Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Седых, Разрешение особенностей коранга 1 образа устойчивого гладкого отображения в пространство большей размерности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 2, 173–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im682>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:44:40

УДК 515.16

В. Д. Седых

Разрешение особенностей коранга 1 образа устойчивого гладкого отображения в пространство большей размерности

Рассмотрены устойчивые гладкие отображения гладких замкнутых многообразий в гладкие многообразия большей размерности. Для отображений, имеющих особенности только коранга 1, найдены универсальные линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей их образов. Вычисления основаны на конструкции разрешения особенностей, которая обобщает известный в алгебраической геометрии принцип итерации.

Библиография: 24 наименования.

Введение

Пусть M и V – гладкие вещественные многообразия без края положительных размерностей m и n соответственно, $l = n - m > 0$ (везде далее термины “гладкий” и “дифференцируемый” означают “ C^∞ -дифференцируемый”). Рассмотрим произвольное гладкое собственное отображение $f: M \rightarrow V$. Это отображение называется отображением коранга не больше 1, если размерность ядра его производной нигде не превосходит 1. Отображения общего положения многообразия M в многообразии V при $m < 4 + 2l$ являются отображениями коранга не больше 1.

Предположим, что f – устойчивое отображение коранга не больше 1. Тогда локальные алгебры ростков (f, x) этого отображения в точках $x \in M$ изоморфны $\mathbb{R}$ -алгебрам срезанных многочленов от одной переменной степени не выше μ , где μ – целое неотрицательное число, $\mu \leq m/(l+1)$. Отображение f имеет особенность типа A_μ в точке $x \in M$, если локальная алгебра ростка (f, x) изоморфна алгебре $\mathbb{R}[[t]]/(t^{\mu+1})$.

Образ $f(M)$ отображения f является особым подмножеством коразмерности l в V . Ростки этого множества классифицируются (относительно диффеоморфизмов многообразия V) по элементам свободной абелевой полугруппы $\mathbb{A}$ по сложению, образующими которой служат элементы $A_0, A_1, \dots, A_\mu, \dots$. А именно, $f(M)$ имеет особенность типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ в точке $y \in V$, если полный прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из p (попарно различных) точек $x_1, \dots, x_p$, занумерованных так, что f имеет особенность типа A_{μ_i} в точке x_i , $i = 1, \dots, p$. При этом образы ростков $(f, x_1), \dots, (f, x_p)$ пересекаются в точке y трансверсально.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 05-01-00104) и программой “Ведущие научные школы” (грант НШ-4719.2006.1).

Множество $\mathcal{A}_f$ точек $y \in V$, в которых $f(M)$ имеет особенность типа $\mathcal{A}$, является гладким подмногообразием (вообще, незамкнутым и несвязным) коразмерности $\text{codim } \mathcal{A} = (l+1) \sum_{i=1}^p \mu_i + pl \leq n$ в V . Оно называется многообразием особенностей типа $\mathcal{A}$ образа отображения f .

Например, устойчивая поверхность $f(M)$ в трехмерном пространстве состоит из неособых точек типа A_0 (образующих гладкие куски), а также может иметь точки типов $2A_0$ (образующие кривые) и $3A_0$ (изолированные точки) трансверсального пересечения двух и трех гладких ветвей и отдельные точки с особенностью типа A_1 , называемой зонтиком Уитни. Устойчивая гиперповерхность $f(M)$ в четырехмерном пространстве может иметь лишь особенности типов pA_0 , $p \leq 4$ (трансверсальное пересечение p гладких ветвей), A_1 (цилиндр над зонтиком Уитни) и $A_1 + A_0$ (трансверсальное пересечение цилиндра зонтиков Уитни с гладкой гиперповерхностью).

Основным результатом настоящей работы является построение разрешения особенностей образа устойчивого отображения коранга не больше 1. Эта конструкция обобщает принцип итерации Клеймана [16], который обычно используется в комплексных задачах при исследовании циклов кратных точек общих голоморфных отображений с особенностями коранга 1 (см., например, [13], [14], [18]).

В основе предлагаемой конструкции лежит преобразование, сопоставляющее данному устойчивому отображению коранга не больше 1 новое отображение того же типа с той же коразмерностью образа, но с более простыми особенностями. Это преобразование задается типом A_μ особенностей отображения и называется A_μ -преобразованием.

Разрешение особенностей типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ образа $f(M)$ устойчивого отображения f коранга не больше 1 строится при помощи итерации A_μ -преобразований, где $\mu = \mu_1, \dots, \mu_p$. Такая итерация сопоставляет элементу $\mathcal{A}$ гладкое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ (пространство, в котором лежит образ последнего A_μ -преобразования) и гладкое собственное отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ этого многообразия в многообразие V такие, что:

- 1) образом отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ является замыкание в V многообразия $\mathcal{A}_f$ особенностей типа $\mathcal{A}$ множества $f(M)$;
- 2) если особенность типа $X \in \mathcal{A}$ примыкает к особенности типа $\mathcal{A}$, то отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ является конечным накрытием (гладким расслоением с конечным слоем) над многообразием X_f ;
- 3) кратность этого накрытия зависит только от $\mathcal{A}$ и X (т.е. не зависит ни от отображения f , ни от многообразий M, V); она называется индексом особенности типа X относительно особенности типа $\mathcal{A}$.

Мы приводим рекуррентную формулу, которая позволяет быстро вычислять указанные индексы. Эта формула следует из описания стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ на связные компоненты многообразий $\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(X_f)$ по всем типам X особенностей множества $f(M)$. В работе найдены нормальные формы особенностей этой стратификации относительно диффеоморфизмов многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$. Оказывается, что эти особенности устойчивы (относительно малых деформаций исходного отображения f), просты (не имеют модулей) и связаны с краевыми особенностями.

В двух заключительных параграфах статьи рассмотрены некоторые приложения этих результатов. Как известно, наличие (мульти)особенностей того

или иного типа у отображения общего положения ограничивается различными условиями топологического характера. Для их нахождения используются различные методы и объекты: многочлены Томи, классы кобордизмов и прочее (см. [3], [6], [23]). Мы используем указанную выше конструкцию для получения новых условий сосуществования (другой природы) особенностей образа устойчивого гладкого отображения коранга не выше 1 в пространство большей размерности.

А именно, пусть f – устойчивое отображение коранга не больше 1, а многообразию M замкнуто (компактное без края). Тогда эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{A}_f)$ (альтернированная сумма чисел Бетти групп гомологий с компактными носителями) любого нечетномерного многообразия $\mathcal{A}_f$ особенностей типа $\mathcal{A} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ образа отображения f является линейной комбинацией (с рациональными коэффициентами) эйлеровых характеристик $\chi(X_f)$ четномерных многообразий X_f , образованных особенностями типов $X \in \mathbb{A}$ таких, что $\text{codim } X \in [\text{codim } \mathcal{A} + 1, n]$. Эта комбинация универсальна в том смысле, что каждый ее коэффициент зависит только от типов $\mathcal{A}$, X соответствующих особенностей и от четности числа l .

Например, для особенностей типа $2A_0$ подмножества $f(M)$ нечетной коразмерности l в пространстве V нечетной размерности $n \leq 5l + 2$ имеем

$$\begin{aligned} 2\chi_0^{(2)} &= \chi_1^{(1)} + 6\chi_0^{(3)} - 2\chi_2^{(1)} - 5\chi_{1,0}^{(1,2)} - 40\chi_0^{(5)} \\ &\quad + 5\chi_3^{(1)} + 24\chi_{2,0}^{(1,2)} + 12\chi_{1,0}^{(2,1)} + 92\chi_{1,0}^{(1,4)} + 672\chi_0^{(7)}, \end{aligned}$$

где $\chi_{(\mu_1, \dots, \mu_p)}^{(k_1, \dots, k_p)}$ обозначает эйлерову характеристику $\chi((k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_f)$ многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_f$. Эта формула является многомерным обобщением соотношения инцидентности $2\chi_0^{(2)} = \chi_1^{(1)} + 6\chi_0^{(3)}$ в графе, образованном изолированными особенностями и особенностями, встречающимися на односвязных кривых у компактной устойчивой поверхности в трехмерном пространстве, где $\chi_0^{(2)}$ – число односвязных компонент множества точек пересечения двух гладких ветвей поверхности, $\chi_0^{(3)}$ – число точек тройного самопересечения, $\chi_1^{(1)}$ – число зонтиков Уитни.

Следует отметить, что сам факт существования подобных соотношений можно извлечь из некоторых работ по топологии стратифицированных множеств (см., например, [21] или [19]). Тем не менее, этот факт нигде не формулировался, а указанные соотношения никогда не вычислялись, кроме некоторых частных случаев (сводящихся к соотношениям инцидентности в графах). Мы же предъявляем простой комбинаторный алгоритм для вычисления всех соотношений указанного вида для любых наперед заданных n и l . Более того, показано (п. 5.3), что в некотором смысле эти соотношения образуют полную систему универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей образа устойчивого гладкого отображения коранга не выше 1 гладкого замкнутого многообразия в гладкое многообразие большей размерности.

В заключение заметим, что найденные нами соотношения позволяют представить эйлерову характеристику $\chi(f(M))$ образа отображения f в виде универсальной линейной комбинации эйлеровых характеристик четномерных многообразий его особенностей. Например, эйлерова характеристика подмножества $f(M)$ нечетной коразмерности l в пространстве V нечетной размерности

$n \leq 5l + 2$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \chi(f(M)) = & \chi_0^{(1)} + \frac{1}{2} [\chi_1^{(1)} - 4\chi_0^{(3)}] + \chi_2^{(1)} + \chi_{1,0}^{(1,2)} + 16\chi_0^{(5)} \\ & - \frac{1}{4} [3\chi_3^{(1)} + 32\chi_{2,0}^{(1,2)} + 18\chi_{1,0}^{(2,1)} + 128\chi_{1,0}^{(1,4)} + 1088\chi_0^{(7)}]. \end{aligned}$$

Если при этом известна эйлерова характеристика $\chi(M)$ многообразия M , то справедлива универсальная формула

$$\begin{aligned} \chi(f(M)) = & \chi(M) + \frac{1}{2} [\chi_1^{(1)} + 2\chi_0^{(3)}] - \chi_{1,0}^{(1,2)} - 9\chi_0^{(5)} \\ & + \frac{1}{4} [5\chi_3^{(1)} + 20\chi_{2,0}^{(1,2)} + 10\chi_{1,0}^{(2,1)} + 80\chi_{1,0}^{(1,4)} + 620\chi_0^{(7)}]. \end{aligned}$$

При $l = 1$ и $n = 3$ последнее равенство дает известную формулу Изумии–Марара [15]:

$$\chi(f(M)) = \chi(M) + \frac{1}{2} \chi_1^{(1)} + \chi_0^{(3)}.$$

Часть полученных здесь результатов анонсирована в заметке [10]. Недавно удалось получить аналогичные результаты для мультиособенностей устойчивых гладких отображений коранга не больше 1 многообразий одинаковой размерности (см. [22]). Идея итерации A_μ -преобразований для разрешения особенностей коранга 1 образа устойчивого гладкого отображения использовалась также в работах [8], [9], [11] при изучении топологии устойчивых волновых фронтов.

Автор благодарен В. И. Арнольду и М. Э. Казаряну за полезные обсуждения.

§ 1. Устойчивые гладкие отображения коранга не больше 1

В настоящем параграфе содержатся основные понятия и факты теории особенностей коранга 1 гладких отображений в пространство большей размерности (подробности можно найти, например, в [2]).

1.1. Основные определения и обозначения. Пусть M и V – гладкие вещественные многообразия без края положительных размерностей $\dim M = m$, $\dim V = n$, причем $l = n - m > 0$. Рассмотрим гладкое собственное отображение

$$f: M \rightarrow V.$$

Точка $x \in M$ называется *особой точкой* отображения f , если производная $f_{*x}: T_x M \rightarrow T_{f(x)} V$ этого отображения в точке x имеет ненулевое ядро.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Отображение f называется *отображением коранга не больше 1*, если размерность ядра производной f_{*x} не превосходит 1 для любого $x \in M$.

Снабдим тонкой C^∞ -топологией Уитни пространство $\mathcal{W}$ всех гладких отображений многообразия M в многообразие V (см. [4]). Говорят, что данное утверждение справедливо для отображения f *общего положения*, если существует открытое всюду плотное подмножество в пространстве $\mathcal{W}$ такое, что указанное утверждение имеет место для всех отображений из этого подмножества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Образ отображения f имеет *особенность типа $\mathcal{A}$* в точке $y \in V$, если:

- 1) полный прообраз $f^{-1}(y)$ точки y при отображении f состоит из p попарно различных точек;
- 2) существует порядок $x_1, \dots, x_p$ точек из $f^{-1}(y)$ такой, что f имеет в этих точках особенности типов $A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}$ соответственно;
- 3) образы при отображении f ростков $(A_{\mu_i}^f, x_i)$ в x_i многообразий $A_{\mu_i}^f$, $i = 1, \dots, p$, пересекаются трансверсально в точке y .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Мы будем также говорить, что в точках из дополнения $V \setminus f(M)$ образ отображения f имеет *особенность типа 0* (нуль полугруппы $\mathbb{A}$).

Числа $\mu_1, \dots, \mu_p$ называются *показателями вырожденности* особенностей типа $\mathcal{A}$ образа отображения f . Число

$$\text{codim } \mathcal{A} = (l+1) \sum_{i=1}^p \mu_i + pl$$

называется *коразмерностью* этих особенностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Если $\mathcal{A} = 0$, то $\text{codim } \mathcal{A} = 0$.

При $l = n - m > 0$ образ любого устойчивого гладкого собственного отображения $f: M^m \rightarrow V^n$ коранга не больше 1 может иметь лишь особенности типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$. Коразмерность особенности не превышает размерности n объемлющего многообразия V . Ростки множества $f(M)$ диффеоморфны тогда и только тогда, когда $f(M)$ имеет в соответствующих точках особенности одинакового типа.

Рассмотрим множество $\mathcal{A}_f$ точек $y \in V$, в которых $f(M)$ имеет особенность типа $\mathcal{A}$. Это множество является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в V (вообще, незамкнутым и несвязным).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Многообразие $\mathcal{A}_f$ называется *многообразием особенностей типа $\mathcal{A}$* образа отображения f .

1.2. Некоторые сведения из теории стратификаций. Здесь собраны все необходимые нам в дальнейшем определения и факты из теории стратификаций (подробности см., например, в [7]).

Рассмотрим произвольное замкнутое подмножество Ω гладкого n -мерного многообразия V . Как обычно, замыкание в V любого подмножества $X \subseteq V$ обозначается через $\bar{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. C^∞ -стратификацией множества Ω называется локально конечное разбиение Σ этого множества на связные непересекающиеся подмножества (*страты*), являющиеся гладкими подмногообразиями в V и удовлетворяющие следующему условию: для любых двух стратов X и Y стратификации Σ таких, что $Y \cap \bar{X} = \emptyset$, имеет место включение $Y \subseteq \bar{X}$. В случае $Y \subseteq \bar{X}$ говорят, что Y *примыкает* к X .

Пусть X и Y – непересекающиеся гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $Y \subset \bar{X}$, и рассмотрим произвольную точку $y \in Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Тройка (X, Y, y) удовлетворяет условиям A и B Уитни, если для любых двух последовательностей $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ точек $x_i \in X$, $y_i \in Y$ таких, что:

- 1) $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y$,
- 2) в грассмановом многообразии всех $(\dim X)$ -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$ существует предел $\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i} X = \pi$ касательных пространств $T_{x_i} X$ к X в точках x_i ,
- 3) в многообразии всех прямых в $\mathbb{R}^n$ существует предел $\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{x_i y_i} = \tau$ прямых $\overline{x_i y_i}$, проходящих через точки x_i, y_i (соответственно),

имеют место включения $T_y Y \subset \pi$ (условие A) и $\tau \subseteq \pi$ (условие B).

Условия A и B Уитни инвариантны относительно локальных диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому корректно следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. C^∞ -стратификация Σ подмножества $\Omega \subseteq V$ называется *стратификацией Уитни*, если для любых двух непересекающихся стратов X и Y в Σ таких, что Y примыкает к X , каждая тройка (X, Y, y) , где $y \in Y$, удовлетворяет условиям A и B Уитни в некоторой системе гладких локальных координат на V .

Мы приведем одно утверждение, полезное при практической проверке выполнения условий Уитни.

ЛЕММА 1.1 [17], [24]. Рассмотрим C^∞ -стратификацию Σ замкнутого подмножества в гладком n -мерном многообразии V . Предположим, что для любых двух непересекающихся стратов X и Y в Σ таких, что Y примыкает к X , выполнено следующее условие: для каждой точки $y \in Y$ существуют целое $k \geq 0$ и замкнутое полуалгебраическое подмножество Z в $\mathbb{R}^{n-k}$, содержащее нуль, такие, что в подходящих гладких локальных координатах на многообразии V росток пары $(\bar{X}, Y)$ в y является ростком в нуле пары в $\mathbb{R}^n$, представляющей собой прямое произведение $\mathbb{R}^k$ на пару $(Z, 0)$. Тогда Σ является стратификацией Уитни.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. C^∞ -стратификация Уитни Σ подмножества $\Omega \subseteq V$ называется *минимальной*, если для любого страта X' любой C^∞ -стратификации Уитни множества Ω существует страт X в Σ такой, что $X' \subseteq X$.

Рассмотрим произвольные замкнутые подмножества $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ (возможно, пересекающиеся) в многообразии V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Стратификацией многообразия V относительно набора подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ называется C^∞ -стратификация Уитни, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) для любого страта X и для любого $i = 1, \dots, k$ имеет место только одно из двух: либо $X \cap \Omega_i = \emptyset$, либо $X \subseteq \Omega_i$;
- 2) рассматриваемая стратификация минимальна среди всех C^∞ -стратификаций Уитни многообразия V , удовлетворяющих условию 1).

ТЕОРЕМА 1.2 [17], [24]. Пространство $\mathbb{R}^n$ допускает стратификацию относительно любого конечного набора замкнутых полуалгебраических подмножеств.

Отметим, что если замкнутое подмножество гладкого многообразия допускает C^∞ -стратификацию Уитни, то оно триангулируемо (см. [5]).

1.3. Присоединение особенностей образа отображения. Рассмотрим устойчивое гладкое собственное отображение $f: M^m \rightarrow V^n$ коранга не больше 1, причем $l = n - m > 0$. Зафиксируем элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ и возьмем многообразие $\mathcal{A}_f$ особенностей типа $\mathcal{A}$ образа отображения f .

Пусть $\overline{\mathcal{A}_f}$ – замыкание многообразия $\mathcal{A}_f$ в объемлющем многообразии V . Например, $(A_0)_f = f(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Особенность типа $X \in \mathbb{A}$ образа отображения f *присоединяется* к особенности типа $\mathcal{A}$, если $X_f \subseteq \overline{\mathcal{A}_f}$. В частности, любая особенность присоединяется к самой себе.

Рассмотрим разбиение множества $\overline{\mathcal{A}_f}$ на связные компоненты многообразий X_f особенностей типов X , присоединяющихся к особенностям типа $\mathcal{A}$. Это разбиение является C^∞ -стратификацией Уитни. Легко видеть, что эта стратификация минимальна среди всех C^∞ -стратификаций Уитни множества $\mathcal{A}_f$. Если $\mathcal{A}_f$ – компактное подмножество в V , то указанная стратификация конечна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. *Границей* (топологической) многообразия $\mathcal{A}_f$ называется множество $\partial(\mathcal{A}_f) = \overline{\mathcal{A}_f} \setminus \mathcal{A}_f$.

Коразмерность $\text{codim } X$ особенностей типов $X \in \mathbb{A}$ образа отображения f в точках границы многообразия $\mathcal{A}_f$ строго больше $\text{codim } \mathcal{A}$. Более того, хорошо известно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $f: M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга не больше 1, причем $l = n - m > 0$. Тогда для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ имеет место формула

$$\partial(\mathcal{A}_f) = (\overline{\mathcal{A} + A_0})_f \cup \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq p} \overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i + \mu_j + 1})_f} \right). \quad (1.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В подходящих гладких локальных координатах на многообразиях M и V росток отображения f в любой точке $x \in M$ является разветвкой ростка в нуле гладкой кривой $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$, $f_0(0) = 0$, заданной многочленом с векторными коэффициентами (см. [2]). Если отображение f имеет особенность типа A_μ в точке x , то порядок кривой f_0 в нуле равен $\mu + 1$.

Зафиксируем целое неотрицательное k и рассмотрим пространство многочленов $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$, $t \mapsto \varphi(t)$, от t с векторными коэффициентами из $\mathbb{R}^{l+1}$, которые удовлетворяют следующему условию: для любого φ существуют числа $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$ и многочлен $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$, $t \mapsto \psi(t)$, степени k такие, что $\varphi(t) = \psi(t) \prod_{i=1}^p (t - t_i)^{\mu_i + 1}$ для всех t . В общей точке любой гладкой кривой общего положения в этом пространстве числа $t_1, \dots, t_p$ попарно различны, а $\psi(t) \neq 0$ для любого t . Однако в некоторых (изолированных) точках кривой кратности вещественных корней многочлена φ могут измениться, а именно возможно совпадение $t_i = t_j$ для некоторых $i \neq j$. Кроме того, при $l = 1$ многочлен ψ может иметь простой корень (отличный от $t_1, \dots, t_p$). Если $l > 1$, то последнее может происходить только в отдельных точках общих l -параметрических семейств многочленов φ . Отсюда и следует формула (1.1). Предложение доказано.

ПРИМЕР 1.3. Границы многообразий особенностей коразмерности $c \leq 4l + 2$ у образа устойчивого гладкого отображения $f: M^m \rightarrow V^n$ коранга не больше 1 при $l = n - m > 0$ определяются следующими формулами (для простоты записи индекс f здесь не указан):

$$\begin{aligned}
 c = l: & \quad \partial(A_0) = (\overline{2A_0}), \\
 c = 2l: & \quad \partial(2A_0) = (\overline{3A_0}) \cup (\overline{A_1}), \\
 c = 3l: & \quad \partial(3A_0) = (\overline{4A_0}) \cup (\overline{A_1 + A_0}), \\
 c = 2l + 1: & \quad \partial(A_1) = (\overline{A_1 + A_0}), \\
 c = 4l: & \quad \partial(4A_0) = (\overline{5A_0}) \cup (\overline{A_1 + 2A_0}), \\
 c = 3l + 1: & \quad \partial(A_1 + A_0) = (\overline{A_1 + 2A_0}) \cup (\overline{A_2}), \\
 c = 5l: & \quad \partial(5A_0) = (\overline{6A_0}) \cup (\overline{A_1 + 3A_0}), \\
 c = 4l + 1: & \quad \partial(A_1 + 2A_0) = (\overline{A_1 + 3A_0}) \cup (\overline{2A_1}) \cup (\overline{A_2 + A_0}), \\
 c = 3l + 2: & \quad \partial(A_2) = (\overline{A_2 + A_0}), \\
 c = 6l: & \quad \partial(6A_0) = (\overline{7A_0}) \cup (\overline{A_1 + 4A_0}), \\
 c = 5l + 1: & \quad \partial(A_1 + 3A_0) = (\overline{A_1 + 4A_0}) \cup (\overline{2A_1 + A_0}) \cup (\overline{A_2 + 2A_0}), \\
 c = 4l + 2: & \quad \partial(2A_1) = (\overline{2A_1 + A_0}) \cup (\overline{A_3}), \\
 c = 4l + 2: & \quad \partial(A_2 + A_0) = (\overline{A_2 + 2A_0}) \cup (\overline{A_3}).
 \end{aligned}$$

Последовательное применение формулы (1.1) позволяет перечислить типы всех особенностей образа устойчивого отображения f коранга не больше 1, которые могут примыкать к особенностям данного типа $\mathcal{A}$. Действительно, в правой части формулы (1.1) стоит объединение замыканий многообразий особенностей коразмерностей $\text{codim } \mathcal{A} + l$ и $\text{codim } \mathcal{A} + 1$. Границы этих многообразий выражаются той же формулой через замыкания многообразий особенностей коразмерностей $\text{codim } \mathcal{A} + 2l$, $\text{codim } \mathcal{A} + l + 1$ и $\text{codim } \mathcal{A} + 2$. Продолжая этот процесс, дойдем до особенностей коразмерности n .

ПРИМЕР 1.4. К особенностям типа $2A_0$ устойчивой гиперповерхности $f(M)$ в трехмерном пространстве примыкают изолированные особенности типов $3A_0$ и A_1 (если их вообще имеет $f(M)$); в четырехмерном – особенности типов $3A_0$, A_1 (они образуют кривые) и изолированные особенности типов $4A_0$, $A_1 + A_0$; в пятимерном – особенности типов $3A_0$, A_1 (в этом случае они образуют двумерные поверхности), особенности типов $4A_0$, $A_1 + A_0$ (образующие кривые) и изолированные особенности типов $5A_0$, $A_1 + 2A_0$, A_2 .

§ 2. A_μ -преобразование устойчивого гладкого отображения коранга не больше 1

В настоящем параграфе определена операция, которая каждому устойчивому гладкому собственному отображению коранга не выше 1 в пространство большей размерности сопоставляет новое отображение того же типа с той же коразмерностью образа, но с более простыми особенностями.

Множество $(B_\kappa)_{(\mathcal{H}, f)}$ точек $y \in \mathcal{H}$, в которых пара $(\mathcal{H}, f)$ имеет особенность типа B_κ , является гладким подмногообразием коразмерности $\kappa(l+1)$ в объемлющем многообразии V . Оно является гладкой гиперповерхностью в многообразии $(A_{\kappa-1})_f$ особенностей типа $A_{\kappa-1}$ образа отображения f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Будем говорить, что пара $(\mathcal{H}, f)$ имеет *особенность типа* $(B_\kappa, A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r})$ в точке $y \in \mathcal{H}$, если:

- 1) полный прообраз $f^{-1}(y)$ точки y при отображении f состоит из $r+1$ попарно различных точек;
- 2) существует порядок $x_0, x_1, \dots, x_r$ точек из $f^{-1}(y)$ такой, что f имеет в этих точках особенности типов $A_{\kappa-1}, A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_r}$ соответственно;
- 3) пара $(\mathcal{H}, (f, x_0))$ имеет особенность типа B_κ в точке y ;
- 4) ростки в y многообразий $(B_\kappa)_{(\mathcal{H}, (f, x_0))}, (A_{\nu_1})_{(f, x_1)}, \dots, (A_{\nu_r})_{(f, x_r)}$ пересекаются в этой точке трансверсально.

Точки y многообразия $\mathcal{H}$, в которых пара $(\mathcal{H}, f)$ имеет особенность типа $(B_\kappa, A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r})$, образуют гладкое подмногообразие коразмерности

$$(l+1)(\kappa + \nu_1 + \dots + \nu_r) + rl \leq n$$

в многообразии V . Оно является гладкой гиперповерхностью в многообразии особенностей типа $A_{\kappa-1} + A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ образа отображения f .

Рассмотрим теперь сужение φ_{A_μ} отображения f на многообразие Φ_{A_μ} . В многообразии Φ_{A_μ} выделено гладкое подмногообразие $\Phi_{A_{\mu+1}}$ коразмерности $l+1$. Легко видеть, что многообразие $\Phi_{A_{\mu+1}}$ лежит в образе отображения $[A_\mu](f)$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $f: M^m \rightarrow V^n$ — устойчивое гладкое собственное отображение коранга не больше 1, причем $l = n - m > 0$. Тогда для любого $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r} \in \mathbb{A}$ справедливы следующие утверждения:

- 1) образ при отображении φ_{A_μ} многообразия $X_{[A_\mu](f)}$ особенностей типа X образа отображения $[A_\mu](f)$ является объединением многообразий особенностей типов $X + A_\mu$ и $X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i + \mu + 1}$, $i = 1, \dots, r$, образа отображения f ;
- 2) отображение φ_{A_μ} является конечным накрытием над многообразием X_f особенностей типа X образа отображения f ; листы этого накрытия нумеруются индексами i такими, что $\nu_i \geq \mu$;
- 3) полный прообраз многообразия X_f относительно отображения φ_{A_μ} равен дополнению в многообразии Φ_{A_μ} к образу отображения $[A_\mu](f)$, если $X = A_\mu$, и совпадает с многообразием особенностей типа $B_{\nu-\mu}$ пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f))$, если $X = A_\nu$, $\nu > \mu$; в случае $r > 1$ он состоит из многообразий особенностей образа отображения $[A_\mu](f)$, имеющих тип $X - A_\mu$ (если $\{\nu_1, \dots, \nu_r\} \ni \mu$), и многообразий особенностей пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f))$, имеющих тип $(B_{\nu_i - \mu}, X - A_{\nu_i})$ для всех i таких, что $\nu_i > \mu$.

Теорема 2.3 так же, как и теоремы 2.1 и 2.2, следует из предложений 2.1 и 2.2, приведенных ниже.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$,

$$(t, q_1, q_2, q_3) \mapsto (t^3 + q_1 t, q_2 t^2 + q_3 t, q_1, q_2, q_3).$$

Оно имеет особенность типа A_2 в нуле $t = q_1 = q_2 = q_3 = 0$. В этом случае отображение $[A_0](f): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ задается формулами

$$\begin{aligned} t &= v_1, \\ q_1 &= -u^2 - uv_1 - v_1^2, \\ q_2 &= v_2, \\ q_3 &= -(u + v_1)v_2. \end{aligned}$$

Образ отображения $[A_0](f)$ является особой гиперповерхностью в $\mathbb{R}^4$. На рис. 1 изображена перестройка двумерных сечений этой гиперповерхности гиперплоскостями из (общего) однопараметрического семейства гиперплоскостей $t = c$, $c \in \mathbb{R}$, в $\mathbb{R}^4$. Каждое сечение диффеоморфно зонтику Уитни. В центре

Рис. 1. A_0 -преобразование отображения $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ с особенностью типа A_2

рис. 1 изображено сечение $t = 0$. Жирная прямая на каждом зонтике представляет собой сечение поверхности Φ_{A_1} . Эта поверхность задается системой уравнений

$$\begin{aligned} 3t^2 + q_1 &= 0, \\ 2tq_2 + q_3 &= 0. \end{aligned}$$

обращается в нуль. Отображение $[A_\mu](f)$ лево-право-эквивалентно сужению на многообразие Φ проекции

$$\mathbb{R}^{m-\mu(l+1)+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-\mu(l+1)}, \quad (u, t, \tilde{q}) \mapsto (t, \tilde{q}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, подмногообразие $\Phi_{A_\mu} \subseteq \mathbb{R}^m$ задается уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \dots = \frac{\partial^\mu S}{\partial t^\mu} = 0$$

(см. пример 1.2). Подмножество $\Phi_{A_\mu, A_0} \subset \Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$ диффеоморфно подмножеству $\Phi \times \{0\}$ в $\mathbb{R}^{m-\mu(l+1)+1} \times \mathbb{R}^{m-1}$, где Φ – замыкание множества точек $(u, t, \tilde{q}) \in \mathbb{R}^{m-\mu(l+1)+1}$ таких, что $u \neq t$ и

$$F(u, t, \bar{q}) = S(u, \bar{q}) - S(t, \bar{q}) = 0.$$

Поэтому лемма следует из леммы 2.1.

ЛЕММА 2.3. Пусть $f: M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга не больше 1, причем $l = n - m > 0$. Тогда его надстройка

$$\tilde{f}: M \times \mathbb{R}^k \rightarrow V \times \mathbb{R}^k, \quad (x, z) \mapsto (f(x), z)$$

является отображением такого же типа. При этом для любого целого неотрицательного μ такого, что $\mu(l+1) < m$, существуют диффеоморфизм многообразия $\tilde{\Phi}_{A_\mu} = \overline{A_{\mu,0}^{\tilde{f}}}$ на $\Phi_{A_\mu} \times \mathbb{R}^k$, где $\Phi_{A_\mu} = \overline{A_\mu^f}$, и диффеоморфизм многообразия $\tilde{\Phi}_{A_\mu} \times \tilde{\Phi}_{A_0}$ на $(\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}) \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ такие, что:

- 1) подмножество $\tilde{\Phi}_{A_\mu, A_0} = \overline{A_{\mu,0}^{\tilde{f}}}$ в $\tilde{\Phi}_{A_\mu} \times \tilde{\Phi}_{A_0}$ диффеоморфно подмножеству

$$\Phi_{A_\mu, A_0} \times (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subset (\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}) \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k),$$

где $\Phi_{A_\mu, A_0} = \overline{A_{\mu,0}^f} \subset \Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$;

- 2) естественная проекция $\tilde{\Phi}_{A_\mu} \times \tilde{\Phi}_{A_0} \rightarrow \tilde{\Phi}_{A_\mu}$ лево-право-эквивалентна проекции

$$(\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}) \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) \rightarrow \Phi_{A_\mu} \times \mathbb{R}^k, \quad ((x, \xi), (z, w)) \mapsto (x, z).$$

Сформулированное утверждение очевидно.

2.3. Доказательство теорем 2.1–2.3. Пусть $f: M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга не больше 1, $l = n - m > 0$. Рассмотрим подмногообразия $\Phi_{A_\mu} \subseteq M$, $\Phi_{A_{\mu+1}} \subset \Phi_{A_\mu}$ и подмножество $\Phi_{A_\mu, A_0} \subset \Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $(x, x) \in \Phi_{A_\mu, A_0}$ и образ отображения f имеет в точке $f(x)$ особенность типа A_ν . Тогда $\nu \geq \mu + 1$, росток множества Φ_{A_μ, A_0} в точке (x, x) является ростком гладкого подмногообразия в $\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$ и выполнено следующее:

- 1) образ отображения $[A_\mu](f)$ имеет в точке x особенность типа $A_{\nu-\mu-1}$;
- 2) пара $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f))$ имеет в точке x особенность типа $B_{\nu-\mu}$.

Кроме указанных точек, множество Ξ может содержать еще только одну точку, а именно точку x . Согласно предложению 2.1 это происходит, когда $\nu_1 > \mu$. При этом росток множества Φ_{A_μ, A_0} в точке (x, x) является ростком гладкого подмногообразия в $\Phi_{A_\mu} \times \Phi_{A_0}$ и пара $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f, x))$ имеет в точке x особенность типа $B_{\nu_1 - \mu}$ (здесь $[A_\mu](f, x)$ обозначает A_μ -преобразование ростка отображения f в точке x).

Остается заметить, что плоскости

$$\{t_1 = q_{1, \mu+1}^1 = \dots = q_{1, \nu_1-1}^1 = q_{2, \mu+1}^1 = \dots = q_{2, \nu_1}^1 = \dots = q_{l+1, \mu+1}^1 = \dots = q_{l+1, \nu_1}^1 = 0\},$$

$$\{\bar{Y}^j = 0\}, \quad j = 2, \dots, r,$$

в пространстве $\mathbb{R}^{m-\mu(l+1)}$ с координатами

$$(t_1; q_{1, \mu+1}^1, \dots, q_{1, \nu_1-1}^1; q_{2, \mu+1}^1, \dots, q_{2, \nu_1}^1; \dots; q_{l+1, \mu+1}^1, \dots, q_{l+1, \nu_1}^1; \bar{Y}^2, \dots, \bar{Y}^r)$$

пересекаются в нуле трансверсально. Предложение доказано.

Теоремы 2.1–2.3 являются простыми следствиями предложений 2.1 и 2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Фактически предложения 2.1 и 2.2 описывают классификацию особенностей образа отображения $[A_\mu](f)$ и классификацию особенностей пары $(\Phi_{A_{\mu+1}}, [A_\mu](f))$ относительно диффеоморфизмов многообразия Φ_{A_μ} .

§ 3. Разрешение особенностей образа устойчивого гладкого отображения коранга не больше 1

В настоящем параграфе описана конструкция разрешения особенностей коранга 1 устойчивого гладкого отображения в пространство большей размерности.

3.1. Основная конструкция. Пусть $f: M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга не больше 1, $l = n - m > 0$. Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A}$ полугруппы $\mathbb{A}$ и многообразие $\mathcal{A}_f$ особенностей типа $\mathcal{A}$ образа отображения f .

Предположим, что $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \neq 0$, $\mathcal{A}_f \neq \emptyset$, и зафиксируем порядок чисел $\mu_1, \dots, \mu_p$. Тогда возникает последовательность гладких отображений

$$\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} \xrightarrow{\psi_p} \dots \xrightarrow{\psi_3} \Phi_{A_{\mu_1}, A_{\mu_2}} \xrightarrow{\psi_2} \Phi_{A_{\mu_1}} \xrightarrow{\psi_1} V,$$

где каждое отображение ψ_i является композицией гладких собственных отображений

$$\begin{aligned} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_{\mu_i}} &\xrightarrow{g_i^{\mu_i}} \dots \xrightarrow{g_i^2} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_1} \\ &\xrightarrow{g_i^1} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_0} \xrightarrow{f_i} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Отображения f_i и g_i^j строятся индуктивно по следующей схеме:

1) в качестве $f_1: \Phi_{A_0} \rightarrow \Phi_0$ выступает исходное отображение $f: M \rightarrow V$ такое, что $\Phi_0 = V$, $\Phi_{A_0} = M$;

2) f_i – устойчивое гладкое собственное отображение коранга не больше 1; его образ имеет коразмерность l в многообразии $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}}$;

3) многообразием $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_j}$ служит замыкание множества $A_j^{f_i}$ точек $x \in \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_0}$, в которых отображение f_i имеет особенность типа A_j ;

4) g_i^j – вложение коразмерности $l + 1$ многообразия $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_j}$ в многообразие $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_{i-1}}, A_{j-1}}$;

5) многообразие $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}, A_0}$ и отображение f_{i+1} определяются при помощи A_{μ_i} -преобразования отображения f_i : $f_{i+1} = [A_{\mu_i}](f_i)$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} : \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} \rightarrow V, \quad \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_p.$$

Из предложения 1.1 и теоремы 2.3 легко вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Образом отображения $\varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}$ является замыкание $\overline{A_f}$ многообразия A_f .*

Пусть $(M)^i = M \times \dots \times M$ (i раз). Рассмотрим подмногообразие $M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}$ в $(M)^i$, образованное наборами $(x_1, \dots, x_i)$ попарно различных точек многообразия M таких, что $f(x_1) = \dots = f(x_i) \in (A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_i})_f$, причем отображение f имеет особенность типа A_{μ_s} в точке x_s , $s = 1, \dots, i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для любого $i = 1, \dots, p$ существует гладкое вложение $\phi_i : \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}} \rightarrow (M)^i$, образом которого является замыкание $\overline{M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}}$ многообразия $M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_i}}$ в пространстве $(M)^i$. Вложения $\phi_1, \dots, \phi_p$ включаются в коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} & \xrightarrow{\psi_p} & \dots & \xrightarrow{\psi_3} & \Phi_{A_{\mu_1}, A_{\mu_2}} & \xrightarrow{\psi_2} & \Phi_{A_{\mu_1}} \xrightarrow{\psi_1} V \\ \downarrow \phi_p & & & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_1 \quad \downarrow \text{id} \\ (M)^p & \xrightarrow{h_p} & \dots & \xrightarrow{h_3} & (M)^2 & \xrightarrow{h_2} & M \xrightarrow{f} V \end{array}$$

где $h_i : (M)^i \rightarrow (M)^{i-1}$, $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1})$ – отображение забывания последней координаты, а id – тождественное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 1$ это очевидно (см. пример 1.2). Предположим, что утверждение верно при всех $p \leq k - 1$, и докажем его для $p = k$.

Пусть $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}^0 = \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}^{-1}((A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_k})_f)$. Это открытое всюду плотное подмногообразие в $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}$. По предположению индукции оно образовано (упорядоченными) парами $((x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}), (x_1, \dots, x_{k-2}, x_k))$ наборов из попарно различных точек $x_1, \dots, x_k$ многообразия M таких, что $(x_1, \dots, x_k) \in M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}$. Отображение

$$((x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}), (x_1, \dots, x_{k-2}, x_k)) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$$

определяет диффеоморфизм многообразия $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}^0$ на $M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}$.

Остается лишь проверить, что замыкание $\overline{M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}}$ является гладким подмногообразием в $(M)^k$ и что указанный диффеоморфизм продолжается до диффеоморфизма многообразия $\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}$ на $\overline{M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}}$. Но это легко следует из утверждения 1) предложения 4.2, приведенного ниже. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пары $(\Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}, \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}})$, полученные при разных упорядочениях набора $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ показателей вырожденности особенностей типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ образа отображения f , естественно диффеоморфны. А именно, для любой перестановки $\tau: (1, \dots, p) \rightarrow (1, \dots, p)$ существует диффеоморфизм $\phi_\tau: \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} \rightarrow \Phi_{A_{\mu_{\tau(1)}}, \dots, A_{\mu_{\tau(p)}}}$ такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} & \xrightarrow{\phi_\tau} & \Phi_{A_{\mu_{\tau(1)}}, \dots, A_{\mu_{\tau(p)}}} \\ \downarrow \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}} & & \downarrow \varphi_{A_{\mu_{\tau(1)}}, \dots, A_{\mu_{\tau(p)}}} \\ V & \xrightarrow{\text{id}} & V \end{array}$$

коммутативна.

Данное утверждение следует из предложения 3.1. Действие диффеоморфизма ϕ_τ определяется перестановкой $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)})$ сомножителей в произведении $(M)^p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Многообразие $\Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}$ и гладкое отображение $\varphi_{\mathcal{A}} = \varphi_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_p}}$ называются *характеристическими* для особенностей типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ образа отображения f . Описанная выше конструкция, сопоставляющая элементу $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ пару $(\Phi_{\mathcal{A}}, \varphi_{\mathcal{A}})$, называется *разрешением* этих особенностей.

Данное определение корректно в силу теоремы 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если $\mathcal{A} = 0$, то $\Phi_{\mathcal{A}} = V$, а $\varphi_{\mathcal{A}}: \Phi_{\mathcal{A}} \rightarrow V$ – тождественное отображение.

Основное свойство описанной конструкции заключается в следующем.

ТЕОРЕМА 3.3. *Если особенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ образа отображения f примыкает к особенности типа $\mathcal{A}$, то отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ является конечным накрытием над многообразием X_f . Кратность этого накрытия зависит только от $\mathcal{A}$ и X (т.е. она не зависит от t, n, M, V, f и от порядка A_{μ_i} -преобразований).*

Данное утверждение является очевидным следствием теорем 2.3 и 3.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Кратность отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ над многообразием X_f особенностей типа X образа отображения f называется *индексом* особенности типа X относительно особенности типа $\mathcal{A}$ и обозначается через $I_{\mathcal{A}}(X)$.

Предложение 3.1 показывает, что наша конструкция разрешения особенностей образа устойчивого отображения коранга не больше 1 является обобщением хорошо известного в алгебраической геометрии принципа итерации Клеймана [16]. Действительно, при использовании принципа итерации строятся и изучаются замыкания многообразий вида $M_{A_{\mu_1}, \dots, A_{\mu_k}}$ (см., например, [18]).

Однако получающиеся при этом гладкие многообразия не связываются диаграммами (3.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Между характеристическими многообразиями всевозможных особенностей образа отображения f , отвечающими, к тому же, различным упорядочениям показателей вырожденности этих особенностей, имеется большое количество отображений. Они образуют огромную коммутативную диаграмму. В ней есть поддиаграмма, определяемая следующим образом.

Разрешим особенности каждого типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ последовательно A_{μ_i} -преобразованиями в невозрастающем порядке следования показателей вырожденности $\mu_1, \dots, \mu_p$. Тогда возникнет ориентированный граф $A(f)$, у которого:

- 1) вершины соответствуют многообразию V и характеристическим многообразиям $\Phi_{\mathcal{A}}$, полученным в результате указанного разрешения;
- 2) ориентированные ребра отвечают устойчивым отображениям f_i коранга не больше 1 и вложениям g_i^j из диаграмм вида (3.1).

Легко видеть, что граф $A(f)$ является деревом (с корнем V). Цепи этого дерева представляют характеристические отображения особенностей образа отображения f , определяемые данным разрешением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Дерево $A(f)$ называется *характеристической башней* особенностей образа отображения f .

Башня $A(f)$ изображена на рис. 2. Многоточия обозначают поддеревья в $A(f)$, порожденные вершинами $\Phi_{\mathcal{A}}$, которые соответствуют элементам $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ при $p > 4$ или $\mu_1 + \dots + \mu_p > 4$. Горизонтальные ребра отвечают устойчивым отображениям f_i коранга не больше 1, а вертикальные – вложениям g_i^j . Из каждой вершины $\Phi_{\mathcal{A}}$ выходит ровно одно ребро, а входит не более двух. Если в вершину $\Phi_{\mathcal{A}}$ входят два ребра, то либо $\mathcal{A} = A_{\mu}$, либо $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} + A_{\mu}$, где все показатели вырожденности особенности типа $\tilde{\mathcal{A}}$ строго больше μ .

3.2. Вычисление относительных индексов особенностей. Из доказанных теорем 2.3 и 3.2 следует простая рекуррентная формула для вычисления относительных индексов особенностей образа устойчивого гладкого собственного отображения $f: M^m \rightarrow V^n$ коранга не больше 1 при $l = n - m > 0$.

ТЕОРЕМА 3.4. Индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ особенности типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r} \in \mathbb{A}$ образа отображения f относительно особенности типа $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ вычисляется рекуррентно исходя из следующих условий:

- 1) если $\mu^* = \max\{\mu_1, \dots, \mu_p\} > \nu^* = \max\{\nu_1, \dots, \nu_r\}$, то $I_{\mathcal{A}}(X) = 0$;
- 2) если $\mu^* \leq \nu^*$, то

$$I_{\mathcal{A}}(X) = \sum_{\nu_i = \mu^*} I_{\mathcal{A}-A_{\mu^*}}(X - A_{\nu_i}) + \sum_{\nu_i > \mu^*} I_{\mathcal{A}-A_{\mu^*}}(X - A_{\nu_i} + A_{\nu_i - \mu^* - 1}),$$

где $I_0(Y) = 1$ для любого $Y \in \mathbb{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Особенность типа X образа отображения f примыкает к особенности типа $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $I_{\mathcal{A}}(X) \neq 0$.

Теорема 3.4 позволяет легко получить явную формулу для вычисления относительных индексов особенностей.

Рис. 2. Характеристическая башня особенностей образа устойчивого гладкого отображения $f: M^m \rightarrow V^n$ коранга не больше 1, где $m < n$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$, $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$, причем $\mathcal{A} \neq 0$ и

$$\mu^* = \max\{\mu_1, \dots, \mu_p\} \leq \nu^* = \max\{\nu_1, \dots, \nu_r\}.$$

Тогда индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ особенности типа X образа отображения f относительно особенности типа $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$I_{\mathcal{A}}(X) = \sum_{(\kappa_1, \dots, \kappa_p)} \prod_{i=1}^p \left[\sum_{j=1}^r \delta_{\kappa_i}(\nu_j) - \sum_{j=1}^{i-1} \delta_{\kappa_i}(\kappa_j) + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_{\kappa_i}(\kappa_j - \mu_j - 1) \right],$$

где первая сумма берется по всем упорядоченным наборам целых неотрицательных чисел $\kappa_1, \dots, \kappa_p$ таких, что $\mu_i \leq \kappa_i \leq \nu^*$, $i = 1, \dots, p$, а

$$\delta_{\kappa}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = \kappa \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для особенностей типов $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p}$ и $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ малых коразмерностей индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ можно быстро вычислить при помощи *дерева (упорядоченной) пары* $\mathcal{A} \vdash X$ в предположении, что $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_p$. Это ориентированное дерево, ребра которого снабжены целыми положительными весами. Вершины обозначаются элементами полугруппы $\mathbb{A}$ (в том числе и нулевым). Корнем является элемент X .

Ориентации ребер определяются ориентациями цепей, выходящих из X и заканчивающихся в концевых вершинах дерева. Длина любой такой цепи (т. е. количество ее ребер) не превосходит числа p неприводимых компонент особенности типа $\mathcal{A}$. Вершины, находящиеся на расстоянии $i \leq p$ от корня X , а также ребра, в них входящие (вместе с весами), определяются вершинами, удаленными от X на расстояние $i - 1$.

А именно, из вершины 0 рёбра не выходят. Чтобы перечислить рёбра, выходящие из произвольной вершины $Y = A_{\kappa_1} + \dots + A_{\kappa_s}$, обозначим через $\#(A_{\kappa}|Y)$ число слагаемых в Y , равных A_{κ} .

Пусть вершина Y находится на расстоянии $i - 1$ от корня X . Тогда:

- 1) если $\#(A_{\mu_i}|Y) > 0$, то из вершины Y выходит ребро с концом $Y - A_{\mu_i}$; вес этого ребра равен $\#(A_{\mu_i}|Y)$;
- 2) для любого целого положительного $\kappa > \mu_i$ такого, что $\#(A_{\kappa}|Y) > 0$, из вершины Y выходит ребро с концом $Y - A_{\kappa} + A_{\kappa - \mu_i - 1}$; его вес равен $\#(A_{\kappa}|Y)$.

Никакие другие ребра из вершины Y не выходят.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. *Индексом цепи* дерева пары $\mathcal{A} \vdash X$ называется произведение весов ребер, составляющих эту цепь.

Из теоремы 3.4, очевидно, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.5. *Индекс $I_{\mathcal{A}}(X)$ особенности типа X относительно особенности типа $\mathcal{A}$ равен сумме индексов всех цепей дерева пары $\mathcal{A} \vdash X$, которые выходят из корня X и имеют длину, равную числу p неприводимых компонент особенности типа $\mathcal{A}$.*

Рис. 3. Дерево пары $(2A_2 + 2A_0) \vdash (3A_3 + A_0)$

ПРИМЕР 3.1. На рис. 3 представлено дерево пары $(2A_2 + 2A_0) \vdash (3A_3 + A_0)$. Вершины изображены прямоугольниками, ребра – стрелками, рядом с которыми написаны их веса. Дерево имеет четыре цепи длины 4, выходящие

из корня $3A_3 + A_0$. Их индексы равны $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$, $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 18$, $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$, $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ соответственно. Поэтому

$$I_{2A_2+2A_0}(3A_3 + A_0) = 36 + 18 + 18 + 6 = 78.$$

ПРИМЕР 3.2. Дерево пары $pA_\mu \vdash rA_\mu$, где $p \leq r$, является цепью длины p , выходящей из корня rA_μ . Веса ребер этой цепи изменяются на 1 при переходе через каждую вершину и пробегает все значения от r до $r - p + 1$. Поэтому

$$I_{pA_\mu}(rA_\mu) = p! \binom{r}{p}.$$

§ 4. Каноническая стратификация характеристического многообразия

В настоящем параграфе мы изучаем естественную стратификацию характеристических многообразий особенностей образа устойчивого гладкого отображения коранга не больше 1 по типам особенностей, которые имеются у образа этого отображения в образах точек характеристического многообразия при их характеристическом отображении. Описаны особенности этой стратификации с точностью до диффеоморфизмов объемлющего характеристического многообразия.

4.1. Особенности типа $\mathcal{S}_\kappa^p(l)$. Пусть Σ – произвольная C^∞ -стратификация гладкого n -мерного многообразия V . Рассмотрим целое положительное $l < n$ и целые неотрицательные κ и p такие, что $p \leq \kappa + 1$ и

$$c = (\kappa - p)(l + 1) + l + p \leq n.$$

В следующем определении используется понятие стратификации гладкого многообразия относительно набора замкнутых подмножеств (см. п. 1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Стратификация Σ имеет *особенность типа $\mathcal{S}_\kappa^p(l)$* , $p = 0$, в данной точке $y \in V$, если росток (Σ, y) этой стратификации в точке y диффеоморфен ростку в 0 стратификации пространства $\mathbb{R}^n$ относительно образа устойчивого гладкого собственного отображения $f: \mathbb{R}^{n-l} \rightarrow \mathbb{R}^n$ коранга не больше 1, имеющего в точке $f(0) = 0$ особенность типа A_κ .

Корректность определения 4.1 (как и корректность всех следующих определений, где используется понятие стратификации гладкого многообразия относительно набора замкнутых подмножеств) следует из теоремы 1.2.

Пусть теперь $p > 0$. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \bar{\lambda}_p, \dots, \bar{\lambda}_\kappa, \bar{z}),$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\bar{\lambda}_j = (\lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{l+1,j}) \in \mathbb{R}^{l+1}$, $\bar{z} \in \mathbb{R}^{n-c}$, и положим

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{l+1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Стратификация Σ имеет *особенность типа $\mathcal{S}_\kappa^p(l)$* , $p > 0$, в точке $y \in V$, если росток (Σ, y) диффеоморфен ростку в 0 стратификации пространства $\mathbb{R}^n$ относительно набора следующих подмножеств:

1) образа отображения $f: \mathbb{R}^{n-l} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, t, \bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \bar{\lambda}_\kappa, \bar{z}) \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, S(t, \bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \bar{\lambda}_\kappa), \bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \bar{\lambda}_\kappa, \bar{z}),$$

где $t \in \mathbb{R}$ и

$$S(t, \bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \bar{\lambda}_\kappa) = e_1 t^{\kappa-p+1} + \sum_{i=p+1}^{\kappa} \bar{\lambda}_i t^{i-p}$$

(входит в набор только при $p \leq \kappa$);

2) p гладких подмногообразий $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \dots, p$, где $\mathcal{H}_i$ – образ сужения отображения f на гиперплоскость $t = -(\lambda_i + \dots + \lambda_{p-1})$, если $i < p$, и на гиперплоскость $t = 0$, если $i = p$ (входят в набор только при $p \leq \kappa$);

3) $p(p-1)/2$ гиперплоскостей

$$\Pi_{i,j}: \lambda_i + \dots + \lambda_{j-1} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq p$$

(входят в набор только при $p > 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Росток (Σ, y) с особенностью типа $\mathcal{S}_0^1(l)$ в точке $y \in V$ является ростком многообразия V для любого l .

Число κ называется *показателем вырожденности* особенности типа $\mathcal{S}_\kappa^p(l)$. Множество $(\mathcal{S}_\kappa^p(l))_\Sigma$ точек $y \in V$, в которых стратификация Σ имеет особенность типа $\mathcal{S}_\kappa^p(l)$, является гладким подмногообразием коразмерности s в многообразии V (вообще, незамкнутое и несвязное).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Легко видеть, что каждая пара $(\mathcal{H}_i, f)$, $i = 1, \dots, p$, имеет особенность типа $B_{\kappa-p+1}$ в начале координат. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j S}{\partial(t + \lambda_i + \dots + \lambda_{p-1})^j} \Big|_{t=\lambda_i=\dots=\lambda_{p-1}=0} &= \\ &= \frac{\partial^j S}{\partial t^j} \Big|_{t=\lambda_i=\dots=\lambda_{p-1}=0} = \begin{cases} j!, & \text{если } j = \kappa - p + 1 \\ j! \bar{\lambda}_{p+j}, & \text{если } 1 \leq j \leq \kappa - p. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим также, что $H_i \cap \Pi_{i,j} = H_j \cap \Pi_{i,j}$ для любых $1 \leq i < j \leq p$.

ПРИМЕР 4.1. Пусть росток стратификации трехмерного многообразия имеет особенность типа $\mathcal{S}_2^2(1)$. Тогда этот росток диффеоморфен ростку в 0 стратификации пространства $\mathbb{R}^3 = \{(\lambda_1, \lambda_{1,2}, \lambda_{2,2})\}$ относительно набора следующих подмножеств:

- 1) плоскости $\lambda_{2,2} = 0$;
- 2) прямой $\lambda_{1,2} = -\lambda_1, \lambda_{2,2} = 0$; прямой $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,2} = 0$;
- 3) плоскости $\lambda_1 = 0$.

Страты положительной коразмерности этой стратификации изображены на рис. 4. Здесь один нульмерный страт, шесть одномерных и восемь двумерных (указанные на рисунке обозначения нужны для примера 4.2).

Зафиксируем l и рассмотрим свободную абелеву полугруппу по сложению с образующими $\mathcal{S}_\kappa^p = \mathcal{S}_\kappa^p(l)$, где κ, p – неотрицательные целые числа, причем $p \leq \kappa + 1$.

Рис. 4. Особенность типа $S_2^2(1)$ стратификации трехмерного пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Будем говорить, что стратификация Σ имеет *особенность типа* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\kappa_1}^{p_1} + \dots + \mathcal{S}_{\kappa_r}^{p_r}$ в точке $y \in V$, если росток (Σ, y) диффеоморфен ростку в 0 стратификации пространства $\mathbb{R}^n$ относительно набора замкнутых подмножеств Σ_j^i , $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, \alpha_i$, таких, что:

- 1) для любого $i = 1, \dots, r$ росток $(\Sigma^i, 0)$ стратификации Σ^i пространства $\mathbb{R}^n$ относительно набора подмножеств $\Sigma_1^i, \dots, \Sigma_{\alpha_i}^i$ имеет особенность типа $\mathcal{S}_{\kappa_i}^{p_i}$ в 0;
- 2) ростки в 0 многообразий $(\mathcal{S}_{\kappa_1}^{p_1})_{\Sigma^1}, \dots, (\mathcal{S}_{\kappa_r}^{p_r})_{\Sigma^r}$ пересекаются трансверсально в начале координат.

Числа $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ называются *показателями вырожденности* особенности типа $\mathcal{S}$. Число

$$\text{codim } \mathcal{S} = (l+1) \sum_{i=1}^r \kappa_i - l \sum_{i=1}^r p_i + lr$$

называется *коразмерностью* этой особенности.

Коразмерность особенности не превышает размерности n объемлющего многообразия V . Для любого фиксированного $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\kappa_1}^{p_1} + \dots + \mathcal{S}_{\kappa_r}^{p_r}$ множество $\Sigma_{\mathcal{S}}$ точек $y \in V$, в которых стратификация Σ имеет особенность типа $\mathcal{S}$, является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{S}$ в V . Связные компоненты многообразия $\Sigma_{\mathcal{S}}$ являются стратами стратификации Σ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Если C^∞ -стратификация многообразия V имеет лишь особенности типов $\mathcal{S}_{\kappa_1}^{p_1} + \dots + \mathcal{S}_{\kappa_r}^{p_r}$, то она является стратификацией Уитни.

Действительно, такая стратификация удовлетворяет обоим условиям Уитни (из определения 1.8) согласно лемме 1.1.

4.2. Особенности канонической стратификации характеристического многообразия. Пусть $f: M^m \rightarrow V^n$ — устойчивое гладкое собственное отображение коранга не больше 1, $l = n - m > 0$. Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ такой, что $\mathcal{A}_f \neq \emptyset$, и рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и характеристическое отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ особенностей типа $\mathcal{A}$ образа отображения f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. *Канонической стратификацией* многообразия Φ_A называется его разбиение на связные компоненты (страты) полных прообразов $\varphi_A^{-1}(X_f)$ многообразий X_f по всем типам X особенностей образа отображения f .

Каноническая стратификация многообразия Φ_A является, очевидно, его C^∞ -стратификацией.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любого $A = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ каноническая стратификация многообразия Φ_A имеет лишь особенности типов $S_{\kappa_1}^{p_1} + \dots + S_{\kappa_r}^{p_r}$, где $S_{\kappa}^i = S_{\kappa}^i(l)$. А именно, пусть $\xi \in \Phi_A$. Предположим, что образ отображения f имеет особенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ в точке $y = \varphi_A(\xi)$. Тогда существует отображение $\alpha: I = \{1, \dots, p\} \rightarrow J = \{1, \dots, r\}$ такое, что:*

1) для любого $j = 1, \dots, r$, множество $\alpha^{-1}(j)$ состоит из $p_j \geq 0$ элементов и

$$\kappa_j = \nu_j - \sum_{i \in \alpha^{-1}(j)} \mu_i \geq p_j - 1;$$

2) каноническая стратификация многообразия Φ_A имеет в точке ξ особенность типа $S = S_{\kappa_1}^{p_1} + \dots + S_{\kappa_r}^{p_r}$ (коразмерность этой особенности равна $\text{codim } X - \text{codim } A$).

Обратно, для любого отображения $\alpha: I \rightarrow J$, удовлетворяющего условию 1), существует точка $\xi \in \varphi_A^{-1}(y)$, в которой каноническая стратификация многообразия Φ_A имеет особенность типа S .

Данное утверждение следует из предложения 4.3, доказанного далее, в п. 4.4.

ПРИМЕР 4.2. Пусть $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ – устойчивое гладкое собственное отображение (оно является отображением коранга не больше 1). Предположим, что его образ имеет особенность типа A_2 в некоторой точке $y \in \mathbb{R}^5$.

Рассмотрим характеристическое многообразие Φ_{2A_0} и характеристическое отображение φ_{2A_0} особенностей типа $2A_0$ образа отображения f . Каноническая стратификация многообразия Φ_{2A_0} имеет особенность типа $S_2^2(1)$ в точке $\xi = \varphi_{2A_0}^{-1}(y)$.

Росток этой стратификации в точке ξ диффеоморфен ростку стратификации трехмерного пространства, изображенной на рис. 4. Страты положительной коразмерности обозначены здесь типами особенностей образа отображения f в образах соответствующих точек при отображении φ_{2A_0} . Нульмерный страт A_2 примыкает к шести одномерным стратам типа $A_1 + A_0$ и к восьми двумерным стратам, среди которых два страта типа A_1 и шесть стратов типа $3A_0$ (геометрический смысл изображенных прямых и плоскостей объяснен в примере 4.3).

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $f: M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга не больше 1, причем $l = n - m > 0$. Тогда для любого $A \in \mathbb{A}$ такого, что $A_f \neq \emptyset$, каноническая стратификация характеристического многообразия Φ_A особенностей типа A образа отображения f является C^∞ -стратификацией Уитни.*

Это утверждение следует из теоремы 4.1 и предложения 4.1.

4.3. Вспомогательные утверждения. Сформулируем некоторые простые алгебраические факты, необходимые для доказательства теоремы 4.1. Рассмотрим многочлен

$$P = e_1 t^d + q_{d-1} t^{d-1} + \dots + q_1 t + q_0$$

от $t \in \mathbb{R}$ с векторными коэффициентами $q_0, \dots, q_{d-1}, e_1 \in \mathbb{R}^{l+1}$, где $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

ЛЕММА 4.1. Пусть t_* – корень уравнения $P - q_0 = 0$. Тогда либо $t_* = 0$, либо t_* – корень (ненулевой) уравнения $(P - q_0)/t = 0$ той же кратности.

ЛЕММА 4.2. Пусть

$$P_\mu = e_1 t^{d-\mu} + \sum_{i=\mu}^{d-1} q_i t^{i-\mu}, \quad \mu = 0, 1, \dots, d.$$

Тогда для любого $\mu < d$ многочлен

$$R_\mu = e_1 v^{d-\mu-1} + \sum_{i=0}^{d-\mu-2} \frac{1}{(i+\mu+1)!} \frac{\partial^{i+\mu+1} P}{\partial t^{i+\mu+1}} v^i$$

от $v \in \mathbb{R}$ можно представить в виде

$$R_\mu = \frac{1}{\mu!} \sum_{k=0}^{d-\mu-1} \frac{\partial^\mu P_{k+1}}{\partial t^\mu} (v+t)^k.$$

В частности, для любых $t_* \neq 0$ и $k = 0, 1, \dots, d - \mu - 1$

$$\left. \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \left[\frac{P - (q_k t^k + \dots + q_1 t + q_0)}{t^{k+1}} \right] \right|_{t=t_*} = \frac{\mu!}{k!} \left. \frac{\partial^k R_\mu}{\partial v^k} \right|_{v=-t_*}. \quad (4.1)$$

ЛЕММА 4.3. Пусть t_* – ненулевой корень многочлена P . Предположим, что кратность этого корня равна $\mu + 1$ и

$$\left. \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \left[\frac{P - (q_k t^k + \dots + q_1 t + q_0)}{t^{k+1}} \right] \right|_{t=t_*} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r,$$

для некоторого целого неотрицательного $r < d - \mu$. Тогда $q_0 = \dots = q_r = 0$.

Леммы 4.1 и 4.3 очевидны. Лемму 4.2 достаточно проверить лишь в случае $l = 0$. Последнее сделано в работе [11].

4.4. Доказательство теоремы 4.1. Пусть $f: M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое собственное отображение коранга не больше 1, $l = n - m > 0$. Зафиксируем произвольный ненулевой элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ такой, что $\mathcal{A}_f \neq \emptyset$.

Рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{\mathcal{A}}$ и характеристическое отображение $\varphi_{\mathcal{A}}$ особенностей типа $\mathcal{A}$ образа отображения f . Возьмем произвольную точку ξ на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть образ отображения f имеет особенность типа A_ν в точке $y = \varphi_A(\xi)$. Тогда

$$\kappa_p = \nu - \sum_{i=1}^p \mu_i \geq p - 1$$

и существуют локальные координаты $(t, Q_0^p, \dots, Q_{\kappa_p-p-1}^p, \bar{u}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^m$ на многообразии M с началом в точке $x = f^{-1}(y)$ и локальные координаты $(t_1, \dots, t_{p-1}, Q_0^p, \bar{Q}^p, \bar{z}) \in \mathbb{R}^{n_p}$, $n_p = n - \text{codim } \mathcal{A}$, на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$ с началом в точке ξ , где

$$t, t_1, \dots, t_{p-1} \in \mathbb{R}, \quad \bar{Q}^p = (Q_1^p, \dots, Q_{\kappa_p-p}^p), \quad Q_i^p = (Q_{1,i}^p, \dots, Q_{l+1,i}^p) \in \mathbb{R}^{l+1}$$

($\bar{z}$ и $\bar{u}$ – векторы дополнительных переменных), такие, что справедливы следующие утверждения:

1) для любых $t_1, \dots, t_{p-1}$, Q_0^p , $\bar{Q}^p$, $\bar{z}$, достаточно близких к нулю, существует $\bar{u}$, гладко зависящее от $t_1, \dots, t_{p-1}$, $Q_0^p, \dots, Q_{\kappa_p-p}^p$, такое, что полный прообраз точки

$$\varphi_{\mathcal{A}}(t_1, \dots, t_{p-1}, Q_0^p, \bar{Q}^p, \bar{z}) \in V$$

относительно отображения f содержит точки

$$(t_0 + \dots + t_i, Q_0^p, \dots, Q_{\kappa_p-p-1}^p, \bar{u}, \bar{z}) \in M, \quad i = 0, \dots, p-1,$$

где

$$\sum_{i=1}^{p-1} (\nu - \mu_1 - \dots - \mu_i - i + 1)t_i + (\nu + 1)t_0 = \begin{cases} Q_{1, \kappa_p-p}^p, & \text{если } \kappa_p \geq p, \\ 0, & \text{если } \kappa_p = p - 1; \end{cases}$$

2) росток страта канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ является ростком в нуле страта стратификации пространства $\mathbb{R}^{n_p}$ относительно набора следующих подмножеств:

а) образа $\mathcal{R}(f_{p+1})$ отображения $f_{p+1}: \mathbb{R}^{m_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_p}$,

$$(t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p, \bar{z}) \mapsto (t_1, \dots, t_{p-1}, -S_p(t_p, \bar{Q}^p), \bar{Q}^p, \bar{z}),$$

где $m_p = n_p - l$,

$$S_p(t_p, \bar{Q}^p) = e_1 t_p^{\kappa_p-p+1} + \sum_{i=1}^{\kappa_p-p} Q_i^p t_p^i, \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{l+1}$$

(входит в набор только при $p \leq \kappa_p$);

б) p гладких подмногообразий $\mathcal{H}_i^p$, $i = 1, \dots, p$, где $\mathcal{H}_i^p$ – образ сужения отображения f_{p+1} на гиперплоскость $t_i + \dots + t_p = 0$ (входят в набор только при $p \leq \kappa_p$);

с) $p(p-1)/2$ гиперплоскостей

$$\Pi_{i,j}^p: t_i + \dots + t_{j-1} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq p$$

(входят в набор только при $p > 1$);

(см. лемму 2.2; для любых достаточно малых $t_1, \bar{Q}^1$ точка $(t_0 + t_1, \bar{q}) \in M$, где $\bar{q}$ гладко зависит от $t_1, \bar{Q}^1$, входит в полный прообраз точки $(\varphi_{A_{\mu_1}} \circ f_2)(t_1, \bar{Q}^1)$ относительно отображения f).

Ростки множеств $\mathcal{R}(f_2)$ и $\mathcal{H}_1^1$ в нуле являются, очевидно, полными прообразами ростков в точке y множеств $(A_{\mu_1} + A_0)_f$ и $(A_{\mu_1+1})_f$ соответственно относительно ростка отображения $\varphi_{A_{\mu_1}}$ в точке x_1 .

Случай $p = 2$. Пусть $\Phi_{A_\mu} = \Phi_{A_\mu}^1$ и $\varphi_{A_\mu} = \varphi_{A_\mu}^1$. Через $\Phi_{A_\mu}^2$ и $\varphi_{A_\mu}^2$ обозначим характеристическое многообразие и характеристическое отображение особенностей типа A_μ образа отображения f_2 соответственно.

Рассмотрим росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu_2}}^2 = \Phi_{A_{\mu_1} + A_{\mu_2}}^2 \subseteq \Phi_{A_0}^2$ в точке $\xi = x_2$. В локальных координатах $(t_1, \bar{Q}^1)$ на многообразии $\Phi_{A_0}^2$ он задается уравнениями

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial t_1^2} = \dots = \frac{\partial^{\mu_2} S_1}{\partial t_1^{\mu_2}} = 0.$$

Набор $(t_1, Q_0^2, \dots, Q_{\kappa_2-2}^2) \in \mathbb{R}^{n_2}$, где $\kappa_2 = \kappa_1 - \mu_2$, $n_2 = m_1 - \mu_2(l+1)$ и

$$Q_i^2 = \frac{1}{(i + \mu_2 + 1)!} \frac{\partial^{i+\mu_2+1} S_1}{\partial t_1^{i+\mu_2+1}}, \quad i = 0, \dots, \kappa_2 - 2,$$

служит локальными координатами на многообразии $\Phi_{A_{\mu_2}}^2$ (заметим, $Q_{\kappa_2-2}^2 = \kappa_1 t_1 e_1 + Q_{\kappa_1-1}^1$).

В этих координатах росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu_2+1}}^2 \subset \Phi_{A_{\mu_2}}^2$ в точке x_2 задается уравнением

$$\mathcal{H}_2^2: Q_0^2 = 0.$$

Набор $(t_1, t_2, \bar{Q}^2) \in \mathbb{R}^{m_2}$, где $m_2 = n_2 - l$ и $\bar{Q}^2 = (Q_1^2, \dots, Q_{\kappa_2-2}^2)$, определяет координаты на многообразии $\Phi_{A_{\mu_1} + A_{\mu_2} + A_0}$ в окрестности точки $x_3 = (x_2, x_2)$. Росток отображения $f_3 = [A_{\mu_2}](f_2)$ в точке x_3 задается формулой

$$(f_3, x_3): (\mathbb{R}^{m_2}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n_2}, 0), \quad (t_1, t_2, \bar{Q}^2) \mapsto (t_1, -S_2(t_2, \bar{Q}^2), \bar{Q}^2),$$

где

$$S_2(t_2, \bar{Q}^2) = e_1 t_2^{\kappa_2-1} + \sum_{i=1}^{\kappa_2-2} Q_i^2 t_2^i$$

(см. лемму 2.2; для любых достаточно малых $t_1, t_2, \bar{Q}^2$ точка $(t_0 + t_1 + t_2, \bar{q}) \in M$, где $\bar{q}$ гладко зависит от координат $t_1, t_2, \bar{Q}^2$, входит в полный прообраз точки $(\varphi_{A_{\mu_1} + A_{\mu_2}} \circ f_3)(t_1, t_2, \bar{Q}^2)$ относительно отображения f).

Теперь рассмотрим в $\Phi_{A_{\mu_2}}^2$ росток в x_2 полного прообраза многообразия $\mathcal{H}_1^1$ относительно отображения $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$. Согласно лемме 4.1 он состоит из двух компонент: ростка гиперплоскости

$$\Pi_{1,2}^2: t_1 = 0$$

и ростка гладкого подмногообразия, совпадающего с замыканием многообразия

$$\frac{\partial^{\mu_2}}{\partial t_1^{\mu_2}} \left(\frac{S_1}{t_1} \right) = 0.$$

По лемме 4.2 (формула (4.1) при $k = 0$ и $\mu = \mu_2$) росток этого замыкания задается уравнением

$$\mathcal{H}_1^2: Q_0^2 = -S_2|_{t_2=-t_1}.$$

Остается дать инвариантное описание ростков гиперповерхностей $\mathcal{R}(f_3)$, $\mathcal{H}_1^2$, $\mathcal{H}_2^2$ и $\Pi_{1,2}^2$ в нуле.

Ростки $\mathcal{R}(f_3)$ и $\mathcal{H}_2^2$ являются полными прообразами ростков в y множеств

$$\overline{(A_{\mu_1} + A_{\mu_2} + A_0)_f} \quad \text{и} \quad \overline{(A_{\mu_1} + A_{\mu_2+1})_f}$$

соответственно относительно ростка отображения $\varphi_{A_{\mu_1}+A_{\mu_2}}$ в точке ξ . Это следует из того, что $Q_0^1 \neq 0$ почти во всех точках образов ростков $\mathcal{R}(f_3)$, $\mathcal{H}_2^2$ при отображении $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$ (т. е. отображение $\varphi_{A_{\mu_1}}^1$ является иммерсией почти всюду).

Ростки $\mathcal{H}_1^2$ и $\Pi_{1,2}^2$ являются полными прообразами ростков в y множеств

$$\overline{(A_{\mu_1+1} + A_{\mu_2})_f} \quad \text{и} \quad \overline{(A_{\mu_1+\mu_2+1})_f}$$

соответственно относительно ростка $(\varphi_{A_{\mu_1}+A_{\mu_2}}, \xi)$. Первое следует из того, что образ ростка $\mathcal{H}_1^2$ при отображении $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$ задается уравнением $Q_0^1 = 0$, причем $Q_1^1 \neq 0$ почти всюду на этом образе. Второе вытекает из того, что образ ростка $\Pi_{1,2}^2$ при отображении $\varphi_{A_{\mu_2}}^2$ задается уравнениями $Q_0^1 = \dots = Q_{\mu_2}^1 = 0$, причем $Q_{\mu_2+1}^1 \neq 0$ почти во всех его точках.

ПРИМЕР 4.3. Рассмотрим отображение f из примера 4.2. Ростки множеств $\mathcal{R}(f_3)$, $\mathcal{H}_1^2$, $\mathcal{H}_2^2$, $\Pi_{1,2}^2$ в точке $x = x_2$ при $\mathcal{A} = 2A_0$ изображены на рис. 4. Множество $\mathcal{R}(f_3)$ представлено здесь горизонтальной плоскостью. Многообразие $\Pi_{1,2}^2$ изображено вертикальной плоскостью. Многообразия $\mathcal{H}_1^2$ и $\mathcal{H}_2^2$ представлены прямыми, которые лежат в горизонтальной плоскости и трансверсальны вертикальной.

Шаг индукции. Предположим, что мы выполнили (последовательно) A_{μ_i} -преобразования отображений f_i , $i = 1, \dots, p_0 - 1$ ($f_1 = f$), и доказали предложение 4.2 для всех $p < p_0$. Выполним теперь $A_{\mu_{p_0}}$ -преобразование отображения $f_{p_0} = [A_{\mu_{p_0-1}}](f_{p_0-1})$ и докажем утверждение для $p = p_0$. Чтобы сделать обозначения более простыми, мы опустим индекс 0 в записи числа p_0 .

Рассмотрим характеристическое многообразие $\Phi_{A_\mu}^p$ и характеристическое отображение $\varphi_{A_\mu}^p$ особенностей типа A_μ образа отображения f_p . По предположению индукции набор $(t_1, \dots, t_{p-1}, \overline{Q}^{p-1}) \in \mathbb{R}^{m_{p-1}}$, где

$$\overline{Q}^{p-1} = (Q_1^{p-1}, \dots, Q_{\kappa_{p-1}-p+1}^{p-1}), \quad Q_i^{p-1} \in \mathbb{R}^{l+1},$$

определяет локальные координаты на многообразии $\Phi_{A_0}^p$ с началом в точке $\xi = x_p = (\varphi_{A_0}^p)^{-1}(x_{p-1})$. Росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu_p}}^p = \Phi_{\mathcal{A}} \subseteq \Phi_{A_0}^p$ в точке x_p задается уравнениями

$$\frac{\partial S_{p-1}}{\partial t_{p-1}} = \frac{\partial^2 S_{p-1}}{\partial t_{p-1}^2} = \dots = \frac{\partial^{\mu_p} S_{p-1}}{\partial t_{p-1}^{\mu_p}} = 0,$$

где

$$S_{p-1}(t_{p-1}, \overline{Q}^{p-1}) = e_1 t_{p-1}^{\kappa_{p-1}-p+2} + \sum_{i=1}^{\kappa_{p-1}-p+1} Q_i^{p-1} t_{p-1}^i.$$

Набор $(t_1, \dots, t_{p-1}, Q_0^p, \dots, Q_{\kappa_p-p}^p) \in \mathbb{R}^{n_p}$, где $\kappa_p = \kappa_{p-1} - \mu_p$, $n_p = m_{p-1} - \mu_p(l+1)$ и

$$Q_i^p = \frac{1}{(i + \mu_p + 1)!} \frac{\partial^{i+\mu_p+1} S_{p-1}}{\partial t_{p-1}^{i+\mu_p+1}}, \quad i = 0, \dots, \kappa_p - p,$$

служит локальными координатами на многообразии $\Phi_{A_{\mu_p}}^p$ (заметим, $Q_{\kappa_p-p}^p = (\kappa_{p-1} - p + 2)e_1 t_{p-1} + Q_{\kappa_{p-1}-p+1}^{p-1}$).

В этих координатах росток подмногообразия $\Phi_{A_{\mu_p+1}}^p \subset \Phi_{A_{\mu_p}}^p$ в точке x_p задается уравнением

$$\mathcal{H}_p^p: Q_0^p = 0.$$

Набор $(t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p) \in \mathbb{R}^{m_p}$, где $m_p = n_p - l$ и $\bar{Q}^p = (Q_1^p, \dots, Q_{\kappa_p-p}^p)$, определяет координаты на многообразии $\Phi_{A_{\mu_1}+\dots+A_{\mu_p}+A_0}$ в окрестности точки $x_{p+1} = (x_p, x_p)$. Росток отображения $f_{p+1} = [A_{\mu_p}](f_p)$ в точке x_{p+1} задается формулой

$$(f_{p+1}, x_{p+1}): (\mathbb{R}^{m_p}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n_p}, 0), \\ (t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p) \mapsto (t_1, \dots, t_{p-1}, -S_p(t_p, \bar{Q}^p), \bar{Q}^p),$$

где

$$S_p(t_p, \bar{Q}^p) = e_1 t_p^{\kappa_p-p+1} + \sum_{i=1}^{\kappa_p-p} Q_i^p t_p^i$$

(см. лемму 2.2; для любых достаточно малых $t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p$ точка $(t_0 + \dots + t_p, \bar{q}) \in M$, где $\bar{q}$ гладко зависит от $t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p$, входит в полный прообраз точки

$$(\varphi_{A_{\mu_1}+\dots+A_{\mu_p}} \circ f_{p+1})(t_1, \dots, t_p, \bar{Q}^p)$$

относительно отображения f).

Теперь рассмотрим в $\Phi_{A_{\mu_p}}^p$ ростки в x_p полных прообразов многообразий $\mathcal{H}_i^{p-1}$, $i = 1, \dots, p-1$, и $\Pi_{i,j}^{p-1}$, $1 \leq i < j \leq p-1$, относительно отображения $\varphi_{A_{\mu_p}}^p$. Ростки полных прообразов многообразий $\Pi_{i,j}^{p-1}$ являются ростками в нуле гиперплоскостей

$$\Pi_{i,j}^p: t_i + \dots + t_{j-1} = 0$$

соответственно. Росток полного прообраза каждого многообразия $\mathcal{H}_i^{p-1}$ состоит из двух компонент (лемма 4.1): ростка гиперплоскости

$$\Pi_{i,p}^p: t_i + \dots + t_{p-1} = 0$$

и ростка гладкого подмногообразия, совпадающего с замыканием многообразия

$$\frac{\partial^{\mu_p}}{\partial (t_i + \dots + t_{p-1})^{\mu_p}} \left(\frac{S_{p-1} - S_{p-1}|_{t_i+\dots+t_{p-1}=0}}{t_i + \dots + t_{p-1}} \right) = 0.$$

По лемме 4.2 (формула (4.1) при $k = 0$ и $\mu = \mu_p$) росток этого замыкания задается уравнением

$$H_i^p: Q_0^p = -S_p|_{t_i+\dots+t_p=0}.$$

Остается только дать инвариантное описание ростков множеств $\mathcal{R}(f_{p+1})$, $\mathcal{H}_i^p$, $i = 1, \dots, p$, и $\Pi_{i,j}^p$, $1 \leq i < j \leq p$, в нуле.

Пусть $\phi_\alpha = \varphi_{A_{\mu_{\alpha+1}}}^{\alpha+1} \circ \dots \circ \varphi_{A_{\mu_p}}^p$, где $\alpha = 1, \dots, p-1$. Рассмотрим образы $\phi_\alpha(\mathcal{R}(f_{p+1}))$, $\phi_\alpha(\mathcal{H}_i^p)$, $\phi_\alpha(\Pi_{i,j}^p)$ ростков множеств $\mathcal{R}(f_{p+1})$, $\mathcal{H}_i^p$, $\Pi_{i,j}^p$ в нуле при отображении ϕ_α .

Легко видеть, что $Q_0^\alpha \neq 0$ для любого α почти во всех точках ростка $\phi_\alpha(\mathcal{R}(f_{p+1}))$, т. е. отображение $\varphi_{A_{\mu_\alpha}}^\alpha$ является иммерсией почти всюду. Следовательно, росток $\mathcal{R}(f_{p+1})$ является полным прообразом ростка в y множества $\overline{(\mathcal{A} + A_0)_f}$ относительно ростка отображения $\varphi_{\mathcal{A}}$ в точке ξ .

Росток $\mathcal{H}_i^p$ является полным прообразом ростка в точке y множества $\overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} + A_{\mu_{i+1}})_f}$ относительно ростка отображения $(\varphi_{\mathcal{A}}, \xi)$. Это следует из того, что $Q_0^\alpha \neq 0$ для любого $\alpha \neq i$ и $Q_0^\alpha = 0$, $Q_1^\alpha \neq 0$ при $\alpha = i$ почти всюду на $\phi_\alpha(\mathcal{H}_i^p)$.

Наконец, росток $\Pi_{i,j}^p$ является полным прообразом ростка в y множества

$$\overline{(\mathcal{A} - A_{\mu_i} - A_{\mu_j} + A_{\mu_i + \mu_j + 1})_f}$$

(относительно ростка отображения $(\varphi_{\mathcal{A}}, \xi)$). Это вытекает из того, что почти всюду на $\phi_\alpha(\Pi_{i,j}^p)$ справедливо следующее:

- 1) $Q_0^\alpha \neq 0$ для любого $\alpha = j, \dots, p-1$;
- 2) число $t_\alpha = -(t_i + \dots + t_{\alpha-1})$ является ненулевым корнем кратности $\mu_j + 1$ уравнения $Q_0^\alpha = -S_\alpha(t_\alpha, \overline{Q}^\alpha)$ при $\alpha = i+1, \dots, j-1$; в частности, $Q_0^\alpha \neq 0$;
- 3) $Q_0^\alpha = \dots = Q_{\mu_j}^\alpha = 0$, $Q_{\mu_j+1}^\alpha \neq 0$ при $\alpha = i$;
- 4) $Q_0^\alpha \neq 0$ для любого $\alpha = 1, \dots, i-1$.

Свойства 1)–4) проверяются последовательно. А именно, свойство 1) очевидно. Свойство 2) доказывается индукцией по убывающему α .

Действительно, при $\alpha = j-1$ свойство 2) справедливо по определению. Предположим, что число $t_\alpha = -(t_i + \dots + t_{\alpha-1})$ является ненулевым корнем кратности $\mu_j + 1$ уравнения $Q_0^\alpha = -S_\alpha(t_\alpha, \overline{Q}^\alpha)$. Тогда по леммам 4.2 и 4.3 при

$$\begin{aligned} P &= S_{\alpha-1} + Q_0^{\alpha-1}, & \mu &= \mu_\alpha, & R_\mu &= S_\alpha + Q_0^\alpha, \\ v &= t_\alpha, & t_* &= t_i + \dots + t_{\alpha-1}, & r &= \mu_j \end{aligned}$$

число $t_{\alpha-1} = -(t_i + \dots + t_{\alpha-2})$ является корнем кратности $\mu_j + 1$ уравнения

$$Q_0^{\alpha-1} = -S_{\alpha-1}(t_{\alpha-1}, \overline{Q}^{\alpha-1}).$$

Если $\alpha > i+1$, то этот корень не равен нулю почти во всех точках ростка $\phi_{\alpha-1}(\Pi_{i,j}^p)$.

Свойство 3) следует из свойства 2) при $\alpha = i+1$ и лемм 4.2 и 4.3 при

$$P = S_i + Q_0^i, \quad \mu = \mu_{i+1}, \quad R_\mu = S_{i+1} + Q_0^{i+1}, \quad v = t_{i+1}, \quad t_* = t_i, \quad r = \mu_j.$$

Из свойства 3) немедленно следует свойство 4). Таким образом, предложение 4.2 полностью доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть образ отображения f имеет особенность типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$ в точке $y = \varphi_{\mathcal{A}}(\xi)$. Обозначим через $x_1, \dots, x_r$ попарно

Отсюда следует, что существуют разложение $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1 + \dots + \mathcal{A}^r$, $\mathcal{A}^j \in \mathbb{A}$, и локальные координаты

$$(\bar{\Lambda}^1, \dots, \bar{\Lambda}^r) \in \mathbb{R}^{n-\text{codim } \mathcal{A}}, \quad \bar{\Lambda}^j \in \mathbb{R}^{\nu_j(l+1)+l-\text{codim } \mathcal{A}^j},$$

на многообразии $\Phi_{\mathcal{A}}$ с началом в точке ξ такие, что росток в ξ страта канонической стратификации многообразия $\Phi_{\mathcal{A}}$ является ростком в нуле пересечения подмножеств $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ в $\mathbb{R}^{n-\text{codim } \mathcal{A}}$, которые определяются следующим образом:

– если $\mathcal{A}^j = 0$, то $\bar{\Lambda}^j = \bar{Y}^j$; множество Δ_j – цилиндр, у которого направляющей служит многообразие особенностей типа A_{ν_j} образа отображения g_j (в $\{\bar{\Lambda}^j\}$ -пространстве), а образующие задаются уравнениями $\bar{\Lambda}^j = \text{const}$;

– если $\mathcal{A}^j \neq 0$, то $\bar{\Lambda}^j$ – локальные координаты на характеристическом многообразии Φ^j особенностей типа $\mathcal{A}^j$ образа отображения g_j ; множество Δ_j – цилиндр, у которого направляющей служит росток в нуле страта канонической стратификации многообразия Φ^j , а образующие задаются уравнениями $\bar{\Lambda}^j = \text{const}$.

Теперь предложение следует из предложения 4.2.

Теорема 4.1 является следствием предложения 4.3.

§ 5. Линейные соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей образа устойчивого гладкого отображения коранга не больше 1

Пусть Σ – конечномерное клеточное пространство. Предположим, что оно имеет конечно порожденные группы целочисленных гомологий с компактными носителями. Тогда (топологической) *эйлеровой характеристикой* $\chi(\Sigma)$ пространства Σ называется сумма

$$\chi(\Sigma) = \sum_i (-1)^i b_i(\Sigma),$$

где $b_i(\Sigma)$ – ранг i -й группы его гомологий (i -е число Бетти).

В частности, пусть Σ – компактное подмножество гладкого многообразия. Предположим, что это множество допускает конечную C^∞ -стратификацию Уитни $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$. Тогда определены эйлеровы характеристики множества Σ и каждого его страта Σ_i , $i = 1, \dots, k$. При этом (см., например, [21]) имеет место формула

$$\chi(\Sigma) = \sum_{i=1}^k (-1)^{\dim \Sigma_i} \chi(\Sigma_i). \quad (5.1)$$

5.1. Основная формула. Пусть $f: M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое (собственное) отображение коранга не больше 1, $l = n - m > 0$. Зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ такой, что

$$\text{codim } \mathcal{A} = (l+1) \sum_{i=1}^p \mu_i + pl \leq n.$$

Рассмотрим многообразие $\mathcal{A}_f$ особенностей типа $\mathcal{A}$ образа отображения f и его замыкание $\overline{\mathcal{A}_f}$ в объемлющем многообразии V . Предположим, что $\mathcal{A}_f \neq \emptyset$,

и возьмем характеристическое многообразие Φ_A особенностей типа A множества $f(M)$. Если множество $\overline{A_f}$ компактно, то многообразие Φ_A замкнуто.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть множество $\overline{A_f}$ компактно. Тогда эйлерова характеристика $\chi(\Phi_A)$ характеристического многообразия Φ_A особенностей типа A образа отображения f вычисляется через эйлеровы характеристики $\chi(X_f)$ многообразий X_f особенностей типов $X \in \mathbb{A}$, примыкающих к особенностям типа A , по формуле

$$(-1)^{\text{codim } A} \chi(\Phi_A) = \sum_X (-1)^{\text{codim } X} I_A(X) \chi(X_f). \quad (5.2)$$

Это утверждение следует из теорем 3.1, 3.3, 4.2 и формулы (5.1).

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть многообразие A_f имеет нечетную размерность и множество $\overline{A_f}$ компактно. Тогда эйлеровы характеристики $\chi(X_f)$ многообразий X_f особенностей типов $X \in \mathbb{A}$ образа отображения f , примыкающих к особенностям типа A , связаны соотношением

$$\sum_X (-1)^{\text{codim } X} I_A(X) \chi(X_f) = 0. \quad (5.3)$$

Данное утверждение следует из теоремы 5.1 и того факта, что при указанных условиях $\chi(\Phi_A) = 0$ (эйлерова характеристика любого гладкого замкнутого нечетномерного многообразия равна нулю).

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим устойчивое гладкое отображение $f: M^m \rightarrow V^n$ коранга не больше 1, где многообразие M замкнуто и $l = n - m > 0$.

1) Граница многообразия особенностей типа A_0 множества $f(M)$ состоит из всех особенностей коразмерности больше l (см. пример 1.3). Поэтому для любого нечетного m формула (5.3) и теорема 3.5 приводят к следующему соотношению между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей множества $f(M)$:

$$\chi((A_0)_f) = (-1)^{l+1} \sum_{\text{codim } X > l} (-1)^{\text{codim } X} r(X) \chi(X_f),$$

где $r(X)$ – число r неприводимых компонент у особенностей типа $X = A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r}$.

2) Граница многообразия особенностей типа $2A_0$ состоит из всех особенностей коразмерности больше $2l$. Поэтому для любого нечетного $n \geq 3$ имеем

$$2\chi((2A_0)_f) = - \sum_{\text{codim } X > 2l} (-1)^{\text{codim } X} [r^2(X) - \#(A_0|X)] \chi(X_f).$$

Здесь $\#(A_0|A_{\nu_1} + \dots + A_{\nu_r})$ – количество индексов $i \in \{1, \dots, r\}$ таких, что $\nu_i = 0$.

5.2. Вычисление линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками. Далее, ради упрощения громоздких формул, эйлерову характеристику многообразия $(k_1 A_{\mu_1} + \dots + k_p A_{\mu_p})_f$, где $k_1, \dots, k_p$ – положительные целые числа, а $\mu_1, \dots, \mu_p$ попарно различны, мы обозначаем через $\chi(k_1, \dots, k_p; \mu_1, \dots, \mu_p)$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $f: M^m \rightarrow V^n$ – устойчивое гладкое отображение коранга не больше 1, многообразие M замкнуто и $l = n - m > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ такого, что многообразию $\mathcal{A}_f$ особенностей типа $\mathcal{A}$ образа отображения f имеет нечетную размерность, эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{A}_f)$ многообразия $\mathcal{A}_f$ является линейной комбинацией (с рациональными коэффициентами), эйлеровых характеристик $\chi(X_f)$ четномерных многообразий X_f особенностей типов $X \in \mathbb{A}$:

$$\chi(\mathcal{A}_f) = \sum_X K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X) \chi(X_f), \quad (5.4)$$

где $\text{codim } X \in [\text{codim } \mathcal{A} + 1, n]$. Если многообразие V замкнуто, то это соотношение справедливо и для $\mathcal{A} = 0$.

2) Каждый коэффициент $K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X)$ в формуле (5.4) зависит только от $\mathcal{A}$, X и от четности числа l (т.е. не зависит от f и топологии многообразий M, V), а именно

$$K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X) = \sum_{i=0}^s (-1)^i P_i^{(l)}(\mathcal{A}, X), \quad (5.5)$$

где $s = (\text{codim } X - \text{codim } \mathcal{A} - 1)/2$, а $P_i^{(l)}(\mathcal{A}, X)$ равно сумме произведений вида

$$\prod_{j=0}^i \frac{I_{Y_j}(Y_{j+1})}{I_{Y_j}(Y_j)}$$

по всем упорядоченным наборам $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{i+1})$ элементов полугруппы $\mathbb{A}$ таким, что $Y_0 = \mathcal{A}$, $Y_{i+1} = X$ и

$$\begin{aligned} \text{codim } \mathcal{A} &< \text{codim } Y_1 < \dots < \text{codim } Y_i < \text{codim } X, \\ \text{codim } Y_1 &\equiv \dots \equiv \text{codim } Y_i \equiv \text{codim } \mathcal{A} \pmod{2}. \end{aligned}$$

3) Для любого коэффициента $K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X)$ можно найти целое $\alpha \geq 0$ такое, что число $K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X)2^\alpha$ целое.

4) Списки формул (5.4) для всевозможных $\mathcal{A} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ при небольших значениях коразмерности $s = \text{codim } \mathcal{A}$ приведены в табл. 1 при $s \leq 6l + 2$ в случае нечетного l и нечетного $n \leq 6l + 3$; в табл. 2 при $s \leq 7l + 2$ в случае четного l и нечетного $n \leq 7l + 3$; в табл. 3 при $s \leq 6l + 1$ в случае нечетного l и четного $n \leq 6l + 2$; в табл. 4 при $s \leq 7l + 3$ в случае четного l и четного $n \leq 7l + 4$. Число $s + 1$ определяет минимальную размерность n при фиксированном l , в которой впервые появляются соответствующие соотношения.

5) Эйлерова характеристика $\chi(f(M))$ образа отображения f является линейной комбинацией эйлеровых характеристик $\chi(X_f)$ четномерных многообразий X_f особенностей типов $X \in \mathbb{A}$:

$$\chi(f(M)) = \sum_X \mathcal{K}^{(l)}(X) \chi(X_f), \quad (5.6)$$

Таблица 1

Соотношения в случае нечетного l и нечетного $n \leq 6l + 3$

Коразмерность c	Соотношения
$2l$	$4\chi_{(0)}^{(2)} = 2\chi_{(1)}^{(1)} + 12\chi_{(0)}^{(3)} - 4\chi_{(2)}^{(1)} - 10\chi_{(1,0)}^{(1,2)} - 80\chi_{(0)}^{(5)} + 10\chi_{(3)}^{(1)} + 48\chi_{(2,0)}^{(1,2)} + 24\chi_{(1,0)}^{(2,1)} + 184\chi_{(1,0)}^{(1,4)} + 1344\chi_{(0)}^{(7)} - 56\chi_{(4)}^{(1)} - 263\chi_{(3,0)}^{(1,2)} - 185\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 123\chi_{(1)}^{(3)} - 1280\chi_{(2,0)}^{(1,4)} - 838\chi_{(1,0)}^{(2,3)} - 5728\chi_{(1,0)}^{(1,6)} - 39168\chi_{(0)}^{(9)}$
$3l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,1)} = \chi_{(1)}^{(1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,2)} - 2\chi_{(3)}^{(1)} - 4\chi_{(2,0)}^{(1,2)} - \chi_{(1,0)}^{(2,1)} - 8\chi_{(1,0)}^{(1,4)} + 5\chi_{(4)}^{(1)} + 17\chi_{(3,0)}^{(1,2)} + 9\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 3\chi_{(1)}^{(3)} + 48\chi_{(2,0)}^{(1,4)} + 22\chi_{(1,0)}^{(2,3)} + 96\chi_{(1,0)}^{(1,6)}$
$4l$	$4\chi_{(0)}^{(4)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,2)} + 20\chi_{(0)}^{(5)} - \chi_{(3)}^{(1)} - 8\chi_{(2,0)}^{(1,2)} - 6\chi_{(1,0)}^{(2,1)} - 38\chi_{(1,0)}^{(1,4)} - 280\chi_{(0)}^{(7)} + 10\chi_{(4)}^{(1)} + 50\chi_{(3,0)}^{(1,2)} + 38\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 27\chi_{(1)}^{(3)} + 252\chi_{(2,0)}^{(1,4)} + 176\chi_{(1,0)}^{(2,3)} + 1180\chi_{(1,0)}^{(1,6)} + 8064\chi_{(0)}^{(9)}$
$4l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} = 2\chi_{(3)}^{(1)} + 4\chi_{(2,0)}^{(1,2)} - 4\chi_{(4)}^{(1)} - 8\chi_{(3,0)}^{(1,2)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 16\chi_{(2,0)}^{(1,4)}$
	$2\chi_{(1)}^{(2)} = \chi_{(3)}^{(1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(2,1)} - 2\chi_{(4)}^{(1)} - 2\chi_{(3,0)}^{(1,2)} - 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 3\chi_{(1)}^{(3)} - 4\chi_{(1,0)}^{(2,3)}$
$5l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,3)} = \chi_{(2,0)}^{(1,2)} + \chi_{(1,0)}^{(2,1)} + 4\chi_{(1,0)}^{(1,4)} - \chi_{(4)}^{(1)} - 5\chi_{(3,0)}^{(1,2)} - 4\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 3\chi_{(1)}^{(3)} - 16\chi_{(2,0)}^{(1,4)} - 11\chi_{(1,0)}^{(2,3)} - 40\chi_{(1,0)}^{(1,6)}$
$5l + 3$	$\chi_{(3,0)}^{(1,1)} = \chi_{(4)}^{(1)} + 2\chi_{(3,0)}^{(1,2)}$
	$\chi_{(2,1)}^{(1,1)} = \chi_{(4)}^{(1)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)}$
$6l$	$4\chi_{(0)}^{(6)} = 28\chi_{(0)}^{(7)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,4)} - \chi_{(3,0)}^{(1,2)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - \chi_{(1)}^{(3)} - 12\chi_{(2,0)}^{(1,4)} - 10\chi_{(1,0)}^{(2,3)} - 82\chi_{(1,0)}^{(1,6)} - 672\chi_{(0)}^{(9)}$
$6l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,3)} = 2\chi_{(3,0)}^{(1,2)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 8\chi_{(2,0)}^{(1,4)}$
	$2\chi_{(1,0)}^{(2,2)} = \chi_{(3,0)}^{(1,2)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 3\chi_{(1)}^{(3)} + 6\chi_{(1,0)}^{(2,3)}$
$7l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,5)} = \chi_{(2,0)}^{(1,4)} + \chi_{(1,0)}^{(2,3)} + 6\chi_{(1,0)}^{(1,6)}$
$8l$	$2\chi_{(0)}^{(8)} = \chi_{(1,0)}^{(1,6)} + 18\chi_{(0)}^{(9)}$

где $\text{codim } X \leq n$. Каждый коэффициент $\mathcal{K}^{(l)}(X)$ этой комбинации зависит только от X и от четности числа l , а именно

$$\mathcal{K}^{(l)}(X) = 1 - \sum_{\mathcal{A}} K_{\mathcal{A}}^{(l)}(X),$$

где сумма берется по всем ненулевым элементам $\mathcal{A}$ полугруппы $\mathbb{A}$ таким, что $\text{codim } \mathcal{A} < \text{codim } X$ и $\text{codim } \mathcal{A} \equiv n + 1 \pmod{2}$.

6) Формула (5.6) имеет следующий вид:

Таблица 2

Соотношения в случае четного l и нечетного $n \leq 7l + 3$

Коразмерность c	Соотношения
l	$4\chi_{(0)}^{(1)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,1)} + \chi_{(3,0)}^{(1,1)} - \chi_{(2,1)}^{(1,1)} - \chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$2l$	$4\chi_{(0)}^{(2)} = 2\chi_{(1)}^{(1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,2)} - 2\chi_{(3)}^{(1)} + \chi_{(3,0)}^{(1,2)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 3\chi_{(1)}^{(3)} + 2\chi_{(5)}^{(1)}$
$3l$	$4\chi_{(0)}^{(3)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,3)} - 2\chi_{(3,0)}^{(1,1)} - 2\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + \chi_{(3,0)}^{(1,3)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)} - 3\chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$3l + 2$	$2\chi_{(2)}^{(1)} = \chi_{(2,1)}^{(1,1)}$
$4l$	$4\chi_{(0)}^{(4)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,2)} - \chi_{(3)}^{(1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,4)} - 2\chi_{(3,0)}^{(1,2)} - 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 3\chi_{(1)}^{(3)} + 5\chi_{(5)}^{(1)}$
$4l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} = 2\chi_{(3)}^{(1)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - 2\chi_{(5)}^{(1)}$
	$2\chi_{(7)}^{(2)} = \chi_{(3)}^{(1)} + 3\chi_{(1)}^{(3)} - \chi_{(5)}^{(1)}$
$5l$	$4\chi_{(0)}^{(5)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,3)} - \chi_{(3,0)}^{(1,1)} - \chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,5)} - 2\chi_{(3,0)}^{(1,3)} - 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)} - 3\chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$5l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,2)} = 2\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + \chi_{(2,1)}^{(1,1)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)}$
	$2\chi_{(1,0)}^{(2,1)} = \chi_{(3,0)}^{(1,1)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 3\chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$5l + 4$	$\chi_{(4)}^{(1)} = 0$
$6l$	$4\chi_{(0)}^{(6)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,4)} - \chi_{(3,0)}^{(1,2)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} - \chi_{(1)}^{(3)} + 2\chi_{(5)}^{(1)} + 2\chi_{(1,0)}^{(1,6)}$
$6l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,3)} = 2\chi_{(3,0)}^{(1,2)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)} - 2\chi_{(5)}^{(1)}$
	$2\chi_{(1,0)}^{(2,2)} = \chi_{(3,0)}^{(1,2)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 3\chi_{(1)}^{(3)} - 3\chi_{(5)}^{(1)}$
$6l + 4$	$\chi_{(4,0)}^{(1,1)} = \chi_{(5)}^{(1)}$
	$\chi_{(3,1)}^{(1,1)} = \chi_{(5)}^{(1)}$
	$2\chi_{(2)}^{(2)} = \chi_{(5)}^{(1)}$
$7l$	$4\chi_{(0)}^{(7)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,5)} - \chi_{(3,0)}^{(1,3)} - \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)} - \chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$7l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,4)} = 2\chi_{(3,0)}^{(1,3)} + \chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)}$
	$2\chi_{(1,0)}^{(2,3)} = \chi_{(3,0)}^{(1,3)} + 2\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,2)} + 3\chi_{(1,0)}^{(3,1)}$
$8l$	$2\chi_{(0)}^{(8)} = \chi_{(1,0)}^{(1,6)}$

– при нечетном l и нечетном $n \leq 6l + 3$

$$\begin{aligned}
\chi(f(M)) = & \chi_{(0)}^{(1)} + \frac{1}{2}[\chi_{(1)}^{(1)} - 4\chi_{(0)}^{(3)}] + \chi_{(2)}^{(1)} + \chi_{(1,0)}^{(1,2)} + 16\chi_{(5)}^{(5)} \\
& - \frac{1}{4}[3\chi_{(3)}^{(1)} + 32\chi_{(2,0)}^{(1,2)} + 18\chi_{(1,0)}^{(2,1)} + 128\chi_{(1,0)}^{(1,4)} + 1088\chi_{(0)}^{(7)}] \\
& + \frac{1}{4}[38\chi_{(4)}^{(1)} + 176\chi_{(3,0)}^{(1,2)} + 128\chi_{(2,1,0)}^{(1,1,1)} + 89\chi_{(1)}^{(3)} \\
& + 928\chi_{(2,0)}^{(1,4)} + 624\chi_{(1,0)}^{(2,3)} + 4384\chi_{(1,0)}^{(1,6)} + 31744\chi_{(0)}^{(9)}]; \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Таблица 3

Соотношения в случае нечетного l и четного $n \leq 6l + 2$

Коразмерность c	Соотношения
l	$4\chi_{(0)}^{(1)} = 8\chi_{(0)}^{(2)} - 2\chi_{(1,0)}^{(1,1)} - 32\chi_{(0)}^{(4)}$ $+ 14\chi_{(2,0)}^{(1,1)} + 4\chi_{(1)}^{(2)} + 44\chi_{(1,0)}^{(1,3)} + 384\chi_{(0)}^{(6)}$ $- 51\chi_{(3,0)}^{(1,1)} - 37\chi_{(2,1)}^{(1,1)} - 272\chi_{(2,0)}^{(1,3)} - 164\chi_{(1,0)}^{(2,2)}$ $- 1184\chi_{(1,0)}^{(1,5)} - 8704\chi_{(0)}^{(8)}$
$2l + 1$	$2\chi_{(1)}^{(1)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,1)} - 2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} + 2\chi_{(1)}^{(2)} - 4\chi_{(1,0)}^{(1,3)}$ $+ 5\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + 3\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 16\chi_{(2,0)}^{(1,3)} + 4\chi_{(1,0)}^{(2,2)} + 32\chi_{(1,0)}^{(1,5)}$
$3l$	$2\chi_{(0)}^{(3)} = \chi_{(1,0)}^{(1,1)} + 8\chi_{(0)}^{(4)} - 3\chi_{(2,0)}^{(1,1)} - 2\chi_{(1)}^{(2)} - 11\chi_{(1,0)}^{(1,3)}$ $- 80\chi_{(0)}^{(6)} + 13\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + 9\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 61\chi_{(2,0)}^{(1,3)} + 38\chi_{(1,0)}^{(2,2)}$ $+ 260\chi_{(1,0)}^{(1,5)} + 1792\chi_{(0)}^{(8)}$
$3l + 2$	$2\chi_{(2)}^{(1)} = 2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} - 2\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + \chi_{(2,1)}^{(1,1)} - 4\chi_{(2,0)}^{(1,3)}$
$4l + 1$	$2\chi_{(1,0)}^{(1,2)} = 2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} + 2\chi_{(1)}^{(2)} + 6\chi_{(1,0)}^{(1,3)} - 7\chi_{(3,0)}^{(1,1)}$ $- 5\chi_{(2,1)}^{(1,1)} - 18\chi_{(2,0)}^{(1,3)} - 10\chi_{(1,0)}^{(2,2)} - 40\chi_{(1,0)}^{(1,5)}$
$4l + 3$	$\chi_{(3)}^{(1)} = \chi_{(3,0)}^{(1,1)}$
$5l$	$4\chi_{(0)}^{(5)} = 2\chi_{(1,0)}^{(1,3)} + 24\chi_{(0)}^{(6)} - \chi_{(3,0)}^{(1,1)}$ $- \chi_{(2,1)}^{(1,1)} - 10\chi_{(2,0)}^{(1,3)} - 8\chi_{(1,0)}^{(2,2)} - 58\chi_{(1,0)}^{(1,5)} - 448\chi_{(0)}^{(8)}$
$5l + 2$	$2\chi_{(2,0)}^{(1,2)} = 2\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + \chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 6\chi_{(2,0)}^{(1,3)}$
	$2\chi_{(1,0)}^{(2,1)} = \chi_{(3,0)}^{(1,1)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 4\chi_{(1,0)}^{(2,2)}$
$6l + 1$	$\chi_{(1,0)}^{(1,4)} = \chi_{(2,0)}^{(1,3)} + \chi_{(1,0)}^{(2,2)} + 5\chi_{(1,0)}^{(1,5)}$
$7l$	$2\chi_{(0)}^{(7)} = \chi_{(1,0)}^{(1,5)} + 16\chi_{(0)}^{(8)}$

– при четном l и нечетном $n \leq 7l + 3$

$$\chi(f(M)) = \frac{1}{2} \chi_{(1)}^{(1)} + \frac{1}{4} [\chi_{(3)}^{(1)} - \chi_{(3)}^{(3)} + \chi_{(5)}^{(1)}]; \quad (5.8)$$

– при нечетном l и четном $n \leq 6l + 2$

$$\begin{aligned} \chi(f(M)) = & -\chi_{(0)}^{(2)} + 5\chi_{(0)}^{(4)} - 2\chi_{(2,0)}^{(1,1)} - \chi_{(1)}^{(2)} - 6\chi_{(1,0)}^{(1,3)} - 61\chi_{(0)}^{(6)} \\ & + 7\chi_{(3,0)}^{(1,1)} + 5\chi_{(2,1)}^{(1,1)} + 40\chi_{(2,0)}^{(1,3)} \\ & + 25\chi_{(1,0)}^{(2,2)} + 180\chi_{(1,0)}^{(1,5)} + 1385\chi_{(0)}^{(8)}; \end{aligned} \quad (5.9)$$

– при четном l и четном $n \leq 7l + 4$

$$\begin{aligned} \chi(f(M)) = & \chi_{(0)}^{(1)} + \chi_{(0)}^{(2)} + \chi_{(0)}^{(3)} + \chi_{(0)}^{(4)} - \chi_{(1)}^{(2)} + \chi_{(0)}^{(5)} - \chi_{(1,0)}^{(2,1)} + \chi_{(0)}^{(6)} \\ & + \chi_{(4)}^{(1)} - \chi_{(1,0)}^{(2,2)} + \chi_{(0)}^{(7)} + \chi_{(4,0)}^{(1,1)} + \chi_{(3,1)}^{(1,1)} + \chi_{(2)}^{(2)} - \chi_{(1,0)}^{(2,3)} + \chi_{(0)}^{(8)} \\ & + \chi_{(4,0)}^{(1,2)} + \chi_{(3,1,0)}^{(1,1,1)} + \chi_{(2,0)}^{(2,1)} + 2\chi_{(2,1)}^{(1,2)} - \chi_{(1,0)}^{(2,4)} + \chi_{(0)}^{(9)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой (1.1) и запишем соотношение (5.3) для каждого типа $\mathcal{A}$ особенностей образа отображения f такого, что

Таблица 4

Соотношения в случае четного l и четного $n \leq 7l + 4$

Коразмерность c	Соотношения
$2l + 1$	$\chi(1) = \chi(1)$
$3l + 1$	$\chi(1,0) = \chi(2) + \chi(1,0) - \chi(4) - \chi(2,1)$
$4l + 1$	$2\chi(1,0) = 2\chi(2,0) + 2\chi(1) + 2\chi(1,0) - 2\chi(4,0) - 3\chi(3,1) - 2\chi(2)$
$4l + 3$	$2\chi(3) = \chi(3,1)$
$5l + 1$	$2\chi(1,0) = 2\chi(2,0) + 2\chi(1,0) - 2\chi(4) + 2\chi(2,3) - 2\chi(4,0) - 3\chi(3,1,0) - 2\chi(2,0) - 4\chi(2,1)$
$5l + 3$	$2\chi(3,0) = 2\chi(4) + \chi(3,1,0)$
	$\chi(2,1) = \chi(4) + \chi(2,1)$
$6l + 1$	$\chi(1,4) = \chi(2,3) + \chi(2,0) - \chi(4,0) - \chi(3,1) - \chi(2) + \chi(1,0)$
$6l + 3$	$2\chi(3,0) = 2\chi(4,0) + \chi(3,1)$
	$\chi(2,1,0) = \chi(4,0) + \chi(3,1) + 2\chi(2)$
	$2\chi(3) = \chi(3,1)$
$6l + 5$	$\chi(5) = 0$
$7l + 1$	$\chi(1,5) = \chi(2,3) + \chi(2,0) - \chi(4,0) - \chi(3,1,0) - \chi(2,0) - \chi(2,1)$
$7l + 3$	$2\chi(3,0) = 2\chi(4,0) + \chi(3,1,0)$
	$\chi(2,1,0) = \chi(4,0) + \chi(3,1,0) + 2\chi(2,0) + \chi(2,1)$
	$2\chi(3,1) = \chi(3,1,0) + 2\chi(2,1)$
$8l + 1$	$\chi(1,6) = \chi(2,0) + \chi(1,0)$

многообразие $\mathcal{A}_f$ особенностей этого типа имеет нечетную размерность. В результате получится система однородных линейных уравнений, неизвестными которой являются эйлеровы характеристики всех многообразий особенностей множества $f(M)$.

Эта система легко представляется в треугольном виде относительно эйлеровых характеристик нечетномерных многообразий особенностей (необходимо лишь правильно занумеровать уравнения и неизвестные). Следовательно, эти эйлеровы характеристики линейно выражаются через остальные. Формулы, приведенные в пп. 4) и 6) теоремы, получены путем решения указанной системы на компьютере с использованием пакета программ “Mathematica”.

Доказательство утверждения 3) приведено в конце п. 5.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Пусть выполнены условия теоремы 5.2, многообразие M имеет четную размерность и $\chi(M)$ – его эйлерова характеристика. Тогда эйлерова характеристика $\chi((A_0)_f)$ многообразия $(A_0)_f$ неособых точек образа отображения f равна сумме $\chi(M)$ и линейной комбинации (с коэффициентами, не зависящими от M , V и f) эйлеровых характеристик четномерных многообразий

особенностей множества $f(M)$, коразмерность которых выше l (теорема 5.1 при $\mathcal{A} = A_0$). Поэтому формулы (5.7) и (5.10) можно переписать соответственно в виде

$$\begin{aligned}\chi(f(M)) = & \chi(M) + \frac{1}{2}[\chi(1) + 2\chi(3)] - \chi(1,2) - 9\chi(5) \\ & + \frac{1}{4}[5\chi(3) + 20\chi(2,0) + 10\chi(2,1) + 80\chi(1,4) + 620\chi(7)] \\ & - \frac{1}{4}[22\chi(4) + 112\chi(3,0) + 80\chi(2,1,1) + 55\chi(3) + 564\chi(2,4) \\ & + 372\chi(2,3) + 2584\chi(1,6) + 18116\chi(9)]\end{aligned}\quad (5.11)$$

(напомним, что здесь l и n нечетные, $n \leq 6l + 3$) и

$$\begin{aligned}\chi(f(M)) = & \chi(M) - \chi(2) - 2\chi(3) + \chi(1) - 3\chi(4) + \chi(2,0) + \chi(1) - 4\chi(5) \\ & + \chi(2,0) + 2\chi(2,1) - 5\chi(6) - 2\chi(4) + \chi(2,3) + 3\chi(2,2) - 6\chi(7) \\ & - 3\chi(4,0) - 4\chi(3,1) - 3\chi(2) + \chi(2,4) + 4\chi(2,3) - 7\chi(8) \\ & - 4\chi(4,0) - 5\chi(3,1,1) - 4\chi(2,0) - 7\chi(2,1) \\ & + \chi(2,5) + 5\chi(2,4) - 8\chi(9)\end{aligned}\quad (5.12)$$

(здесь l и n четные, $n \leq 7l + 4$).

5.3. Полнота системы соотношений (5.4). Пусть $\mathcal{W}$ – множество всех устойчивых гладких отображений коранга не выше 1 гладких замкнутых многообразий в гладкие замкнутые многообразия большей размерности. Зафиксируем порядок на полугруппе $\mathbb{A}$. Тогда каждому отображению $f \in \mathcal{W}$ можно сопоставить вектор в векторном пространстве $\mathbb{R}^\infty$ бесконечных финитных последовательностей вещественных чисел. А именно, отображению f мы сопоставляем последовательность $\chi(f)$ эйлеровых характеристик $\chi(\mathcal{A}_f)$ многообразий $\mathcal{A}_f$ особенностей типов $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ его образа.

Рассмотрим подмножество Ω в $\mathbb{R}^\infty$, образованное последовательностями $\chi(f)$ для отображений f из какого-нибудь класса $W \subseteq \mathcal{W}$. Предположим, что ненулевая линейная функция $a: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ принимает во всех точках из Ω одинаковые значения $b \in \mathbb{R}$. Тогда мы будем говорить, что имеется *универсальное* (для отображений класса W) *линейное соотношение* $a(x) = b$ между членами последовательностей $x \in \Omega$. Система универсальных линейных соотношений между членами последовательностей из множества Ω называется *полной*, если соотношения этой системы определяют минимальное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^\infty$, содержащее Ω .

Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbb{Z}_2$ – произвольные классы вычетов по модулю 2 в кольце целых чисел. Через $W(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ обозначим класс отображений $f \in \mathcal{W}$, у которых размерность многообразия-образа больше размерности многообразия-прообраза и принадлежит $\mathcal{P}_1$, а коразмерность образа отображения (в многообразии-образе) принадлежит $\mathcal{P}_2$.

ТЕОРЕМА 5.3. Для каждой упорядоченной пары $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, где $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathbb{Z}_2$, формула (5.4) определяет систему универсальных линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей образов отображений f класса $W(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$.

Данное утверждение является следствием теоремы 5.2. Всего имеется четыре системы универсальных линейных соотношений, о которых говорится в теореме 5.3.

ТЕОРЕМА 5.4. *Каждая из этих четырех систем универсальных линейных соотношений является полной.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Эйлеровы характеристики многообразий особенностей образов рассматриваемых нами отображений ограничены также условиями типа неравенства и делимости. Например, число точек тройного самопересечения образа устойчивой иммерсии $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ гладкого замкнутого двумерного многообразия в пространство $\mathbb{R}^3$ (т.е. число особенностей типа $3A_0$) сравнимо по модулю 2 с эйлеровой характеристикой $\chi(M)$ многообразия M (см. [12]). Все ограничения на эйлеровы характеристики многообразий особенностей образов устойчивых гладких отображений коранга не выше 1 в многообразия большей размерности нам не известны.

Зафиксируем произвольные целые положительные m и n такие, что $l = n - m > 0$. Через $W_{n,l} \subset \mathcal{W}$ обозначим класс устойчивых гладких отображений коранга не больше 1 гладких замкнутых m -мерных многообразий в гладкие замкнутые многообразия размерности n . Теорема 5.4 вытекает, очевидно, из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5.5. *Составим список типов $A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ особенностей, которые могут быть у образа отображения класса $W_{n,l}$. Пусть этот список состоит из d элементов ($d < \infty$). Рассмотрим подмножество Ω в $\mathbb{R}^d$, образованное (упорядоченными) наборами эйлеровых характеристик $\chi(\mathcal{A}_f)$ многообразий $\mathcal{A}_f$ особенностей типов $\mathcal{A}$ из этого списка у образов отображений $f \in W_{n,l}$. Тогда система соотношений вида (5.4) задает минимальное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$, содержащее множество Ω .*

Составим список $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ всех элементов $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A}$ таких, что

$$\text{codim } \mathcal{A} = (l+1) \sum_{i=1}^p \mu_i + pl \leq n, \quad \text{codim } \mathcal{A} \equiv n \pmod{2} \quad (5.13)$$

(многообразия особенностей соответствующих типов у образов отображений рассматриваемого класса четномерны). Каждому отображению $f \in W_{n,l}$ сопоставим вектор

$$v(f) = (\chi(\mathcal{A}_f^1), \dots, \chi(\mathcal{A}_f^N)) \in \mathbb{R}^N$$

из эйлеровых характеристик $\chi(\mathcal{A}_f^i)$ многообразий $\mathcal{A}_f^i$ особенностей типов $\mathcal{A}^i$, $i = 1, \dots, N$, его образа. Через G обозначим подмножество в $\mathbb{R}^N$, образованное векторами $v(f)$ для всех отображений $f \in W_{n,l}$. Теорема 5.5 вытекает из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5.6. *Множество G содержит полугруппу с N линейно независимыми образующими.*

Теорема 5.6 доказывается путем построения достаточного количества примеров отображений рассматриваемого типа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для любых целых положительных m и n таких, что $l = n - m > 0$, и для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ такого, что*

Эта кривая трансверсально пересекает сферу S^n , причем ровно в одной точке. Таким образом, сфера S^n трансверсальна каждому страту указанной стратификации и пересекает страт $\mathcal{A}_f$ особенностей типа $\mathcal{A}$ ровно в двух точках. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Для любых целых положительных m и n таких, что $l = n - m > 0$, и для любого $\mathcal{A} = A_{\mu_1} + \dots + A_{\mu_p} \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ такого, что $\text{codim } \mathcal{A} = c \leq n$, существует устойчивое гладкое отображение $f: M \rightarrow V$ коранга не больше 1 гладкого замкнутого m -мерного многообразия M в гладкое замкнутое многообразие V размерности n , обладающее следующими свойствами:*

- 1) *его образ не имеет особенностей коразмерности выше c , а все особенности коразмерности c имеют тип $\mathcal{A}$;*
- 2) *многообразие $\mathcal{A}_f$ особенностей типа $\mathcal{A}$ образа отображения f диффеоморфно несвязному объединению двух сфер размерности $n - c$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомым отображением является, например, отображение

$$\widetilde{M}^{c-l} \times S^{n-c} \rightarrow \widetilde{V}^c \times S^{n-c}, \quad (x, s) \mapsto (\tilde{f}(x), s), \quad (5.14)$$

где $\widetilde{M}$ и $\widetilde{V}$ – гладкие замкнутые многообразия размерностей $c - l$ и c соответственно, а $\tilde{f}: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{V}$ – устойчивое гладкое отображение коранга не больше 1, образ которого имеет ровно две особенности типа $\mathcal{A}$ и не имеет других изолированных особенностей (такие многообразия и отображение существуют согласно предложению 5.1). Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Вместо сферы S^{n-c} в формуле (5.14) можно взять любое гладкое замкнутое $(n - c)$ -мерное многообразие Z . В этом случае многообразие $\mathcal{A}_f$ диффеоморфно несвязному объединению двух копий Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.6. Сначала заметим, что в случае четного n эйлерову характеристику дополнения $V \setminus f(M)$ к образу данного отображения $f: M^m \rightarrow V^n$ можно увеличить на любое целое положительное число, не меняя при этом сам образ $f(M)$. Для этого можно, например, добавить к многообразию V соответствующее количество дополнительных связных компонент, диффеоморфных $\mathbb{R}P^n$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно найти полугруппу с N линейно независимыми образующими в множестве векторов вида $(\chi(\mathcal{A}_f^1), \dots, \chi(\mathcal{A}_f^N)) \in \mathbb{R}^N$, $f \in W_{n,l}$, где $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^N$ – список ненулевых элементов полугруппы $\mathbb{A}$, удовлетворяющих условиям (5.13).

Предположим, что этот список сформирован по неубыванию чисел $\text{codim } \mathcal{A}^i$. В частности, $\mathcal{A}^1 = A_0$ при четном m , $\mathcal{A}^1 = A_1$, если m и n нечетные, и $\mathcal{A}^1 = 2A_0$, если m нечетное, а n четное. Зафиксируем гладкие замкнутые m -мерные многообразия $M_1, \dots, M_N$, гладкие замкнутые n -мерные многообразия $V_1, \dots, V_N$ и устойчивые гладкие отображения $f_i: M_i \rightarrow V_i$, $i = 1, \dots, N$, коранга не больше 1, обладающие свойствами 1), 2) из предложения 5.2 для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^i$ соответственно. Через $\chi_{i,j}$ обозначим эйлерову характеристику многообразия $\mathcal{A}_{f_i}^j$, образованного особенностями типа $\mathcal{A}^j$ образа отображения f_i , где $i, j = 1, \dots, N$.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ – произвольные целые неотрицательные числа, среди которых хотя бы одно не равно нулю. Рассмотрим отображение $f: M \rightarrow V$, где:

1) M – гладкое многообразие размерности m , имеющее $\alpha_1 + \dots + \alpha_N$ связных компонент $M_{i,j}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, \alpha_i$, таких, что для любых i, j существует C^∞ -диффеоморфизм $g_{i,j}: M_i \rightarrow M_{i,j}$;

2) V – гладкое многообразие размерности n , имеющее $\alpha_1 + \dots + \alpha_N$ связных компонент $V_{i,j}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, \alpha_i$, таких, что для любых i, j существует C^∞ -диффеоморфизм $h_{i,j}: V_i \rightarrow V_{i,j}$;

3) отображение f замыкает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{f_i} & V_i \\ \downarrow g_{i,j} & & \downarrow h_{i,j} \\ M & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

для любых $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, \alpha_i$.

Легко видеть, что отображение f является устойчивым гладким отображением коранга не больше 1. Эйлерова характеристика многообразия $(\mathcal{A}^j)_f$ особенностей типа $\mathcal{A}^j$ образа этого отображения равна $\sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{i,j}$ для любого $j = 1, \dots, N$.

Рассмотрим полугруппу в $\mathbb{R}^N$, состоящую из векторов

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{i,N} \right),$$

соответствующих всевозможным упорядоченным наборам целых неотрицательных чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. Эта полугруппа порождена векторами $v_i = (\chi_{i,1}, \dots, \chi_{i,N})$, $i = 1, \dots, N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Векторы $v_1, \dots, v_N$ линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $(N \times N)$ -матрицу $\mathcal{M}$, строками которой служат векторы $v_1, \dots, v_N$. Матрица $\mathcal{M}$ является нижнетреугольной (по построению $\chi_{i,j} = 0$ при всех $j > i$). На ее главной диагонали стоят ненулевые числа:

$$\chi_{i,i} = 2\chi(S^{n-\text{codim } \mathcal{A}^i}) = 4$$

для любого $i = 1, \dots, N$ (напомним, что $\text{codim } \mathcal{A}^i \equiv n$ по модулю 2).

Таким образом, $\det \mathcal{M} \neq 0$. Предложение доказано.

Теорема 5.6 следует теперь из предложения 5.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Можно показать, что теоремы 5.5 и 5.6 справедливы даже в классе устойчивых гладких отображений коранга не больше 1 в $\mathbb{R}^n$, определенных на гладких замкнутых связных гиперповерхностях, вложенных в $\mathbb{R}^{m+1}$ ($0 < m < n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3) ТЕОРЕМЫ 5.2. Предположим, что существует целое $l > 0$, для которого утверждение неверно. Зафиксируем это l и рассмотрим минимальное n , при котором существуют $\mathcal{A}^0, X^0 \in \mathbb{A}$ такие, что

$$\text{codim } \mathcal{A}^0 < \text{codim } X^0 = n, \quad \text{codim } \mathcal{A}^0 \equiv n - 1 \pmod{2},$$

а число $K_{\mathcal{A}^0}^{(l)}(X^0)2^\alpha$ не является целым ни при каком целом $\alpha \geq 0$ (из табл. 1–4 видно, что $n > 6l + 2$).

Возьмем элемент X^0 и построим устойчивое гладкое отображение f коранга не больше 1 гладкого замкнутого $(n - l)$ -мерного многообразия в гладкое замкнутое многообразие размерности n такое, что образ f имеет ровно две особенности типа X^0 и не имеет других изолированных особенностей (такое отображение существует в силу предложения 5.1). Для отображения f должно быть выполнено соотношение (5.4), соответствующее элементу $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0$. Однако такое равенство невозможно при указанных выше предположениях, поскольку число $K_{\mathcal{A}^0}^{(l)}(X^0)\chi(X_f^0) = 2K_{\mathcal{A}^0}^{(l)}(X^0)$ не может быть суммой дробей, знаменатели которых являются степенями двойки. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Список литературы

1. В. И. Арнольд, “Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k , C_k , F_4 и особенности эволют”, *УМН*, **33**:5 (1978), 91–105; англ. пер.: V. I. Arnol’d, “Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k , C_k , F_4 and singularities of evolutes”, *Russian Math. Surveys*, **33**:5 (1978), 99–116.
2. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982; англ. пер.: V. I. Arnol’d, S. M. Gusejn-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. The classification of critical points, caustics and wave fronts*, Monogr. Math., **82**, Birkhäuser, Boston, 1985.
3. В. И. Арнольд, В. А. Васильев, В. В. Горюнов, О. В. Ляшко, *Особенности*, т. 1, Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундам. напр., **6**, ВИНТИ, М., 1988; англ. пер.: V. I. Arnol’d, V. A. Vasil’ev, V. V. Goryunov, O. V. Lyashko, *Singularities. Local and global theory*, Dynamical systems. VI: Singularity theory I, Encyclopaedia Math. Sci., **6**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
4. М. Голубицкий, В. Гийемин, *Устойчивые отображения и их особенности*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., **14**, Springer-Verlag, New York, 1973.
5. М. Горески, Р. Макферсон, *Стратифицированная теория Морса*, Мир, М., 1991; пер. с англ.: M. Goresky, R. MacPherson, *Stratified Morse theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **14**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
6. М. Э. Казарян, “Мультиособенности, кобордизмы и исчислительная геометрия”, *УМН*, **58**:4 (2003), 29–88; англ. пер.: M. È. Kazarian, “Multisingularities, cobordisms, and enumerative geometry”, *Russian Math. Surveys*, **58**:4 (2003), 665–724.
7. Дж. Н. Мазер, “Стратификации и отображения”, *УМН*, **27**:5 (1972), 85–118; пер. с англ.: J. N. Mather, “Stratifications and mappings”, *Dynamical systems*, Proc. Sympos., Univ. Bahia (Salvador, Brazil, 1971), Academic Press, New York, 1973, 195–232.
8. В. Д. Седых, “Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей коранга 1 фронта общего положения”, *Докл. РАН*, **383**:6 (2002), 735–739; англ. пер.: V. D. Sedykh, “Relations between the Euler numbers of manifolds of corank 1 singularities of a generic front”, *Dokl. Math.*, **65**:2 (2002), 276–279.
9. В. Д. Седых, “Разрешение особенностей коранга 1 фронта общего положения”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37**:2 (2003), 52–64; англ. пер.: V. D. Sedykh, “Resolution of corank 1 singularities of a generic front”, *Funct. Anal. Appl.*, **37**:2 (2003), 123–133.
10. Седых В. Д., “О топологии образа устойчивого гладкого отображения с особенностями коранга 1”, *Докл. РАН*, **395**:4 (2004), 459–463; англ. пер.: V. D. Sedykh, “On

- the topology of the image of a stable smooth mapping with singularities of corank 1", *Dokl. Math.*, **69**:2 (2004), 235–239.
11. В. Д. Седых, "О топологии устойчивых особенностей коранга 1 на крае связной компоненты дополнения к фронту", *Матем. сб.*, **195**:8 (2004), 91–130; англ. пер.: V. D. Sedykh, "On the topology of stable corank 1 singularities on the boundary of a connected component of the complement to a front", *Sb. Math.*, **195**:8 (2004), 1165–1203.
 12. Th. Banchoff, "Triple points and singularities of projections of smoothly immersed surfaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **46**:3 (1974), 402–406.
 13. S. J. Colley, "Enumerating stationary multiple-points", *Adv. Math.*, **66**:2 (1987), 149–170.
 14. V. V. Goryunov, "Semi-simplicial resolutions and homology of images and discriminants of mappings", *Proc. London Math. Soc.* (3), **70**:2 (1995), 363–385.
 15. S. Izumiya, W. L. Marar, "On topologically stable singular surfaces in a 3-manifold", *J. Geom.*, **52**:1–2 (1995), 108–119.
 16. S. L. Kleiman, "Multiple-point formulas. I: Iteration", *Acta Math.*, **147**:1 (1981), 13–49.
 17. S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analitiques*, Bure sur Yvette, IHES, 1965.
 18. W. L. Marar, D. Mond, "Multiple point schemes for corank 1 maps", *J. London Math. Soc.* (2), **39**:3 (1989), 553–567.
 19. C. McCrory, A. Parusiński, "Algebraically constructible functions", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **30**:4 (1997), 527–552.
 20. B. Morin, "Formes canoniques des singularités d'une application différentiable", *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.*, **260** (1965), 5662–5665.
 21. M. C. Romero Fuster, "Sphere stratifications and the Gauss map", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A*, **95**:1–2 (1983), 115–136.
 22. V. D. Sedykh, "The topology of corank 1 multi-singularities of stable smooth mappings of equidimensional manifolds", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **340**:6 (2005), 441–444.
 23. A. Szűcs, "Cobordism of maps with simplest singularities", *Topology Symposium* (Siegen, 1979), Lecture Notes in Math., **788**, Springer-Verlag, Berlin, 1980, 223–244.
 24. C. T. C. Wall, "Stratified sets: a survey", *Proceedings of Liverpool Singularities – Symposium. I*, Dept. Pure Math. Univ. (Liverpool, 1969–1970), Lecture Notes in Math., **192**, Springer-Verlag, Berlin, 1971, 133–140.

В. Д. СЕДЫХ (V. D. SEDYKH)
 Российский государственный университет
 нефти и газа им. И. М. Губкина
 E-mail: sedykh@mccme.ru

Поступило в редакцию
 25.03.2004