Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, Оценки равномерного модуля непрерывности функций из симметричных пространств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 2, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/im69>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 03:49:30

УДК 517.5

Е. И. Бережной

Оценки равномерного модуля непрерывности функций из симметричных пространств

Для функции, заданной в $\mathbb{R}^n$, доказана многомерная теорема “исправимости” типа теоремы К. Осколкова, а именно, дана точная количественная оценка равномерного модуля непрерывности функции на “больших” множествах, если известна оценка модуля непрерывности этой функции в симметричном пространстве. Показано, что оценка равномерного модуля непрерывности зависит только от фундаментальной функции симметричного пространства.

Библиография: 8 наименований.

В настоящей статье дана количественная оценка равномерного модуля непрерывности функции на “больших” множествах, если известна оценка модуля непрерывности этой функции в симметричном пространстве на $\mathbb{R}^n$. Полный ответ на аналогичный вопрос в случае прямой для пространства L^p дан К. Осколковым [1]–[3]. Отметим, что некоторые частные результаты в $\mathbb{R}^n$ были получены ранее Ю. Брудным [4].

Подход, предлагаемый в настоящей статье, основан на оценках максимальных функций, построенных по специальным семействам множеств, позволил решить сразу многомерную задачу для произвольного симметричного пространства. Оказалось, что оценки равномерного модуля непрерывности зависят только от фундаментальной функции симметричного пространства, в котором вычисляется исходный модуль непрерывности, и одинаковы для всех симметричных пространств с данной фундаментальной функцией. Основной результат работы представлен в теореме 1. Отметим, что в данной работе приведен результат (теорема 4), который показывает, что теорема 1 не может быть усилена даже в случае $n = 1$. Таким образом, даже в одномерном случае основной результат статьи является содержательным обобщением теоремы К. Осколкова на случай симметричных пространств.

Пусть D – измеримое множество. Через $\chi(D)$ обозначим его характеристическую функцию, а через $m(D)$ его меру Лебега. Пусть Q – единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с обычной мерой Лебега, $S(m)$ – множество измеримых функций на Q . Для $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$, как обычно, через $\lambda(f, \alpha)$ обозначим функцию распределения функции f , т. е.

$$\lambda(f, \alpha) = m(\{t : |f(t)| > \alpha\}), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Напомним [5], что банахово пространство функций называется *симметричным*, если из справедливости при всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$ неравенства $\lambda(f, \alpha) \leq \lambda(g, \alpha)$ и $g \in X$ следует, что $f \in X$ и $\|f \mid X\| \leq \|g \mid X\|$ (символом $\|f \mid X\|$ обозначается норма элемента f в пространстве X). Если X – симметричное пространство, то через X'

обозначается пространство интегральных функционалов на X с обычной нормой

$$\|g \mid X'\| = \sup \left\{ \int_Q g(x)f(x) dx : \|f \mid X\| \leq 1 \right\}.$$

Пространство X' также является симметричным.

Важную информацию о симметричном пространстве X несет его фундаментальная функция, которая определяется равенством $\psi(X, t) = \|\chi(D) \mid X\|$, где $t = m(D)$. Для фундаментальных функций X и X' известно [5] соотношение

$$\psi(X, t)\psi(X', t) = t. \quad (1)$$

Напомним [5], что симметричное пространство X называется *правильным*, если для любой $f \in X$ выполнено соотношение

$$\lim_{m(D) \rightarrow 0} \|\chi(D)f \mid X\| = 0.$$

Через $\bar{U}$ обозначим множество квазивогнутых функций $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, т.е. функций φ , которые не убывают и для которых отношение $t^{-1}\varphi(t)$ не возрастает. Через U обозначим подмножество в $\bar{U}$, состоящее из функций, которые удовлетворяют дополнительному условию $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$. Хорошо известно, что каждая квазивогнутая функция эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте.

Отметим, что для каждого симметричного пространства его фундаментальная функция $\psi(X, t)$ квазивогнута, если же X – правильное симметричное пространство, то его фундаментальная функция принадлежит множеству U .

Ниже мы будем рассматривать только симметричные пространства, обладающие свойством Фату, т.е. те пространства, единичный шар которых замкнут относительно сходимости по мере, или, что эквивалентно, для которых верно равенство $X'' = X$.

Важными примерами симметричных пространств, обладающих свойством Фату, являются пространства Лебега L^p ($p \geq 1$), пространства Орлича L_h , построенные по выпуклой на $\mathbb{R}_+$ функции $h(t)$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}h(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}h(t) = \infty,$$

с нормой, которая задается равенством

$$\|f \mid L_h\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_Q h\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\},$$

и пространства Лоренца $\Lambda(\varphi)$, Марцинкевича $M(\varphi)$, построенные по $\varphi \in U$, норма в которых задается равенствами

$$\|f \mid \Lambda(\varphi)\| = \int_0^\infty \varphi(\lambda(f, \alpha)) d\alpha, \quad \|f \mid M(\varphi)\| = \sup_D \frac{\varphi(m(D))}{m(D)} \int_D |f(x)| dx.$$

Для фундаментальных функций этих пространств справедливы равенства

$$\psi(L^p, t) = t^{1/p}, \quad \psi(L_h, t) = \frac{1}{h^{-1}(t-1)}, \quad \psi(\Lambda(\varphi), t) = \psi(M(\varphi), t) = \varphi(t).$$

Пространства Лоренца и Марцинкевича играют среди симметричных пространств экстремальную роль: если ψ – фундаментальная функция пространства X , то справедлива теорема вложения Е. М. Семенова [5]: $\Lambda(\psi) \subseteq X \subseteq M(\psi)$.

Ниже нам удобно считать, что каждая функция $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ определена не только на Q , но и доопределена на все $\mathbb{R}^n$ нулем.

Пусть X – симметричное пространство. Для каждой $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ определим модуль непрерывности

$$\omega(f, h; X) = \sup_{\|\delta\| \leq h} \|f(x + \delta) - f(x) \mid X\|,$$

где $\|\delta\| = |\delta_1| + |\delta_2| + \dots + |\delta_n|$ – норма в $\mathbb{R}^n$.

Модуль непрерывности $\omega(f, h; X)$ обладает обычными свойствами:

- $\omega(f, h; X)$ не убывает по h ;
- $\omega(f, h_0 + h_1; X) \leq \omega(f, h_0; X) + \omega(f, h_1; X)$;
- для $\alpha > 0$ выполнено неравенство $\omega(f, \alpha h; X) \leq (1 + \alpha)\omega(f, h; X)$.

Как обычно, через $\omega(f, h; X)^*$ обозначим наименьшую вогнутую мажоранту функции $\omega(f, h; X)$. Хорошо известно неравенство С. Б. Стечкина (см., например, [6, с. 154])

$$\omega(f, h; X) \leq \omega(f, h; X)^* \leq 2\omega(f, h; X).$$

Поскольку в дальнейших построениях величина абсолютных констант не играет особой роли, можно считать, что $\omega(f, h; X)$ – вогнутая функция. Через $\omega(f, h; L^\infty)$ обозначим равномерный модуль непрерывности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть X – симметричное пространство. Через H_X обозначим подпространство в X , состоящее из тех $f \in X$, для которых выполнено соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega(f, h; X) = 0. \quad (2)$$

ЛЕММА 1. Пусть X – правильное симметричное пространство. Тогда $H_X = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы можно провести по стандартной схеме: проверить выполнение (2) сначала для непрерывной функции, а затем воспользоваться плотностью множества непрерывных функций в X ; этот факт вытекает из правильности симметричного пространства X .

Пусть $\varphi \in U$. Как обычно, через H_X^φ обозначим пространство функций, норма в котором задается равенством

$$\|f \mid H_X^\varphi\| = \|f \mid X\| + \sup_h \frac{\omega(f, h; X)}{\varphi(h)}.$$

Задача, рассмотрению которой посвящена настоящая работа, состоит в следующем: пусть $f \in H_X^\varphi$; нужно найти количественную оценку равномерного модуля непрерывности функции f на “больших” множествах. Для наглядности мы ограничимся случаем $n = 2$. При других n рассуждения аналогичны.

Сначала нам потребуются некоторые простые утверждения из теории симметричных пространств. Пусть X – симметричное пространство. Напомним, что оператор $T: X \rightarrow S(m)$ называется *квазилинейным*, если для всех $f_0, f_1 \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x$ выполнено неравенство

$$|T\{\alpha f_0 + \beta f_1\}(x)| \leq |\alpha| |T\{f_0\}(x)| + |\beta| |T\{f_1\}(x)|.$$

ЛЕММА 2. Пусть X – симметричное пространство, $\psi(X, t)$ – его фундаментальная функция, пусть $f \in L^1$, $f(x) \geq 0$ п.в. Пусть T – квазилинейный оператор, $T: L^1 \rightarrow S(\mu)$, и задано $\alpha > 0$. Положим $D(Tf, \alpha) = \{x : |Tf(x)| > \alpha\}$. Если выполнено неравенство

$$m(D(Tf, \alpha)) \leq c\alpha^{-1} \int_{D(Tf, \alpha)} f(x) dx,$$

то справедлива оценка

$$\psi(X, m(D(Tf, \alpha))) \leq c\alpha^{-1} \|f\| |X|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы следует из (1) и неравенства

$$\begin{aligned} m(D(Tf, \alpha)) &\leq c\alpha^{-1} \int \chi(D(Tf, \alpha)) f(x) dx \leq c\alpha^{-1} \|f\| |X| \|\chi(D(Tf, \alpha))\| |X'| \\ &= c\alpha^{-1} \|f\| |X| \frac{m(D(Tf, \alpha))}{\psi(X, m(D(Tf, \alpha)))}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть X – симметричное пространство, $f \in X$, $f(x) \geq 0$ п.в. и задано $\alpha > 0$. Положим $D(f, \alpha) = \{x : f(x) > \alpha\}$.

Тогда справедливо неравенство

$$\psi(X, m(D(f, \alpha))) \leq \alpha^{-1} \|f\| |X|. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in X'$, $\|g\| |X'| \leq 1$ и п.в. выполнено неравенство $g(x) \geq 0$. Тогда, пользуясь свойством Фату, можно написать неравенство

$$\|f\| |X| = \|f\| |X''| \geq \int g(x) f(x) dx \geq \alpha \int \chi(D(f, \alpha)) g(x) dx$$

и соотношение

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \int \chi(D(f, \alpha)) g(x) dx : \|g\| |X'| \leq 1 \right\} &= \|\chi(D(f, \alpha))\| |X''| \\ &= \|\chi(D(f, \alpha))\| |X| = \psi(X, m(D(f, \alpha))). \end{aligned}$$

Отсюда и следует (3). Лемма доказана.

Следующее построение является ключевым для всей работы.

Зафиксируем $h > 0$. Через B_h^1 обозначим множество прямоугольников Π в Q вида $\Pi = [a - h, a + h] * [c, d]$, а через B_h^2 – множество прямоугольников Π в Q вида $\Pi = [c, d] * [a - h, a + h]$. С семействами B_h^1 и B_h^2 свяжем максимальные операторы

$$M_h^k f(x) = \sup \left\{ \frac{1}{m(\Pi)} \int_{\Pi} f(y) dy : x \in \Pi \in B_h^k \right\}, \quad k = 1, 2.$$

Оказывается, что семейства B_h^1 и B_h^2 обладают очень хорошими покрывающими свойствами, что приводит к эффективным оценкам операторов M_h^k .

ЛЕММА 4. Пусть $\{\Pi_\alpha : \alpha \in I\}$ – семейство прямоугольников из B_h^1 . Тогда из семейства $\{\Pi_\alpha : \alpha \in I\}$ можно выбрать последовательность непересекающихся прямоугольников $\{\Pi_i\}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$m(\cup \Pi_\alpha : \alpha \in I) \leq c_0 \sum m(\Pi_i),$$

причем константа c_0 не зависит от h . Можно положить $c_0 = 25$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы напоминает доказательство известной леммы Витали для шаров (см., например, [7]). Каждому прямоугольнику $\Pi = [a - h, a + h] * [c, d]$ поставим в соответствие число $r(\Pi) = d - c$. Опишем теперь построение последовательности $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k, \dots$. Сначала выберем почти наибольший прямоугольник из семейства $\{\Pi_\alpha : \alpha \in I\}$. Это означает, что $r(\Pi_1) > 0,5 \sup\{r(\Pi_\alpha) : \alpha \in I\}$. Предположим, что $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ уже выбраны. Тогда Π_{k+1} выберем так, чтобы он был почти наибольшим прямоугольником среди тех, которые не пересекаются с $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$, т.е.

$$r(\Pi_{k+1}) > 0,5 \sup\left\{r(\Pi_\alpha) : \Pi_\alpha \cap \left(\bigcup_1^k \Pi_i\right) = \emptyset, \alpha \in I\right\}.$$

Таким образом получаем последовательность непересекающихся прямоугольников $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{k+1}, \dots$. Из построения семейства B_h^1 следует неравенство

$$\sum m(\Pi_i) \leq m(Q).$$

Обозначим через Π_i^* прямоугольник, который имеет тот же центр, что и Π_i , но раздутый в пять раз. Утверждается, что выполнено соотношение

$$\{\cup \Pi_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \{\cup \Pi_i^*\}. \quad (4)$$

Действительно, зафиксируем Π_α и выберем первое k , обладающее тем свойством, что

$$r(\Pi_{k+1}) < 0,5r(\Pi_\alpha).$$

Тогда Π_α обязательно пересечет один из прямоугольников $\Pi_1, \dots, \Pi_k$. Из простых геометрических соображений следует, что Π_α содержится в $\left\{\bigcup_1^k \Pi_i^*\right\}$. Поэтому из (4) получим неравенство

$$m(\{\cup \Pi_\alpha : \alpha \in I\}) \leq \sum m(\Pi_i^*) \leq 25 \sum m(\Pi_i).$$

Лемма доказана.

С помощью леммы 4 стандартным путем (см., например, [7]) доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in L^1$ и н.в. $f(t) \geq 0$. Пусть $\alpha > 0$ фиксировано. Положим $D(\alpha, k) = \{x : M_h^k f(x) > \alpha\}$.

Тогда справедливо неравенство

$$m(D(\alpha, k)) \leq c_0 \alpha^{-1} \int_{D(\alpha, k)} f(x) dx$$

(константа c_0 взята из леммы 4).

Пусть функция $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ имеет частные производные по первой и второй координатам. Введем обозначения

$$f_1(t, s) = \frac{\partial f(t, s)}{\partial t}, \quad f_2(t, s) = \frac{\partial f(t, s)}{\partial s}.$$

Следующая лемма дает хорошие оценки функции f на больших множествах в пространствах Липшица, если известно, что $f_1 \in X$.

ЛЕММА 6. Пусть X – симметричное пространство. Пусть $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$, f_1 – непрерывная на Q функция, причем $f_1 \in X$. Пусть $\gamma > 0$ фиксировано.

Тогда существует множество $U_{1, \gamma}$ такое, что выполнены условия:

а) если $(t, s) \in Q \setminus U_{1, \gamma}$, то для любой точки вида $(t_2, s) \in Q$ верно неравенство

$$|f(t_1, s) - f(t_2, s)| \leq 2\gamma |t_1 - t_2|; \quad (5)$$

б) для меры множества $U_{1, \gamma}$ верно неравенство

$$\psi(X, m(U_{1, \gamma})) \leq c_0 \gamma^{-1} \|f_1\|_X \quad (6)$$

(константа c_0 взята из леммы 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала по γ выберем $h > 0$ так, чтобы из неравенства $|s_1 - s_2| < h$ при всех t выполнялось неравенство

$$|f_1(t, s_1) - f_1(t, s_2)| \leq \gamma.$$

Определим теперь множество $U_{1, \gamma}$ равенством

$$U_{1, \gamma} = \{(t, s) \in Q : M_h^2 |f_1(t, s)| > \gamma\}.$$

Тогда из лемм 2 и 5 следует неравенство (6).

Пусть теперь $(t_1, s) \in Q \setminus U_{1, \gamma}$ и $(t_2, s) \in Q$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{|t_1 - t_2|} |f(t_1, s) - f(t_2, s)| &= \frac{1}{|t_1 - t_2|} \left| \int_{t_1}^{t_2} f_1(\tau, s) d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{2h|t_1 - t_2|} \left| \int_{-h}^h \int_{t_1}^{t_2} f_1(\tau, s + u) d\tau du \right| + \frac{1}{|t_1 - t_2|} \\ &\quad \times \left| \int_{t_1}^{t_2} f_1(\tau, s) - \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \int_{t_1}^{t_2} f_1(\tau, s + u) du d\tau \right| \leq M_h^2 |f_1(t_1, s)| + \gamma \leq 2\gamma. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (5) тоже доказано. Лемма полностью доказана.

Аналогичные факты справедливы и в случае, если известно, что f_2 непрерывна и $f_2 \in X$.

Через Q_h ($h > 0$) обозначим квадрат вида $Q_h = [-h, h] * [-h, h]$, а через $2d_h$ обозначим его диаметр. Для $f \in L^1$ положим

$$f_h(x) = \frac{1}{m(Q_h)} \int_{Q_h} f(x + y) dy.$$

Следующие две простые леммы дают оценки средних функций для $f \in X$. В случае $X = L^p$ они хорошо известны [8].

ЛЕММА 7. *Справедливо неравенство*

$$\|f_{h_1} - f_{h_2} \mid X\| \leq \omega(f, d_{h_1}; X) + \omega(f, d_{h_2}; X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства

$$|f_{h_1}(x) - f_{h_2}(x)| \leq |f_{h_1}(x) - f(x)| + |f_{h_2}(x) - f(x)|$$

следует, что достаточно найти оценку величины $|f_h(x) - f(x)|$.

Пусть $g \in X'$ и $\|g \mid X'\| \leq 1$. Тогда можно написать неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} g(x) \{f_h(x) - f(x)\} dx &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x) \frac{1}{m(Q_h)} \int_{Q_h} \{f(x+y) - f(x)\} dy dx \\ &= \frac{1}{m(Q_h)} \int_{Q_h} \int_{\mathbb{R}^2} g(x) \{f(x+y) - f(x)\} dy dx \\ &\leq \frac{1}{m(Q_h)} \int_{Q_h} \|g \mid X'\| \|f(x+y) - f(x) \mid X\| dy \\ &\leq \omega(f, d_h; X). \end{aligned}$$

Переходя к верхней грани по g и вспоминая, что симметричное пространство X обладает свойством Фату, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. *Пусть X – симметричное пространство. При каждом $i = 1, 2$ верно неравенство*

$$\|f_{h,i} \mid X\| \leq \frac{1}{2h} \omega(f, 2h; X) \quad (7)$$

(напомним, что $f_{h,1}(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} f_h(t, s)$, $f_{h,2}(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} f_h(t, s)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы очевидно.

Теперь мы переходим к основной теореме.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, симметричное пространство X , функцию $f \in H_X$ и модуль непрерывности $\omega(f, h; X)$, причем мы будем считать, что $\omega(f, h; X)$ принадлежит U , иначе вместо модуля $\omega(f, h; X)$ нужно взять эквивалентный модуль $\omega^*(f, h; X)$ и дальше действовать с ним. Выберем теперь две монотонных последовательности положительных чисел $\{\delta_i\}$ и $\{\varepsilon_i\}$ так, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon, \quad (9)$$

причем выбор $\{\delta_i\}$, $\{\varepsilon_i\}$ будем осуществлять так, чтобы наряду с (8) и (9) выполнялось соотношение

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega(f, \delta_i; X)}{\psi(X; \varepsilon_i)} < \infty. \quad (10)$$

Условие (10) означает, что $\omega(f, \delta_i; X)$ достаточно быстро, а $\psi(X; \varepsilon_i)$ достаточно медленно стремятся к нулю (напомним, что $\psi(X; t)$ есть фундаментальная функция пространства X). С последовательностями $\{\delta_i\}$, $\{\varepsilon_i\}$ и модулем непрерывности $\omega(f, h; X)$ свяжем новую функцию

$$\Omega(f, h; X) = \inf_k \left\{ h \sum_{i=1}^k \frac{\omega(f, \delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1} \psi(X; \varepsilon_i)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\omega(f, \delta_i; X)}{\psi(X; \varepsilon_i)} \right\}. \quad (11)$$

Свойства этой функции описываются в следующей лемме.

ЛЕММА 9. *Справедливо соотношение $\Omega(f, h; X) \in U$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы следует из определения (11) и соотношения (10).

Теперь у нас все готово для доказательства основной теоремы, но прежде константу c_0 , фигурирующую в (6) и играющую важную роль в теореме 1, мы зафиксируем.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X – симметричное пространство и его фундаментальная функция $\psi(X; t)$ строго монотонна. Пусть функция $f(t, s)$ непрерывна и, следовательно, $f \in H_X$. Пусть задано $\varepsilon > 0$, и пусть последовательности $\{\delta_i\}$ и $\{\varepsilon_i\}$ удовлетворяют (8)–(10).*

Тогда существует множество $W(\varepsilon)$ такое, что выполнены соотношения

$$m(W(\varepsilon)) < \varepsilon; \quad (12)$$

если $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in Q \setminus W(\varepsilon)$, то

$$|f(t_1, s_1) - f(t_2, s_2)| \leq |f_{\delta_1}(t_1, s_1) - f_{\delta_1}(t_2, s_2)| + c_1 \Omega(f, |t_1 - t_2| + |s_1 - s_2|; X), \quad (13)$$

где f_δ – средняя функция, а c_1 – абсолютная константа. Можно положить $c_1 = 8 + 16c_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем числа α_i и β_i так, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{\psi(X; \varepsilon_i)}{2} = \frac{2}{\alpha_i} \omega(f, \delta_i; X), \quad (14)$$

$$\frac{\psi(X; \varepsilon_i)}{2} = \frac{8c_0}{\beta_i} \frac{\omega(f, \delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1}}. \quad (15)$$

Положим

$$\begin{aligned} f(t, s) &= f_{\delta_1}(t, s) + \sum_{i=1}^{\infty} \{f_{\delta_{i+1}}(t, s) - f_{\delta_i}(t, s)\}, \\ g_i(t, s) &= f_{\delta_{i+1}}(t, s) - f_{\delta_i}(t, s), \\ g_{i,1} &= \frac{\partial}{\partial t} g_i(t, s), \quad g_{i,2} = \frac{\partial}{\partial s} g_i(t, s). \end{aligned} \quad (16)$$

Функции $g_i, g_{i,1}, g_{i,2}$ непрерывны, и для них согласно леммам 7 и 8 верны оценки

$$\begin{aligned} \|g_i \mid X\| &\leq \omega(f, d_i; X) + \omega(f, d_{i+1}; X) \leq 2\omega(f, d_i; X), \\ \|g_{i,1} \mid X\| &\leq \frac{\omega(f, 2\delta_{i+1}; X)}{2\delta_{i+1}} + \frac{\omega(f, 2\delta_i; X)}{2\delta_i} \leq \frac{\omega(f, 2\delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1}}, \\ \|g_{i,2} \mid X\| &\leq \frac{\omega(f, 2\delta_{i+1}; X)}{2\delta_{i+1}} + \frac{\omega(f, 2\delta_i; X)}{2\delta_i} \leq \frac{\omega(f, 2\delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1}}, \end{aligned}$$

где $d_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_i$. Из (10) и последних соотношений следует, что ряд, стоящий в правой части верхней формулы (16), сходится в X к $f(t, s)$.

Для каждого i для функции g_i применим лемму 6, полагая $\gamma = \beta_i/2$. Тогда получим множества $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned}\psi(X; m(U_{i,1})) &\leq \frac{2c_0 \|g_{i,1} \mid X\|}{\beta_i} \leq \frac{2c_0}{\beta_i} \frac{\omega(f, 2\delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1}}, \\ \psi(X; m(U_{i,2})) &\leq \frac{2c_0 \|g_{i,2} \mid X\|}{\beta_i} \leq \frac{2c_0}{\beta_i} \frac{\omega(f, 2\delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1}},\end{aligned}$$

и, следовательно, неравенству

$$\psi(X; m(U_{i,1} \cup U_{i,2})) \leq \frac{4c_0}{\beta_i} \frac{\omega(f, 2\delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1}} \leq \frac{8c_0}{\beta_i} \frac{\omega(f, \delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1}}. \quad (17)$$

Если же $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in Q \setminus (U_{i,1} \cup U_{i,2})$, то выполнено неравенство

$$\begin{aligned}|g_i(t_1, s_1) - g_i(t_2, s_2)| &\leq |g_i(t_1, s_1) - g_i(t_1, s_2)| + |g_i(t_1, s_2) - g_i(t_2, s_2)| \\ &\leq \beta_i(|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2|).\end{aligned} \quad (18)$$

Далее, для функций $g_i(t, s)$ введем множества

$$O_i = \{(t, s) : |g_i(t, s)| > \alpha_i\}.$$

Тогда из леммы 3 будем иметь

$$\psi(X; m(O_i)) \leq \frac{1}{\alpha_i} \|g_i \mid X\| \leq \frac{2\omega(f, d_i; X)}{\alpha_i} \leq \frac{2\omega(f, \delta_i; X)}{\alpha_i}. \quad (19)$$

Положим

$$W_i = U_{i,1} \cup U_{i,2} \cup O_i.$$

Тогда из неравенств (17), (19) и соотношений (14), (15) получим

$$\begin{aligned}\psi(X; m(W_i)) &\leq \psi(X; m(U_{i,1} \cup U_{i,2})) + \psi(X; m(O_i)) \\ &\leq \frac{8c_0}{\beta_i} \frac{\omega(f, \delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1}} + \frac{2\omega(f, \delta_i; X)}{\alpha_i} \leq \psi(X; \varepsilon_i).\end{aligned}$$

Из строгой монотонности $\psi(X; t)$ следует, что

$$m(W_i) \leq \varepsilon_i. \quad (20)$$

Положим $W(\varepsilon) = \bigcup_1^\infty W_i$. Тогда из (9) и (20) следует, что выполнено (12).

Если теперь $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in Q \setminus W(\varepsilon) \subseteq Q \setminus (U_{i,1} \cup U_{i,2})$, то согласно (18) для любого i выполнено неравенство

$$|g_i(t_1, s_1) - g_i(t_2, s_2)| \leq \beta_i(|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2|). \quad (21)$$

С другой стороны, если $(t, s) \in Q \setminus W(\varepsilon) \subseteq Q \setminus O_i$, то для любого i выполнено неравенство

$$|g_i(t, s)| \leq \alpha_i. \quad (22)$$

Поэтому для $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in Q \setminus W(\varepsilon)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ согласно (21) и (22) можно написать неравенство

$$\begin{aligned} |f(t_1, s_1) - f(t_2, s_2)| &\leq |f_{\delta_1}(t_1, s_1) - f_{\delta_1}(t_2, s_2)| + \sum_{i=1}^{\infty} |g_i(t_1, s_1) - g_i(t_2, s_2)| \\ &\leq |f_{\delta_1}(t_1, s_1) - f_{\delta_1}(t_2, s_2)| + \sum_{i=1}^k |g_i(t_1, s_1) - g_i(t_2, s_2)| \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{\infty} |g_i(t_1, s_1) - g_i(t_2, s_2)| \leq |f_{\delta_1}(t_1, s_1) - f_{\delta_1}(t_2, s_2)| \\ &\quad + (|t_1 - t_2| + |s_2 - s_1|) \sum_{i=1}^k \beta_i + 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i. \end{aligned}$$

Из соотношений (14), (15) получим

$$\begin{aligned} |f(t_1, s_1) - f(t_2, s_2)| &\leq |f_{\delta_1}(t_1, s_1) - f_{\delta_1}(t_2, s_2)| \\ &\quad + 16c_0(|t_1 - t_2| + |s_2 - s_1|) \sum_{i=1}^k \frac{\omega(f, \delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1}\psi(X; \varepsilon_i)} + 8 \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\omega(f, \delta_i; X)}{\psi(X; \varepsilon_i)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |f(t_1, s_1) - f(t_2, s_2)| &\leq |f_{\delta_1}(t_1, s_1) - f_{\delta_1}(t_2, s_2)| \\ &\quad + c_1 \inf_k \left\{ (|t_1 - t_2| + |s_2 - s_1|) \sum_{i=1}^k \frac{\omega(f, \delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1}\psi(X; \varepsilon_i)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\omega(f, \delta_i; X)}{\psi(X; \varepsilon_i)} \right\} \\ &\leq |f_{\delta_1}(t_1, s_1) - f_{\delta_1}(t_2, s_2)| + c_1 \Omega(f, h; X), \end{aligned}$$

где $h = |t_1 - t_2| + |s_1 - s_2|$, и можно положить $c_1 = 8 + 16c_0$. Последнее неравенство и доказывает теорему. Теорема доказана.

Обсудим теперь возможности описания “наилучшего” модуля непрерывности $\Omega(f, h; X)$ в (13), причем желательно “минимизировать” $\Omega(f, h; X)$ по последовательностям $\{\varepsilon_i\}$ и $\{\delta_i\}$. Если никакой дополнительной информации нет, то применим подход К. Осолкова [1]–[3], который заключается в следующем.

Пусть $\omega(f, h; X)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(f, h; X)}{h} = \infty. \quad (23)$$

Положим $\delta_0 = 0, 5$, и пусть точки $\delta_1, \dots, \delta_n$ определены. Определим теперь точку δ_{n+1} равенством

$$\delta_{n+1} = \sup \left\{ \delta : \frac{\omega(f, \delta; X)}{\delta} \geq 2 \frac{\omega(f, \delta_n; X)}{\delta_n} \text{ и } \omega(f, \delta; X) \leq 0, 5 \omega(f, \delta_n; X) \right\}. \quad (24)$$

Тогда для последовательности $\{\varepsilon_i\}$, удовлетворяющей (9) и дополнительному соотношению

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} = 1, \quad (25)$$

модуль $\Omega(f, h; X)$ допускает для $h \in [\delta_k, \delta_{k-1}]$ оценку

$$\Omega(f, h; X) \leq \bar{c} \frac{\Omega(f, h; X)}{\psi(X; \varepsilon_k)}, \quad (26)$$

где $\bar{c}$ зависит только от $\{\varepsilon_i\}$.

Действительно, из (24) следует, что выполнены неравенства

$$\frac{\omega(f, \delta_{n+1}; X)}{\delta_{n+1}} \geq 2 \frac{\omega(f, \delta_n; X)}{\delta_n}, \quad \omega(f, \delta_{n+1}; X) \leq 0,5 \omega(f, \delta_n; X). \quad (27)$$

Поэтому из (25) и (27) следует, что найдется константа c такая, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\omega(f, \delta_{i+1}; X)}{\delta_{i+1} \psi(X; \varepsilon_i)} &\leq c \frac{\omega(f, \delta_k; X)}{\delta_k \psi(X; \varepsilon_{k-1})} \leq c \frac{\omega(f, \delta_k; X)}{\delta_k \psi(X; \varepsilon_k)}, \\ \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\omega(f, \delta_i; X)}{\psi(X; \varepsilon_i)} &\leq c \frac{\omega(f, \delta_k; X)}{\psi(X; \varepsilon_k)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $h \in [\delta_k, \delta_{k-1}]$ для $\Omega(f, h; X)$ можно написать оценку

$$\Omega(f, h; X) \leq c \min \left\{ \frac{\omega(f, \delta_k; X)}{\psi(X; \varepsilon_k)} \left(\frac{h}{\delta_k} + 1 \right), \frac{\omega(f, \delta_{k-1}; X)}{\psi(X; \varepsilon_{k-1})} \left(\frac{h}{\delta_{k-1}} + 1 \right) \right\}.$$

Если выполнено равенство

$$\omega(f, \delta_k; X) = 0,5 \omega(f, \delta_{k-1}; X),$$

то

$$\begin{aligned} \Omega(f, h; X) &\leq c \frac{\omega(f, \delta_{k-1}; X)}{\psi(X; \varepsilon_{k-1})} \left(\frac{h}{\delta_{k-1}} + 1 \right) \\ &\leq 2c \frac{\omega(f, \delta_{k-1}; X)}{\psi(X; \varepsilon_{k-1})} \leq 4c \frac{\omega(f, \delta_k; X)}{\psi(X; \varepsilon_{k-1})} \leq 4c \frac{\omega(f, h; X)}{\psi(X; \varepsilon_k)}. \end{aligned}$$

Если же выполнено другое равенство –

$$\frac{\omega(f, \delta_k; X)}{\delta_k} = 2 \frac{\omega(f, \delta_{k-1}; X)}{\delta_{k-1}},$$

то

$$\frac{\omega(f, \delta_k; X)}{\delta_k} \leq \frac{\omega(f, h; X)}{h},$$

и поэтому

$$\Omega(f, h; X) \leq c \frac{\omega(f, \delta_k; X)}{\psi(X; \varepsilon_k)} \left(\frac{h}{\delta_k} + 1 \right) \leq 2c \frac{\omega(f, h; X)}{\psi(X; \varepsilon_k)}.$$

Таким образом, оценка (26) верна.

Ниже последовательность $\{\delta_k\}$, определенную равенством (24), будем называть *K-последовательностью для модуля непрерывности* $\omega(f, \delta; X)$. Полезно отметить, что *K-последовательность* $\{\delta_k\}$ для модуля непрерывности $\omega(f, \delta; X)$ убывает не медленнее геометрической прогрессии и $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$.

С использованием *K-последовательности* теорему 1 можно переформулировать в следующем виде.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – симметричное пространство, причем его фундаментальная функция $\psi(X; t)$ строго монотонна. Пусть $f(t, s)$ непрерывна и, следовательно, $f \in H_X$. Пусть модуль непрерывности $\omega(f, \delta; X)$ удовлетворяет условию (23) и $\{\delta_k\}$ есть K -последовательность для $\omega(f, \delta; X)$. Пусть задано $\varepsilon > 0$, а последовательность $\{\varepsilon_i\}$ удовлетворяет условиям (9) и (25).

Тогда существует множество $W(\varepsilon)$ такое, что выполнены соотношения

$$m(W(\varepsilon)) < \varepsilon;$$

если $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in Q \setminus W(\varepsilon)$ и $h = |t_1 - t_2| + |s_1 - s_2| \in [\delta_k, \delta_{k-1}]$, то

$$|f(t_1, s_1) - f(t_2, s_2)| \leq C \left\{ |f_{\delta_1}(t_1, s_1) - f_{\delta_1}(t_2, s_2)| + \frac{\omega(f, h; X)}{\psi(X; \varepsilon_k)} \right\},$$

где C – константа, зависящая только от $\{\varepsilon_i\}$.

Теорема 2 показывает, что все пространства H_X^φ , построенные по симметричному пространству X с данной фундаментальной функцией, на “больших” множествах допускают одинаково ухудшающую оценку равномерного модуля непрерывности, т.е. $\omega(f, h; L^\infty)$ увеличивается по сравнению с $\omega(f, h; X)$ на один и тот же множитель. В этом смысле оценки равномерного модуля непрерывности у функций из H_X^φ зависят лишь от фундаментальной функции симметричного пространства X .

Сейчас мы покажем неусилимость теоремы 2. Все построения будут проводиться на $\mathbb{R}$, причем основной контрпример будет дан для периодического случая. Поэтому ниже мы будем рассматривать периодические функции с периодом 1 и соответствующие симметричные пространства.

Нам потребуются некоторые предварительные построения.

Положим $\theta_0(t) = 1 - 2|t - 0, 5|$ для $t \in [0, 1]$ и продолжим ее на $\mathbb{R}$ периодически с периодом 1. Зафиксируем $\psi \in U$ и три числа: $0, 5 > b_k > 0$, $a_k > 0$, $b_k > \tau_k > 0$.

Пусть $\left[\frac{b_k}{\tau_k} \right]$ есть целая часть числа $\frac{b_k}{\tau_k}$. Определим функцию

$$\theta_k(t) = \begin{cases} a_k \theta_0\left(\frac{t}{\tau_k}\right) & \text{при } t \in \left[0, \tau_k \left[\frac{b_k}{\tau_k} \right] \right), \\ 0 & \text{при } t \in \left[\tau_k \left[\frac{b_k}{\tau_k} \right], 1 \right) \end{cases}$$

и продолжим на $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ по периодичности. Нетрудно видеть, что график $\theta_k(t)$ есть “пила”. Нам потребуются оценки нормы функции $\theta_k(t)$ в пространствах Лоренца $\Lambda(\psi)$ и Марцинкевича $M(\psi)$.

ЛЕММА 10. Справедливо неравенство

$$\|\theta_k(t+h) - \theta_k(t)\|_{\Lambda(\psi)} \leq 4a_k \psi(b_k) \min \left\{ \frac{h}{\tau_k}, 1 \right\}. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\lambda_k(\alpha, h)$ функцию распределения функции $\theta_k(t+h) - \theta_k(t)$:

$$\lambda_k(\alpha, h) = m(\{t \in [0, 1] : |\theta_k(t+h) - \theta_k(t)| > \alpha\}).$$

Сразу же отметим, что при всех $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$\lambda_k(\alpha, h) \leq 2b_k, \quad (29)$$

а при $\alpha > a_k$ верно соотношение

$$\lambda_k(\alpha, h) = 0. \quad (30)$$

Поэтому если $h > 0, 5 \tau_k$, то из (29), (30) получим

$$\begin{aligned} \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t) \mid \Lambda(\psi)\| &= \int_0^\infty \psi(\lambda_k(\alpha, h)) d\alpha \\ &= \int_0^{a_k} \psi(\lambda_k(\alpha, h)) d\alpha \leq a_k \psi(2b_k) \leq 2a_k \psi(b_k). \end{aligned} \quad (31)$$

Если же $h < 0, 5 \tau_k$, то сначала выберем i_0 так, чтобы

$$a_k 2^{-(i_0+1)} \leq \theta_k(h) < a_k 2^{-i_0}.$$

Тогда при $\alpha > a_k 2^{-i_0}$ будем иметь $\lambda_k(\alpha, h) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t) \mid \Lambda(\psi)\| &= \int_0^\infty \psi(\lambda_k(\alpha, h)) d\alpha \\ &= \int_0^{a_k 2^{-i_0}} \psi(\lambda_k(\alpha, h)) d\alpha \leq a_k 2^{-i_0} \psi(2b_k) \leq 4\psi(b_k)\theta_k(h). \end{aligned} \quad (32)$$

Объединяя (31) и (32), придем к (28). Лемма доказана.

ЛЕММА 11. При $h \in [0, 0, 25 \tau_k]$ справедливо неравенство

$$\|\theta_k(t+h) - \theta_k(t) \mid \Lambda(\psi)\| \geq 0, 25 a_k \psi(b_k) \frac{h}{\tau_k}. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$D_h = \{t \in [0, b_k] : |\theta_k(t+h) - \theta_k(t)| > |\theta_k(h)|\}.$$

Тогда из графика $\theta_k(t)$ легко видеть, что выполнено неравенство $m(D_h) \geq 0, 25 b_k$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t) \mid M(\psi)\| &\geq \frac{\psi(m(D_h))}{m(D_h)} \int_{D_h} |\theta_k(t+h) - \theta_k(t)| dt \\ &\geq \theta_k(h) \psi(0, 25 b_k) \geq 0, 25 \theta_k(h) \psi(b_k). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства легко следует (33). Лемма доказана.

Из лемм 10 и 11 и теоремы вложения Е. М. Семенова [5] получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – симметричное пространство, $\psi \in U$ – его фундаментальная функция.

Тогда существует константа c , зависящая только от X и такая, что при $h \in [0, 0,5]$ выполнено неравенство

$$c^{-1}a_k\psi(b_k)\min\left\{\frac{h}{\tau_k}, 1\right\} \leq \omega(\theta_k, h; X) \leq ca_k\psi(b_k)\min\left\{\frac{h}{\tau_k}, 1\right\}.$$

Теперь мы сформулируем теорему, показывающую неусилимость теоремы 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – симметричное пространство с фундаментальной функцией $\psi \in U$. Пусть $v(t)$ – модуль непрерывности, для которого выполнено (23). Пусть $\{\delta_i\}$ есть K -последовательность для $v(t)$. Пусть для последовательности $\{b_i\}$ выполнены соотношения

$$0,5 \geq b_i \geq b_{i+1}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_i}{b_{i+1}} = 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \infty. \quad (34)$$

Тогда найдется $f \in H_X^v$ такая, что для любого множества M с $m(M) > 0$ выполнено соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(b_k) \sup\{|f(t) - f(s)| : t, s \in M, |t - s| \leq \delta_k\}}{v(\delta_k)} > 0. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\{\delta_k\}$ есть K -последовательность, то при $h \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(\delta_k) \min\left\{\frac{h}{\delta_k}, 1\right\} \leq v(h). \quad (36)$$

Доказательство (36) можно найти в [3] или получить так же, как доказательство (26).

Положим $a_k = \frac{v(\delta_k)}{\psi(b_k)}$. Из того, что $\{\delta_k\}$ есть K -последовательность, и из (34) следует, что при больших i выполнены неравенства

$$a_{i+1} \leq \frac{3}{4}a_i, \quad \frac{a_{i+1}}{\delta_{i+1}} \geq \frac{4}{3} \frac{a_i}{\delta_i}, \quad (37)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_i}{\delta_i} = \infty. \quad (38)$$

Поэтому мы будем считать, что при всех i $b_i > \delta_i$. По последовательностям чисел $\{a_k, \delta_k, b_k\}$ построим функции θ_k .

Определим новую последовательность чисел $d_k \rightarrow \infty$ равенствами

$$d_1 = 0, \quad \dots, \quad d_k = \sum_{i=1}^{k-1} b_i, \quad \dots, \quad k = 2, 3, \dots,$$

а последовательность функций соотношениями

$$g_i(t) = \begin{cases} \theta_i(t - d_i) & \text{при } t \in (d_i, d_{i+1}], \\ 0 & \text{при } t \in R \setminus (d_i, d_{i+1}], \end{cases}$$

$$f_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_i(t + k), \quad f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t + k).$$

Функции f_i и f периодические с периодом 1. Из построения функций f_i следует, что при $0 \leq h < 0,25$ выполнены соотношения

$$\omega(f, h; X) = \omega(\theta_i, h; X), \quad \|f_i \mid X\| \leq c \|f_i \mid \Lambda(\psi)\| \leq ca_i \psi(b_i).$$

Поэтому из теоремы 3 и соотношений (34), (36) и (37) следует, что $f \in X$ и

$$\omega(f, h; X) = \omega\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i, h; X\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \omega(f_i, h; X) \leq c \sum_{i=1}^{\infty} v(\delta_i) \min\left\{\frac{h}{\delta_i}, 1\right\} \leq c_1 v(h).$$

Таким образом, $f \in H_X^v$.

Покажем теперь, что выполнено (35). Для этого проведем некоторые вспомогательные построения.

Для каждого $t \in [0, 1)$ и $i \in \mathbb{N}$ положим $p(t, i) = \inf \left\{ k : t + i \leq \sum_{j=1}^k b_j = d_{k+1} \right\}$ (напомним, что выполнено (34), и поэтому $p(t, i) < \infty$). Так как $\sum_{j=1}^{p(t, i)-1} b_j < t + i \leq \sum_{j=1}^{p(t, i)} b_j$, то $1 \leq \sum_{j=p(t, i)}^{p(t, i+1)} b_j$. Поэтому из монотонности b_j получим

$$p(t, i+1) - p(t, i) \geq \frac{1}{b_{p(t, i)}}$$

и, следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \{p(t, i+1) - p(t, i)\} = \infty.$$

Так же доказывается, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{t \in [0, 1)} \{p(t, i+1) - p(t, i)\} = \infty. \quad (39)$$

Из соотношений (37) и (39) следует

ЛЕММА 12. *Существует номер i_0 такой, что если $i \geq i_0$, то для любого $t \in [0, 1)$ справедливы соотношения*

$$\sum_{j=p(t, i+1)}^{\infty} a_j < \frac{1}{16} a_{p(t, i)}, \quad \sum_{j=1}^{p(t, i-1)} \frac{a_j}{\delta_j} < \frac{1}{16} \frac{a_{p(t, i)}}{\delta_{p(t, i)}}.$$

Кроме того, нам потребуется следующая лемма из метрической теории функций.

ЛЕММА 13. Пусть мера множества M положительна. Пусть t – точка плотности множества M .

Тогда существует $\delta(t)$ такое, что если $0 < \delta \leq \delta(t)$, то найдется $h \in [0,5\delta, 0,75\delta]$, для которого точки $\tau_1 = t - 2h$, $\tau_2 = t - h$, $\tau_3 = t$, $\tau_4 = t + h$, $\tau_5 = t + 2h$ принадлежат множеству M .

Теперь у нас все готово для проверки свойства (35).

Пусть t – точка плотности множества M . Согласно лемме 13 найдем число $\delta(t)$. Выберем теперь $n(\delta) \in \mathbb{N}$ так, чтобы при $k > n(\delta)$ выполнялось неравенство $\delta_k < \delta(t)$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ определим $k(i) \in \mathbb{N}$ так, чтобы $t + i \in (d_{k(i)}, d_{k(i)+1}]$ (напомним, что $d_l = \sum_{j=1}^{l-1} b_j$). Выберем теперь i и соответственно $k(i)$ так, чтобы выполнялись следующие требования:

$$\begin{aligned} i &> i_0 \quad (i_0 \text{ из леммы 12}); \\ k(i) &> n(\delta) \quad (n(\delta) \text{ определено выше}); \\ b_{k(i)} &> 2\delta_{k(i)}. \end{aligned} \tag{40}$$

Последнее неравенство возможно в силу (38). Применим теперь лемму 13 для $\delta = 0,5\delta_{k(i)}$ (в силу (40) $k(i) > n(\delta)$, и поэтому $0,5\delta_{k(i)} < \delta(t)$). Получим точки $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$. Выберем среди этих точек две соседние так, чтобы они были расположены на одном участке линейности функции $f_{k(i)}$, а сдвинутые на i лежали бы в $(d_{k(i)}, d_{k(i)+1}]$. Такой выбор всегда возможен. Для определенности мы будем считать, что это точки t и $t + h$ и соответственно

$$|f_{k(i)}(t + h) - f_{k(i)}(t)| = 2h \frac{a_{k(i)}}{\delta_{k(i)}}.$$

Оценим теперь приращение функции f :

$$\begin{aligned} |f(t + h) - f(t)| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(t + h) - f_j(t)) \right| \\ &\geq |f_{k(i)}(t + h) - f_{k(i)}(t)| - \sum_{j < k(i)} |(f_j(t + h) - f_j(t))| \\ &\quad + \sum_{j > k(i)} |(f_j(t + h) - f_j(t))| \geq 2h \frac{a_{k(i)}}{\delta_{k(i)}} - A_{k(i)} - B_{k(i)}. \end{aligned}$$

Так как в суммах для $A_{k(i)}$ и $B_{k(i)}$ большинство слагаемых равны нулю, то с использованием индексов $p(t, j)$ можно написать оценки

$$\begin{aligned} B_{k(i)} &\leq \sum_{j > k(i)} f_j(t + h) + \sum_{j > k(i)} f_j(t) \leq \sum_{j=p(t, i+1)}^{\infty} a_j + \sum_{j=p(t+h, i+1)}^{\infty} a_j, \\ A_{k(i)} &\leq \sum_{j \leq p(t, i-1)}^{\infty} |f_j(t + h) - f_j(t)| + \sum_{j \leq p(t+h, i-1)}^{\infty} |f_j(t + h) - f_j(t)| \\ &\leq 2h \sum_{j \leq p(t, i-1)}^{\infty} \frac{a_j}{\delta_j} + 2h \sum_{j \leq p(t+h, i-1)}^{\infty} \frac{a_j}{\delta_j}, \end{aligned}$$

Согласно (39) $i > i_0$, поэтому из леммы 12 следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=p(t,i+1)}^{\infty} a_j &< \frac{1}{16} a_{p(t,i)}, & \sum_{j=p(t+h,i+1)}^{\infty} a_j &< \frac{1}{16} a_{p(t+h,i)}, \\ \sum_{j=p(t,i-1)}^{\infty} \frac{a_j}{\delta_j} &< \frac{1}{16} \frac{a_{p(t,i)}}{\delta_{p(t,i)}}, & \sum_{j=p(t+h,i-1)}^{\infty} \frac{a_j}{\delta_j} &< \frac{1}{16} \frac{a_{p(t+h,i)}}{\delta_{p(t+h,i)}}. \end{aligned}$$

В силу выбора $t+i, t+i+h \in (d_{k(i)}, d_{k(i)+1}]$ и, следовательно, $p(t,i) = p(t+h,i) = k(i)$. Поэтому

$$B_{k(i)} < \frac{1}{8} a_{k(i)}, \quad A_{k(i)} < \frac{h}{4} \frac{a_{k(i)}}{\delta_{k(i)}}.$$

Следовательно,

$$|f(t+h) - f(t)| > \frac{7}{4} \frac{a_{k(i)}}{\delta_{k(i)}} h - \frac{1}{8} a_{k(i)}. \quad (41)$$

Так как $h \in [0, 25\delta_{k(i)}, 0, 375\delta_{k(i)}]$, то из (40) следует (34). Теорема полностью доказана.

Проиллюстрируем приведенные теоремы примером. Пусть $v(t) = t^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$). Этот модуль непрерывности степенной. Для него K -последовательность легко считается и представляет собой геометрическую прогрессию. Пусть $f \in H_X^v$. Полагая $\varepsilon_i = c\varepsilon i^{-(1+\gamma)}$ ($\gamma > 0$), из теорем 1, 2 получим, что найдется множество меры больше $1 - \varepsilon$, на котором равномерный модуль непрерывности допускает оценку

$$\omega(f, h; L^\infty) \leq c_1 \frac{h^\alpha}{\psi(X; (\ln h^{-1})^{-(1+\gamma)})};$$

если же положить $\varepsilon_i = c\varepsilon i^{-1}(\ln i)^{-(1+\gamma)}$, то найдется множество меры больше $1 - \varepsilon$, на котором равномерный модуль непрерывности допускает оценку

$$\omega(f, h; L^\infty) \leq c_2 \frac{h^\alpha}{\psi(X; (\ln h^{-1})^{-1}(\ln \ln h^{-1})^{-(1+\gamma)})},$$

и т.д. С другой стороны, полагая $b_i = i^{-1}$, из теоремы 4 получаем, что найдется $f \in H_X^v$, для которой равномерный модуль непрерывности, вычисленный на любом множестве положительной меры, допускает оценку

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(f, h; L^\infty) \psi(X; (\ln h^{-1})^{-1})}{h^\alpha} > 0;$$

если положить $b_i = (i \ln i)^{-1}$ и применить теорему 4, то найдется $f_1 \in H_X^v$, для которой равномерный модуль непрерывности, вычисленный на любом множестве положительной меры, допускает оценку

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(f_1, h; L^\infty) \psi(X; (\ln \ln h^{-1})^{-1}(\ln h^{-1})^{-1})}{h^\alpha} > 0.$$

Таким образом, “наилучшей” оценки модуля непрерывности в рассматриваемой ситуации нет.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При доказательстве теорем 1, 2 предполагалось, что $f \in H_X$ непрерывна. Отметим, что единственное место, где использовалась непрерывность, это лемма 6. Интересно было бы узнать, каковы минимальные требования на $f \in H_X$ для справедливости теорем 1, 2 при $n > 1$, так как при $n = 1$ требование непрерывности для $f \in H_X$ легко снимается. Здесь также уместно заметить, что небольшой модификацией функций θ_k в теореме 4 можно добиться, чтобы построенная там функция f была непрерывна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При доказательстве теорем 1, 2 предполагалось, что фундаментальная функция $\psi(X; t)$ симметричного пространства X является строго монотонной. Это свойство использовалось лишь при доказательстве неравенства (20). Сейчас мы покажем, что если

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi(X; t) = 0,$$

то на этом симметричном пространстве X найдется эквивалентная первоначальной симметричная норма $\|f \mid X\|_1$ такая, что новая фундаментальная функция $\psi_1(X; t) = \|\chi(D) \mid X\|$ ($m(D) = t$) будет строго монотонной. Проверить этот факт можно следующим образом. Для функции $\psi(X; t)$ найдем эквивалентную ей строго монотонную вогнутую функцию $\varphi_0(t)$:

$$\varphi_0(t) \leq \psi(X; t) \leq c\varphi_0(t), \quad t \in [0, 1], \quad (42)$$

и по φ_0 построим пространство Лоренца $\Lambda(\varphi_0)$. Введем новое симметричное пространство $(\Lambda(\varphi_0) + X)_d$. Оно состоит из функций, для которых конечна норма

$$\|f \mid (\Lambda(\varphi_0) + X)_d\| = \inf \left\{ \|f_0 \mid \Lambda(\varphi_0)\| + \|f_1 \mid X\| : \right. \\ \left. f = f_0 + f_1, \text{supp } f_0 \cap \text{supp } f_1 = \emptyset \right\}.$$

Тогда из теоремы вложения Е. М. Семенова и из (42) следует с точностью до эквивалентных норм равенство $(\Lambda(\varphi_0) + X)_d = X$. С другой стороны, из (42) следует, что при $t \in [0, 1]$ верно равенство

$$\psi((\Lambda(\varphi_0) + X)_d; t) = \varphi_0(t).$$

Далее достаточно положить $\|f \mid X\|_1 = \|f \mid (\Lambda(\varphi_0) + X)_d\|$.

Список литературы

1. *Осколков К. И.* Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры // Матем. сб. 1977. Т. 103. № 4. С. 563–589.
2. *Осколков К. И.* Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры // ДАН СССР. 1976. Т. 229. С. 304–306.
3. *Ульянов П. Л.* О работах Н. Н. Лузина по метрической теории функций // УМН. 1985. Т. 40. № 3. С. 15–70.
4. *Брудный Ю. А.* Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. ММО. 1971. Т. 24. С. 69–132.
5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1977.
6. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
7. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
8. *Тихман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Гостехиздат, 1960.