Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Клячин, О многомерном аналоге примера Шварца,
Изв. РАН. Сер. матем., 2012, том 76, выпуск 4, 41–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im6845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:43:22

УДК 514.174.3

В. А. Клячин

О многомерном аналоге примера Шварца

Построен ряд примеров, показывающих, что в многомерном случае, в отличие от двумерного, не выполняется свойство приближения производных для кусочно линейных аппроксимаций гладкой функции на основе триангуляции Делоне. Построенные примеры имеют тесную связь с классическим примером Шварца о кусочно линейных приближениях боковой поверхности прямого кругового цилиндра.

Библиография: 9 наименований.

Ключевые слова: классический пример Шварца, триангуляция Делоне.

§ 1. Классический пример Шварца

Напомним конструкцию классического примера Шварца [1, гл. 11, § 7]. Рассмотрим цилиндр C , заданный уравнением $x^2 + y^2 = 1$ и неравенствами $0 \leq z \leq 1$. Зафиксируем два натуральных числа m, n . Для $k = 0, 1, \dots, 2m$ и $j = 0, 1, \dots, n - 1$ построим точки

$$P_{kj} = \begin{cases} \left(\cos \frac{2j\pi}{n}, \sin \frac{2j\pi}{n}, \frac{k}{2m} \right), & \text{если } k \text{ четно,} \\ \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{n}, \sin \frac{(2j+1)\pi}{n}, \frac{k}{2m} \right), & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Положим $P_{kn} = P_{k0}$ для всех $k = 0, \dots, 2m$. Очевидно, что все эти точки лежат на цилиндре C . Построим теперь $4mn$ одинаковых треугольников с вершинами из данного набора точек. Для этого всякую вершину P_{kj} , $k = 1, \dots, 2m$, $j = 0, \dots, n - 1$, соединим ребрами с вершинами $P_{k-1, j-1}$, $P_{k-1, j+1}$ и всякую вершину P_{kj} , $k = 0, \dots, 2m - 1$, $j = 0, \dots, n - 1$, соединим ребрами с вершинами $P_{k+1, j-1}$, $P_{k+1, j+1}$. Тем самым получим многогранную поверхность, вписанную в цилиндр C . В [1] показано, что площадь этой многогранной поверхности стремится к боковой площади цилиндра при $n, m \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $m/n^2 \rightarrow 0$. Следует отметить, что в общем случае, если в поверхность класса C^2 вписана многогранная поверхность, состоящая из треугольников, условие сходимости соответствующих площадей, когда диаметры треугольников стремятся к нулю, имеет вид

$$\max_T \frac{d_T}{\operatorname{tg} \varphi_T} \rightarrow 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-97021-р_поволжье_а).

Здесь d_T – максимальная сторона, φ_T – максимальный острый угол треугольника T и максимум берется по всем треугольникам, являющимся гранями вписанной поверхности. Доказательство имеется в работе [2]. Для примера Шварца это условие совпадает с указанным выше.

В настоящей работе мы раскрываем некоторые особенности многомерного аналога приведенного примера, которые принципиально отсутствуют в двумерном случае.

§ 2. Погрешность вычисления для симплекса

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан конечный набор точек $P = \{p_i\}$, $i = 1, \dots, N$. Для функции $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ можно поставить задачу о приближенном вычислении производных по известным значениям функции в точках p_i . Одним из методов решения такой задачи является метод, основанный на построении триангуляции T множества точек P – системы симплексов с вершинами из P , которые попарно не пересекаются по внутренним точкам. Если такой симплекс $S \in T$ имеет вершины $p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_n} \in P$, то можно найти функцию вида $f_S(x) = \langle a, x \rangle + b$ такую, что

$$f(p_{i_k}) = f_S(p_{i_k}), \quad k = 0, \dots, n.$$

Тогда приближенным значением градиента $\nabla f(x)$ для точек $x \in S$ можно считать значение градиента этой линейной функции $\nabla f_S(x)$. Напомним, что триангуляция T называется *триангуляцией Делоне* [3], если выполнено следующее условие пустоты сферы: для всякого симплекса $S \in T$ его описанная сфера не содержит внутри себя точек набора P . Более того, если многогранная поверхность вписана в гладкую поверхность, как в примере Шварца, и ее грани являются симплексами, то такую триангуляцию поверхности будем называть *триангуляцией Делоне*, если выполнено условие пустоты сферы для каждой грани. При этом среди всех сфер, содержащих вершины грани, выбирается сфера, имеющая наименьший радиус. Несложно заметить, что такая сфера имеет центр, расположенный на плоскости грани. Это условие было введено и изучено в работе [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Проиллюстрируем важность условия пустоты сферы на примере Шварца, приведенном выше. Несложно подсчитать, что радиус описанной окружности каждого из $4mn$ полученных в этом примере треугольников выражается формулой

$$R = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}{2\sqrt{\left(\frac{1}{4m}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}}.$$

Тогда если будет выполнено условие пустоты сферы такого радиуса для рассматриваемого треугольника, то

$$\frac{1}{2m} \geq R.$$

Теперь, используя неравенство $\sin x \geq 2x/\pi$ для $x \in [0, \pi/2]$, перепишем это условие в виде

$$\frac{m}{n^2} \leq \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{1}{4m}\right)^2 + \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2},$$

откуда получаем, что при $m, n \rightarrow \infty$ непременно $m/n^2 \rightarrow 0$. Таким образом, выполнение условия Делоне обеспечивает сходимость площадей многогранных поверхностей к боковой площади цилиндра в примере Шварца.

На самом деле, в двумерном случае замечание 1 носит общий характер [5]. Введем обозначение

$$\delta_S(f) = \max_{x \in S} |\nabla f(x) - \nabla f_S(x)| \quad (1)$$

для погрешности вычисления градиента. Пусть также d_S обозначает диаметр симплекса S . Отметим, что использование треугольных и тетраэдральных сеток при численном решении задач математической физики весьма распространено (см., например, работы [6]–[9], а также цитируемую в них литературу, однако в указанных работах отсутствуют априорные оценки погрешности (1) вычисления производных). Несмотря на кажущуюся простоту приведенного выше метода аппроксимации градиента решение задачи получения оценки величины (1) в терминах геометрии ячеек сетки и их взаимного расположения в $\mathbb{R}^n$ приводит к нетривиальным результатам. Так, например, рассмотренный выше классический пример Шварца показывает, что величина $\delta_S(f)$ может быть даже неограниченной при $d_S \rightarrow 0$. Из рассмотрения этого примера также следует, что поведение погрешности $\delta_S(f)$ тесно связано со структурой симплекса (в двумерном случае треугольника), определяющей степень его невырожденности. Так, в [5] было доказано, что при $n = 2$ в случае триангуляции Делоне набора точек P , образующих ε -сеть, справедлива оценка

$$\max_{S \in T} \delta_S(f) \leq C(f)\varepsilon. \quad (2)$$

При этом константа $C(f)$ была предъявлена в конкретном виде. Последнее неравенство является следствием неравенства для погрешности в отдельном треугольнике

$$\delta_S(f) \leq C(f)R(S), \quad (3)$$

где $R(S)$ – радиус описанной окружности треугольника S . Попытки распространить эти результаты в случае многомерных пространств не привели к ожидаемому успеху. Тем не менее, в работе [5] для случая $n = 3$ было доказано неравенство, аналогичное неравенству (2), для триангуляций, в которых все тетраэдры являются остроугольными (т. е. рассмотрен частный случай триангуляции Делоне). Несмотря на это вопрос о существовании оценки вида (3) до определенного момента времени оставался открытым. Существование такой оценки давало бы возможность использовать триангуляцию Делоне в задачах приближенного вычисления производных функций, заданных на нерегулярных

сетях. Однако, как оказалось, при $n \geq 3$ оценка (3) не может быть доказана в принципе. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Найдутся C^2 -гладкая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и последовательность симплексов S_m , $m = 1, 2, \dots$, стягивающихся к точке $(0, 0, \dots, 0)$, такие, что $\delta_{S_m}(f) \rightarrow \infty$, тогда как $R(S_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что достаточно рассмотреть случай $n = 3$. Положим

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2.$$

Коэффициенты a, b, c выберем так, чтобы они не были попарно равными. Рассмотрим три таких числа $h > 0$, $\alpha > 1$, $r > 0$, что $r > \alpha h$. Построим симплекс с вершинами в точках

$$\begin{aligned} p_0 &= (-h, 0, \sqrt{r^2 - h^2}), & p_1 &= (0, -h, \sqrt{r^2 - h^2}), \\ p_2 &= (0, h, \sqrt{r^2 - h^2}), & p_3 &= (\alpha h, 0, \sqrt{r^2 - \alpha^2 h^2}). \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned} f(p_0) &= (a - c)h^2 + cr^2, & f(p_1) &= (b - c)h^2 + cr^2, \\ f(p_2) &= (b - c)h^2 + cr^2, & f(p_3) &= (a - c)\alpha^2 h^2 + cr^2. \end{aligned}$$

Если $f_S(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$, то, решая систему уравнений $f_S(p_i) = f(p_i)$, $i = 0, \dots, 3$, получим

$$\begin{aligned} A &= (b - a)h, & B &= 0, \\ C &= \left(\sqrt{r^2 - h^2} + \sqrt{r^2 - \alpha^2 h^2} \right) \frac{b - a\alpha + c(\alpha - 1)}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\delta_S(f) = |\nabla f(x, y, z) - \nabla f_S(x, y, z)| \geq |C| - 2r.$$

Заметим, что сфера $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ является описанной для тетраэдра с вершинами p_0, p_1, p_2, p_3 . Выберем $h = r/2$, $\alpha = 1 + r^2$, а $r < 1$. Условие $r > \alpha h = (1 + r^2)r/2$, очевидно, выполнено. Тогда при $r \rightarrow 0$ будем иметь $C \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

§ 3. Погрешность вычисления для триангуляции Делоне

Построенный в § 2 пример приводит к постановке вопроса о существовании оценки вида (2) для тетраэдральных сеток, удовлетворяющих условию Делоне. В отличие от плоских триангуляций, в многомерном случае для существования подобной оценки одного условия пустоты сферы недостаточно. Ниже мы построим соответствующий пример. Для этого нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Выберем три положительных числа a, b, c и произвольную точку (X, Y, Z) из $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим набор точек

$$\begin{aligned} p_0 &= (X, Y, Z), & p_1 &= (X + a, Y, Z), \\ p_2 &= (X, Y + b, Z), & p_3 &= (X, Y, Z + c), \\ p_4 &= (X + a, Y + b, Z), & p_5 &= (X + a, Y, Z + c), \\ p_6 &= (X, Y + b, Z + c), & p_7 &= (X + a, Y + b, Z + c), \end{aligned}$$

лежащих в вершинах параллелепипеда Π со сторонами a, b, c . Построим следующие пять тетраэдров:

- 1) S_1 с вершинами в точках p_0, p_1, p_2, p_3 ;
- 2) S_2 с вершинами в точках p_1, p_4, p_2, p_7 ;
- 3) S_3 с вершинами в точках p_1, p_7, p_3, p_5 ;
- 4) S_4 с вершинами в точках p_2, p_3, p_7, p_6 ;
- 5) S_5 с вершинами в точках p_1, p_2, p_3, p_7 .

Заметим, что

$$\Pi = \bigcup_{k=1}^5 S_k,$$

и любые два таких тетраэдра не пересекаются по внутренним точкам. Более того, эти тетраэдры образуют триангуляцию множества точек $p_0, p_1, \dots, p_7$, которая удовлетворяет условию Делоне, поскольку для всех этих тетраэдров описанной сферой является сфера с радиусом $(a^2 + b^2 + c^2)/2$ и центром в точке $(X + a/2, Y + b/2, Z + c/2)$. Для объемов тетраэдров $S_1, \dots, S_5$ имеем

$$|S_1| = |S_2| = |S_3| = |S_4| = \frac{abc}{6}, \quad |S_5| = \frac{abc}{3}.$$

Теперь рассмотрим функцию $f(x, y, z) = yz$. В дальнейшем для краткости будем записывать S вместо S_5 . Имеет место

ЛЕММА 1. Если $f_S(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$ — аффинная функция, совпадающая с функцией $f(x, y, z)$ в вершинах тетраэдра S , то

$$\nabla f_S = \left(\frac{bc}{2a}, Z + \frac{c}{2}, Y + \frac{b}{2} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} f(p_1) &= YZ, & f(p_2) &= (Y + b)Z, \\ f(p_3) &= Y(Z + c), & f(p_7) &= (Y + b)(Z + c). \end{aligned}$$

Условие равенства значений функций f и f_S в вершинах тетраэдра приводит к линейной системе уравнений

$$\begin{aligned} A(X + a) + BY + CZ + D &= YZ, \\ AX + B(Y + b) + CZ + D &= (Y + b)Z, \\ AX + BY + C(Z + c) + D &= Y(Z + c), \\ A(X + a) + B(Y + b) + C(Z + c) + D &= (Y + b)(Z + c). \end{aligned} \tag{4}$$

Вычитая второе уравнение из первого и четвертое из третьего, получим

$$Aa - Bb = -bZ, \quad -Aa - Bb = -b(Z + c),$$

откуда имеем

$$2Aa = bc, \quad 2Bb = 2bZ + bc, \quad A = \frac{bc}{2a}, \quad B = Z + \frac{c}{2}.$$

Теперь, вычитая третье уравнение в (4) из второго, получим

$$Bb - Cc = bZ - Yc,$$

откуда $C = Y + b/2$. Учитывая, что $\nabla f_S = (A, B, C)$, приходим к требуемому. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Для всякого $p \geq 1$ имеет место неравенство

$$\int_{\Pi} |\nabla f - \nabla f_S|^p \geq \frac{1}{3 \cdot 2^p} \frac{b^{p+1} c^{p+1}}{a^{p-1}}.$$

Здесь и далее интегрирование ведется относительно стандартной меры Лебега.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\nabla f = (0, z, y)$, поэтому

$$|\nabla f - \nabla f_S|^p = \left(\frac{b^2 c^2}{4a^2} + \left(z - Z - \frac{c}{2} \right)^2 + \left(y - Y - \frac{b}{2} \right)^2 \right)^{p/2} \geq \frac{b^p c^p}{2^p a^p}.$$

Окончательно получаем

$$\int_{\Pi} |\nabla f - \nabla f_S|^p \geq \int_{S_5} |\nabla f - \nabla f_S|^p \geq \frac{b^p c^p}{2^p c^p} |S_5| = \frac{1}{3 \cdot 2^p} \frac{b^{p+1} c^{p+1}}{a^{p-1}}.$$

Рассмотрим теперь куб $Q = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, три натуральных числа n_x, n_y, n_z и набор точек куба Q

$$P_{ijk} = \left(\frac{i}{n_x}, \frac{j}{n_y}, \frac{k}{n_z} \right),$$

где $i = 0, 1, \dots, n_x, j = 0, 1, \dots, n_y, k = 0, 1, \dots, n_z$. Куб Q разбивается на параллелепипеды плоскостями, проходящими через эти точки и параллельными координатным плоскостям. Размеры каждого такого параллелепипеда суть

$$a = \frac{1}{n_x}, \quad b = \frac{1}{n_y}, \quad c = \frac{1}{n_z}.$$

Для построения тетраэдральной сетки рассмотрим еще один способ разбиения параллелепипеда на пять тетраэдров. Именно, положим:

- 1) S'_1 с вершинами в точках p_0, p_5, p_6, p_3 ;
- 2) S'_2 с вершинами в точках p_4, p_6, p_5, p_7 ;
- 3) S'_3 с вершинами в точках p_0, p_1, p_4, p_5 ;

4) S'_4 с вершинами в точках p_0, p_2, p_4, p_6 ;

5) S'_5 с вершинами в точках p_0, p_4, p_6, p_5 .

Будем строить параллелепипеды, полагая $(X, Y, Z) = P_{ijk}$, при этом выбирая первый способ разбиения параллелепипеда, если $i + j + k$ четно, и второй способ, если $i + j + k$ нечетно. Заметим, что совокупность T полученных тетраэдров, построенных для всех рассматриваемых параллелепипедов, удовлетворяет условию Делоне. Это следует из того, что шар, описанный около любого такого параллелепипеда, не содержит внутри себя вершины любого другого такого параллелепипеда. Для функции $f(x, y, z) = yz$ обозначим через $f_T(x, y, z)$ кусочно-аффинную функцию, совпадающую с функцией f в рассматриваемом наборе точек.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место неравенство*

$$\int_Q |\nabla f - \nabla f_T|^p \geq \frac{1}{3 \cdot 2^p} \frac{n_x^p}{n_y^p n_z^p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что количество рассматриваемых параллелепипедов равно произведению $n_x n_y n_z$. Тогда в силу леммы 2, учитывая, что $a = \frac{1}{n_x}$, $b = \frac{1}{n_y}$, $c = \frac{1}{n_z}$, получим

$$\int_Q |\nabla f - \nabla f_T|^p \geq n_x n_y n_z \frac{1}{3 \cdot 2^p} \frac{\left(\frac{1}{n_y}\right)^{p+1} \left(\frac{1}{n_z}\right)^{p+1}}{\left(\frac{1}{n_x}\right)^{p-1}} = \frac{1}{3 \cdot 2^p} \frac{n_x^p}{n_y^p n_z^p},$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 2 видно, что при $n_x, n_y, n_z \rightarrow \infty$ погрешность не будет стремиться к нулю в $L^p(Q)$, если только не выполнено $n_x = o(n_y n_z)$.

Список литературы

1. Б. Гелбаум, Дж. Олмстед, *Контрпримеры в анализе*, Изд-во Платон, Волгоград, 1997; пер. с англ.: B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Holden-Day, San Francisco–London–Amsterdam, 1964.
2. В. А. Клячин, Е. А. Пабат, “ C^1 -аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **13:2** (2010), 69–78.
3. А. В. Скворцов, Н. С. Мирза, *Алгоритмы построения и анализа триангуляции*, Изд-во Томск. ун-та, Томск, 2006.
4. В. А. Клячин, А. А. Широкий, “Триангуляция Делоне многомерных поверхностей”, *Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия*, **4:78** (2010), 51–55.
5. В. А. Клячин, А. А. Широкий, “Аппроксимационные свойства триангуляции Делоне”, *Зап. сем. “Сверхмедленные процессы”*, **5**, Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2010, 8–14.
6. С. Н. Боровиков, И. Э. Иванов, И. А. Крюков, “Моделирование пространственных течений идеального газа с использованием тетраэдральных сеток”, *Матем. моделирование*, **18:8** (2006), 37–48.

7. М. Ю. Альес, С. М. Копысов, А. К. Новиков, “Построение и адаптация конечно-элементной сетки при решении эллиптической задачи второго порядка”, *Матем. моделирование*, **9:2** (1997), 43–45.
8. С. Н. Боровиков, И. А. Крюков, И. Э. Иванов, “Построение нерегулярных треугольных сеток на криволинейных гранях на основе триангуляции Делоне”, *Матем. моделирование*, **17:8** (2005), 31–45.
9. И. Г. Пушкина, В. Ф. Тишкин, “Адаптивные расчетные сетки из ячеек Дирихле для решения задач математической физики: методика построения, примеры”, *Матем. моделирование*, **12:3** (2000), 97–109.

В. А. Клячин (V. A. KLYACHIN)
Волгоградский государственный университет
E-mail: klchnv@mail.ru

Поступило в редакцию
26.01.2011