow \mathcal{L}(A, M), \quad x \mapsto (a \mapsto a \cdot x - x \cdot a).$$

Из вышеизложенного следует, что $\mathcal{H}^0(A, M) \cong \text{Ker } \delta_M$. Отметим также, что отображение δ_M естественно по M в очевидном смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9.20. В силу леммы 2.1 существует такая сопутствующая алгебре A банахова алгебра (A_1, φ_1) , что A -модуль X обладает структурой левого банахова A_1 -модуля, согласованной с φ_1 . Пользуясь ядерностью алгебры A , найдем такую сопутствующую алгебре A банахову алгебру $(A_2, \varphi_2) \succ (A_1, \varphi_1)$, что канонический гомоморфизм $\varphi_{12}: A_2 \rightarrow A_1$ биядерен как гомоморфизм банаховых алгебр (ср. доказательство леммы 6.5). Доказательство будет завершено, если мы покажем, что $\text{Tor}_n^A(A'_2 \widehat{\otimes}_A L, X) \neq 0$.

Предположим противное. Пользуясь леммой 9.21 (с учетом замечания 9.4) и условием $\text{VdB}_{\text{Fr}}^{\text{top}}(n)$, получаем изоморфизмы векторных пространств

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Tor}_n^A(A'_2 \widehat{\otimes}_A L, X) \cong \text{Tor}_n^A(A'_2, L \widehat{\otimes}_A X) \\ &\cong \mathcal{H}_n(A, L \widehat{\otimes}_A X \widehat{\otimes} A'_2) \cong \mathcal{H}^0(A, X \widehat{\otimes} A'_2). \end{aligned} \quad (9.11)$$

В силу следствия 4.9 существует коммутативная диаграмма банаховых A -бимодулей

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(A_1, X) & \xrightarrow{(\varphi_{12})_X^*} & \mathcal{L}(A_2, X) \\ & \searrow \sigma_X & \nearrow \gamma_{X, A'_2} \\ & X \widehat{\otimes} A'_2 & \end{array} \quad (9.12)$$

Из того, что морфизм φ_{12} имеет плотный образ, легко следует, что морфизм $(\varphi_{12})_X^*$ инъективен. Из диаграммы (9.12) заключаем, что и морфизм σ_X инъективен.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(A_1, X) & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{L}(A_1, X)}} & \mathcal{L}(A, \mathcal{L}(A_1, X)) \\ \sigma_X \downarrow & & \downarrow (\sigma_X)_{A,*} \\ X \widehat{\otimes} A'_2 & \xrightarrow{\delta_{X \widehat{\otimes} A'_2}} & \mathcal{L}(A, X \widehat{\otimes} A'_2) \end{array}$$

Из (9.11) следует, что $\delta_{X \widehat{\otimes} A'_2}$ – инъекция. Учитывая уже упоминавшуюся инъективность отображения σ_X , заключаем, что и $\delta_{\mathcal{L}(A_1, X)}$ – инъекция. Таким образом,

$$\mathcal{H}^0(A, \mathcal{L}(A_1, X)) \cong \text{Ker } \delta_{\mathcal{L}(A_1, X)} = 0.$$

С другой стороны,

$$\mathcal{H}^0(A, \mathcal{L}(A_1, X)) \cong \mathbf{h}_A(A_1, X) \cong \mathbf{h}_{A_1}(A_1, X) \cong X,$$

поэтому $X = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство.

§ 10. Гомологические эпиморфизмы и соотношения Ван ден Берга

В этом параграфе мы докажем топологический аналог теоремы М. Фаринати [72], утверждающей, что соотношения Ван ден Берга сохраняются при гомологических эпиморфизмах. В дальнейшем (см. § 11) это позволит нам вычислить гомологические размерности гладких и комплексно-аналитических квантовых торов и комплексно-аналитических квантовых аффинных пространств.

Зафиксируем произвольную строго допустимую подкатегорию $\mathcal{C} \subset \text{LCS}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1 [72]. Пусть $f: A \rightarrow B$ – морфизм в $\text{alg}(\mathcal{C})$. Будем говорить, что бимодуль $L \in A\text{-mod-}A(\mathcal{C})$ *коммутирует* с B , если существует изоморфизм $A\text{-}\widehat{\otimes}\text{-бимодулей}$ $B \widehat{\otimes}_A L \cong L \widehat{\otimes}_A B$.

ПРИМЕР 10.2. Пусть $f: A \rightarrow B$ – морфизм в $\text{alg}(\mathcal{C})$, и пусть $\alpha \in \text{Aut}(A)$ – автоморфизм, продолжающийся на B в том смысле, что существует такой автоморфизм $\beta \in \text{Aut}(B)$, что $\beta f = f\alpha$. Тогда $A\text{-}\widehat{\otimes}\text{-бимодуль}$ A_α коммутирует с B и, кроме того,

$$A_\alpha \widehat{\otimes}_A B \cong B_\beta \quad \text{в } A\text{-mod-}B, \quad (10.1)$$

$$B \widehat{\otimes}_A A_\alpha \cong B_\beta \quad \text{в } B\text{-mod-}A. \quad (10.2)$$

Доказательство этого факта дословно повторяет доказательство соответствующего чисто алгебраического утверждения [72, пример 3].

ПРИМЕР 10.3. Пусть A – конечно порожденная алгебра, и пусть $\widehat{A}$ – ее оболочка Аренса–Майкла (см. § 2). Согласно [21, следствие 3.3] алгебра $\widehat{A}$ является ядерной алгеброй Фреше. Поэтому из [21, следствие 8.4] вытекает, что для каждого обратимого в алгебраическом смысле A -бимодуля L обратимый $A_s\text{-}\widehat{\otimes}\text{-бимодуль}$ L_s (см. предложение 9.2) коммутирует с $\widehat{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.4 [72]. Пусть $f: A \rightarrow B$ – эпиморфизм в $\text{alg}(\mathcal{C})$, и пусть $L \in A\text{-mod-}A(\mathcal{C})$ – обратимый бимодуль, коммутирующий с B . Пусть L^{-1} – бимодуль, обратный к L . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) $B \hat{\otimes}_A L \cong B \hat{\otimes}_A L \hat{\otimes}_A B$ в $B\text{-mod-}A(\mathcal{C})$;
- (ii) $L \hat{\otimes}_A B \cong B \hat{\otimes}_A L \hat{\otimes}_A B$ в $A\text{-mod-}B(\mathcal{C})$;
- (iii) бимодуль $B \hat{\otimes}_A L \hat{\otimes}_A B$ обратим в $B\text{-mod-}B(\mathcal{C})$, и его обратным является бимодуль $B \hat{\otimes}_A L^{-1} \hat{\otimes}_A B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения приведено в [72, лемма 2] для чисто алгебраического случая. Для $\hat{\otimes}$ -алгебр и $\hat{\otimes}$ -модулей доказательство аналогично.

ПРИМЕР 10.5. Находясь в ситуации, описанной в примере 10.2, предположим дополнительно, что f – эпиморфизм в $\text{alg}(\mathcal{C})$. Используя характеризацию эпиморфизмов, упомянутую в § 2 (см. (2.8)), а также формулу (10.1), получаем изоморфизмы

$$B \hat{\otimes}_A A_\alpha \hat{\otimes}_A B \cong B \hat{\otimes}_A B_\beta \cong B \hat{\otimes}_B B_\beta \cong B_\beta \quad (10.3)$$

в категории $B\text{-mod-}B(\mathcal{C})$.

Следующая теорема в чисто алгебраическом случае также фактически получена в [72] (хотя условие, наложенное в [72] на гомоморфизм f , является формально более сильным, чем нам нужно). Мы сочли целесообразным привести доказательство, поскольку использованные в [72] рассуждения неприменимы в контексте топологических модулей.

ТЕОРЕМА 10.6. Пусть $f: A \rightarrow B$ – гомологический эпиморфизм в $\text{alg}(\mathcal{C})$. Предположим, что алгебра A удовлетворяет условию $\text{VdB}_\mathcal{C}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $L \in A\text{-mod-}A(\mathcal{C})$, коммутирующим с B . Тогда алгебра B удовлетворяет условию $\text{VdB}_\mathcal{C}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $B \hat{\otimes}_A L \hat{\otimes}_A B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $L^B = B \hat{\otimes}_A L \hat{\otimes}_A B$ и зафиксируем произвольный бимодуль $X \in B\text{-mod-}B(\mathcal{C})$. Согласно предложению 10.4 бимодуль L^B обратим в $B\text{-mod-}B(\mathcal{C})$, и имеют место изоморфизмы

$$L^B \hat{\otimes}_B X \cong (L \hat{\otimes}_A B) \hat{\otimes}_B X \cong L \hat{\otimes}_A X \quad (10.4)$$

в категории $A\text{-mod-}B(\mathcal{C})$. Используя предложение 2.8, изоморфизмы (10.4) и условие $\text{VdB}_\mathcal{C}^{\text{top}}(n)$ для алгебры A , получаем изоморфизмы векторных пространств

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^i(B, X) &\cong \mathcal{H}^i(A, X) \cong \mathcal{H}_{n-i}\left(A, L \hat{\otimes}_A X\right) \cong \mathcal{H}_{n-i}\left(A, L^B \hat{\otimes}_B X\right) \\ &\cong \mathcal{H}_{n-i}\left(B, L^B \hat{\otimes}_B X\right). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 10.7. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная конечномерная алгебра Ли и G – соответствующая односвязная комплексная группа Ли. Из теоремы 10.6 и результатов работы [47] следует, что ассоциативная свертка $\mathfrak{F}(\mathfrak{g})$ [14], алгебра аналитических функционалов $\mathcal{A}(G)$ [17]–[19] и весовые пополнения $\mathcal{U}_\mathcal{M}(\mathfrak{g})$ [15], [16] удовлетворяют условию $\text{VdB}_{\text{LCS}}^{\text{top}}(n)$, где $n = \dim \mathfrak{g}$. Если же алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает положительную градуировку, то условию $\text{VdB}_{\text{LCS}}^{\text{top}}(n)$ удовлетворяет и оболочка Аренса–Майкла $\hat{U}(\mathfrak{g})$. Во всех перечисленных случаях дуализирующим бимодулем служит сама алгебра, рассмотренная как бимодуль над собой.

СЛЕДСТВИЕ 10.8. Пусть A – конечно порожденная алгебра конечного типа, удовлетворяющая условию $\text{VdB}^{\text{alg}}(n)$ с дуализирующим бимодулем L . Предположим, что $\hat{A} \neq 0$ и канонический гомоморфизм $\iota_A: A_s \rightarrow \hat{A}$ – гомологический эпиморфизм в $\text{alg}(\text{LCS})$. Тогда алгебра $\hat{A}$ удовлетворяет условию $\text{VdB}_{\text{LCS}}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $\hat{L} = \hat{A} \hat{\otimes}_{A_s} L_s \hat{\otimes}_{A_s} \hat{A}$. Кроме того,

$$\text{w.dg } \hat{A} = \text{w.db } \hat{A} = \text{dg}_{\mathcal{C}} \hat{A} = \text{db } \hat{A} = n, \quad (10.5)$$

где $\mathcal{C}$ – любая допустимая подкатегория в LCS , содержащая Fr .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 9.17 и примера 10.3 следует, что выполнены все условия теоремы 10.6. Отсюда получаем первое из сделанных утверждений. Чтобы доказать равенства (10.5), заметим, что так как левый A_s -модуль L_s является прямым слагаемым модуля A_s^n для некоторого n , то и левый $\hat{A}$ - $\hat{\otimes}$ -модуль $\hat{L}$, будучи изоморфен модулю $\hat{A} \hat{\otimes}_{A_s} L_s$ (см. предложение 10.4), является прямым слагаемым модуля $\hat{A}^n$. Далее, $\hat{A}$ – ядерная алгебра Фреше (см. [21, следствие 3.3]), поэтому из вышеизложенного следует, что $\hat{L}$ – ядерный $\hat{A}$ -бимодуль Фреше. Следовательно, алгебра $\hat{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 9.20, из которой и вытекают равенства (10.5).

§ 11. Квантовые аффинные пространства и квантовые торы

В этом параграфе мы применим полученные выше результаты к трем алгебрам Фреше, две из которых являются пополнениями алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ и одна – пополнением алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ (см. пример 9.13).

11.1. Алгебра голоморфных функций на квантовом аффинном пространстве. Пусть $\mathbf{q} = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ – мультипликативно антисимметрическая комплексная $(n \times n)$ -матрица. Напомним (см. пример 9.13), что n -мерным квантовым аффинным пространством называется алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ с образующими $x_1, \dots, x_n$, подчиненными соотношениям

$$x_i x_j = q_{ij} x_j x_i, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Чтобы подчеркнуть отличие этой алгебры от рассматриваемого ниже ее аналитического аналога, мы будем в дальнейшем называть ее n -мерным алгебраическим квантовым аффинным пространством, или, более развернуто, алгеброй регулярных функций на n -мерном квантовом аффинном пространстве. Ясно, что если $q_{ij} = 1$ для всех i, j , то алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ совпадает с обычной алгеброй многочленов от n переменных, т. е. с алгеброй регулярных (в смысле алгебраической геометрии) функций на $\mathbb{C}^n$. В общем случае алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$, разумеется, некоммутативна, однако одночлены $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ (где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$) по-прежнему образуют базис этой алгебры, так что ее подлежащее векторное пространство совпадает с пространством многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

В [21, § 5.3] было получено явное описание оболочки Аренса–Майкла алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$. А именно, была построена такая функция $w_{\mathbf{q}}: \mathbb{Z}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, что оболочка Аренса–Майкла алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ как локально выпуклое пространство

совпадает с пространством

$$\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n) = \left\{ a = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_{\alpha} x^{\alpha} : \|a\|_{\rho}^{\mathbf{q}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} |c_{\alpha}| w_{\mathbf{q}}(\alpha) \rho^{|\alpha|} < \infty \quad \forall \rho > 0 \right\},$$

топология в котором порождается семейством норм $\{\|\cdot\|_{\rho}^{\mathbf{q}} : \rho > 0\}$. При этом умножение в $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$ однозначно определяется требованием непрерывности и тем, что $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ является подалгеброй в $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$. Явный вид весовой функции $w_{\mathbf{q}}$ для наших целей неважен; отметим лишь, что если $|q_{ij}| \geq 1$ для всех $i < j$, то $w_{\mathbf{q}} \equiv 1$. В любом случае подлежащее локально выпуклое пространство алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$ топологически изоморфно пространству голоморфных функций $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$; чтобы это увидеть, достаточно сопоставить каждой функции $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ ее тэйлоровское разложение $\sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ в нуле и положить $c_{\alpha} = a_{\alpha} (w_{\mathbf{q}}(\alpha))^{-1}$. По этой причине алгебру $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$ естественно называть *n-мерным комплексно-аналитическим квантовым аффинным пространством*, или, более развернуто, *алгеброй голоморфных функций на n-мерном квантовом аффинном пространстве*.

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть $\mathbf{q} = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ – мультипликативно антисимметрическая комплексная $(n \times n)$ -матрица. Предположим, что либо $|q_{ij}| \geq 1$ для всех $i < j$, либо $|q_{ij}| \leq 1$ для всех $i < j$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) вложение $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)_s \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$ – гомологический эпиморфизм в $\text{alg}(\text{LCS})$;
- (ii) алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет условию $\text{VdB}_{\text{LCS}}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)_{\beta}$, где автоморфизм $\beta \in \text{Aut } \mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$ однозначно определен формулой (9.9);
- (iii) $\text{w.dg } \mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n) = \text{w.db } \mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n) = \text{dg}_{\mathcal{C}} \mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n) = \text{db } \mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n) = n$, где $\mathcal{C}$ – любая допустимая подкатегория в LCS , содержащая Fr .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) доказано в [21, теорема 9.12]. Далее, как уже упоминалось в примере 9.13, алгебра $A = \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет условию $\text{VdB}^{\text{alg}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $L = A_{\alpha}$, где автоморфизм $\alpha \in \text{Aut}(A)$ определен формулой (9.9). Кроме того, A нётерова (см., например, [73], [74]) и поэтому является алгеброй конечного типа. Таким образом, с учетом п. (i) применимо следствие 10.8, согласно которому алгебра $\hat{A} = \mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет условию $\text{VdB}_{\text{LCS}}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $\hat{L} = \hat{A} \hat{\otimes}_{A_s} L_s \hat{\otimes}_{A_s} \hat{A}$. Из того же следствия получаем равенства (iii). Существование и единственность автоморфизма $\beta \in \text{Aut}(\hat{A})$, продолжающего α , очевидным образом следует из универсального свойства оболочек Аренса–Майкла (см. § 2). Наконец, из (10.3) следует, что $\hat{L} \cong \hat{A}_{\beta}$ в категории $\hat{A}\text{-mod-}\hat{A}$. Это завершает доказательство утверждения (ii) и всей теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.2. Используя построенную в работе [76] квантовую резольвенту Кошуля, нетрудно показать, что для алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ тоже справедливы равенства (iii) из теоремы 11.1, если в них гомологические размерности dg , w.dg и другие понимать в чисто алгебраическом смысле. В самом деле, из существования такой резольвенты немедленно следует неравенство $\text{db}_{\text{alg}} \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n) \leq n$; с другой стороны, прямое вычисление показывает, что для одномерного модуля $\mathbb{C}$ над алгеброй $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ (полученного факторизацией этой алгебры по идеалу, порожденному элементами $x_1, \dots, x_n$) пространство $\text{Tor}_n^{\text{alg}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ отлично

от нуля, и поэтому $\text{w.dg}_{\text{alg}} \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n) \geq n$. Отсюда и получаются равенства (iii) для алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$.

Далее мы увидим, что в случае квантового тора алгебры регулярных и голоморфных функций ведут себя в этом отношении по-разному (см. замечание 11.7).

11.2. Алгебра голоморфных функций на квантовом торе. Пусть, как и выше, $\mathbf{q} = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ — мультипликативно антисимметрическая комплексная $(n \times n)$ -матрица. Напомним (см. пример 9.13), что n -мерным квантовым тором называется алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ с образующими $x_i, x_i^{-1}, i = 1, \dots, n$, подчиненными соотношениям

$$x_i x_j = q_{ij} x_j x_i, \quad x_i x_i^{-1} = x_i^{-1} x_i = 1, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

По тем же причинам, что и в п. 11.1, мы будем в дальнейшем называть эту алгебру n -мерным алгебраическим квантовым тором, или, более развернуто, алгеброй регулярных функций на n -мерном квантовом торе. Ясно, что если $q_{ij} = 1$ для всех i, j , то алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ совпадает с обычной алгеброй многочленов Лорана от n переменных, т. е. с алгеброй регулярных функций на n -мерном алгебраическом торе $(\mathbb{C}^\times)^n$, где $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В общем случае алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$, разумеется, некоммутативна, однако одночлены $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ (где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$) по-прежнему образуют базис этой алгебры, так что ее подлежащее векторное пространство совпадает с пространством многочленов Лорана $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$.

В [21, § 5.6] было показано, что если $|q_{ij}| = 1$ для всех i, j , то оболочка Аренса–Майкла алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ как локально выпуклое пространство совпадает с пространством

$$\mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n) = \left\{ a = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha x^\alpha : \|a\|_\rho = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} |c_\alpha| \rho^{|\alpha|} < \infty \quad \forall \rho > 0 \right\},$$

топология в котором порождается семейством норм $\{\|\cdot\|_\rho : \rho > 0\}$. При этом умножение в $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ однозначно определяется требованием непрерывности и тем, что $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ является подалгеброй в $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n)$. Легко видеть, что подлежащее локально выпуклое пространство алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ топологически изоморфно пространству голоморфных функций $\mathcal{O}((\mathbb{C}^\times)^n)$; чтобы это увидеть, достаточно сопоставить каждой функции $f \in \mathcal{O}((\mathbb{C}^\times)^n)$ ее лорановское разложение $\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ в нуле. По этой причине алгебру $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ естественно называть n -мерным комплексно-аналитическим квантовым тором, или, более развернуто, алгеброй голоморфных функций на n -мерном квантовом торе.

Отметим, что если $|q_{ij}| \neq 1$ хотя бы для одной пары индексов i, j , то оболочка Аренса–Майкла алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ равна нулю (см. [21, предложение 5.3]).

ТЕОРЕМА 11.3. Пусть $\mathbf{q} = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ — мультипликативно антисимметрическая комплексная $(n \times n)$ -матрица. Предположим, что $|q_{ij}| = 1$ для всех i, j . Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) вложение $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)_s \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ — гомологический эпиморфизм в категории $\text{alg}(\text{LCS})$;

(ii) алгебра $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ удовлетворяет условию $\text{VdB}_{\text{LCS}}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n)_\beta$, где автоморфизм $\beta \in \text{Aut } \mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ однозначно определен формулой (9.9);

(iii) $w.\text{dg } \mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n) = w.\text{db } \mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n) = \text{dg}_{\mathcal{C}} \mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n) = \text{db } \mathcal{O}_{\mathbf{q}}((\mathbb{C}^\times)^n) = n$, где $\mathcal{C}$ – любая допустимая подкатегория в LCS , содержащая Fr .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО с очевидными видоизменениями повторяет доказательство теоремы 11.1.

11.3. Алгебра гладких функций на квантовом торе. Пусть $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ – пространство гладких (бесконечно дифференцируемых) функций на n -мерном торе $\mathbb{T}^n$. Напомним, что сопоставление каждой функции из $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ набора ее коэффициентов Фурье задает топологический изоморфизм между $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ и пространством $s(\mathbb{Z}^n)$ быстро убывающих последовательностей на $\mathbb{Z}^n$. Таким образом,

$$C^\infty(\mathbb{T}^n) = \left\{ a = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha x^\alpha : \|a\|_k = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |c_\alpha| (|\alpha| + 1)^k < \infty \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

где $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$ для каждого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$. Топология на $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ задается последовательностью норм $\{\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$. Относительно этой топологии $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ является ядерным пространством Фреше. Отметим, что $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ содержит в себе алгебру многочленов Лорана $\mathcal{O}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ в качестве плотного подпространства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.4. Пусть $\mathbf{q} = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ – мультипликативно антисимметрическая комплексная $(n \times n)$ -матрица. Предположим, что $|q_{ij}| = 1$ для всех i, j . Тогда умножение в алгебре $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ единственным образом продолжается до непрерывного билинейного оператора $C^\infty(\mathbb{T}^n) \times C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$, удовлетворяющего тождеству ассоциативности и превращающего пространство $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ в алгебру Фреше–Аренса–Майкла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $A = \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ и $B = C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Поскольку A плотна в B , достаточно показать, что A является локально m -выпуклой алгеброй относительно топологии, унаследованной из B . Напомним, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$ справедлива формула

$$x^\alpha x^\beta = \prod_{i>j} q_{ij}^{\alpha_i \beta_j} x^{\alpha+\beta} \quad (11.1)$$

(см., например, [73], [78]). Следовательно,

$$\begin{aligned} \|x^\alpha x^\beta\|_k &= \|x^{\alpha+\beta}\|_k = (|\alpha| + |\beta| + 1)^k \leq (|\alpha| + |\beta| + 1)^k \\ &\leq (|\alpha| + 1)^k (|\beta| + 1)^k = \|x^\alpha\|_k \|x^\beta\|_k \end{aligned}$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$ и $k \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда, в свою очередь, получаем, что для любых $a = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ и $b = \sum_\beta d_\beta x^\beta$ из A справедлива оценка

$$\|ab\|_k = \left\| \sum_{\alpha, \beta} c_\alpha d_\beta x^\alpha x^\beta \right\|_k \leq \sum_{\alpha, \beta} |c_\alpha d_\beta| \|x^\alpha\|_k \|x^\beta\|_k = \|a\|_k \|b\|_k.$$

Таким образом, нормы $\|\cdot\|_k$ на алгебре A субмультипликативны, следовательно, A локально m -выпукла. С учетом изложенного выше это завершает доказательство.

Алгебра $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ с введенным выше умножением будет в дальнейшем обозначаться через $C_q^\infty(\mathbb{T}^n)$ и называться n -мерным *гладким* квантовым тором, или, более развернуто, *алгеброй гладких функций на n -мерном квантовом торе*. Эта алгебра была впервые введена в рассмотрение Р. Нестом [79] и Л. А. Тахтаджяном [80], а в частном случае $n = 2$ – А. Конном [58]. Разумеется, если $q_{ij} = 1$ для всех i, j , то $C_q^\infty(\mathbb{T}^n)$ – обычная алгебра гладких функций $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ с поточечным умножением.

Следующая теорема фактически была доказана Р. Нестом [79] и независимо анонсирована Л. А. Тахтаджяном [80]. Мы сочли целесообразным привести полное доказательство, которое несколько отличается от доказательства Неста и ближе по духу к принадлежащему Х. А. и Х. Х. Гуччионе [81] доказательству аналогичного утверждения для алгебры $\mathcal{O}_q^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ (см. также [75]). Основная причина, по которой мы приводим это доказательство, состоит в том, что его фрагменты будут использованы в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 11.5. *Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{C}^n$, для каждого $p = 0, \dots, n$ положим $\bar{K}_p = C_q^\infty(\mathbb{T}^n) \hat{\otimes} \bigwedge^p \mathbb{C}^n \hat{\otimes} C_q^\infty(\mathbb{T}^n)$ и рассмотрим цепной комплекс*

$$0 \leftarrow C_q^\infty(\mathbb{T}^n) \xleftarrow{\pi} \bar{K}_0 \xleftarrow{d} \bar{K}_1 \xleftarrow{d} \dots \xleftarrow{d} \bar{K}_n \leftarrow 0, \quad (11.2)$$

где $\pi: C_q^\infty(\mathbb{T}^n) \hat{\otimes} C_q^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow C_q^\infty(\mathbb{T}^n)$ – умножение в $C_q^\infty(\mathbb{T}^n)$, а дифференциал $d: \bar{K}_p \rightarrow \bar{K}_{p-1}$ однозначно определен формулой

$$d(a \otimes e_{i_1} \cdots e_{i_p} \otimes b) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \left(\left(\prod_{s < k} q_{i_s i_k} \right) a x_{i_k} \otimes e_{i_1} \cdots \hat{e}_{i_k} \cdots e_{i_p} \otimes b \right. \\ \left. - \left(\prod_{s > k} q_{i_k i_s} \right) a \otimes e_{i_1} \cdots \hat{e}_{i_k} \cdots e_{i_p} \otimes x_{i_k} b \right)$$

для $a, b \in C_q^\infty(\mathbb{T}^n)$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$. Тогда комплекс (11.2) допустим и является, следовательно, проективной бимодульной резольвентой алгебры $C_q^\infty(\mathbb{T}^n)$ в категории $C_q^\infty(\mathbb{T}^n)\text{-mod-}C_q^\infty(\mathbb{T}^n)(\text{Fr})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $A = \mathcal{O}_q^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$, $B = C_q^\infty(\mathbb{T}^n)$ и заметим, что если заменить B на A в комплексе (11.2), а вместо проективного тензорного произведения использовать алгебраическое тензорное произведение, то получится в точности бимодульная резольвента Кошуля

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{\pi_A} K_0 \xleftarrow{d} K_1 \xleftarrow{d} \dots \xleftarrow{d} K_n \leftarrow 0, \quad (11.3)$$

построенная в [81] (ср. также [75]). Мы модифицируем конструкцию из [81] и построим стягивающую гомотопию для комплекса (11.2).

Для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ и каждого $i = 1, \dots, n$ введем обозначения

$$x_{<i}^\alpha = \begin{cases} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} & \text{при } i > 1, \\ 1 & \text{при } i = 1, \end{cases} \quad x_{>i}^\alpha = \begin{cases} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} & \text{при } i < n, \\ 1 & \text{при } i = n. \end{cases}$$

Следуя [81], определим линейные операторы $T_i: A \rightarrow K_1$, $i = 1, \dots, n$, формулами

$$T_i(x^\alpha) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} x_{<i}^\alpha x_i^j \otimes e_i \otimes x_i^{\alpha_i-j-1} x_{>i}^\alpha & \text{при } \alpha_i > 0, \\ 0 & \text{при } \alpha_i = 0, \\ -\sum_{j=\alpha_i}^{-1} x_{<i}^\alpha x_i^j \otimes e_i \otimes x_i^{\alpha_i-j-1} x_{>i}^\alpha & \text{при } \alpha_i < 0. \end{cases}$$

Снабдим A и K_1 топологиями, унаследованными из B и $\overline{K}_1$ соответственно, и покажем, что операторы T_i непрерывны. Отождествляя проективное тензорное произведение $B \hat{\otimes} B$ с $C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$ (см. [82]), видим, что

$$B \hat{\otimes} B = \left\{ u = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n} c_{\alpha\beta} x^\alpha \otimes x^\beta : \|u\|_k = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n} |c_{\alpha\beta}| (|\alpha| + |\beta| + 1)^k < \infty \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Положим $\overline{K} = \bigoplus_p \overline{K}_p = B \hat{\otimes} \bigwedge \mathbb{C}^n \hat{\otimes} B$, $K = \bigoplus_p K_p = A \otimes \bigwedge \mathbb{C}^n \otimes A$ и распространим определяющие топологию на пространстве $B \hat{\otimes} B$ нормы $\|\cdot\|_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, на пространство $\overline{K}$, полагая

$$\left\| \sum_{i_1 < \dots < i_p} \lambda_{i_1 \dots i_p} u_{i_1 \dots i_p} \otimes e_{i_1} \dots e_{i_p} \right\|_k = \sum_{i_1 < \dots < i_p} |\lambda_{i_1 \dots i_p}| \|u_{i_1 \dots i_p}\|_k \quad (11.4)$$

для $\lambda_{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{C}$, $u_{i_1 \dots i_p} \in B \hat{\otimes} B$. Ясно, что $\{\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ – определяющая система норм как для $\overline{K}$, так и для $\overline{K}_p$ при $p = 1, \dots, n$.

Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Если $\alpha_i > 0$, то

$$\begin{aligned} \|T_i(x^\alpha)\|_k &= \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_{i-1}| + j + \alpha_i - j - 1 + |\alpha_{i+1}| + \dots + |\alpha_n| + 1)^k \\ &= \alpha_i |\alpha|^k \leq |\alpha|^{k+1} \leq \|x^\alpha\|_{k+1}. \end{aligned}$$

Если $\alpha_i < 0$, то

$$\begin{aligned} \|T_i(x^\alpha)\|_k &= \sum_{j=\alpha_i}^{-1} (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_{i-1}| - j - \alpha_i + j + 1 + |\alpha_{i+1}| + \dots + |\alpha_n| + 1)^k \\ &= |\alpha_i| (|\alpha| + 2)^k \leq 2^k (|\alpha| + 1)^{k+1} = 2^k \|x^\alpha\|_{k+1}. \end{aligned}$$

С учетом того, что k -я норма произвольного элемента из A равна сумме k -х норм его мономов, отсюда следует, что $\|T_i(a)\|_k \leq 2^k \|a\|_{k+1}$ для любого $a \in A$. Следовательно, все операторы T_i непрерывны и однозначно продолжаются до непрерывных операторов из B в $\overline{K}_1$, которые мы будем также обозначать через T_i .

Обозначим через Λ градуированную алгебру с однородными образующими $e_1, \dots, e_n$ степени 1, подчиненными соотношениям

$$e_i e_j = -q_{ij} e_j e_i, \quad e_i^2 = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Нетрудно видеть, что для каждого $p > 0$ элементы $e_{i_1} \dots e_{i_p}$, рассмотренные для всевозможных наборов $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, образуют базис в однородной компоненте Λ_p ; в частности, $\Lambda_p = 0$ при $p > n$, и Λ как градуированное векторное пространство совпадает с внешней алгеброй $\bigwedge \mathbb{C}^n$. Таким образом, $K = A \otimes \Lambda \otimes A$ и $\overline{K} = B \hat{\otimes} \Lambda \hat{\otimes} B$. В работе [81] на пространстве K было введено умножение, превращающее K в градуированную алгебру таким образом, что алгебра Λ , будучи отождествлена с подпространством $\mathbb{C}1 \otimes \Lambda \otimes \mathbb{C}1$ в K , является подалгеброй в K . В частности, K может рассматриваться как правый Λ -модуль. Из формул, задающих умножение в K (см. [81]), следует, что структура правого Λ -модуля на K однозначно определяется равенствами

$$(x^\alpha \otimes e_{i_1} \dots e_{i_p} \otimes x^\beta) \cdot e_j = \left(\prod_{k=1}^n q_{kj}^{\beta_k} \right) x^\alpha \otimes e_{i_1} \dots e_{i_p} e_j \otimes x^\beta$$

для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$, $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ и $j \in \{1, \dots, n\}$. Из этих равенств и соотношения (11.4) следует, что $\|u \cdot e_j\|_k \leq \|u\|_k$ для любых $u \in K$, $j \in \{1, \dots, n\}$ и $k \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, действие Λ на K непрерывно и продолжается до непрерывного действия Λ на $\overline{K}$, превращающего $\overline{K}$ в правый Λ -модуль Фреше.

Для каждого $p = 0, \dots, n-1$ введем морфизмы правых B -модулей Фреше $h_p: \overline{K}_p \rightarrow \overline{K}_{p+1}$, полагая для любых $a, b \in B$ и каждого набора $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$

$$h_0(a \otimes b) = \sum_{i=1}^n T_i(a) \cdot b,$$

$$h_p(a \otimes e_{i_p} \dots e_{i_1} \otimes b) = \sum_{i_{p+1} > i_p} (T_{i_{p+1}}(a) \cdot e_{i_p} \dots e_{i_1}) \cdot b, \quad p > 0.$$

Определим также морфизм правых B -модулей Фреше $h_{-1}: B \rightarrow \overline{K}_0$ формулой $h_{-1}(a) = 1 \otimes a$. Очевидно, h_p переводит K_p в K_{p+1} , а h_{-1} переводит A в K_0 . Как показано в [81], семейство морфизмов $\{h_p\}$, ограниченное на подкомплекс (11.3) комплекса (11.2), образует его стягивающую гомотопию. С учетом плотности (11.3) в (11.2) отсюда следует, что $\{h_p\}$ – стягивающая гомотопия последнего. Следовательно, комплекс (11.2) допустим, что и требовалось доказать.

С помощью теоремы 11.5 получаем следующий результат, аналогичный теоремам 11.1, 11.3.

ТЕОРЕМА 11.6. Пусть $\mathbf{q} = (q_{ij})_{i,j=1}^n$ – мультипликативно антисимметрическая комплексная $(n \times n)$ -матрица. Предположим, что $|q_{ij}| = 1$ для всех i, j . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) вложение $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)_s \hookrightarrow C_{\mathbf{q}}^\infty(\mathbb{T}^n)$ – гомологический эпиморфизм в категории $\text{alg}(\text{LCS})$;
- (ii) алгебра $C_{\mathbf{q}}^\infty(\mathbb{T}^n)$ удовлетворяет условию $\text{VdB}_{\text{LCS}}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $C_{\mathbf{q}}^\infty(\mathbb{T}^n)_\beta$, где автоморфизм $\beta \in \text{Aut } C_{\mathbf{q}}^\infty(\mathbb{T}^n)$ однозначно определен формулой (9.9);
- (iii) $\text{w.dg } C_{\mathbf{q}}^\infty(\mathbb{T}^n) = \text{w.db } C_{\mathbf{q}}^\infty(\mathbb{T}^n) = \text{dg}_{\mathcal{C}} C_{\mathbf{q}}^\infty(\mathbb{T}^n) = \text{db } C_{\mathbf{q}}^\infty(\mathbb{T}^n) = n$, где $\mathcal{C}$ – любая допустимая подкатегория в LCS , содержащая Fr .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы 11.5, положим $A = \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ и $B = C_{\mathbf{q}}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Снабжая все A -бимодули, входящие в резольвенту (K, π_A) алгебры A (см. (11.3)), сильнейшей локально выпуклой топологией, получаем с учетом предложения 8.1 и п. (v) предложения 2.3 свободную бимодульную резольвенту (K_s, π_{A_s}) алгебры A_s . Применяя к этой резольвенте функтор $B \hat{\otimes}_{A_s} (\cdot) \hat{\otimes}_{A_s} B$, получаем комплекс (11.2), который допустим в силу теоремы 11.5. Это доказывает утверждение (i).

В силу следствия 9.18 $\hat{\otimes}$ -алгебра A_s удовлетворяет условию $\text{VdB}_{\text{LCS}}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $(A_s)_\alpha$, где автоморфизм $\alpha \in \text{Aut}(A_s)$ определен формулой (9.9). Существование и единственность автоморфизма $\beta \in \text{Aut}(B)$, удовлетворяющего условию (9.9), очевидным образом следует из явного вида норм $\|\cdot\|_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определяющих топологию на B , и из плотности A в B . Следовательно, с учетом примера 10.2 обратимый A_s - $\hat{\otimes}$ -бимодуль $(A_s)_\alpha$ коммутирует с B , и применима теорема 10.6, согласно которой алгебра B удовлетворяет условию $\text{VdB}_{\text{LCS}}^{\text{top}}(n)$ с дуализирующим бимодулем $B \hat{\otimes}_{A_s} (A_s)_\alpha \hat{\otimes}_{A_s} B$,

изоморфным B_β (см. (10.3)). Это доказывает утверждение (ii). Наконец, утверждение (iii) следует из утверждения (ii) и теоремы 9.20.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.7. Итак, согласно доказанному выше, гомологические размерности dg , db , $\mathrm{w.dg}$ и $\mathrm{w.db}$ для алгебр гладких и голоморфных функций на n -мерном квантовом торе равны n . Интересно, что для алгебры $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n)$ регулярных функций на n -мерном квантовом торе (см. начало п. 11.2) это уже не так. С одной стороны, эта алгебра удовлетворяет условию $\mathrm{VdB}^{\mathrm{alg}}(n)$ (см. пример 9.13), поэтому $\mathrm{db}_{\mathrm{alg}} \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n) = \mathrm{w.db}_{\mathrm{alg}} \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n) = n$ в силу предложения 9.19. С другой стороны, как показали Дж. Макконнелл и Дж. Петтит [5], в случае “общего положения” справедливы равенства⁹ $\mathrm{dg}_{\mathrm{alg}} \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n) = \mathrm{w.dg}_{\mathrm{alg}} \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\mathrm{alg}}((\mathbb{C}^\times)^n) = 1$.

§ 12. Нерешенные вопросы

В этом заключительном параграфе мы сформулируем несколько нерешенных вопросов, прямо или косвенно связанных с темой настоящей работы. Начнем с вопроса общего характера, касающегося основ гомологической теории $\widehat{\otimes}$ -алгебр.

ВОПРОС 1. Пусть $\mathcal{C}$ – допустимая подкатегория в LCS и A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра из $\mathrm{alg}(\mathcal{C})$. Может ли глобальная размерность $\mathrm{dg}_{\mathcal{C}} A$ зависеть от выбора категории $\mathcal{C}$?

Отметим, что положительный ответ на этот вопрос дал бы пример $\widehat{\otimes}$ -алгебры A , у которой $\mathrm{dg} A < \mathrm{db} A$; в самом деле, как уже упоминалось выше, биразмерность $\mathrm{db} A$ от выбора категории $\mathcal{C}$ не зависит.

Следующий вопрос в сущности уже упоминался в § 1 и представляет собой вариацию на тему проблемы 3 из [8].

ВОПРОС 2. Пусть A – ядерная алгебра Фреше–Аренса–Майкла. Верно ли, что $\mathrm{dg} A = \mathrm{db} A$? Верно ли это хотя бы для какого-либо естественного класса таких алгебр, например для алгебр, удовлетворяющих условиям теоремы 7.14?

Следующие два вопроса связаны с дополнительными условиями, налагаемыми на алгебры в теоремах 6.6, 7.14.

ВОПРОС 3. Верна ли теорема 6.6 без предположения о том, что $\mathrm{w.db} A < \infty$? Иными словами, верно ли, что если для ядерной алгебры Фреше–Аренса–Майкла A имеет место равенство $\mathrm{w.db} A = \infty$, то и $\mathrm{w.dg} A = \infty$?

ВОПРОС 4. Верна ли теорема 7.14 без предположения о том, что $\mathrm{db} A < \infty$? Верна ли она без предположения о том, что A – алгебра конечного типа или алгебра типа (s) ?

Интересно то, что в случае конечномерных алгебр, не снабженных топологией, равенство $\mathrm{dg} A = \mathrm{db} A$ было первоначально получено С. Эйленбергом [9] при том же дополнительном предположении, что $\mathrm{db} A < \infty$. Лишь спустя

⁹Под случаем общего положения здесь понимается ситуация, когда мультипликативная подгруппа в $\mathbb{C}^\times$, порожденная числами q_{ij} , имеет максимально возможный ранг $n(n-1)/2$. В простейшем случае $n = 2$ это означает, что параметр $q = q_{12}$ не является корнем из единицы.

35 лет Д. Хаппелю удалось показать [10], что это дополнительное предположение несущественно.

Следующие два вопроса касаются понятия обратимого $\widehat{\otimes}$ -бимодуля.

ВОПРОС 5. Пусть A и B — $\widehat{\otimes}$ -алгебры, P — A - B - $\widehat{\otimes}$ -бимодуль и Q — B - A - $\widehat{\otimes}$ -бимодуль. Предположим, что P и Q взаимно обратны в смысле определения 9.1. Следует ли отсюда, что $P \cong \mathbf{h}_B(Q, B)$ и $Q \cong \mathbf{h}_A(P, A)$ как топологические бимодули?

ВОПРОС 6. Пусть A и B — $\widehat{\otimes}$ -алгебры, P — обратимый A - B - $\widehat{\otimes}$ -бимодуль. Обязательно ли он проективен как левый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль или как правый B - $\widehat{\otimes}$ -модуль?

Напомним (см. теорему 9.3 и замечание 9.4), что ответы на вопросы 5, 6 положительны, если речь идет об алгебрах и модулях Фреше.

ВОПРОС 7. Пусть A — алгебра, удовлетворяющая условию $\text{VdB}^{\text{alg}}(n)$. Обязательно ли изоморфизмы (9.8) являются изоморфизмами A -бимодулей?

Последний вопрос связан со свойствами алгебры голоморфных функций на квантовом аффинном пространстве.

ВОПРОС 8. Пусть $\mathbf{q}$ — произвольная мультипликативно антисимметрическая комплексная $(n \times n)$ -матрица. Верно ли, что вложение $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)_s \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{q}}(\mathbb{C}^n)$ — гомологический эпиморфизм?

Напомним (см. п. (i) теоремы 11.1), что ответ на этот вопрос положителен, если либо $|q_{ij}| \geq 1$ для всех $i < j$, либо $|q_{ij}| \leq 1$ для всех $i < j$. В частности, ответ положителен в случае однопараметрического квантового аффинного пространства $\mathcal{O}_q^{\text{alg}}(\mathbb{C}^n)$ (см. пример 9.13).

Автор благодарен А. Я. Хелемскому за внимание к работе и рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра*, ИЛ, М., 1960; пер. с англ.: Н. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1956.
2. А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1986; англ. пер.: А. Ya. Khelemskii, *The homology of Banach and topological algebras*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **41**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
3. А. Ya. Helemskii, “Homology for the algebras of analysis”, *Handbook of algebra*, v. 2, North-Holland, Amsterdam, 2000, 151–274.
4. О. Е. Villamayor, “On weak dimension of algebras”, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 941–951.
5. J. C. McConnell, J. J. Pettit, “Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras”, *J. London Math. Soc.* (2), **38**:1 (1988), 47–55.
6. А. Я. Хелемский, “О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами”, *Матем. сб.*, **81**(123):3 (1970), 430–444; англ. пер.: A. J. Helemskii, “On the homological dimension of normed modules over Banach algebras”, *Math. USSR-Sb.*, **10**:3 (1970), 399–411.

7. А. Я. Хелемский, “Глобальная размерность функциональной банаховой алгебры отлична от единицы”, *Функц. анализ и его прил.*, **6:2** (1972), 95–96; англ. пер.: A. Ya. Khelemskii, “Global dimension of a Banach function algebra is different from unity”, *Funct. Anal. Appl.*, **6:2** (1972), 166–168.
8. А. Ya. Helemskii, “31 problems of the homology of the algebras of analysis”, *Linear and complex analysis*, Problem book 3. Part I, Lecture Notes in Math., **1573**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 54–78.
9. S. Eilenberg, “Algebras of cohomologically finite dimension”, *Comment. Math. Helv.*, **28** (1954), 310–319.
10. D. Happel, “Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras”, *Séminaire d’Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin* (Paris, 1987/1988), Lecture Notes in Math., **1404**, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 108–126.
11. M. Auslander, “On the dimension of modules and algebras. VI. Comparison of global and algebra dimension”, *Nagoya Math. J.*, **11** (1957), 61–65.
12. R. Meise, D. Vogt, *Introduction to functional analysis*, Oxf. Grad. Texts Math., **2**, Clarendon Press, New York, 1997.
13. M. Van den Bergh, “A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126:5** (1998), 1345–1348; “Erratum”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130:9** (2002), 2809–2810.
14. П. К. Рашевский, “Ассоциативная сверхоболочка алгебры Ли, ее регулярное представление и идеалы”, Тр. ММО, **15**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1966, 3–54.
15. R. Goodman, “Filtrations and canonical coordinates on nilpotent Lie groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **237**, 1978, 189–204.
16. R. Goodman, “Holomorphic representations of nilpotent Lie groups”, *J. Funct. Anal.*, **31:1** (1979), 115–137.
17. Г. Л. Литвинов, “О вполне неприводимых представлениях комплексных и вещественных нильпотентных групп Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **3:4** (1969), 87–88; англ. пер.: G. L. Litvinov, “On completely irreducible representations of complex and real nilpotent Lie groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **3:4** (1969), 332–334.
18. Г. Л. Литвинов, “Групповые алгебры аналитических функционалов и их представления”, *Докл. АН СССР*, **190:4** (1970), 769–771; англ. пер.: G. L. Litvinov, “Group algebras of analytic functionals and their representations”, *Soviet Math. Dokl.*, **11:1** (1970), 191–194.
19. Г. Л. Литвинов, “Представления групп в локально выпуклых пространствах и топологические групповые алгебры”, *Тр. семинара по векторному и тензорному анализу*, **16** (1972), 267–349; англ. пер.: G. L. Litvinov, “Representations of groups in locally convex spaces and topological group algebras”, *Sel. Math. Sov.*, **7:2** (1999), 101–182.
20. M. A. Rieffel, “Deformation quantization of Heisenberg manifolds”, *Comm. Math. Phys.*, **122:4** (1989), 531–562.
21. А. Ю. Пирковский, “Оболочки Аренса–Майкла, гомологические эпиморфизмы и относительно квазисвободные алгебры”, Тр. ММО, **69**, УРСС, М., 2008, 34–125; англ. пер.: A. Yu. Pirkovskii, “Arens–Michael envelopes, homological epimorphisms, and relatively quasi-free algebras”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2008, 27–104.
22. A. Yu. Pirkovskii, “On Arens–Michael algebras which do not have non-zero injective $\hat{\otimes}$ -modules”, *Studia Math.*, **133:2** (1999), 163–174.
23. Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: Н. Н. Schaefer, *Topological vector spaces*, Macmillan, New York, 1966.
24. А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: A. P. Robertson, W. J. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Tracts in Math., **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.

25. A. Grothendieck, *Topological vector spaces*, Gordon and Breach, New York–London–Paris, 1973.
26. А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомология*, Наука, М., 1989.
27. Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Première partie. (Fascicule II.) Livre III: Topologie générale. Chapitre 1: Structures topologiques. Chapitre. 2: Structures uniformes*, Hermann & Cie, Paris, 1961.
28. В. П. Паламодов, “Гомологические методы в теории локально выпуклых пространств”, *УМН*, **26**:1 (1971), 3–65; англ. пер.: V. P. Palamodov, “Homological methods in the theory of locally convex spaces”, *Russian Math. Surveys*, **26**:1 (1971), 1–64.
29. C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Stud. Adv. Math., **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
30. J. L. Taylor, “Homology and cohomology for topological algebras”, *Advances in Math.*, **9** (1972), 137–182.
31. E. A. Michael, “Locally multiplicatively-convex topological algebras”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1952, № 11.
32. P. Bonneau, M. Flato, M. Gerstenhaber, G. Pinczon, “The hidden group structure of quantum groups: Strong duality, rigidity and preferred deformations”, *Comm. Math. Phys.*, **161**:1 (1994), 125–156.
33. А. Ю. Пирковский, “К проблеме существования достаточного количества инъективных модулей Фреше над ненормируемыми алгебрами Фреше”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:4 (1998), 137–154; англ. пер.: A. Yu. Pirkovskii, “The problem of the existence of sufficiently many injective Fréchet modules over non-normed Fréchet algebras”, *Izv. Math.*, **62**:4 (1998), 773–788.
34. А. Ю. Пирковский, “Слабые гомологические размерности и биплоские алгебры Kёре”, *Матем. сб.*, **199**:5 (2008), 45–80; англ. пер.: A. Yu. Pirkovskii, “Weak homological dimensions and biflat Köthe algebras”, *Sb. Math.*, **199**:5 (2008), 673–705.
35. A. Yu. Pirkovskii, “Flat cyclic Fréchet modules, amenable Fréchet algebras, and approximate identities”, *Homology, Homotopy Appl.*, **11**:1 (2009), 81–114.
36. B. Stenström, *Rings of quotients. An introduction to methods of ring theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.
37. J. L. Taylor, “A general framework for a multi-operator functional calculus”, *Advances in Math.*, **9** (1972), 183–252.
38. W. Geigle, H. Lenzing, “Perpendicular categories with applications to representations and sheaves”, *J. Algebra*, **144**:2 (1991), 273–343.
39. A. Neeman, A. Ranicki, *Noncommutative localization and chain complexes. I. Algebraic K- and L-theory*, arXiv:math.RA/0109118.
40. R. Meyer, *Embeddings of derived categories of bornological modules*, arXiv:math.FA/0410596.
41. J. L. Taylor, “Functions of several noncommuting variables”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **79** (1973), 1–34.
42. D. Luminet, “A functional calculus for Banach PI-algebras”, *Pacific J. Math.*, **125**:1 (1986), 127–160.
43. А. Я. Хелемский, “Гомологические методы в голоморфном исчислении от нескольких операторов в банаховом пространстве, по Тейлору”, *УМН*, **36**:1 (1981), 127–172; англ. пер.: A. Ya. Khelemskii, “Homological methods in Taylor’s holomorphic calculus of several operators in a Banach space”, *Russian Math. Surveys*, **36**:1 (1981), 139–192.

44. А. А. Досиев, “Гомологические размерности алгебры целых функций от элементов нильпотентной алгебры Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:1 (2003), 73–77; англ. пер.: A. A. Dosiev, “Homological dimensions of the algebra formed by entire functions of elements of a nilpotent Lie algebra”, *Funct. Anal. Appl.*, **37**:1 (2003), 61–64.
45. A. Dosiev, “Local left invertibility for operator tuples and noncommutative localizations”, *J. K-Theory*, **4**:1 (2009), 163–191.
46. A. Dosi, “Formally-radical functions in elements of a nilpotent Lie algebra and noncommutative localizations”, *Algebra Colloq.*, **17**: Special Issue 1 (2010), 749–788.
47. A. Yu. Pirkovskii, “Stably flat completions of universal enveloping algebras”, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, **441** (2006).
48. Ю. В. Селиванов, “Бипроективные банаховы алгебры”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:5 (1979), 1159–1174; англ. пер.: J. V. Selivanov, “Biprojective Banach algebras”, *Math. USSR-Izv.*, **15**:2 (1980), 387–399.
49. Н. Бурбаки, “О некоторых топологических векторных пространствах”, *Математика. Сб. пер.*, **2**:2 (1958), 109–117; пер. с фр.: N. Bourbaki, “Sur certains espaces vectoriels topologiques”, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **2** (1950), 5–16.
50. A. Defant, K. Floret, *Tensor norms and operator ideals*, North-Holland Math. Stud., **176**, North-Holland, Amsterdam, 1993.
51. H. Hogbe-Nlend, *Bornologies and functional analysis*, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1977.
52. R. Douady, “Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires”, *Quelques problèmes de modules* (Paris, 1971–1972), Soc. Math. France, Paris, 1974, 7–32.
53. G. Köthe, *Topological vector spaces. II*, Grundlehren Math. Wiss., **237**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1979.
54. J. Eschmeier, M. Putinar, *Spectral decompositions and analytic sheaves*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **10**, Clarendon Press, New York, 1996.
55. А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: A. Pietsch, *Operator ideals*, Math. Monogr., **16**, VEB, Berlin, 1978.
56. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, PWN, Warsaw, 1977.
57. A. Mallios, *Topological algebras. Selected topics*, North-Holland Math. Stud., **124**, North-Holland, Amsterdam, 1986.
58. A. Connes, “Noncommutative differential geometry”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **62** (1985), 257–360.
59. A. Pietsch, “Zur Theorie der topologischen Tensorprodukte”, *Math. Nachr.*, **25** (1963), 19–30.
60. D. Vogt, “Sequence space representations of spaces of test functions and distributions”, *Functional analysis, holomorphy, and approximation theory* (Rio de Janeiro, 1979), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **83**, Dekker, New York, 1983, 405–443.
61. A. Aytuna, “Stein spaces M for which $\mathcal{O}(M)$ is isomorphic to a power series space”, *Advances in the theory of Fréchet spaces* (Istanbul, 1988), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci., **287**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, 115–154.
62. V. P. Palamodov, “On the Liouville property of section spaces of coherent analytic sheaves”, *Functional analysis* (Essen, 1991), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **150**, Dekker, New York, 1994, 459–473.
63. F. Prosmans, “Derived categories for functional analysis”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **36**:1 (2000), 19–83.
64. D. Vogt, “On the functors $\text{Ext}^1(E, F)$ for Fréchet spaces”, *Studia Math.*, **85**:2 (1987), 163–197.
65. J. Wengenroth, *Derived functors in functional analysis*, Lecture Notes in Math., **1810**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

66. D. Vogt, M. J. Wagner, “Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Martineau”, *Studia Math.*, **67**:3 (1980), 225–240.
67. X. Басс, *Алгебраическая K-теория*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: H. Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1968.
68. A. Yu. Pirkovskii, “Injective topological modules, additivity formulas for homological dimensions and related topics”, *Topological homology*, Nova Sci. Publ., Huntington, 2000, 93–143.
69. J. Hubbard, “Transversalité”, *Quelques problèmes de modules*, **16** (Paris, 1971–1972), Soc. Math. France, Paris, 1974, 33–48.
70. R. G. Swan, “Vector bundles and projective modules”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105** (1962), 264–277.
71. W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, curvature, and cohomology*, v. I: *De Rham cohomology of manifolds and vector bundles*, Academic Press, New York–London, 1972.
72. M. Farinati, “Hochschild duality, localization, and smash products”, *J. Algebra*, **284**:1 (2005), 415–434.
73. В. А. Артамонов, “Алгебры квантовых многочленов”, *Алгебра – 4*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **26**, ВИНТИ, М., 2002, 5–34; англ. пер.: V. A. Artamonov, “Quantum polynomial algebras”, *J. Math. Sci. (New York)*, **87**:3 (1997), 3441–3462.
74. K. R. Goodearl, “Quantized coordinate rings and related Noetherian algebras”, *Proceedings of the 35th Symposium on Ring Theory and Representation Theory* (Okayama, 2002), Okayama, 2003, 19–45.
75. M. Wambst, “Hochschild and cyclic homology of the quantum multiparametric torus”, *J. Pure Appl. Algebra*, **114**:3 (1997), 321–329.
76. M. Wambst, “Complexes de Koszul quantiques”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **43**:4 (1993), 1089–1156.
77. A. W. Knap, *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*, Math. Notes, **34**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1988.
78. K. R. Goodearl, E. S. Letzter, “Quantum n -space as a quotient of classical n -space”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:12 (2000), 5855–5876.
79. R. Nest, “Cyclic cohomology of noncommutative tori”, *Canad. J. Math.*, **40**:5 (1988), 1046–1057.
80. Л. А. Тахтаджян, “Некоммутативные гомологии квантовых торов”, *Функц. анализ и его прил.*, **23**:2 (1989), 75–76; англ. пер.: L. A. Takhtadzhyan, “Noncommutative homology of quantum tori”, *Funct. Anal. Appl.*, **23**:2 (1989), 147–149.
81. J. A. Guccione, J. J. Guccione, “Hochschild homology of some quantum algebras”, *J. Pure Appl. Algebra*, **132**:2 (1998), 129–147.
82. A. Grothendieck, “Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1955, № 16.

А. Ю. Пирковский (A. Yu. Pirkovskii)
 Национальный исследовательский университет
 “Высшая школа экономики”,
 факультет математики
 E-mail: apirkovskii@hse.ru, pirkosha@gmail.com

Поступило в редакцию
 19.01.2011
 20.04.2011