Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Необходимое и достаточное условия деформации В-монополя в инстантон, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 1, 211–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im68>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:50:01

УДК 516.5

Н.А. Тюрин

Необходимое и достаточное условия деформации В-монополя в инстантон

В данной работе рассматривается возможность деформации инстантона в В-монополь, приводится необходимое для этого условие, а также строится формальное решение уравнения монополя, выпускаемое из инстантона подскока в общем положении.

Библиография: 7 наименований.

§0. Введение

Рассмотрим гладкое компактное риманово 4-многообразие (M, g) . Пусть, как обычно в теории Дональдсона, E будет $U(2)$ -расслоением на M , т.е. $\mathbb{C}^2$ -расслоением с фиксированной эрмитовой формой h и классами Черна c_1 и c_2 . Пусть $\mathcal{A}(E)$ – аффинное пространство эрмитовых связностей на E и $\mathcal{G}_E$ – группа калибровочных преобразований E_h , группа унитарных автоморфизмов E . Тогда разложение в ортогональную прямую сумму алгебр Ли определяет точную последовательность

$$1 \rightarrow \mathcal{G}_{\Lambda^2 E} \rightarrow \mathcal{G}_E \rightarrow \mathcal{G}_{\text{ad } E} \rightarrow 1, \quad (0.1)$$

где $\Lambda^2 E$ – линейное расслоение с индуцированной эрмитовой формой. Поэтому мы имеем изоморфизмы аффинных пространств

$$\mathcal{A}(E) = \mathcal{A}(\text{ad } E) \times \mathcal{A}(\Lambda^2 E) \quad (0.2)$$

и пространств классов связностей по модулю действия калибровочной группы:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(E) &= \mathcal{A}(E)/\mathcal{G}(E), & \mathcal{B}(\text{ad } E) &= \mathcal{A}(\text{ad } E)/\mathcal{G}(\text{ad } E), \\ \mathcal{B}(\Lambda^2 E) &= \mathcal{A}(\Lambda^2 E)/\mathcal{G}(\Lambda^2 E), \end{aligned} \quad (0.3)$$

которые превращаются в банаховы орбифолды после выбора индексов соболевских норм на пространствах и группах (см., например, [4, гл. 1]). Те же пространства, но без приводимых связностей, дают главное $\mathcal{G}$ -расслоение

$$\mathcal{A}(\text{ad } E)^* \rightarrow \mathcal{B}(\text{ad } E)^*. \quad (0.4)$$

Далее, каждое пространство связностей допускает $\mathcal{G}$ -эквивариантное отображение

$$F: \mathcal{A}(E) \rightarrow \Omega^2(u(E)), \quad (0.5)$$

переводящее связность в ее форму кривизны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Напомним, что для пространства $\mathcal{A}(L)$ всех $U(1)$ -связностей на линейном расслоении L “отображение моментов” F (0.5):

$$F: \mathcal{A}(L) \rightarrow \Omega^2, \quad (0.6)$$

сопоставляющее связности a ее форму кривизны $F(a)$, расслаивается на орбиты калибровки над $H^1(M, \mathbb{R})/H^1(M, \mathbb{Z})$ (см. [1]). Поэтому любая орбита связностей на L может быть определена с точностью до “якобиана” $H^1(M, \mathbb{R})/H^1(M, \mathbb{Z})$ как 2-форма на M , а именно форма кривизны этих связностей, и класс когомологий $[F(a)]$ равен $c_1(L)$.

В общем случае действие калибровочной группы $\mathcal{G}(E)$ на пространстве $\Omega^2(u(E))$ определяет векторное расслоение

$$\pi: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{B}(E)^* \quad \text{со слоем} \quad \Omega^2(u(E)) \quad (0.7)$$

и отображение F (0.5) – его сечение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко видеть, что если $\text{ad } E$ топологически нетривиально, то множество нулей этого сечения пусто.

Далее, конформная структура на M , определенная выбором римановой метрики g , задает $*$ -разложение $\Omega^2(u(E)) = \Omega^{2+}(u(E)) \oplus \Omega^{2-}(u(E))$ и, следовательно, разложение векторного пространства (0.7) в прямую сумму:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= \mathcal{H}^{2+} \oplus \mathcal{H}^{2-}, \\ \pi^\pm: \mathcal{H}^{2\pm} &\rightarrow \mathcal{B}(E)^* \quad \text{со слоем} \quad \Omega^{2\pm}(u(E)), \end{aligned} \quad (0.8)$$

и разложение сечения F (0.5) как $F = F^+ + F^-$, где $F^\pm$ – сечения векторных пространств (0.8):

$$F^\pm: \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathcal{H}^\pm. \quad (0.9)$$

Эти сечения уже имеют непустые множества нулей как подмногообразия $\mathcal{B}(E)$:

$$(F^+)_0 = \mathcal{M}_{\text{asd}}^g, \quad (F^-)_0 = \mathcal{M}_{\text{sd}}^g, \quad (0.10)$$

которые могут рассматриваться как конечномерные орбифолды виртуальных размерностей

$$\begin{aligned} \text{v. dim } \mathcal{M}_{\text{asd}}^g &= 8 \cdot c_2(E) - 2 \cdot c_1^2(E) - 3 \cdot (b_2^+ + 1), \\ \text{v. dim } \mathcal{M}_{\text{sd}}^g &= 8 \cdot c_2(E) - 2 \cdot c_1^2(E) - 3 \cdot (b_2^- + 1). \end{aligned} \quad (0.11)$$

Пространство орбит $\mathcal{M}_{\text{asd}}^g$ мы будем называть *пространством инстантонов*, а связность a такую, что $F^+(a) = 0$, как обычно, будем называть *антиавтотодуальной связностью* (см. [2]).

Легко видеть, что $\mathcal{M}_{\text{asd}}^g$ зависит от $w_2(E) = c_1(E) \bmod 2$ и от неположительного числа $p_1(E) = c_1(E)^2 - 4c_2(E)$. Зависимость пространства модулей инстантонов от топологического типа расслоения E может быть отмечена параметрами

$$\mathcal{M}_{\text{asd}}^g(w_2, p_1), \quad (\text{соответственно } \mathcal{M}_{\text{sd}}^g(w_2, p_1)). \quad (0.12)$$

Напомним некоторые конструкции римановой геометрии.

В произвольной точке $p \in M$ на касательном пространстве $T_p = \mathbb{R}^4$ и его комплексификации $T^\mathbb{C} = \mathbb{C}^4$ определены изоморфизм $g^\mathbb{C}: T^\mathbb{C} \rightarrow T^\mathbb{C}$ и комплексная квадрика $Q \subset \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}T_p^\mathbb{C}$, заданные метрикой g . Как всегда, такая невырожденная комплексная квадрика есть прямое произведение:

$$Q_p = q_p^+ \times q_p^-, \quad q_p^\pm = \mathbb{C}P^1, \quad q_p^\pm = \mathbb{P}W_p^\pm. \quad (0.13)$$

Поэтому для $p \in M$

$$T^{\mathbb{C}p} = \text{Hom}(W_p^-, W_p^+) = W_p^{-*} \otimes W_p^+. \quad (0.14)$$

Но квадратичная форма g_p вещественна и положительна, следовательно, она определяет новую вещественную структуру $J: W_p^\pm \rightarrow W_p^\pm$, $J^2 = -\text{id}$, не имеющую вещественных векторов (кватернионное умножение), с точностью до одновременной гомотетии пространств $W^\pm$, эрмитову метрику и совместимую симплектическую структуру $W_p^\pm$ с точностью до гомотетии. Поэтому

$$T_p = \text{Hom}_J(W_p^-, W_p^+) \quad (0.15)$$

– пространство гомоморфизмов, сохраняющих вещественную структуру J .

Далее, над точкой $p \in M$ проективное пространство $\mathbb{P}_p^5 = \mathbb{P}\Lambda^2 T_p^\mathbb{C}$ содержит две квадрики: $\Lambda^2 g_p^\mathbb{C}$ и грассманиан G прямых $\mathbb{P}T_p^\mathbb{C}$ (или квадрику Клейна). Обычно $\Lambda^2 g^\mathbb{C}$ рассматривается как отождествление $\Lambda^2 T^\mathbb{C} = \Lambda^2 T^{\mathbb{C}*}$. Тогда G можно представлять как самосопряженный оператор

$$*: \Lambda^2 T^{\mathbb{C}*} \rightarrow \Lambda^2 T^{\mathbb{C}*}, \quad *^2 = \text{id}. \quad (0.16)$$

Это и есть $*$ -оператор Ходжа с собственными подпространствами

$$\Lambda^2 T^{\mathbb{C}*} = \Lambda_\mathbb{C}^+ \oplus \Lambda_\mathbb{C}^-, \quad \text{где } *|_{\Lambda^\pm} = \pm \cdot \text{id}, \quad (0.17)$$

задающий разложение (0.8).

Говоря геометрически, пересечения

$$G \cap \mathbb{P}\Lambda_\mathbb{C}^\pm = q^\pm \quad (0.18)$$

дают семейства образующих квадрики Q_p на грассманиане G .

Для однозначного определения эрмитовой структуры на $W^\pm$ мы должны фиксировать некоторую эрмитову структуру на $\Lambda^2 W^\pm$. Тогда эрмитова структура на $W^\pm$ определяет изоморфизмы

$$\overline{W_p^\pm} = \text{Hom}_\mathbb{C}(W_p^\pm, \mathbb{C}), \quad \overline{W_p^\pm} \otimes W_p^\pm = \text{End } W_p^\pm \quad (0.19)$$

и

$$\text{Ad } W_p^\pm = \Lambda_{\mathbb{C}p}^\pm. \quad (0.20)$$

Если $\pi_{\text{Ad}}: \text{End } W_p^\pm \rightarrow \text{Ad } W_p^\pm$ – стандартная проекция, то мы имеем квадратическое отображение

$$\begin{aligned} \phi_\pm: W_p^\pm &\rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}p}^\pm, \\ \phi_\pm(\Phi_p) &= \pi_{\text{Ad}}(\Phi \otimes \overline{\Phi}) \quad \text{для } \Phi \in W_p^\pm. \end{aligned} \quad (0.21)$$

Геометрически это означает, что если $\mathbb{P}\Phi_p \in \mathbb{P}W^\pm = q^\pm$, то $\mathbb{P}\phi_\pm(\Phi_p) \in \mathbb{P}\Lambda_{\mathbb{C}p}^\pm$ – просто точка пересечения касательных к конике $q^\pm$ (6), взятых в точках $\mathbb{P}\Phi_p$ и $\overline{\mathbb{P}\Phi_p}$.

Далее, относительно вещественной структуры оператор $*$ веществен, и разложение на собственные подпространства вещественно тоже. Коники $q^\pm \in \mathbb{P}\Lambda_{\mathbb{C}p}^\pm$ не имеют вещественных точек, следовательно, отображения $\phi_\pm$ вещественны и

$$\Phi_p \neq 0 \implies \phi(\Phi_p) \neq 0. \quad (0.22)$$

Отображения $\phi_\pm$ (0.21) вещественны и

$$\text{Ad}_J W_p^\pm = \text{ad } W_p^\pm = \Lambda_p^\pm, \quad (0.23)$$

где J – вещественная структура.

Мы можем рассмотреть спинор Φ_p как g_p -совместимую комплексную структуру на касательном пространстве $T_p = \mathbb{R}^4$, заданную как оператор

$$I_p: T_p^{\mathbb{C}} \rightarrow T_p^{\mathbb{C}}, \quad I_p^2 = -\text{id}, \quad (0.24)$$

что эквивалентно разложению на собственные подпространства:

$$T_p^{\mathbb{C}} = T^{0,1} \oplus T^{1,0}, \quad I|_{T^{1,0}} = i \cdot \text{id}, \quad I|_{T^{0,1}} = -i \cdot \text{id}, \quad (0.25)$$

где

$$T^{0,1} = (\mathbb{C} \cdot \Phi_p) \otimes \mathbb{C}, \quad T^{1,0} = (\mathbb{C} \cdot \overline{\Phi_p}) \otimes \mathbb{C}. \quad (0.26)$$

Проективизацией этих подпространств (0.25) будет пара прямых на квадрике $Q_p \in \mathbb{P}T_p^{\mathbb{C}}$, которые дают пару точек $\mathbb{P}H^{2,0}$ и $\mathbb{P}H^{0,2}$ на конике q^+ в $\mathbb{P}\Lambda_{\mathbb{C}p}^+$, и пересечение касательных в этих точках к конике будет проективизацией симплектической формы ω_p (= кэлерова форма). И локальная компонента Ходжа $\mathbb{P}H^{1,1}$ равна проективизации линейной оболочки $\langle \omega, \Lambda_{\mathbb{C}p}^- \rangle$.

В этой интерпретации спиноров отображение ϕ сопоставляет комплексной структуре на T_p симплектическую форму соответствующей эрмитовой структуры, умноженной на некоторую вещественную функцию ψ .

Теперь все эти объекты и конструкции могут быть глобализованы над M : если $\pi_1(M) = 0$, то проективные прямые $q_p^{\pm}$ становятся слоями $\mathbb{P}^1$ -расслоения $q^{\pm}$, а двумерные пространства $W_p^{\pm}$ в каждой $p \in M$ – слоями $\mathbb{C}^2$ -расслоений $W^{\pm}$, называемых *спинорными расслоениями*. Конечно, эти расслоения определены с точностью до подкрутки на линейное. Мы можем (так как $\pi_1 = 0$) определить подъем проективных расслоений до векторных, фиксируя первый класс Черна $c_1(W^{\pm})$ при условии

$$c_1(W^{\pm}) \equiv w_2(M) \pmod{2}, \quad (0.27)$$

где $w_2(M)$ – второй класс Штиффеля–Уитни многообразия M . Выбор $c_1(W^{\pm})$ называется *выбором $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры*. Комплексификация касательного расслоения представляется в виде

$$T^{\mathbb{C}} = \text{Hom}(W^-, W^+) = W^{-*} \otimes W^+. \quad (0.28)$$

Метрика g определяет пару $\text{SO}(3)$ -связностей Леви-Чивита на паре расслоений $W^{\pm}$. Добавляя к ним любую $\text{U}(1)$ -связность ∇_0 на линейном расслоении $L = \Lambda^2 W^{\pm}$, мы получим $\text{U}(2)$ -связности на $W^{\pm}$. Одна из них определяет гомоморфизм $\Gamma(W^+) \rightarrow \Gamma(W^+ \otimes T_{\mathbb{C}}^*)$ пространства сечений, и композиция

$$\Gamma(W^+) \rightarrow \Gamma(W^+ \otimes T_{\mathbb{C}}^*) \rightarrow \Gamma(W^-), \quad (0.29)$$

где последнее отображение определяется сверткой, называется *оператором Дирака* (задаваемого связностью ∇_0 на $\Lambda^2 W^{\pm}$).

С другой стороны, локальное отображение (0.25) может быть глобализовано до квадратичного отображения векторных расслоений:

$$\phi_{\pm}: W^{\pm} \rightarrow \Lambda^{\pm}, \quad (0.30)$$

и задавать отображения сечений:

$$\Gamma\phi_{\pm}: \Gamma(W^{\pm}) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{\pm}). \quad (0.31)$$

Любая эрмитова связность $a \in \mathcal{A}(E)$ на E и оператор Дирака (0.29) задают скрученный оператор Дирака

$$D_a: \Gamma^\infty(E \otimes W^+) \rightarrow \Gamma^\infty(E \otimes W^-) \quad (0.32)$$

по обычному правилу Лейбница. Нетрудно видеть, что скрученный оператор Дирака зависит от бесследовой ad -компоненты a_0 связности a и индуцированной связности $\nabla_{\det}$ на линейном расслоении

$$L = \det(E \otimes W^\pm) = \Lambda^2 E \otimes \Lambda^2 W^\pm. \quad (0.33)$$

Таким образом,

$$\mathcal{A}(\text{ad } E) \times \mathcal{A}(L) \quad (0.34)$$

является пространством параметров семейства операторов. Для превращения этого семейства и всех наших пространств в банаховы пространства без ограничения общности мы можем потребовать, чтобы пространства связностей были L_k^p -пространствами, а калибровочные преобразования — L_{k+1}^p -преобразованиями.

Семейство операторов (0.32) эквивариантно по действию калибровочной группы. Поэтому мы можем рассмотреть это семейство как гомоморфизм D векторных расслоений:

$$\begin{aligned} \Gamma^+ &= (\Gamma(E \otimes W^+) \times \mathcal{A}(\text{ad } E) \times \mathcal{A}(L)) / \mathcal{G}_E \rightarrow (\mathcal{A}(\text{ad } E) \times \mathcal{A}(L)) / \mathcal{G}_E, \\ \Gamma^- &= (\Gamma(E \otimes W^-) \times \mathcal{A}(\text{ad } E) \times \mathcal{A}(L)) / \mathcal{G}_E \rightarrow (\mathcal{A}(\text{ad } E) \times \mathcal{A}(L)) / \mathcal{G}_E \end{aligned} \quad (0.35)$$

над базой

$$\mathcal{A}(\text{ad } E) \times \mathcal{A}(L) / \mathcal{G}_E = \mathcal{B}(\text{ad } E) \times \Omega^2 \quad (0.36)$$

(см. замечание 1 о структуре орбит связностей над линейным расслоением).

Выберем форму $\omega \in \Omega^2$ и рассмотрим

$$\mathcal{A}_\omega(L) = \{\nabla \in \mathcal{A}(L) \mid F(\nabla) = \omega\}. \quad (0.37)$$

Тогда

$$(\mathcal{A}(\text{ad } E) \times \mathcal{A}_\omega) / \mathcal{G}_E = \mathcal{B}(\text{ad } E). \quad (0.38)$$

Рассмотрим ограничение векторного расслоения (0.35) на такое подпространство (0.36):

$$\Gamma^+ = (\Gamma(E \otimes W^+) \times \mathcal{A}(\text{ad } E) \times \mathcal{A}_\omega) / \mathcal{G}_E \rightarrow \mathcal{A}(\text{ad } E) / \mathcal{G}_E. \quad (0.39)$$

Для тройки

$$(a_0, \nabla_{\det}, \phi) \in \mathcal{A}(\text{ad } E) \times \mathcal{A}_\omega \times \Gamma(E \otimes W^+) \quad (0.40)$$

мы имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} D_{a_0}^{\nabla_{\det}}(\Phi) &= 0, \\ F_{a_0}^+ &= -(\Phi \otimes \bar{\Phi})_{00}, \end{aligned} \quad (0.41)$$

где $-(\Phi \otimes \bar{\Phi})_{00}$ — “двойная” бесследовая компонента $u(E) \otimes u(W^+)$.

Пространство решений этой системы по модулю действия калибровочной группы $\mathcal{M}_B(g, \omega, f, p_1)$, где

$$f = c_1(E) + c_1(W^+) \in H^2(M, \mathbb{Z}) \quad (0.42)$$

и p_1 – число Понтрягина, называется *пространством модулей В-монопольей*. Это пространство модулей вложено в векторное расслоение

$$i: \mathcal{M}_B(g, \omega, f, p_1) \rightarrow \Gamma^+ \quad (0.43)$$

и содержит в качестве тривиальной компоненты тройки типа $(a_0, \nabla_{\det}, 0)$, т.е. $\mathcal{M}_{\text{asd}}$, которое содержится в нулевом сечении векторного расслоения Γ^+ .

Заметим, что уравнение В-монополя (0.41) тесно связано с уравнением абелева монополя (см. [7]), которое позволило решить многие важные проблемы теории Дональдсона (см. [3]). Однако легко видеть, что уравнение (0.41) не имеет абелева аналога. Многообразие модулей В-монопольей было использовано В. Пидстригачем и А. Тюриним как пленка бордизма, связывающего многообразие модулей инстантонов с классами Зейберга–Виттена.

Далее, пусть

$$\mathcal{M}_B(g, \omega, f, p_1)^{\text{ir}} = \{(a_0, \nabla_{\det}, \Phi) | \Phi \neq 0\} \quad (0.44)$$

– подмножество нетривиальных решений, а $\overline{\mathcal{M}_B(g, \omega, f, p_1)^{\text{ir}}}$ – его замыкание в Γ^+ .

Рассмотрим пересечение

$$\mathcal{M}_{\text{lim}} = \mathcal{M}_{\text{asd}} \cap \overline{\mathcal{M}_B(g, \omega, f, p_1)^{\text{ir}}}, \quad (0.45)$$

где $\mathcal{M}_{\text{asd}}$ мы будем понимать как подмножество нулевого сечения Γ^+ .

Пусть

$$\mathcal{M}_1(g, \omega, f, p_1) = \{a_0 \mid \text{rk ker } D_{a_0}^{\nabla_{\det}} > 0\} \subset \mathcal{M}_{\text{asd}} \quad (0.46)$$

– подпространство инстантонов подскока (см. [4], [5]).

Цель настоящей работы – исследовать возможность деформации инстантона (тривиального решения уравнения монополя) в В-монополь.

Основной результат статьи:

ТЕОРЕМА. 1) *Существует вложение*

$$\mathcal{M}_{\text{lim}} \subset \mathcal{M}_1(g, \omega, f, p_1); \quad (0.47)$$

2) *Если*

$$\text{v. dim } \mathcal{M}_1(g, \omega, f, p_1) = \dim \mathcal{M}_1(g, \omega, f, p_1), \quad (0.48)$$

то

$$\mathcal{M}_{\text{lim}} = \mathcal{M}_1(g, \omega, f, p_1). \quad (0.49)$$

В этой работе мы построим формальную деформацию инстантона в монополь и приведем априорные оценки, необходимые для доказательства сходимости соответствующих формальных рядов.

§1. Инфинитезимальная теория деформации монополя вблизи инстантона

Линеаризация системы (0.41) фредгольмова:

$$\begin{aligned} D_a \delta \Phi + \delta a * \Phi &= 0, \\ d_a^+(\delta a) &= -(\delta \Phi \otimes \bar{\Phi} + \Phi \otimes \bar{\delta \Phi})_{00}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\delta a \in \Omega^1(u(E))$, $\delta \Phi \in \Gamma(E \otimes W^+)$ – компоненты касательного вектора в точке (a, Φ) .

Таким образом, если мы начинаем с пары $(a, 0)$, то мы получим из первого уравнения, что $D_a \delta \Phi = 0$, т.е.

$$a \in \mathcal{M}_1(g, \omega, f, p_1), \quad (1.2)$$

и мы имеем первое утверждение нашей теоремы.

Рассмотрим однопараметрическое дифференцируемое семейство решений системы (0.41)

$$(a_t, \Phi_t), \quad t \in [0, \varepsilon], \quad (1.3)$$

где

$$D_{a_t} \Phi_t = 0, \quad F_{a_t}^+ = (\Phi_t \otimes \overline{\Phi_t})_{00}. \quad (1.4)$$

Разложение в ряд Тейлора этого семейства по параметру t дает нам

$$\Phi_t = \Phi_0 + \sum_i \Phi_i t^i, \quad a_t = a + \sum_i \omega_i t^i, \quad (1.5)$$

где $\omega_i \in \Omega^1(u(E))$.

Для любой формы $\omega \in \Omega^1(u(E))$ мы имеем равенство

$$D_{a+\omega} \Phi = D_a \Phi + \omega * \Phi. \quad (1.6)$$

Следовательно, первое уравнение нашей системы дает следующее условие:

$$\sum_i D_a \Phi_i t^i + \sum_{i,j} \omega_i * \Phi_j t^{i+j} = 0. \quad (1.7)$$

Для разложения второго уравнения системы по t используем формулу

$$F_{a+\omega}^+ = F_a^+ + d_a^+(\omega) + (\omega \wedge \omega)^+ \quad (1.8)$$

(см, например, [2, (2.1.14)]). Тогда в качестве второго уравнения мы имеем

$$-\sum_{i,j} \Phi_i \otimes \overline{\Phi_j} \cdot t^{i+j} = \sum_i d_a^+(\omega_i) \cdot t^i + \sum_{i,j} (\omega_i \wedge \omega_j)^+ \cdot t^{i+j}. \quad (1.9)$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях из (1.7) и (1.9), мы получаем новую систему уравнений

$$\begin{aligned} D_a \Phi_k &= - \sum_{i+j=k} \omega_i * \Phi_j, \\ d_a^+(\omega_k) &= - \sum_{i+j=k} (\Phi_i \otimes \overline{\Phi_j} + (\omega_i \wedge \omega_j)^+). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Очевидно, для Φ_1 и ω_1 имеем

$$D_a \Phi_1 = 0, \quad d_a^+(\omega_1) = 0. \quad (1.11)$$

Геометрически это означает, что

$$\Phi_1 \neq 0 \implies a \in \mathcal{M}_1(g, \omega, f, p_1) \quad (1.12)$$

и ω_1 – касательный вектор к $\mathcal{M}_{\text{asd}}$ в точке a .

Параллельно вместе с системой (0.41) для троек

$$(a, \nabla_{\text{det}}, \Phi) \in \mathcal{A}(\text{ad } E) \times \mathcal{A}_\omega \times \Gamma(E \otimes W^+) \quad (1.13)$$

рассмотрим систему уравнений

$$D_a^{\nabla \det}(\Phi) = 0, \quad F_a^+ = 0. \quad (1.14)$$

Пространство решений этой системы по модулю действия калибровочной группы $\mathcal{MP}(X, p_1(E), c + c_1(E))$ отображается проекцией пары (связность, спинор) на первую компоненту

$$f: \mathcal{MP}(X, p_1(E), c + c_1(E)) \rightarrow \mathcal{M}_{\text{asd}} \quad (1.15)$$

в пространство модулей $\text{SO}(3)$ -инстантонов, и образом этого отображения

$$\mathcal{M}_1^{g, \omega}(c + c_1(E), p_1(E)) = f(\mathcal{MP}(X, p_1(E), c + c_1(E))) \subset \mathcal{M}_{\text{asd}} \quad (1.16)$$

будет пространство модулей инстантонов подскока (см. [4, п. 1.1.26]).

Нормальный конус подмногообразия инстантонов подскока $\mathcal{M}_1^{g, \omega}(c + c_1(E), p_1(E))$ может быть описан следующим образом:

$$(C\mathcal{M}_1)_a = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\ker D_a)}(-1) \otimes \text{coker } D_a. \quad (1.17)$$

Мы можем рассматривать первое приближение (a, Φ_1) как точку на $\mathcal{M}_1$ (в дальнейших рассмотрениях мы будем опускать лишние индексы за редким исключением, когда это может привести к недоразумению).

Для Φ_2 мы имеем из (1.10)

$$D_a \Phi_2 = -\omega_1 * \Phi_1. \quad (1.18)$$

Чтобы получить приближение второго порядка для спинорного поля, мы должны выбрать ω_1 так, чтобы

$$\text{im } D_a \cap \text{im } \Psi_{\Phi_1} \neq \emptyset, \quad (1.19)$$

где Ψ_{Φ_1} – гомоморфизм,

$$\Psi_{\Phi}: T_a \mathcal{M}_{\text{asd}} \rightarrow \Gamma(E \otimes W^-), \quad (1.20)$$

при котором ω отображается на $\omega * \Phi$.

Мы можем интерпретировать касательное пространство $T_a \mathcal{M}_{\text{asd}}$ как подмногообразие в пространстве всех 1-форм

$$T_a \mathcal{M}_{\text{asd}} = \{\omega \in \Omega_1(u(E)) \mid d_a^+(\omega) = 0, \quad d_a^*(\omega) = 0\}. \quad (1.21)$$

Пусть a – инстантон подскока такой, что ядро D_a одномерно (общий случай) и $\Phi_1 \in \ker D_a$ (второй член фильтрации Бриллю–Нётера вкладывается в $\mathcal{M}_1$ как подсхема особенностей с нормальным конусом $(C\mathcal{M}_1)_a$, описанным в (1.17)). Тогда естественно представить касательное пространство $T_a \mathcal{M}_1$ следующим образом:

$$T_a \mathcal{M}_1 = \{\omega \in T_a \mathcal{M}_{\text{asd}} \mid \Psi_{\Phi_1}(\omega) \subset \text{im } D_a\}. \quad (1.22)$$

В регулярной точке $\mathcal{M}_1$ нормальный конус представляется просто как

$$C_a = \text{Hom}(\ker D_a, \text{coker } D_a) \quad (1.23)$$

и его размерность совпадает с рангом $\text{coker } D_a$. В этом случае виртуальная размерность подмногообразия инстантонов подскока, равная

$$\text{v. dim } \mathcal{M}_1 = \dim \mathcal{M}_{\text{asd}} - \text{rk } \ker D_a \cdot \text{rk } \text{coker } D_a, \quad (1.24)$$

совпадает с размерностью

$$\dim T_a \mathcal{M}_1 = \dim \mathcal{M}_{\text{asd}} - \text{rk coker } D_a, \quad (1.25)$$

а ранг нормального конуса

$$\text{rk } C_a = \text{rk coker } D_a \quad (1.26)$$

(см. [4]).

Формально необходимо различать два случая: когда $\dim \mathcal{M}_1 > 0$ и, отдельно, когда $\dim \mathcal{M}_{\text{asd}} = \text{rk coker } D_a$. Но в нашем случае мы будем рассматривать их параллельно.

§2. Построение формального решения

Система (1.10) очень похожа на рекурсивное задание формального решения исходной системы (0.41). Эта рекурсивная система может быть разрешена, если на каждом шаге мы сможем найти прообраз для правых частей первого и второго уравнений. Мы начнем со второго. Для доказательства существования прообразов у правых частей при дополнительном условии $d_a^*(\omega_k) = 0$ заметим, что в “деформированном комплексе” (см. [2, п. 4.2.26]) условие антиавтодуальности связности a означает, что это настоящий комплекс, и мы можем рассматривать его когомологии H_a^0, H_a^1, H_a^2 , причем

$$\begin{aligned} H_a^1 &\cong \ker \delta_a, \\ H_a^2 &\cong \text{coker } d_a^+ \cong \ker d_a, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где оператор $\delta_a = d_a^* + d_a$ имеет индекс $\text{ind } \delta_a = s > 0$ (см. [2, п. 4.2.27]). Первые когомологии H_a^1 геометрически есть просто касательное пространство форм к многообразию модулей инстантонов. В наших рассмотрениях такие формы существуют. Несложная редукция одного из утверждений теоремы 3.1 из [6] дает тривиальность ядра $\ker d_a$ при условии того, что связность неприводима, и это влечет $\text{coker } d_a^+ = 0$ (отметим, что в общем случае это верно и для приводимых связностей). А из нетривиальности H_a^1 следует, что мы можем выбрать ω_k , удовлетворяющее условию кулоновской калибровки $d_a^*(\omega_k) = 0$.

Очевидным образом такие формы ω_k определены с точностью до $T_a \mathcal{M}_{\text{asd}}$ – касательного пространства к многообразию модулей инстантонов.

Перейдем к рассмотрению первого уравнения системы (1.10). Как было отмечено выше, касательное пространство к подмногообразию инстантонов подскока $T_a \mathcal{M}_1 \in T_a \mathcal{M}_{\text{asd}}$ представляется подпространством форм

$$\{\omega \in T_a \mathcal{M}_{\text{asd}} \mid \omega * \Phi_1 \subset \text{im } D_a\}.$$

Выберем некоторое подпространство $N_a \in T_a \mathcal{M}_{\text{asd}}$, изоморфное слою нормального конуса C_a , так что $T_a \mathcal{M}_{\text{asd}} = T_a \mathcal{M}_1 \oplus N_a$. Так же мы можем выбрать дополнение к $\text{im } D_a$ в $\Gamma(E \otimes W^+)$, изоморфное $\text{coker } D_a$. Обозначим его P_a .

Рассмотрим композицию двух отображений:

$$\begin{aligned} N_a &\rightarrow \Gamma(E \otimes W^+) \rightarrow P_a, \\ \omega &\mapsto \omega * \Phi_1 \mapsto \text{pr}_{P_a}(\omega * \Phi_1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Это линейное отображение с нулевым ядром. В общем случае размерности $\text{rk } N_a$ и $\text{rk coker } D_a$ совпадают, следовательно, это – изоморфизм. Из всего сказанного следует

ЛЕММА. Для любого спинора $\Phi^- \in \Gamma(E \otimes W^-)$ существует форма $\omega \in T_a M$ такая, что $\omega * \Phi_1 + \Phi^- \in \text{im } D_a$.

Итак, мы можем предложить следующий индуктивный метод разрешения системы (1.10) как рекурсии. Пусть мы уже нашли (ω_i, Φ_j) , $1 \leq i \leq k-1$; $1 \leq j \leq k$. Докажем, что существует следующая пара (ω_k, Φ_{k+1}) . Действительно, в силу эпиморфности d_a^+ существует форма ω'_k такая, что

$$d_a^+(\omega'_k) = - \left(\sum_{i+j=k} (\omega_i \wedge \omega_j)^+ + \sum_{i+j=k} \Phi_i \otimes \overline{\Phi_j} \right).$$

Составим следующую сумму:

$$\Phi^- = - \sum_{i+j=k+1, j>1} \omega_i * \Phi_j - \omega'_k * \Phi_1.$$

Применяя доказанную выше лемму, получаем существование формы ω''_k такой, что $\Phi^- + \omega''_k * \Phi_1 \in \text{im } D_a$. Если положить теперь $\omega_k = \omega'_k - \omega''_k$, определится и Φ_{k+1} с точностью до ядра. Поэтому будем считать, что все Φ_k , $k > 1$, дают нулевую проекцию на ядро оператора Дирака, а все формы ω_k , $k > 1$, – нулевую проекцию на $T_a M_1$.

Остается проверить базу индукции. Эта проверка очевидна в случае гладкого подмногообразия инстантонов подскока. Действительно, для некоторого выбранного нами спинора Φ_1 из ядра существует форма $\omega_1 \in T_a M_1$ такая, что $\omega_1 * \Phi_1 \in \text{im } D_a$, следовательно, существует и Φ_2 .

То же самое можно сделать в случае точечного инстантона подскока, т.е. когда $\dim \mathcal{M}_{\text{asd}} = \text{rk } \text{coker } D_a$ и пространство $T_a M_1$ состоит из одной нулевой формы, только в качестве ω_1 надо взять эту нулевую форму. Этот случай подсказал существование интересного частного решения, которое мы рассматриваем в §4.

§3. Общие оценки

В предыдущем параграфе было построено формальное решение системы (0.41). Для существования решения необходимо, чтобы существовала предельная связность $a + \sum \omega_i \cdot t^i$ и равномерно сходиллся ряд $0 + \sum \Phi_i \cdot t^i$ на некотором интервале $t \in [0, \epsilon)$.

Для “функционального ряда” со спинорными коэффициентами необходимо рассмотреть оценки норм каждого Φ_k . В рассматриваемой теории основное свойство, позволяющее ввести общие оценки, – эллиптичность, которой обладают и оператор Дирака D_a , и оператор $d_a^* \oplus d_a^+$ (см. [2, п. 2.3.1] и выше). Так как все Φ_k , кроме первого, ортогональны ядру оператора Дирака, имеем следующую оценку (мы намеренно опускаем индексы всех норм, чтобы не загромождать формулы огромным количеством значков, так как понятно, что для спинорного поля левой киральности мы берем L_k^2 -норму Соболева, для правой – L_{k-1}^2 , а для форм – L_k^2 , см. [4, гл. 1]):

$$\begin{aligned} \|\Phi_k\| &\leq \text{const}_1 \cdot \|D_a(\Phi_k)\| \leq \text{const}_1 \left\| \sum_{i+j=k} \omega_i * \Phi_j \right\| \\ &\leq \text{const}_1 \cdot \sum_{i+j=k} \|\omega_i\| \cdot \|\Phi_j\|. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Прежде чем оценивать нормы форм, напомним определение метрики на пространстве орбит связностей (см. [2, п. 4.2.3, 4.2.4]). Любая форма ω есть разность

двух связностей: $(a + \omega) - a$. Для любых связностей a и b норма разности сохраняется при одновременном действии калибровочной группы на них:

$$\|a - b\| = \|\mathcal{G}(a) - \mathcal{G}(b)\|.$$

Поэтому метрика на классах эквивалентности достаточно близких связностей по действию калибровочной группы вводится как

$$m([a], [b]) = \inf_{u \in \mathcal{G}} \|a - u(b)\|.$$

Это минимальное значение достигается при кулоновской калибровке (см. [2, п. 2.3.2] и ниже), т.е. когда

$$d_a^*(b - a) = d_a^*(\omega) = 0,$$

а это мы и требовали от форм ω_k формальных решений, построенных в предыдущем параграфе. Поэтому в вопросе существования связности $a + \sum \omega_i \cdot t^i$ достаточно было бы сходимости ряда $\sum \|\omega_i\| \cdot t^i$ на некотором интервале $t \in [0, \epsilon)$.

Оценка нормы форм немного сложнее. Теперь у нас нет ортогональности ядру, но мы можем представить каждое ω_k в виде суммы $\omega'_k + \omega''_k$, в которой первое слагаемое дает нулевую проекцию на $T_a \mathcal{M}_{\text{asd}}$. Тогда для первого слагаемого имеем

$$\begin{aligned} \|\omega'_k\| &\leq \text{const}_2 \cdot \|d_a^+(\omega'_k)\| \leq \text{const}_2 \cdot \left\| \sum_{i+j=k} (\omega_i \wedge \omega_j)^+ + \sum_{i+j=k} \Phi_i \otimes \overline{\Phi_j} \right\| \\ &\leq \text{const}_2 \cdot \sum_{i+j=k} (\|\omega_i\| \cdot \|\omega_j\| + \|\Phi_i\| \cdot \|\Phi_j\|). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для остатка же ω''_k существует тоже вполне конкретная оценка

$$\|\omega''_k * \Phi_1\| \leq \text{const}_3 \cdot \left\| \sum_{i+j=k+1, j>1} \omega_i * \Phi_j \right\|$$

или

$$\|\omega''_k\| \leq \text{const}_3 \cdot \|\Phi_1\|^{-1} \cdot \left(\sum_{i+j=k+1, j>1} \|\omega_i\| \cdot \|\Phi_j\| \right). \quad (3.3)$$

Существование такой оценки доказывается следующим образом. Напомним, что форма ω''_k (см. § 2, построение формального решения) берется из N_a таким образом, чтобы $\Phi^- - \omega''_k * \Phi_1 \in \text{im } D_a$. Норма $\|\Phi^-\|$ больше или равна норме проекции $\text{pr}_{P_a}(\Phi^-)$ (грубо говоря, проекция на $\text{socer } D_a$). Очевидно, что

$$\text{pr}_{P_a}(\Phi^-) = \text{pr}_{P_a}(\omega''_k * \Phi_1)$$

и

$$\|\text{pr}_{P_a}(\Phi^-)\| = \|\text{pr}_{P_a}(\omega''_k * \Phi_1)\|.$$

Так как P_a конечномерно, то существует некоторая константа такая, что для любой формы $\omega \in N_a$

$$\|\omega * \Phi_1\| \leq \text{const}_3 \cdot \|\text{pr}_{P_a}(\omega * \Phi_1)\|.$$

После подстановки выражения для Φ^- в это неравенство, мы получаем в точности оценку (3.3).

Далее, рассмотрим семейство операторов, действующих на спинорных пространствах и определяемых следующим образом. Результат действия ковариантной производной d_a на первом сомножителе в тензорном произведении $E \otimes W^+$ сворачивается со вторым сомножителем согласно (0.29) в скрученный спинор другой киральности:

$$d_a: \Gamma(E \otimes W^+) \rightarrow \Gamma(E \otimes W^-). \quad (3.4)$$

Тогда определено действие и формально сопряженного оператора d_a^* :

$$d_a^*: \Gamma(E \otimes W^-) \rightarrow \Gamma(E \otimes W^+).$$

Нетрудно видеть, что

$$d_{a+\omega}(\Phi) = d_a(\Phi) + \omega * \Phi, \quad (3.5)$$

как и для оператора Дирака, частью которого, зависящей от связности, и является d_a .

Поэтому если для семейства $(a + \omega(t), \Phi(t))$ при любом t выполняется равенство

$$D_{a+\omega(t)}(\Phi(t)) = 0,$$

то

$$d_{a+\omega(t)}(\Phi(t)) = -D(\Phi(t)), \quad (3.6)$$

где D – классический оператор Дирака (см. 0.29), не зависящий от связности на E и действующий только на спинорную часть тензорного произведения.

Рассмотрим формальные ряды, полученные нами в результате разрешения рекурсии (см. § 2). Тогда имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} d_{a+\sum_1^m \omega_i \cdot t^i} \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j \cdot t^j \right) &= d_a \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j \cdot t^j \right) + \left(\sum_{i=1}^m \omega_i \cdot t^i \right) * \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j \cdot t^j \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(d_a(\Phi_k) + \sum_{i+j=k} \omega_i * \Phi_j \right) \cdot t^k + \sum_{i+j>n}^{m,n} \omega_i * \Phi_j \cdot t^{i+j} \\ &= \sum_{k=1}^n (d_a(\Phi_k) - D_a(\Phi_k)) \cdot t^k + \sum_{i+j>n}^{m,n} \omega_i * \Phi_j \cdot t^{i+j} \\ &= \sum_{k=1}^n D(\Phi_k) \cdot t^k + \sum_{i+j>n}^{m,n} \omega_i * \Phi_j \cdot t^{i+j}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из последнего равенства следует соотношение для норм

$$\begin{aligned} \left\| d_{a+\sum_1^m \omega_i \cdot t^i} \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j \cdot t^j \right) \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^n D(\Phi_k) \cdot t^k \right\| + o(t^n) \\ &\leq \text{const} \cdot \left\| \sum_{k=1}^n \Phi_k \cdot t^k \right\| + o(t^n), \end{aligned} \quad (3.8)$$

так как норма оператора D ограничена. Отсюда видно, что если ряд из спиноров $\sum \Phi_k \cdot t^k$ сходится на некотором отрезке $t \in [0, \epsilon)$, то сходится и ряд из форм.

§4. Специальное решение рекуррентной задачи

Как было указано выше, в случае точечного инстантона подскока, когда $T_a \mathcal{M}_1$ содержит только нулевую форму, мы имеем в качестве первых приближений Φ_1 некоторый выбираемый нами спинор из ядра оператора Дирака D_a (так как ядро одномерно, то этот выбор заключается просто в выборе нормы Φ_1) и $\omega_1 = 0$. Если действовать дальше согласно введенной нами схеме разрешения рекурсии (0.10), мы получим интересное специальное формальное решение.

А именно, все формы с нечетными индексами $\omega_{2 \cdot k+1}$ и все спиноры с четными $\Phi_{2 \cdot k}$ равны нулю.

Проверим сначала для вторых и третьих приближений:

$$D_a(\Phi_2) = \omega_1 * \Phi_1 = 0 \Rightarrow \Phi_2 = 0.$$

Форма ω_2 определяется как прообраз бесследовой компоненты:

$$d_a^+(\omega_2) = -\Phi_1 \otimes \overline{\Phi_1},$$

в общем случае не равной нулю, подправленный таким образом, чтобы

$$-\omega_2 * \Phi_1 \in \text{im } D_a,$$

и тогда однозначно определен спинор Φ_3 . Для формы ω_3 имеем

$$d_a^+(\omega_3) = -(\omega_1 \wedge \omega_2)^+ - (\omega_2 \wedge \omega_1)^+ - \Phi_1 \otimes \overline{\Phi_2} - \Phi_2 \otimes \overline{\Phi_1} = 0$$

и поправка тоже будет нулевая, так как

$$\Phi^- = -\omega_1 * \Phi_3 - \omega_2 * \Phi_2 = 0.$$

Нетрудно видеть что это справедливо и дальше, так как спинор с четным индексом определяется уравнением

$$D_a(\Phi_{2 \cdot k}) = - \sum_{i+j=2k} \omega_i * \Phi_j$$

и в сумме, стоящей справа, все произведения равны нулю. Если i нечетно, то $\omega_i = 0$, если же i четно, то и j четно, и, значит, $\Phi_j = 0$. Аналогично проверяется равенство нулю и для $\omega_{2 \cdot k+1}$.

Итак, для точечного инстантона подскока формальное решение рекуррентной задачи единственно с точностью до выбора нормы спинора Φ_1 из ядра $\ker D_a$. Но и в том случае, когда $\dim \mathcal{M}_1 > 0$, мы можем решать систему (0.10), приняв за ω_1 нулевую форму, т.е. описанное выше формальное решение всегда содержится в пространстве формальных решений задачи (0.41). Мы будем называть это решение *специальным решением* системы (1.10).

Нетрудно видеть, что в общем случае гладкого инстантона подскока сходимость неспециальных решений влечет сходимость и специального решения. В обратную сторону это утверждение неверно. Вообще в случае гладкого инстантона подскока можно предложить следующую схему доказательства сходимости специального решения. Введем параметр в пространстве формальных решений $s = \|\omega_1\|$. Начиная с некоторой ω_1 , будем разрешать рекурсию, причём на каждом шаге, если $\|\omega_k\|$ больше некоторого выбранного заранее N , будем уменьшать параметр s так, чтобы $\|\omega_k\| \leq N$. После бесконечного повторения этого процесса мы получим ограниченность норм всех форм специального решения, так как значение параметра

$s = 0$ соответствует как раз специальному решению, а из общих оценок (см. §3) немедленно будет получена и сходимость для ряда спиноров.

§5. Заключение

Выбор соболевских норм позволяет пополнить пространство $\mathcal{B}$ и компактифицировать по Фриду–Уленбек многообразие модулей инстантонов

$$\overline{\mathcal{M}_{\text{asd}}^g(w_2, p_1)} = \bigcup_{p'_1 > p_1} \mathcal{M}_{\text{asd}}^g(w_2, p'_1) \quad (5.1)$$

(см. [1]). Таким образом, определен фундаментальный цикл

$$[\mathcal{M}_{\text{asd}}^g(w_2(M) + w_2(E), p_1)]$$

многообразия модулей инстантонов.

Подмногообразия инстантонов, представляющихся в виде пределов В-монополей

$$\mathcal{M}_{\text{lim}}(\omega, f) \subset \overline{\mathcal{M}_{\text{asd}}^g(w_2(E) + w_2(M), p_1)} \quad (5.2)$$

(см. (0.45)), определяют набор фундаментальных классов $[\mathcal{M}_{\text{lim}}(\omega, f)] = [f]$. Таким образом, на многообразии $\overline{\mathcal{M}_{\text{asd}}^g(w_2(E) + w_2(M), p_1)}$ определено целое семейство фундаментальных циклов

$$[f], \quad f \in H^2(M, \mathbb{Z}). \quad (5.3)$$

Заметим, что согласно нашей теореме в общем случае это – семейство фундаментальных классов многообразий модулей инстантонов подскока, т.е. первых элементов фильтрации Бриллю–Нётера (см. [4]).

В этом случае мы можем определить фундаментальный класс подмногообразия

$$[f] \subset \overline{\mathcal{M}_{\text{asd}}^g(w_2(E) + w_2(M), p_1)} \quad (5.4)$$

как класс Черна индексного расслоения оператора Дирака:

$$[f] = c_{\text{ind } D_a + 1}(\text{IND } D_a), \quad \text{IND } D_a = \text{coker } D_a - \text{ker } D_a, \quad (5.5)$$

где $\text{ind } D_a = \text{rk IND } D_a$ вычисляется по формул Атья–Зингера.

Список литературы

1. *Atiyah M.F., Bott R.* The Yang–Mills equations over Riemann surfaces // Phil. Trans. R. Soc. London. 1982. V. A308. P. 523–615.
2. *Donaldson S., Kronheimer P.* The Geometry of Four-Manifolds. Oxford: Clarendon Press, 1990.
3. *Kronheimer P.V., Mrowka T.S.* The Genus of Embedded Surfaces in the Projective Plane. Preprint, 1994.
4. *Пидстригач В., Тюрин А.Н.* Инварианты гладкой структуры алгебраической поверхности задаваемые оператором Дирака // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 2. С. 279–371.
5. *Тюрин А.Н.* Спин-полиномиальные инварианты гладких структур на алгебраических поверхностях // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 2. С. 125–164.
6. *Фрид Д., Уленбек К.* Инстантоны и четырехмерные многообразия. М.: Мир, 1988.
7. *Witten E.* Monopoles and four-manifolds. Preprint IASSNS-HEP-94-96, 1994.