Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Зайцев, С. П. Мищенко, Рост некоторых многообразий супералгебр Ли, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 4, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im689>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 11:50:18

УДК 512.8

М. В. Зайцев, С. П. Мищенко

Рост некоторых многообразий супералгебр Ли

Изучаются числовые характеристики многообразий супералгебр Ли, в частности рост коразмерностей. Построен пример неразрешимого многообразия почти полиномиального роста. Доказано, что экспонента построенного многообразия равна трем. Кроме того, вычислены экспоненты роста двух известных ранее разрешимых многообразий.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

В статье изучается рост многообразий супералгебр Ли над полем нулевой характеристики (см. [1]).

Напомним необходимые определения. Пусть F – свободная неассоциативная алгебра, порожденная счетным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ над полем Φ , $\text{char } \Phi = 0$, а $\mathbf{V}$ – некоторое многообразие Φ -алгебр. Тогда совокупность тождеств многообразия $\mathbf{V}$ образует идеал I в F . Обозначим через P_n подпространство полилинейных элементов от $x_1, \dots, x_n$ в F . Положим

$$\gamma_n(\mathbf{V}) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap I}.$$

Последовательность $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}$, $n = 1, 2, \dots$, является числовой характеристикой многообразия $\mathbf{V}$. Понятно, что можно рассматривать пространство $P_n(\mathbf{V})$ полилинейных элементов степени n относительно свободной алгебры $F = F(X, \mathbf{V})$ многообразия $\mathbf{V}$. Действие $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ симметрической группы S_n естественным образом продолжается до автоморфизма алгебры $F = F(X, \mathbf{V})$. Пространство $P_n(\mathbf{V})$ становится при этом S_n -модулем. Исследование структуры $P_n(\mathbf{V})$ как S_n -модуля играет важную роль при изучении многообразия $\mathbf{V}$. Этот модуль является вполне приводимым. Рассмотрим разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров:

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_{\lambda} \chi_{\lambda}. \quad (1)$$

В случае алгебр Ли или ассоциативных алгебр размерность пространства полилинейных элементов относительно свободной алгебры, как принято, будем обозначать $c_n(\mathbf{V})$ вместо $\gamma_n(\mathbf{V})$. В случае если многообразие $\mathbf{V}$ порождается алгеброй A , т. е. $\mathbf{V} = \text{var } A$, то будем использовать обозначение $\gamma_n(A)$ или $c_n(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\mathbf{V}$ – многообразие Φ -супералгебр Ли, то можно рассмотреть еще одну числовую характеристику. Обозначим через $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ свободную супералгебру Ли над Φ с тем же множеством X четных и множеством $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ нечетных порождающих. Обозначим через R неоднородную

Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 07-01-00080 и № 06-01-00485) и программой “Ведущие научные школы” (грант НШ-5666.2006.1).

подалгебру в $\mathcal{L}$, порожденную элементами $z_i = x_i + y_i$, $i = 1, 2, \dots$, а через $\bar{P}_n$ – подпространство полилинейных полиномов от $z_1, \dots, z_n$ в R . Любое отображение $x_i \mapsto a_i \in L_0$, $y_i \mapsto b_i \in L_1$ со значениями в некоторой супералгебре Ли $L = L_0 \oplus L_1$ однозначно продолжается до гомоморфизма $R \rightarrow L$. Если L – свободная алгебра счетного ранга многообразия $\mathbf{V}$, то пересечение J ядер всех гомоморфизмов из R в L можно также интерпретировать как идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$ и рассматривать вместо $\gamma_n(\mathbf{V})$ коразмерности подпространств $\bar{P}_n \cap J$ в $\bar{P}_n$. Однако эти величины совпадают, поскольку для канонического эпиморфизма $\pi: F \rightarrow R$, где $\pi(x_i) = z_i$, выполняются равенства $\pi(P_n) = \bar{P}_n$, $\pi(I) = J$, $\pi^{-1}(J) = I$. Это позволяет проводить вычисления как в свободной неассоциативной алгебре, так и в свободной супералгебре Ли.

Рост многообразия $\mathbf{V}$ называют *полиномиальным*, если $\gamma_n(\mathbf{V}) < n^k$ при достаточно больших n , и *экспоненциальным*, если $a^n < \gamma_n(\mathbf{V}) < b^n$ для некоторых $a, b > 1$ при больших n . Если $\gamma_n(\mathbf{V})$ асимптотически больше a^n для любого заданного a , то $\mathbf{V}$ принято называть многообразием *сверхэкспоненциального* роста. Например, если $\mathbf{V}$ – многообразие всех ассоциативных Φ -алгебр, то $\gamma_n(\mathbf{V}) = n!$. Если $\mathbf{V}$ – многообразие всех алгебр Ли, то $\gamma_n(\mathbf{V}) = (n-1)!$. В случае ассоциативных алгебр хорошо известен результат А. Регева [2], согласно которому $\gamma_n(\mathbf{V}) < a^n$ для некоторого $a > 1$, если $\mathbf{V}$ – нетривиальное многообразие ассоциативных алгебр. В классе лиевских многообразий реализуются и сверхэкспоненциальные функции роста (см., например, [3], [4]). Однако общим для ассоциативных, лиевских, а также для супералгебр Ли оказалось отсутствие многообразий промежуточного роста таких, что функция $\gamma_n(\mathbf{V})$ растет быстрее любого полинома, но медленнее любой экспоненты (см., например, [1], [5], [6]). Отметим также, что к настоящему времени многообразия полиномиального роста описаны в терминах тождественных соотношений как в ассоциативном случае [7], так и в лиевском [8], [9], и в суперлиевском случае [1].

Определим еще одну важную числовую характеристику многообразия лиевых алгебр: так называемую экспоненту многообразия. В случае, когда последовательность коразмерностей $\gamma_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$, экспоненциально ограничена, т.е. $\gamma_n(\mathbf{V}) \leq d^n$, рассмотрим ограниченную последовательность $\sqrt[n]{\gamma_n(\mathbf{V})}$, $n = 1, 2, \dots$. В случае существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma_n(\mathbf{V})}$ назовем его *экспонентой многообразия*, которую обозначим $\text{Exp}(\mathbf{V})$.

В упомянутой работе авторов [1] были представлены два примера многообразий почти полиномиального роста: многообразие метабелевых супералгебр Ли и многообразие, порожденное алгеброй H , где $H = H_0 \oplus H_1$ – четырехмерная супералгебра Ли с базисом a, b, u, v и таблицей умножения $ab = 0$, $uv = 0$, $au = v$, $av = u$, $bu = u$, $bv = v$, $a^2 = 2b$, $b^2 = u^2 = v^2 = 0$, в которой $H_0 = \langle b, v \rangle$, $H_1 = \langle a, u \rangle$.

Основным результатом настоящей работы является построение нового примера многообразия почти полиномиального роста. Этим примером является многообразие, порожденное грассмановой оболочкой $\mathbb{Z}_2$ -градуированной трехмерной алгебры Ли $\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)$ матриц порядка два с нулевым следом. Кроме того, будут найдены экспоненты двух известных упомянутых выше примеров многообразий почти полиномиального роста.

§ 2. Вспомогательные результаты

Договоримся не использовать скобки в случае их левонормированной расстановки, т.е. $u_1 u_2 u_3 = (u_1 u_2) u_3$. Будем использовать обозначение ab^n для левонормированного произведения $ab \cdots b$, в котором b встречается n раз. На-

помним общепринятые обозначения некоторых многообразий супералгебр Ли. Многообразие, определяемое тождеством $x_1x_2 \equiv 0$, обозначим $\mathbf{A}$. Тождество $x_1x_2 \cdots x_{c+1} \equiv 0$ определяет многообразие $\mathbf{N}_c$. Многообразие $\mathbf{A}^2$ определяется тождеством $(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0$, а $\mathbf{N}_c\mathbf{A}$ – тождеством $(x_1x_2)(x_3x_4) \times \cdots \times (x_{2c+1}x_{2(c+1)}) \equiv 0$.

Как упоминалось во введении, в статье [1] был найден критерий полиномиальности роста многообразий супералгебр Ли. Этот критерий будет регулярно использоваться в настоящей работе, поэтому для удобства читателей приводим формулировку этого результата.

ТЕОРЕМА 1 [1]. *Многообразие $\mathbf{V}$ супералгебр Ли над полем нулевой характеристики имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- 1) $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c\mathbf{A}$;
- 2) существует такое k , что любой полилинейный полином, содержащий не менее k четных и k нечетных переменных, тождественно равен нулю в $\mathbf{V}$;
- 3) в многообразии $\mathbf{V}$ для любого $r = 0, 1, \dots, c-1$ выполняются тождества вида

$$(z_1z_2x_1 \cdots x_N)t_1 \cdots t_r(z_3z_4x_{N+1} \cdots x_{2N}) \\ \equiv \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma}^r (z_1z_2x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(N)})t_1 \cdots t_r(z_3z_4x_{\sigma(N+1)} \cdots x_{\sigma(2N)}),$$

где сумма берется лишь по тем подстановкам $\sigma \in S_{2N}$, для которых $\sigma(\{1, \dots, N\}) \not\subseteq \{1, \dots, N\}$.

Пусть $L = L_0 + L_1$ – относительно свободная $\mathbb{Z}_2$ -градуированная алгебра Ли некоторого многообразия градуированных алгебр Ли $\mathbf{V}$ с порождающими $x_1, x_2, \dots \in L_0$, $y_1, y_2, \dots \in L_1$. Обозначим пространство полилинейных элементов от $x_1, \dots, x_k$, $y_{k+1}, \dots, y_n$ этой алгебры через $P_{k,n-k}(\mathbf{V})$, а в случае свободной градуированной алгебры Ли просто $P_{k,n-k}$.

Определим отображение Θ из полилинейной компоненты $P_{k,m}$ свободной градуированной алгебры Ли $L(X, Y)$ с множеством четных свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ и нечетных $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ в свободную супералгебру Ли $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ с тем же множеством X четных и тем же множеством Y нечетных порождающих.

Для одночлена из свободной градуированной алгебры

$$f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = \cdots y_{p(1)} \cdots y_{p(2)} \cdots y_{p(m)} \cdots,$$

где p – некоторая перестановка, результат действия будет иметь вид

$$(\Theta f)(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) = (-1)^p \cdots y_{p(1)} \cdots y_{p(2)} \cdots y_{p(m)} \cdots.$$

Распространим действие по линейности на любой элемент полилинейной части. Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение Θ задает биекцию между многообразиями $\mathbb{Z}_2$ -градуированных алгебр Ли и многообразиями супералгебр Ли. Кроме того, если $V_1 \subset V_2$ – два различных многообразия $\mathbb{Z}_2$ -градуированных алгебр Ли, то $\Theta(V_1) \subset \Theta(V_2)$ – различные многообразия супералгебр Ли.*

Заметим также, что отображение Θ можно определить и в обратную сторону: из полилинейной компоненты свободной супералгебры Ли в свободную алгебру Ли.

Обозначим через G алгебру Грассмана со счетным числом образующих g_i , $i \in \mathbb{N}$. Алгебра G имеет естественную $\mathbb{Z}_2$ -градуировку $G = G_0 + G_1$, где G_0 – пространство элементов четной степени от образующих, а G_1 – нечетной степени. Напомним, что для $\mathbb{Z}_2$ -градуированной алгебры Ли $L = L_0 + L_1$ алгебра $G(L) = L_0 \otimes G_0 + L_1 \otimes G_1 \subset L \otimes G$ является супералгеброй Ли и называется *грассмановой оболочкой* алгебры L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $L = L_0 + L_1$ – $\mathbb{Z}_2$ -градуированная алгебра Ли и $U = G(L)$ – ее грассманова оболочка. Тогда $\gamma_n(U) \leq 2^n c_n(L)$. Если дополнительно существует такое k , что $f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t) = 0$ в L для любых $x_1, \dots, x_m \in L_0$, $y_1, \dots, y_t \in L_1$ при условии, что $m, t > k$, то $\gamma_n(U) \leq \alpha n^k c_n(L)$ для некоторой константы α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что если A, B – две $\mathbb{Z}_2$ -градуированные алгебры Ли с одинаковыми градуированными тождествами, то и супералгебры Ли $G(A)$ и $G(B)$ имеют одни и те же тождества. Поэтому алгебру L можно считать относительно свободной с порождающими $x_1, x_2, \dots \in L_0$, $y_1, y_2, \dots \in L_1$. Пусть алгебра Грассмана G порождена элементами $g_1, g_2, \dots$. Рассмотрим в $U = G(L)$ подалгебру, порожденную $v_1, v_2, \dots$, где $v_i = x_i \otimes g_{3i-2}g_{3i-1} + y_i \otimes g_{3i}$, $i = 1, 2, \dots$. Хотя эта алгебра и не является относительно свободной в $\text{var } U$, любое равное нулю полилинейное соотношение на $v_1, v_2, \dots, v_n$ является тождеством в $G(L)$. Поэтому $\gamma_n(U)$ равно числу линейно независимых полилинейных полиномов от $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Обозначим через W_n векторное пространство полилинейных одночленов от $z_1, z_2, \dots, z_n$, где $z_i = x_i + y_i$, в алгебре Ли L , а для любого набора $t = (t_1, \dots, t_n)$ длиной n из нулей и единиц через W_n^t обозначим линейную оболочку левонормированных произведений вида

$$w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)}, \quad \sigma \in S_n,$$

в которой $w_i = x_i$, если $t_i = 0$, и $w_i = y_i$, если $t_i = 1$. Тогда

$$W_n \subseteq \sum_{t \in \mathbb{Z}_2^n} W_n^t. \quad (2)$$

Заметим, что размерность любого подпространства W_n^t не превосходит $c_n(L)$. Отсюда следует первое утверждение предложения.

Пусть теперь любое произведение в алгебре L , содержащее не менее k четных и не менее k нечетных переменных, равно нулю. Тогда количество ненулевых слагаемых W_n^t в правой части (2) не превосходит $2 \cdot \binom{n}{k} = \frac{2n!}{k!(n-k)!}$, откуда следует второе утверждение предложения.

§ 3. Неразрешимые многообразия почти полиномиального роста

Рассмотрим алгебру Ли $\text{sl}(2, \Phi)$ квадратных матриц порядка два с нулевым следом. Пусть

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– стандартный базис этой алгебры. Положим

$$(\mathfrak{sl}(2, \Phi))_0 = \text{Span}\langle h \rangle, \quad (\mathfrak{sl}(2, \Phi))_1 = \text{Span}\langle e, f \rangle.$$

Тогда $\mathfrak{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi) = (\mathfrak{sl}(2, \Phi))_0 + (\mathfrak{sl}(2, \Phi))_1$ является $\mathbb{Z}_2$ -градуированной алгеброй Ли.

Для исследования многообразия супералгебр Ли, порожденного грассмано-вой оболочкой построенной градуированной алгебры, нам потребуются результаты о строении многообразия градуированных алгебр Ли, порожденного самой алгеброй $\mathbf{V}_0 = \text{var}(\mathfrak{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi))$.

Если L – относительно свободная алгебра многообразия, то обозначим через $(L^2)^2$ идеал алгебры L , являющийся линейной оболочкой элементов вида $(u_1 u_2)(u_3 u_4)$, $u_i \in L$, $i = 1, \dots, 4$.

Договоримся в градуированных тождественных соотношениях четные образующие обозначать через x с индексами или без индексов, нечетные обозначать через y , а в случае любой четности – через z .

В многообразии $\mathbf{V}_0$ в силу одномерности пространства четных элементов выполняется следующее градуированное тождественное соотношение, а также его следствие:

$$x_1 x_2 \equiv 0, \quad x y_1 y_2 \equiv x y_2 y_1. \quad (3)$$

Поскольку пространство нечетных элементов двумерно, то альтернирование по любым трем нечетным элементам будет также равно нулю.

ЛЕММА 1. *В многообразии $\mathbf{V}_0$ выполняется тождество*

$$x z_1^2 z_2^2 \equiv x z_2^2 z_1^2. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если z_1 и (или) z_2 являются четными, то (4) следует из (3). Пусть $x = h$, $z_1 = \alpha e + \beta f$, $z_2 = \gamma e + \delta f$. Тогда

$$\begin{aligned} x z_1^2 z_2^2 &= h(\alpha e + \beta f)^2 (\gamma e + \delta f)^2 = (2\alpha e - 2\beta f)(\alpha e + \beta f)(\gamma e + \delta f)^2 \\ &= (2\alpha\beta h + 2\beta\alpha h)(\gamma e + \delta f)^2 = 4\alpha\beta h(\gamma e + \delta f)^2 = 16\alpha\beta\gamma\delta h. \end{aligned}$$

В силу симметричности выражения относительно коэффициентов получаем требуемое.

Из леммы 1 следует соотношение

$$x z_1 z_2 z_3 z_4 \equiv x z_3 z_4 z_1 z_2, \quad (5)$$

которое выполняется при условии, что переменные в парах (z_1, z_2) и (z_3, z_4) имеют одинаковую четность.

Докажем также следующее требуемое в дальнейшем соотношение:

$$hehf - hfhe = -8h. \quad (6)$$

Действительно, $hehf - hfhe = 2ehf + 2fhe = -4ef + 4fe = -8h$.

Выпишем еще одно соотношение, следующее из доказательства леммы 1:

$$h(e + f)^2 = 4h. \quad (7)$$

Структура строения полилинейной части многообразия, порожденного алгеброй $\mathfrak{sl}(2, \Phi)$ без градуировки, полностью описана в работе [10]. В частности,

доказано, что все кратности m_λ кохарактеров в соответствующей сумме (1) меньше или равны 1. Отсюда следует, что это же свойство выполняется и для характера $\chi(P_{0,n})$, т. е. в разложении

$$\chi(P_{0,n}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

все кратности m_λ не превосходят единицы. Следует отметить, что полное описание строения пространств $P_{k,n-k}$ как модулей произведения $S_k \times S_{n-k}$ получено в работе [11].

Далее потребуется вид порождающего элемента неприводимого модуля в $P_{0,n}$, соответствующего разбиению $\lambda = (q + r, q)$, $2q + r = n$, в случае, когда $q = 2k + 1$. Отметим, что в случае четных q и r соответствующая кратность равна нулю.

Пусть $g_0(y_1, y_2) = y_1 y_2$; определим оператор $d(y_1, y_2)$, где $y_1, y_2 \in L_1$. Напомним, что $\text{ad } z: w \mapsto wz$. Пусть $Y_1 = \text{ad } y_1$, $Y_2 = \text{ad } y_2$; тогда

$$d(y_1, y_2) = Y_1 Y_1 Y_2 Y_2 - Y_1 Y_2 Y_1 Y_2 - Y_2 Y_1 Y_2 Y_1 + Y_2 Y_2 Y_1 Y_1,$$

а также $g_k(y_1, y_2) = g_{k-1}(y_1, y_2)d(y_1, y_2)$, $k = 1, 2, \dots$. Заметим, что $d(y, y) = 0$.

Докажем, что $g_k y_1^r \neq 0$ для любых k, r . Подставим $y_1 = e + f$, $y_2 = f$ и получим $g_0(e + f, f) = h$, следовательно (см. (6)), $g_k(e + f, f) = g_k(e, f) = (-8)^k h$. Тогда

$$g_k(e + f, f)(e + f)^r = (-8)^k h(e + f)^r = a,$$

где $a = (-8)^k 4^s h \neq 0$ при $r = 2s$ и $a = (-8)^k 4^s h(e + f) \neq 0$ при $r = 2s + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Модуль, порожденный в $P_{0,n}$, $n = 2(2k + 1) + r$, линеаризацией элемента $g_k(y_1, y_2)y_1^r$, соответствует разбиению $\lambda = (2k + 1 + r, 2k + 1)$ и имеет степень $2(2k + 1) + r$.

Для доказательства первого условия критерия полиномиальности любого подмногообразия многообразия $\mathbf{V}_0$ потребуются несколько лемм.

ЛЕММА 2. В любом собственном подмногообразии $\mathbf{V}$ многообразия $\mathbf{V}_0$ выполняется тождество $g_m(y_1, y_2)y_1^{2s} \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в собственном подмногообразии выполняется полилинейное тождество $f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k}) \equiv 0$, которое не выполняется в градуированной алгебре $\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)$. Подставим вместо четных образующих коммутаторы нечетных и получим тождество с аналогичным свойством, но только от нечетных порождающих. Поэтому сразу можно считать, что тождество имеет вид $f(y_1, \dots, y_n) \equiv 0$.

Поскольку кохарактер $\chi(P_{0,n})$ “лежит в полосе шириной, равной двум”, а все кратности не превосходят 1, то можно дополнительно считать, что рассматриваемое тождество соответствует разбиению $\lambda = (q + r, q)$. Покажем, что можно дополнительно считать, что q нечетно. Предположим, что q четно, тогда r является нечетным, иначе в силу [10, теорема 4.2] это тождество выполнялось бы в самой алгебре $\text{sl}(2, \Phi)$. Рассмотрим элемент $f(y_1, \dots, y_n)y_{n+1}$ и породим им S_{n+1} -модуль в пространстве $P_{0,n+1}$. Заметим, что он по-прежнему не является градуированным тождеством алгебры $\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)$. Из правила Ричардсона–Литтлвуда и условия “расположения в полосе высоты, равной двум”, учитывая, что в разбиении $\mu = (q + r + 1, q)$ обе строки имеют четную длину

(такие элементы задают тождества алгебры $\mathfrak{sl}(2, \Phi)$), получаем, что построенный ненулевой модуль является неприводимым и соответствует разбиению $\lambda = ((q+1) + (r-1), q+1)$, где $q+1$ – нечетное число. Таким образом, тождество, выполняющееся в собственном подмногообразии, соответствует разбиению $\lambda = (q+r, q)$ с нечетным q . Ранее было показано, что тождество $g_m(y_1, y_2)y_1^r \equiv 0$ при $q = 2m+1$ также соответствует разбиению λ . Поскольку кратность m_λ в (1) равна 1 для $\mathfrak{sl}(2, \Phi)$, мы получаем, что $g_m(y_1, y_2)y_1^r \equiv 0$ – тождество многообразия $\mathbf{V}$. Поскольку домножение этого тождества на y_1 снова дает нетривиальное тождество многообразия $\mathbf{V}$, мы можем считать r четным. Лемма доказана.

В полученном тождественном соотношении можно “разделить” переменные, т.е. получить более сильное тождество.

ЛЕММА 3. *В любом собственном подмногообразии $\mathbf{V} \subset \text{var}^{\text{gr}}(\mathfrak{sl}(2, \Phi))$ выполняется тождество вида*

$$g_m(y_1, y_2)y_3^{2s} \equiv 0. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{g}_m$ – полная линейаризация полинома g_m . Заметим, что степень полинома $\bar{g}_m$ есть $t = 2(2m+1)$ и он порождает неприводимый модуль, соответствующий разбиению $\lambda = (2m+1, 2m+1)$. Полная линейаризация $g_m(y_1, y_2)y_3^{2s}$ имеет вид

$$A = \sum_{p \in S_{2s}} \bar{g}_m(y_{2s+1}, \dots, y_n)y_{p(1)} \cdots y_{p(2s)},$$

где $n = t + 2s$.

$(S_t \times S_{2s})$ -модуль, порожденный элементом A , является тензорным произведением модулей, соответствующих разбиениям $\lambda = (2m+1, 2m+1)$ и $\mu = (2s)$. По правилу Ричардсона–Литтлвуда неприводимые S_n -подмодули в разложении $\Phi S_n A$ соответствуют только разбиению $(2m+1+2s, 2m+1)$ и разбиениям на три или более части, которые являются нулевыми, так как кохарактер “лежит в полосе шириной, равной двум”. В завершение доказательства отметим, что неприводимый подмодуль, соответствующий разбиению $(2m+1+2s, 2m+1)$, порождается элементом $g_m(y_1, y_2)y_1^{2s}$. Но этот модуль должен иметь нулевую кратность в любом собственном подмногообразии, поскольку в исходном многообразии $\text{var}^{\text{gr}}(\mathfrak{sl}(2, \Phi))$ его кратность равна единице.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\mathbf{V}$ – собственное подмногообразие многообразия $\mathbf{V}_0$. Тогда существует такое число M , что для любого разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ при условии $\lambda_2 > M$ соответствующий элемент является тождеством в $\mathbf{V}$ на нечетных переменных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На первом шаге получим тождество вида $g_m(y_1, y_2) \equiv 0$. По лемме 3 в подмногообразии $\mathbf{V}$ выполняется тождество $g_m(y_1, y_2)y_3^{2s} \equiv 0$. Проводя частичную линейаризацию и учитывая условия (3), (5), получим следствие $g_m(y_1, y_2)y_4y_3^{2s-1} \equiv 0$. Аналогично предыдущей частичной линейаризации проведем частичную линейаризацию полученного элемента, в результате получим

$$g_m(y_1, y_2)y_4y_5y_3^{2s-2} + (2s-2)g_m(y_1, y_2)y_4y_3y_5y_3^{2s-3} \equiv 0. \quad (9)$$

Используя (3), (5), из тождества (9) получаем следствие:

$$g_m(y_1, y_2)y_4y_5uvy_3^{2s-2} + (2s-2)g_m(y_1, y_2)y_4y_3uvy_5y_3^{2s-3} \equiv 0, \quad (10)$$

где u, v – также нечетные переменные.

Альтернируя левую часть (10) по переменным y_4, u и по переменным y_5, v , подставляя $y_4 = y_5 = y_1$, $u = v = y_2$ и учитывая (3) и (5), получаем следствие:

$$\begin{aligned} w' &= g_m \bar{y}_1 \tilde{y}_1 \bar{y}_2 \tilde{y}_2 y_3^{2s-2} + (2s-2) g_m y_3 \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \bar{y}_2 \bar{y}_1 y_3^{2s-3} \\ &= g_m \bar{y}_1 \tilde{y}_1 \bar{y}_2 \tilde{y}_2 y_3^{2s-2} - (2s-2) g_m y_3 \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \bar{y}_1 \bar{y}_2 y_3^{2s-3} \\ &= g_m d(y_1, y_2) y_3^{2s-2} - (2s-2) g_m y_3 (y_1 y_2) (y_1 y_2) y_3^{2s-3}. \end{aligned}$$

Здесь мы используем соглашение о том, что одинаковые символы над переменными (черточка, волна) означают, что по ним проведено альтернирование. Например, $a\bar{y}_1 y_2 \bar{y}_3 = a y_1 y_2 y_3 - a y_3 y_2 y_1$, а

$$a\tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \tilde{y}_3 = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma a y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} y_{\sigma(3)}.$$

Покажем, что элемент w' не равен нулю в многообразии $\text{var}^{\text{gr}}(\text{sl}(2, \Phi))$. Подставим $y_1 = e + f$, $y_2 = f$, $y_3 = e + f$ и получим

$$\begin{aligned} &(-8)^{m+1} h(e+f)^{2s-2} - (2s-2)(-8)^m h(e+f) h h(e+f)^{2s-3} \\ &= (-8)^{m+1} h(e+f)^{2s-2} - (2s-2)(-8)^m h((e+f) h h)(e+f)^{2s-3} \\ &= (-8)^{m+1} h(e+f)^{2s-2} - (2s-2)(-8)^m h(4(e+f))(e+f)^{2s-3} \\ &= (-8)^m (-8h(e+f)^{2s-2} - 4(2s-2)h(e+f)^{2s-2}) \\ &= (-8)^{m+1} s h(e+f)^{2s-2} \neq 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$g_{m+1} y_3^{2s-2} - (2s-2) g_m y_3 (y_1 y_2) (y_1 y_2) y_3^{2s-3} \equiv 0$$

– нетривиальное тождество в $\mathbf{V}$. Кроме того, так как мы подставляли $e + f$ вместо y_1 и y_3 , то нетривиальным будет также тождество

$$u(y_1, y_2) = g_{m+1} y_1^{2s-2} - (2s-2) g_m y_1 (y_1 y_2) (y_1 y_2) y_1^{2s-3} \equiv 0.$$

Отметим, что степень тождества $u(y_1, y_2) \equiv 0$ равна $2(2m+3)+2s-2$, причем степень по y_1 равна $2m+2s+1$, а по y_2 равна $2m+3$. По тем же причинам, что и для $g_k y_1^r$ (см. замечание 2), в разложении S_n -модуля, порожденного линеаризацией элемента $u(y_1, y_2)$, нет слагаемых, отличных от неприводимого модуля, соответствующего разбиению $\lambda = (2(m+1)+1+(2s-2), 2s-2)$. Следовательно, $g_{m+1} y_3^{2s-2} \equiv 0$ является нетривиальным тождеством многообразия $\mathbf{V}$.

Аналогичным образом понижая степень по переменной y_3 , получаем тождество $g_{m+s} \equiv 0$, а следовательно, и любое тождество вида $g_k y_3^r \equiv 0$, в котором $k \geq m+s$, $r \geq 0$. Поскольку именно элемент $g_k(y_1, y_2) y_1^r$ соответствует разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, где $\lambda_1 = (2k+1)+r$, $\lambda_2 = 2k+1$, то в случае нечетной длины второй строки соответствующей диаграммы Юнга предложение доказано.

Покажем, что в случае четной длины, большей $M = 2(m+s)+1$, также получаем требуемое. Пусть разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ – такое, что $\lambda_2 > M$, причем λ_2 является четным. По доказанному элемент, соответствующий разбиению $(\lambda_1-1, \lambda_2-1)$ с нечетной длиной второй строки, является нетривиальным тождеством в $\mathbf{V}$. Если умножить его на произведение $y_1 y_2$, то полученный элемент по-прежнему будет нетривиальным тождеством многообразия $\mathbf{V}$, а кроме того, будет соответствовать разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В качестве следствия отметим, что для любого подмногообразия $\mathbf{V}$ многообразия $\mathbf{V}_0$ существует такое число M , что в многообразии $\mathbf{V}$ выполняется любое полилинейное тождество от нечетных образующих, если каждый из одночленов является произведением элементов, не менее M из которых представляют собой коммутаторы нечетных образующих. Действительно, такой элемент имеет не менее M кососимметрических пар переменных, а следовательно, порождает модуль симметрической группы, в разложении которого на неприводимые компоненты присутствуют лишь слагаемые, соответствующие диаграммам со второй строкой, имеющей длину, большую или равную M . По предложению 3 такие слагаемые равны нулю, значит, и сам модуль равен нулю, а порождающий его элемент является тождеством многообразия $\mathbf{V}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для многообразия $\mathbf{V}$ существует такое число T , что для любого $t \geq T$ в $\mathbf{V}$ выполняется обычное неградуированное тождество

$$((z_{11}z_{12})(z_{13}z_{14})) \cdots ((z_{t1}z_{t2})(z_{t3}z_{t4})) \equiv 0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый фрагмент вида $((z_{i1}z_{i2})(z_{i3}z_{i4}))$ при подстановке в него более двух четных образующих или двух четных образующих в одну скобку будет равен нулю в силу одномерности пространства $(\mathfrak{sl}(2, \Phi))_0$. При подстановке двух четных и двух нечетных образующих $((y_1x_1)(y_2x_2))$ получаем коммутатор двух нечетных элементов. При подстановке только одной четной переменной мы получаем произведение вида $(y_1y_2)(y_3x_1)$, в котором сомножитель y_1y_2 является коммутатором нечетных элементов. В случае подстановки всех нечетных образующих получаем даже два коммутатора нечетных элементов. Таким образом, при любой подстановке выполнено тождество (11) в силу замечания 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\mathbf{V}$ – собственное подмногообразие многообразия $\mathbf{V}_0$. Тогда $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c\mathbf{A}$ для некоторого c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 4 следует, что многообразие $\mathbf{V}$ является разрешимым, поэтому оно является собственным подмногообразием многообразия алгебр Ли, порожденного алгеброй $\mathfrak{sl}(2, \Phi)$. Многообразие $\text{var}(\mathfrak{sl}(2, \Phi))$ подробно исследовано в работах [10], [12], [13]. В частности, известно, что любое его собственное подмногообразие состоит из алгебр с нильпотентным коммутантом, т. е. в нем для некоторого c выполняется тождество

$$(z_{11}z_{12})(z_{21}z_{22}) \cdots (z_{c+1,1}z_{c+1,2}) \equiv 0 \quad (12)$$

и, следовательно, выполняется включение $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c\mathbf{A}$.

Следующее предложение связано со вторым условием теоремы 1 только относительно градуированной алгебры $\mathfrak{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\mathbf{V}$ – собственное подмногообразие многообразия $\mathbf{V}_0$. Тогда существует такое число t , что любой полилинейный полином, содержащий не менее t четных и t нечетных образующих, тождественно равен нулю в $\mathbf{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 5 в многообразии выполняется обычное тождество (12). Напомним, что из соображений размерности четной и нечетной компонент в $\mathbf{V}$ выполняется тождество $x_1x_2 \equiv 0$ (см. (3)), кроме того, любое выражение, альтернированное по трем нечетным образующим,

также является тождеством. Докажем, что в этом случае выполняются также условия

$$y_0 x_1 \cdots x_m y_1 \cdots y_k \in (L^2)^2, \quad m \geq 2, \quad k \geq 1, \quad (13)$$

$$(y_{10} x_{10} y_{11} \cdots y_{1m})(y_{20} x_{21} \cdots x_{2k}) \in (L^2)^3, \quad m \geq 2, \quad k \geq 2. \quad (14)$$

По модулю $(L^2)^2$ произведение $y_0 x_1 \cdots x_m y_1$ сравнимо с $y_0 x_1 \cdots x_{m-1} y_1 x_m$, а последнее равно нулю, так как $y_0 x_1 \cdots x_{m-1} y_1$ — четный элемент. Отсюда следует условие (13).

Докажем выполнение условия (14). Пусть сначала m является четным числом. Тогда

$$\begin{aligned} & (y_{10} x_{10} y_{11} \cdots y_{1m})(y_{20} x_{21} \cdots x_{2k}) \\ &= (y_{10} x_{10} y_{11} \cdots y_{1m})(y_{20} x_{21} \cdots x_{2,k-1}) x_{2k} \\ & \quad - (y_{10} x_{10} y_{11} \cdots y_{1m} x_{2k})(y_{20} x_{21} \cdots x_{2,k-1}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю в силу (3), а для второго слагаемого в силу того, что по модулю $(L^2)^2$ выполняется равенство $y_{10} x_{10} y_{11} \cdots y_{1m} x_{2k} = y_{10} x_{10} x_{2k} y_{11} \cdots y_{1m}$, можно применить условие (13). В итоге получим требуемое.

Пусть теперь m является нечетным числом. Тогда

$$\begin{aligned} & (y_{10} x_{10} y_{11} \cdots y_{1m})(y_{20} x_{21} \cdots x_{2k}) \\ &= -(y_{10} x_{10} y_{11} \cdots y_{1,m-1})(y_{20} x_{21} \cdots x_{2k}) y_{1m} \\ & \quad + (y_{10} x_{10} y_{11} \cdots y_{1,m-1})(y_{20} x_{21} \cdots x_{2k} y_{1m}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое принадлежит $(L^2)^3$, так как

$$(y_{10} x_{10} y_{11} \cdots y_{1,m-1})(y_{20} x_{21} \cdots x_{2k})$$

принадлежит $(L^2)^3$ по доказанному выше, поскольку $m-1$ является четным числом. Для второго слагаемого сомножитель $y_{20} x_{21} \cdots x_{2k} y_{1m}$ принадлежит $(L^2)^2$ по условию (13). Выполнение условия (14) полностью доказано.

Индукцией по c из тождества (12), которое выполняется в рассматриваемом многообразии, покажем теперь, что существует такое M_c , что выполняется любое тождество вида $f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) \equiv 0$ при условии $m, k \geq M_c$.

Если $c = 1$, то из условия (13) вытекает, что достаточно задать $M_1 = 2$. Рассмотрим отдельно два случая: $c = 2$ и $c > 2$.

Пусть $c = 2$. Положим $M_2 = 6$. Действительно, так как $M_2 > M_1$, из предыдущего шага следует, что $f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$ принадлежит $(L^2)^2$, т. е. является линейной комбинацией произведений коммутаторов. Рассмотрим одно из слагаемых, коммутаторы обозначим a, b . Заметим, что по модулю $(L^2)^3$ в элементах a, b можно упорядочить четные и нечетные переменные, т. е. можно считать, что коммутаторы имеют вид

$$y_1 \cdots y_k \quad (15)$$

или

$$y_1 x_1 \cdots x_r y_2 \cdots y_k. \quad (16)$$

Если в одном из коммутаторов количества четных и нечетных переменных одновременно не меньше двух, то по доказанному этот коммутатор принадлежит $(L^2)^2$, а поэтому $ab \in (L^2)^3$. В противном случае один из коммутаторов содержит не меньше пяти нечетных переменных (пусть это будет a), а другой не меньше пяти четных переменных, причем обязательно (иначе в силу (3) он будет равен нулю) содержит ровно одну нечетную переменную,

т.е. $b = y_{21}x_{21} \cdots x_{2r}$, где $r \geq 5$. Если a состоит только из нечетных переменных: $a = y_{21} \cdots y_{2k}$, $k \geq 5$, то $a = -y_{23}xy_{24} \cdots y_{2k}$, где $x = y_{21}y_{22}$ – четный элемент, и по (14) получаем требуемое. В противном случае элемент a имеет вид (16), более точно, $a = y_{11}x_{11}y_{12} \cdots y_{1k}$, $k \geq 5$, и можно сразу использовать условие (14).

Пусть теперь $c > 2$, и предположим, что для $c - 1$ и для некоторого $M_{c-1} \leq 6(c - 1)$ доказано требуемое. Положим $M_c = 6c$. Тогда $M_c > M_{c-1}$ и по предположению индукции $f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) \in (L^2)^c$, если $m, k \geq M_c$. Значит, f можно выразить через произведения левонормированных коммутаторов $a_1, \dots, a_c$, кроме того, по модулю $(L^2)^{c+1}$ в каждом из a_i все переменные, начиная с третьей, можно переставлять. Заметим еще раз, что a_i не может начинаться с двух четных переменных (оно будет равно нулю по (3)), поэтому $a_i = y_{i1}y_{i2} \cdots$, и в этом случае все переменные нечетные (иначе a_i равно нулю по (3)), так как произведение $y_{i1}y_{i2}$ является четной переменной) или $a_i = y_{i0}x_{i1} \cdots$.

Поскольку $M_c = 6c$, то возможны два случая. В первом существует коммутатор a_i , который содержит одновременно не меньше $M_2 = 6$ четных и нечетных переменных одновременно. В этом случае $a_i \in (L^2)^2$, а значит, всё произведение принадлежит $(L^2)^{c+1}$. Действительно, произведение можно выразить в виде линейной комбинации левонормированных произведений, в которых коммутатор a_i расположен на первом месте. Во втором случае, т.е. если такого коммутатора нет, существует коммутатор a_i , в котором не меньше шести четных переменных, т.е. $a_i = xyx_1x_2x_3 \cdots$, и другой коммутатор a_j , состоящий из не менее семи нечетных переменных и не более одной четной. Можно считать, что этот коммутатор имеет вид $a_j = x'y_1y_2y_3y_4y_5 \cdots$, где x' – четная переменная. Напомним, что результат альтернирования по любым трем нечетным переменным равен нулю. Применим альтернирование к $u_1 = xy$, $u_2 = y_5$, $u_3 = x'y_1y_2y_3$. Получим, что исходный элемент равен сумме пяти слагаемых, каждое из которых принадлежит $(L^2)^{c+1}$. Действительно, это очевидно в случае замены u_2 на u_1 или u_3 , а слагаемое, которое получается перестановкой u_1 и u_3 , приводит к появлению коммутатора вида $x'y_1y_2y_3x_1x_2x_3 \cdots$, который по (13) приводит к появлению $(c + 1)$ -го коммутатора, так как принадлежит $(L^2)^2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbf{U} \subset \text{var}(G(\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)))$ – собственное подмногообразие. Тогда $\mathbf{U}$ имеет полиномиальный рост.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1 существует собственное подмногообразие $\mathbf{V}$ многообразия $\text{var}^{\text{gr}}(\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi))$, для которого $\Theta(\mathbf{V}) = \mathbf{U}$.

По предложению 5 в многообразии $\mathbf{V}$ выполняется тождество (12). Рассмотрим относительно свободную алгебру $L \in \mathbf{V}$ со счетными множествами четных $x_1, x_2, \dots$ и нечетных $y_1, y_2, \dots$ образующих. Как обычная алгебра Ли, алгебра L по предложению 5 имеет нильпотентный коммутант, т.е. $L \in \mathbf{N}_c\mathbf{A}$, поэтому многообразие $\text{var}(L)$ имеет полиномиальный рост [10]. Кроме того, по предложению 6 в многообразии $\mathbf{V}$ тождественно равно нулю любое выражение, содержащее не менее m четных и нечетных образующих одновременно. Отсюда по предложению 2 многообразие $\mathbf{U}$ имеет полиномиальный рост, что и завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Для многообразия $\text{var}(G(\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)))$ выполнено равенство

$$\text{Exp}(\text{var}(G(\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)))) = 3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим нижнюю оценку. Обозначим через $P_{m, 4k+2}$ пространство полилинейных лиевских многочленов от m четных

и $4k + 2$ нечетных переменных в свободной $\mathbb{Z}_2$ -градуированной алгебре. Сначала покажем, что в $P_{m,4k+2}$ можно выбрать элемент специального вида, не равный тождественно нулю в алгебре $\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)$.

Ранее был построен элемент $g_k(x, y)$ степени $4k + 2$, линейаризация $f_0(y_1, y_2, \dots, y_{4k+2})$ которого порождает неприводимый S_{4k+2} -модуль, соответствующий разбиению $\lambda = (2k + 1, 2k + 1)$, т.е. диаграмме Юнга, состоящей из двух строк длиной $2k + 1$. При этом все переменные $y_1, y_2, \dots, y_{4k+2}$ являются нечетными, а f_0 может принимать в алгебре $\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)$ ненулевые значения, кратные h . Отсюда следует, что для любого m не равен тождественно нулю также элемент $f_0(y_1, y_2, \dots, y_{4k+2})(y_0 x^m)$. В грассмановой оболочке будет не равен тождественно нулю элемент, построенный по диаграмме Юнга из $4k + 3 + m$ клеток, содержащей строку длиной не меньше m и два столбца высотой не меньше $2k + 1$ одновременно. Из формулы крюков при $m = 2k + 1$ получаем, что коразмерность удовлетворяет неравенству $c_n(\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)) \geq \frac{3^n}{n^6}$.

Получим верхнюю оценку. Рассмотрим одночлены степени n с некоторой фиксированной расстановкой скобок от переменных $z_1, z_2, \dots, z_n$. Их линейная оболочка является S_n -модулем. Обозначим через Q_n фактормодуль построенного модуля по тождествам супералгебры $G(\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi))$. Рассмотрим его характер

$$\chi(Q_n) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \quad (17)$$

Покажем сначала, что $m_\lambda = 0$, если диаграмма λ не лежит в бесконечном крюке $H(1, 2)$ из одной строки и двух столбцов.

Предположим, что $m_\psi \neq 0$ и ψ не лежит в крюке $H(1, 2)$. Это означает, что найдется соответствующий полином $f'(z_1, z_2, \dots, z_n)$, не равный тождественно нулю в алгебре $G(\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi))$. Таким образом, можно считать, что существует подстановка четных переменных вместо переменных $z_1, \dots, z_k$ и нечетных переменных вместо $z_{k+1}, \dots, z_n$, при которой f' не равно нулю. Тогда $f = f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k})$ не является градуированным тождеством алгебры $\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)$, где $f = \Theta f'$.

Породим этим элементом $(S_k \times S_{n-k})$ -модуль M . Пусть φ – характер одного из неприводимых подмодулей модуля M . Тогда, как известно (см., например, [14]), выполняется равенство

$$\langle \text{Res } \psi, \varphi \rangle = \langle \text{Ind } \varphi, \psi \rangle \quad (18)$$

и φ соответствует паре диаграмм Юнга (μ, ν) , $\mu \vdash k$, $\nu \vdash n - k$. Поскольку размерность четной компоненты алгебры Ли $\text{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)$ равна единице, а нечетной – двум, нетрудно показать, что $\mu \subset H(1, 0)$, $\nu \subset H(0, 2)$, т.е. диаграмма μ имеет одну строку, а ν имеет не более двух столбцов. Но тогда из правила Ричардсона–Литтлвуда вытекает, что индуцированный с φ характер $\text{Ind } \varphi$ группы S_n лежит в крюке $H(1, 2)$, поэтому кратность ψ в $\text{Ind } \varphi$ равна нулю.

Другими словами, правая часть (18) равна нулю, а левая часть $\langle \text{Res } \psi, \varphi \rangle$ отлична от нуля. Полученное противоречие означает, что предположение $f \neq 0$ ложно, т.е. $\psi \subset H(1, 2)$ в (17).

Из формулы крюков для размерности неприводимого S_n -представления легко получить следующее ограничение для любого $\chi_\lambda \subset H(1, 2)$:

$$\chi_\lambda(1) \leq 3^n n^2. \quad (19)$$

Теперь покажем, что различные расстановки скобок, а также кратности характера χ_λ при фиксированной расстановке дают лишь полиномиальные множители в оценке сверху.

Зафиксируем разбиение $\lambda \vdash n$, $\lambda \in H(1, 2)$. Пусть r – длина первой строки, $s + 1$ – высота первого столбца, а $t + 1$ – высота второго столбца. Напомним, что Q_n – пространство полилинейных неассоциативных элементов с некоторой фиксированной расстановкой скобок, профакторизованное по тождествам супералгебры $G(\mathfrak{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi))$. Пусть $W_1 \oplus \dots \oplus W_m$ – сумма неприводимых S_n -модулей в Q_n с характером χ_λ . Хорошо известно (см., например, [15]), что можно выбрать порождающие полиномы $f_i \in W_i$, $i = 1, \dots, m$, таким образом, чтобы каждый $f_i(z_1, \dots, z_n)$ был симметричен по r переменным $z_1, \dots, z_r$, кососимметричен по s переменным $z_{r+1}, \dots, z_{r+s}$ и кососимметричен по t переменным $z_{r+s+1}, \dots, z_n$. Аналогичным образом можно построить полиномы в пространстве с другими скобочными структурами. Наша ближайшая цель – доказать, что общее количество линейно независимых полиномов такого типа ограничено полиномиальной функцией.

Докажем, что $m < 48(n + 1)^2 + 1$. Предположим противное: пусть $m \geq 48(n + 1)^2 + 1$. Рассмотрим линейную комбинацию $\delta_1 f_1 + \dots + \delta_m f_m$ с неопределенными коэффициентами $\delta_1, \dots, \delta_m$ и докажем, что существуют такие элементы $\delta_1, \dots, \delta_m$ поля Φ , что в многообразии $\text{var}(G(\mathfrak{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi)))$ выполнено тождество $\delta_1 f_1 + \dots + \delta_m f_m \equiv 0$. Определим тип произвольной подстановки $\varphi: z_i \mapsto a_i \otimes g_i$, где $a_i \in \mathfrak{sl}(2, \Phi)$ принимают значения базисных векторов $e, f, h \in \mathfrak{sl}(2, \Phi)$, а $g_i \in G$. Типом такой подстановки назовем строку

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

в которой α_1 – количество базисных векторов $e \in \mathfrak{sl}(2, \Phi)$, встречающихся в наборе $a_1, \dots, a_r$. Число α_2 (соответственно, α_3) – количество базисных векторов f (соответственно, h) в том же наборе. Аналогично определяются тройки чисел $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ только относительно наборов $a_{r+1}, \dots, a_{r+s}$ и $a_{r+s+1}, \dots, a_n$.

Поскольку $z_1, \dots, z_r$ – симметричные, а $z_{r+1}, \dots, z_{r+s}$ и $z_{r+s+1}, \dots, z_n$ – кососимметричные переменные, то $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \gamma_3 \leq 1$. Кроме того, $\beta_1 + \beta_2 = s$, $s - 1$, а $\gamma_1 + \gamma_2 = t$, $t - 1$. Поэтому количество различных типов подстановок меньше $16(n + 1)^2$.

Заметим теперь, что если φ и ψ – подстановки одинакового типа, то $\varphi(f_i) = \pm \psi(f_i)$, причем знак одинаков для всех $f_1, \dots, f_m$. Заметим также, что все значения имеют вид $\varphi(f_i) = (\mu_i e + \nu_i f) \otimes g_1 \dots g_n$ либо вид $\varphi(f_i) = \rho_i h \otimes g_1 \dots g_n$, в зависимости от четности a_j, g_j , $j = 1, \dots, n$.

Выберем для каждого из возможных $T < 16(n + 1)^2$ типов по одной подстановке $\varphi_1, \dots, \varphi_T$. Тогда для каждой из них значение $\varphi_j(f_i)$ определяется тремя коэффициентами $\mu_{ij}, \nu_{ij}, \rho_{ij}$. Отсюда следует, что если $m > 48(n + 1)^2$, то существует нетривиальный набор скаляров $\delta_1, \dots, \delta_m$ таких, что $\varphi_j(\delta_1 f_1 + \dots + \delta_m f_m) = 0$ в алгебре $G(\mathfrak{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi))$ для всех $j = 1, \dots, T$. С учетом замечания о подстановках одинакового типа это и означает, что $\delta_1 f_1 + \dots + \delta_m f_m \equiv 0$ – тождество в $G(\mathfrak{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi))$.

Доказанное ограничение на число изоморфных неприводимых слагаемых, а также (19) означают, что для заданного вида диаграммы Юнга λ коразмерность не превышает $48(n + 1)^2 n^2 3^n$. Поскольку количество разбиений $\lambda \vdash n$, лежащих в крюке $H(1, 2)$, ограничено сверху величиной n^3 , получаем неравенство

$$c_n(G(\mathfrak{sl}^{\text{gr}}(2, \Phi))) \leq C \cdot 3^n n^7,$$

которое вместе с нижней оценкой позволяет завершить доказательство теоремы.

§ 4. Разрешимые многообразия почти полиномиального роста

Уточним оценки для экспоненциального роста упомянутых в начале статьи двух известных ранее многообразий почти полиномиального роста и докажем, что их экспоненты в точности равны двум.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathbf{A}^2$ – многообразие метабелевых супералгебр Ли, определяемое тождеством $(z_1 z_2)(z_3 z_4) \equiv 0$. Тогда экспонента многообразия $\mathbf{A}^2$ равна двум, т. е. $\text{Exp}(\mathbf{A}^2) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим оценку снизу. Поскольку произведение $x_1 \cdots x_m y_1 \cdots y_k$ не равно нулю в свободной метабелевой супералгебре Ли, где $x_1, \dots, x_m$ – четные, а $y_1, \dots, y_k$ – нечетные переменные, то полином

$$\sum_{\sigma \in S_m} \sum_{\tau \in S_k} (-1)^\tau x_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(k)}$$

не является тождеством и содержит симметрический набор из m переменных и косимметрический набор из k переменных, где $n = m + k + 1$. Таким образом, полилинейная часть метабелева многообразия как модуль симметрической группы S_n содержит ненулевые неприводимые подмодули для $k = 0, \dots, n - 1$, соответствующие диаграммам Юнга, которые включают поддиаграмму для разбиения $(m, 1^k)$ числа $n - 1 = m + k$. Используя формулу крюков, получаем, что $\gamma_n(\mathbf{A}^2) > 2^n$.

Найдем теперь верхнюю оценку для размерности $\gamma_n(\mathbf{A}^2)$. Обозначим через $A = A_0 \oplus A_1$ свободную супералгебру многообразия $\mathbf{A}^2$ с бесконечным числом четных и нечетных образующих, а через $B = G(B) = B_0 \oplus B_1$ – её грассманову оболочку. Тогда B – градуированная алгебра Ли. Используя отображение Θ , легко показать, что в B выполняется неградуированное тождество $(z_1 z_2)(z_3 z_4) \equiv 0$, т. е. B – метабелева алгебра Ли. С другой стороны, очевидно, что A и $G(B) = G(G(A))$ порождают одно и то же многообразие супералгебр Ли. Поскольку $c_n(B) \leq n$, то из предложения 2 получаем оценку $\gamma_n(\mathbf{A}^2) \leq 2^n n$. Таким образом, учитывая обе найденные оценки, получаем, что экспонента метабелева многообразия супералгебр Ли равна двум.

Напомним определение супералгебры Ли, которая порождает еще одно многообразие почти полиномиального роста. Алгебра $H = H_0 \oplus H_1$ является четырехмерной супералгеброй Ли с базисом a, b, u, v и таблицей умножения $ab = 0$, $uv = 0$, $au = v$, $av = u$, $bu = u$, $bv = v$, $a^2 = 2b$, $b^2 = u^2 = v^2 = 0$, в которой $H_0 = \langle b, v \rangle$, $H_1 = \langle a, u \rangle$. Для многообразия супералгебр Ли, порожденного алгеброй H , в [1, лемма 3] доказан следующий результат.

ЛЕММА 4. Для любой константы $\alpha < \frac{2}{3}$ выполняются неравенства

$$2^{\alpha n} \leq \gamma_n(\text{var } H) \leq 2^n n^2.$$

Уточним эту оценку и найдем экспоненту этого многообразия.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathbf{V} = \text{var}(H)$ – многообразие, порожденное супералгеброй Ли H . Тогда

$$\frac{2^n}{n^2} \leq \gamma_n(\mathbf{V}) \leq 2^n n^2.$$

В частности, экспонента многообразия $\mathbf{V}$ равна двум, т. е. $\text{Exp}(\mathbf{V}) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая лемму 4, достаточно уточнить оценку снизу. Рассмотрим в свободной неассоциативной алгебре элемент $t_1 = t_1(x_0, x_1, x_2)$ вида $t_1 = \tilde{x}_1(\bar{x}_1((x_0\bar{x}_2)\tilde{x}_2))$. Напомним, что одинаковый символ (волна или черта) над парой переменных означает, что по ним проведено альтернирование. Заметим сначала, что

$$\begin{aligned} t_1(u, b, a) &= \tilde{b}(\bar{b}((x_0\bar{a})\tilde{a})) \\ &= b(b((ua)a)) + a(a((ub)b)) - a(b((ua)b)) - b(a((ub)a)) \\ &= b(b(va)) + a(a(-ub)) - a(b(vb)) - b(a(-ua)) \\ &= -b(bu) + a(au) + a(bv) + b(av) = -u + u + u + u = 2u. \end{aligned}$$

Теперь для произвольного $k \geq 2$ по индукции определим

$$t_k(x_0, x_1, x_2) = \tilde{x}_1(\bar{x}_1((t_k\bar{x}_2)\tilde{x}_2)).$$

Тогда $t_k(u, b, a) = 2^k u \neq 0$, т.е. t_k не является тождеством многообразия $\mathbf{V}$ ни при каком $k \geq 1$. Так как $\deg t_k = 4k + 1$ и t_k содержит $2k$ кососимметричных пар одинаковых переменных, то для любого $n = 4k + 1$ линейаризация элемента $t_k(x_0, x_1, x_2)$ порождает в полилинейной части $P_n(\mathbf{V})$ модуль, содержащий ненулевой неприводимый подмодуль, соответствующий разбиению $\lambda = (2k + 1, 2k)$ или $\lambda = (2k, 2k, 1)$. В любом случае из формулы крюков получаем

$$\gamma_n(\mathbf{V}) \geq \frac{2^n}{n^2}.$$

Теорема доказана.

В заключение напомним, что для градуированных алгебр возможен и другой подход к определению функции роста. Если $L = L_0 \oplus L_1 = \text{alg}\{x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots\}$ — относительно свободная супералгебра счетного ранга некоторого многообразия $\mathbf{V}$, $x_i \in L_0$, $y_i \in L_1$, то можно рассмотреть пространство $P_{m,k}(\mathbf{V})$ полилинейных полиномов от $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k$. Обозначим

$$P'_n(\mathbf{V}) = \sum_{k=0}^n P_{k,n-k}(\mathbf{V})$$

и положим

$$\mu_n(\mathbf{V}) = \dim P'_n(\mathbf{V}) = \sum_{k=0}^n \dim P_{k,n-k}(\mathbf{V}).$$

Тогда последовательность $\{\mu_n(\mathbf{V})\}$, $n = 1, 2, \dots$, также характеризует многообразие $\mathbf{V}$ и ее можно взять в качестве другой функции роста, отличной от $\gamma_n(\mathbf{V})$. Именно эта функция роста рассматривалась в работе [16]. Для метабелева многообразия в этой работе показано, что $\mu_n(\mathbf{A}^2) = n^2 - 1$, а $\gamma_n(\mathbf{A}^2)$ растет экспоненциально.

Список литературы

1. М. В. Зайцев, С. П. Мищенко, “Критерий полиномиальности роста многообразий супералгебр Ли”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:5 (1998), 103–116; англ. пер.: M. V. Zaitsev, S. P. Mishchenko, “A criterion for polynomial growth of varieties of Lie superalgebras”, *Izv. Math.*, **62**:5 (1998), 953–967.

2. A. Regev, “Existence of identities in $A \otimes B$ ”, *Israel J. Math.*, **11** (1972), 131–152.
3. И. Б. Воличенко, “О многообразии алгебр Ли AN_2 над полем характеристики нуль”, *Докл. АН БССР*, **25**:12 (1981), 1063–1066.
4. В. М. Петроградский, “О типах сверхэкспоненциального роста тождеств в PI-алгебрах Ли”, *Фундам. и прикл. математика*, **1**:4 (1995), 989–1007.
5. V. Drensky, A. Regev, “Exact asymptotic behaviour of the codimensions of some PI-algebras”, *Israel J. Math.*, **96** (1996), 231–242.
6. С. П. Мищенко, “О многообразиях алгебр Ли промежуточного роста”, *Вестн АН БССР*, 1987, № 2, 42–45.
7. А. Р. Кемер, “Шпехтовость T -идеалов с полиномиальным ростом коразмерностей”, *Сиб. матем. журн.*, **19**:1 (1978), 54–69; англ. пер.: A. R. Kemer, “Spechtianess of T -ideals with polynomial growth of the co-dimensions”, *Siberian Math. J.*, **19**:1 (1978), 37–48.
8. И. И. Бенедиктович, А. Е. Залесский, “ T -идеалы свободной алгебры Ли с полиномиальным ростом последовательности коразмерностей”, *Вестн АН БССР*, 1981, № 3, 5–10.
9. С. П. Мищенко, “О многообразиях полиномиального роста алгебр Ли над полем характеристики нуль”, *Матем. заметки*, **40**:6 (1986), 713–721; англ. пер.: S. P. Mishchenko, “Varieties of polynomial growth of Lie algebras over a field of characteristic zero”, *Math. Notes*, **40**:6 (1986), 901–905.
10. В. С. Дренски, “Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр”, *Матем. сб.*, **115**:1 (1981), 98–115; англ. пер.: V. S. Drenski, “Representations of the symmetric group and varieties of linear algebras”, *Math. USSR-Sb.*, **43**:1 (1982), 85–101.
11. Д. В. Репин, “Градуированные тождества простой трехмерной алгебры Ли”, *Вестн. СамГУ*, 2-й спец. вып., 2004, 5–16.
12. Ю. П. Размыслов, “О конечной базирюемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль”, *Алгебра и логика*, **12**:1 (1973), 83–113; англ. пер.: Yu. P. Razmyslov, “Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero”, *Algebra and Logic*, **12**:1 (1973), 47–63.
13. Ю. П. Размыслов, “Конечная базирюемость некоторых многообразий алгебр”, *Алгебра и логика*, **13**:6 (1974), 685–693; англ. пер.: Yu. P. Razmyslov, “Finite basis property for certain varieties of algebras”, *Algebra and Logic*, **13**:6 (1974), 394–399.
14. J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967.
15. М. В. Зайцев, С. П. Мищенко, “О кодине многообразий линейных алгебр”, *Матем. заметки*, **79**:4 (2006), 553–559; англ. пер.: M. V. Zaitsev, S. P. Mishchenko, “Colength of varieties of linear algebras”, *Math. Notes*, **79**:3–4 (2006), 511–517.
16. Ю. А. Бахтурин, В. С. Дренски, “Тождества разрешимых цветных супералгебр Ли”, *Алгебра и логика*, **26**:4 (1987), 403–418; англ. пер.: Yu. A. Bakhturin, V. S. Drenski, “Identities of solvable color Lie superalgebras”, *Algebra and Logic*, **26**:4 (1987), 229–240.

М. В. Зайцев (M. V. Zaitsev)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: zaitcev@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
 14.11.2005

С. П. Мищенко (S. P. Mishchenko)
 Ульяновский государственный университет
E-mail: mishchenkosp@ulsu.ru