Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Времена пребывания и точные асимптотики малых отклонений бesselевских процессов для L^p -норм, $p > 0$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 4, 69–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im690>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:08:11

УДК 519.2

В. Р. Фаталов

Времена пребывания и точные асимптотики малых уклонений бесселевских процессов для L^p -норм, $p > 0$

Доказаны теоремы о точных асимптотиках распределений интегральных функционалов от времени пребывания бесселевских процессов. На основе этих результатов получены точные асимптотики малых уклонений для бесселевских процессов в L^p -норме. Методом исследования является метод Лапласа для времен пребывания марковских процессов с непрерывным временем. Вычисления проведены для случаев $p = 2$ и $p = 1$. Даны решения экстремальных задач для функционала действия.

Библиография: 39 наименований.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

В последние 15 лет довольно интенсивно стали изучаться асимптотики малых уклонений распределений различных функционалов от случайных процессов (см. [1]–[6]). Речь идет об асимптотическом исследовании вероятности

$$P\{G(\xi) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

где G – некоторый функционал, например

$$G_1(x) = \int_T |x(t)|^p dt, \quad p > 0, \quad G_2(x) = \sup_{t \in T} |x(t)|,$$

а $\xi(t)$, $t \in T$, – случайный процесс с п. н. непрерывными траекториями, с нулевым средним, заданный на некотором множестве $T \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Естественно, что изучение вероятности (1.1) целесообразно проводить отдельно для классов гауссовских, марковских, диффузионных процессов и их подклассов. Оказалось, что, за исключением немногих случаев, когда известно точное распределение, вычисление асимптотики (точной или даже логарифмической) вероятности (1.1) – чрезвычайно сложная задача.

В работе [5] разработан метод вычисления точной асимптотики указанной вероятности в случае интегрального функционала от винеровского процесса. Этот метод основан на теории больших уклонений для времен пребывания [7]–[10] и пригоден для класса однородных марковских процессов, обладающих свойством *автомодельности*.

В настоящей работе, продолжая исследования, начатые в статье [5], мы вычислим точную асимптотику малых уклонений бесселевских процессов и бесселевских мостов для L^p -функционалов при $p > 0$. При этом будет доказан

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-01-00700).

ряд асимптотических результатов (представляющих независимый интерес) для распределений интегральных функционалов от времен пребывания указанных процессов.

Приведем точную формулировку полученных результатов. Пусть $\xi_q(t)$, $t \geq 0$, – бесселевский процесс порядка $q \in \mathbb{R}$. Как известно, это однородный диффузионный процесс, принимающий неотрицательные значения (см. [11]–[14]). Напомним некоторые сведения об этом процессе, придерживаясь их изложения в работе [11, с. 91, 147].

Пространством состояний для бесселевского процесса является множество $(0, \infty)$, если $q \geq 0$, или $q \leq -1$, или $-1 < q < 0$ и при этом 0 является убывающей границей; если $-1 < q < 0$ и при этом 0 является отражающей границей, то пространством состояний является множество $[0, \infty)$.

При $q \geq 0$ граничная точка 0 – *вход-не-выход*, это означает, что из нее процесс может начаться, но эта точка не может быть достигнута из точек множества $(0, \infty)$. При $q \leq -1$ граничная точка 0 – *выход-не-вход*, это означает, что из нее процесс нельзя начинать, но эта точка с положительной вероятностью может быть достигнута из точек множества $(0, \infty)$. При $-1 < q < 0$ граничная точка 0 является *одновременно входом и выходом*.

Мера скорости бесселевского процесса задается формулой (см. [11, с. 147])

$$m(dx) \equiv m_q(dx) = 2x^{2q+1} dx \equiv f(x) dx,$$

шкала – формулой

$$s(x) \equiv s_q(x) = \begin{cases} -\frac{x^{-2q}}{2q}, & \text{если } q \neq 0, \\ \log x, & \text{если } q = 0. \end{cases}$$

Пусть $C_b[0, \infty)$ – банахово пространство ограниченных непрерывных действительных функций на $[0, \infty)$ с нормой-супремум

$$\|h\|_{C_b[0, \infty)} := \sup_{x \in [0, \infty)} |h(x)|.$$

Характеристики, распределения и асимптотики бесселевских процессов сильно отличаются друг от друга в следующих двух случаях:

1) случай Q_1 : $q \geq 0$ или $-1 < q < 0$ и при этом 0 является отражающей границей;

2) случай Q_2 : $q \leq -1$ или $-1 < q < 0$ и при этом 0 является убывающей границей.

Производящий оператор процесса $\xi_q(t)$ имеет вид (см. [11, с. 147], [14, с. 84])

$$(\mathcal{A}h)(x) = \frac{1}{2} h''(x) + \frac{2q+1}{2x} h'(x), \quad x > 0, \quad (1.2)$$

с областью определения

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} := \{h \in C_b[0, \infty) : \mathcal{A}h \in C_b[0, \infty), \tilde{h}(0) = 0\}, \quad (1.3)$$

где

$$\tilde{h}(0) := \begin{cases} \lim_{x \downarrow 0} h'(x) x^{2q+1} & \text{в случае } Q_1, \\ h(0) & \text{в случае } Q_2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Введем основное гильбертово пространство функций, заданных на $[0, \infty)$:

$$L^2 \equiv L^2(dm) := \{v(x), x \in [0, \infty) : N(v) < \infty\},$$

где $N(v) \equiv \|v\|^2 := \int_0^\infty v^2(x) m(dx)$; скалярное произведение в L^2 обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle u, v \rangle := \int_0^\infty u(x)v(x) m(dx), \quad u, v \in L^2.$$

Введем множество $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}} := \{h \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \cap L^2 : \mathcal{A}h \in L^2\}$. Определим функционал

$$U(v) := \int_0^\infty x^p v^2(x) f(x) dx \equiv \langle x^p v, v \rangle, \quad v \in L^2, \quad (1.5)$$

и обозначим через $\mathcal{D}_0$ множество функций $h(x) \in L^2$ таких, что $x^p h(x) \in L^2$.

Пусть множество $\mathcal{D} := \mathcal{D}_0 \cap \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}$ всюду плотно в L^2 ; ниже мы будем рассматривать оператор $\mathcal{A}$, действующий в L^2 , с областью определения $\mathcal{D}$. Определим множество

$$\mathcal{H} := \{v \in \mathcal{D} : N(v) = 1\}. \quad (1.6)$$

Заметим, что если $v \in \mathcal{H}$, то функция $v^2 f$ является вероятностной плотностью на $[0, \infty)$, кроме того, $\lim_{x \rightarrow \infty} v^2(x) f(x) = 0$.

Определим функционал

$$J(v) := \begin{cases} -\langle \mathcal{A}v, v \rangle, & \text{если } v \in \mathcal{H}, \\ +\infty, & \text{если } v \in L^2 \setminus \mathcal{H}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Функционал $J(v)$ тесно связан с функционалом действия $I(\nu)$, введенным ниже в формуле (2.12); эта связь указана в (2.18). Известно, что функционал действия играет основную роль в вариационном принципе теории больших отклонений (см. [7, с. 61, 97]). Для формулировки основных результатов нам понадобится следующее предложение, имеющее вариационную природу и доказанное ниже, в § 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $p > 0$, $d > 0$ и $q \in \mathbb{R}$ фиксированы. Тогда в случаях Q_1 и Q_2 справедливы следующие утверждения:

(i) экстремальная задача

$$J(v) \rightarrow \inf, \quad v \in \mathcal{H}, \quad v \geq 0, \quad U(v) \leq d, \quad (1.8)$$

имеет единственное решение – функцию $v_0(x) \equiv v_0(x, d)$, $x \in [0, \infty)$, при этом функция $v_0(x)$ ограничена и положительна;

(ii) существует единственная пара положительных чисел (β_0, λ_0) (множители Лагранжа) такая, что функция $v_0(x)$ является единственным по-

ложительным решением граничной задачи для уравнения типа Шрёдингера с потенциалом x^p :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v''(x) + \frac{2q+1}{2x} v'(x) - \lambda_0 x^p v(x) + \beta_0 v(x) &= 0, \quad x \in [0, \infty), \\ \tilde{v}(0) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v^2(x) f(x) = 0, \\ \int_0^\infty v^2(x) m(dx) &= 1, \quad \int_0^\infty x^p v^2(x) m(dx) = d, \end{aligned} \quad (1.9)$$

при этом

$$\inf\{J(v) : v \in \mathcal{H}, U(v) \leq d, v \geq 0\} = J(v_0) = \beta_0 - d\lambda_0 > 0. \quad (1.10)$$

Ниже, в предложении 2.9 доказано, что решать задачу (1.8) достаточно только в случае Q_1 . В силу приближения Лиувилля–Грина (см. ниже предложение 2.10) и ограниченности функции $v_0(x)$ интеграл $\int_0^\infty v_0(x) m(dx)$ конечен.

Указывать зависимость функции $v_0(x)$ от параметров d или q будем лишь в редких случаях. Определим непрерывную функцию

$$V(x) := \beta_0 - \lambda_0 x^p, \quad x \in [0, \infty). \quad (1.11)$$

Далее будет показано (см. (3.4) и доказательство леммы 3.3), что ядро E_0 оператора $\mathcal{A} + V : L^2 \rightarrow L^2$ представляет собой одномерное подпространство пространства L^2 :

$$E_0 := \text{Ker}(\mathcal{A} + V) = \{c_0 v_0(x), c_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Имеет место разложение гильбертова пространства L^2 в прямую сумму:

$$L^2 = E_0 \oplus E_1,$$

где

$$E_1 := E_0^\perp = \left\{ v \in L^2 : \int_0^\infty v(x) v_0(x) m(dx) = 0 \right\}$$

– ортогональное дополнение подпространства E_0 (см. [15, гл. 4, § 1, п. 3]). Положим

$$\psi(x) := \frac{x^p}{d} - 1, \quad x \in [0, \infty);$$

тогда в силу двух последних равенств из (1.9) имеем $v_0 \psi \in E_1$. Обозначим

$$\sigma^2 := -2\lambda_0^2 d \int_0^\infty (\mathcal{A} + V)^{-1} [v_0 \psi](x) x^p v_0(x) m(dx), \quad (1.12)$$

где (согласно изложенному выше) обратный элемент $(\mathcal{A} + V)^{-1} [v_0 \psi](x)$ берется из подпространства E_0 , т. е. для него выполнено равенство

$$\int_0^\infty (\mathcal{A} + V)^{-1} [v_0 \psi](x) v_0(x) m(dx) = 0. \quad (1.13)$$

Конечность и положительность σ^2 доказана ниже, в лемме 3.3.

Как известно (см., например, [13, гл. 11, § 3]), *бесселевским мостом* из точки x в точку y называется процесс $\{\xi_q(t) \mid \xi_q(0) = x, \xi_q(1) = y\}$, где $x \geq 0$ в случае Q_1 и $x > 0$ в случае Q_2 ; $y \geq 0$, если $-1 < q < 0$ и при этом 0 является отражающей границей, и $y > 0$ во всех остальных случаях.

Ниже $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию.

ТЕОРЕМА 1.1 (точная асимптотика малых уклонений для L^p -нормы). Пусть $p > 0$ и тройка $u_0(x) \equiv v_0(x, 1)$, β_0, λ_0 определена так, как в предложении 1.1 при $d = 1$. Тогда в случае Q_1 при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} P\left\{\int_0^1 \xi_q^p(t) dt \leq \varepsilon^p \mid \xi_q(0) = 0\right\} \\ = \varepsilon \exp\left\{-\frac{\beta_0 - \lambda_0}{\varepsilon^2}\right\} \frac{u_0(0)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u_0(x) m(dx) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} P\left\{\int_0^1 \xi_q^p(t) dt \leq \varepsilon^p \mid \xi_q(0) = 0, \xi_q(1) = \varepsilon y\right\} \\ = \frac{1}{\varepsilon^{2q+1}} \exp\left\{-\frac{\beta_0 - \lambda_0}{\varepsilon^2}\right\} u_0(0) u_0(y) \frac{2^{q+1/2} \Gamma(q+1)}{\sigma\sqrt{\pi}} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $y > 0$ при $q \geq 0$ и $y \geq 0$ при $-1 < q < 0$.

Для некоторых частных значений p на основе теоремы 1.1 можно получить явные формулы. Наиболее прост гильбертов случай $p = 2$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1 (малые уклонения в L^2 -норме). В случае Q_1 при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} P\left\{\int_0^1 \xi_q^2(t) dt \leq \varepsilon^2 \mid \xi_q(0) = 0\right\} \\ = \varepsilon \exp\left\{-\frac{(q+1)^2}{2\varepsilon^2}\right\} \frac{2^{q+3/2}}{\sqrt{\pi}(q+1)} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} P\left\{\int_0^1 \xi_q^2(t) dt \leq \varepsilon^2 \mid \xi_q(0) = 0, \xi_q(1) = \varepsilon y\right\} \\ = \frac{1}{\varepsilon^{2q+1}} \exp\left\{-\frac{(q+1)^2}{2\varepsilon^2}\right\} \exp\left\{-\frac{q+1}{2} y^2\right\} \frac{2^{q+3/2}}{\sqrt{\pi}} (q+1)^q (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $y > 0$ при $q \geq 0$ и $y \geq 0$ при $-1 < q < 0$.

Напомним, что при $q \geq 0$ известна точная (неасимптотическая) формула для вероятности из соотношения (1.16) (см., например, [11, с. 364, п. 1.9.4(1)]). В этом случае асимптотика (1.16) согласуется с указанной формулой.

Пусть $q = \frac{n}{2} - 1$, $n = 1, 2, \dots$, и $\mathbf{W}(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t))$, $t \geq 0$, — n -мерный векторный винеровский процесс, где $w_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, — независимые одномерные винеровские процессы. Тогда, как известно [11, с. 91],

бесселевский процесс $\xi_q(t)$, $t \geq 0$, совпадает по распределению с евклидовой нормой векторного процесса $\mathbf{W}(t)$:

$$\{\xi_q(t), t \geq 0\} \stackrel{\text{def}}{=} \{[w_1^2(t) + w_2^2(t) + \dots + w_n^2(t)]^{1/2}, t \geq 0\}, \quad q = \frac{n}{2} - 1;$$

здесь при $q = -1/2$ точка 0 является отражающей границей.

Таким образом, процесс $\{\xi_{-1/2}(t), t \geq 0\}$ совпадает по распределению с процессом $\{|w(t)|, t \geq 0\}$, где $w(t)$ – винеровский процесс. Для винеровского процесса результаты теоремы 1.1 и следствия 1.1 получены ранее в работе [5].

Следующий пример относится к важному случаю трехмерного винеровского процесса, т. е. когда $q = 1/2$, $n = 3$ и $p = 1$.

Пусть $\text{Ai}(y)$ – функция Эйри (см. [16, § 10.4], [18, гл. 11]), $\text{Ai}'(y)$ – ее производная, $a_1 \approx 2.3381$ – первый нуль функции $\text{Ai}(-y)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2 (малые отклонения в L^1 -норме, $q = 1/2$). При $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнены соотношения

$$P\left\{\int_0^1 \xi_{1/2}(t) dt \leq \varepsilon \mid \xi_{1/2}(0) = 0\right\} = b_0 \varepsilon \exp\left\{-\frac{2a_1^3}{27\varepsilon^2}\right\}(1 + o(1)), \quad (1.18)$$

где

$$b_0 = \frac{9}{2\sqrt{2\pi} a_1^{3/2} \text{Ai}'(-a_1)} \left[a_1 \left(\frac{1}{3} + \int_0^{a_1} \text{Ai}(-s) ds \right) - \text{Ai}'(-a_1) \right];$$

$$P\left\{\int_0^1 \xi_{1/2}(t) dt \leq \varepsilon \mid \xi_{1/2}(0) = 0, \xi_{1/2}(1) = \varepsilon y\right\} = \frac{b_1(y)}{\varepsilon^2} \exp\left\{-\frac{2a_1^3}{27\varepsilon^2}\right\}(1 + o(1)), \quad (1.19)$$

где $y > 0$ и

$$b_1(y) = \frac{\sqrt{a_1}}{\text{Ai}'(-a_1)y} \text{Ai}\left(\frac{2}{3} a_1 y - a_1\right).$$

Точные формулы для вероятностей из левых частей соотношений (1.18), (1.19), по-видимому, неизвестны (см., в частности, [11, ч. 2, гл. 5, § 1, с. 423]).

Приведем доказанные в статье асимптотические результаты для распределений интегральных функционалов от времен пребывания. Дадим соответствующие определения применительно к нашему случаю бесселевских процессов, траектории которых, как известно, непрерывны п. н.

Пусть $C_+[0, \infty)$ – пространство непрерывных действительных функций $z(t)$, $0 \leq t < \infty$, со значениями в $[0, \infty)$. Для каждого $t > 0$, $z \in C_+[0, \infty)$ и борелевского B из $[0, \infty)$ обозначим

$$L_t(z, B) = \frac{1}{t} \int_0^t I_B(z(s)) ds$$

часть времени из отрезка $[0, t]$, которую фиксированная траектория $z = z(\cdot)$ проводит в множестве B , здесь $I_B(\cdot)$ – индикатор множества B . Функционал $L_t(z, B)$ кратко называют (нормированным) временем пребывания, при каждом фиксированном t функция $L_t(z, \cdot)$ представляет собой вероятностную меру на $[0, \infty)$. Важное значение времен пребывания объяснено ниже, в предложении 2.1.

ТЕОРЕМА 1.2 (точная асимптотика для времен пребывания). Пусть $p > 0$, $d > 0$ фиксированы. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы следующие утверждения.

(i) Рассмотрим случай Q_1 . Пусть тройка $v_0(x) \equiv v_0(x; q)$, $\beta_0 \equiv \beta_0(q)$, $\lambda_0 \equiv \lambda_0(q)$ определена так, как в предложении 1.1, а величина σ^2 определена в формуле (1.12). Пусть $x \geq 0$, а $y > 0$ при $q \geq 0$ и $y \geq 0$ при $-1 < q < 0$. Тогда выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\int_0^\infty s^p L_T(\xi_q, ds) < d \mid \xi_q(0) = x\right\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \xi_q^p(t) dt < d \mid \xi_q(0) = x\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\{-T(\beta_0 - d\lambda_0)\} \frac{v_0(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty v_0(s) m(ds) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\int_0^\infty s^p L_T(\xi_q, ds) < d \mid \xi_q(0) = x, \xi_q(T) = y\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \xi_q^p(t) dt < d \mid \xi_q(0) = x, \xi_q(T) = y\right\} \\ &= T^{q+1/2} \exp\{-T(\beta_0 - d\lambda_0)\} v_0(x) v_0(y) \frac{2^{q+1/2} \Gamma(q+1)}{\sigma\sqrt{\pi}} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.21)$$

(ii) Рассмотрим случай Q_2 . Положим $\tilde{v}_0(x) := x^{-2q} v_0(x; -q)$, $\tilde{\beta}_0 := \beta_0(-q)$, $\tilde{\lambda}_0 := \lambda_0(-q)$, где тройка $(v_0(x; -q), \beta_0(-q), \lambda_0(-q))$ определена так, как в предложении 1.1. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x) &:= \tilde{\beta}_0 - \tilde{\lambda}_0 x^p, \quad x \in [0, \infty), \\ \tilde{\sigma}^2 &= -2\tilde{\lambda}_0^2 d \int_0^\infty (\mathcal{A} + \tilde{V})^{-1} [\tilde{v}_0 \psi](x) x^p \tilde{v}_0(x) m(dx). \end{aligned}$$

Пусть $x > 0$ и $y > 0$. Тогда выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\int_0^\infty s^p L_T(\xi_q, ds) < d \mid \xi_q(0) = x\right\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \xi_q^p(t) dt < d \mid \xi_q(0) = x\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\{-T(\tilde{\beta}_0 - d\tilde{\lambda}_0)\} \frac{\tilde{v}_0(x)}{\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \tilde{v}_0(s) m(ds) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\int_0^\infty s^p L_T(\xi_q, ds) < d \mid \xi_q(0) = x, \xi_q(T) = y\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \xi_q^p(t) dt < d \mid \xi_q(0) = x, \xi_q(T) = y\right\} \\ &= T^{-q+1/2} \exp\{-T(\tilde{\beta}_0 - d\tilde{\lambda}_0)\} \tilde{v}_0(x) \tilde{v}_0(y) \frac{2^{-q+1/2} \Gamma(1-q)}{\tilde{\sigma}\sqrt{\pi}} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Отметим, что для бesselевского процесса, выходящего из нуля, вычисления в утверждении (i) теоремы 1.2 можно проводить только при $d = 1$ (см. предложение 3.1 ниже).

СЛЕДСТВИЕ 1.3 ($p = 2$). *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Рассмотрим случай Q_1 . Пусть $x \geq 0$, $a, y > 0$ при $q \geq 0$ и $y \geq 0$ при $-1 < q < 0$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\int_0^\infty s^2 L_T(\xi_q, ds) < d \mid \xi_q(0) = x\right\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \xi_q^2(t) dt < d \mid \xi_q(0) = x\right\} \\ &= \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{T}} \exp\left\{-\frac{(q+1)^2}{2d} T\right\} \frac{2^{q+3/2}}{\sqrt{\pi}(q+1)} \exp\left\{-\frac{q+1}{2d} x^2\right\} (1+o(1)), \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\int_0^\infty s^2 L_T(\xi_q, ds) < d \mid \xi_q(0) = x, \xi_q(T) = y\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \xi_q^2(t) dt < d \mid \xi_q(0) = x, \xi_q(T) = y\right\} \\ &= \left(\frac{T}{d}\right)^{q+1/2} \exp\left\{-\frac{(q+1)^2}{2d} T\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{q+1}{2d} (x^2 + y^2)\right\} \frac{2^{q+3/2}}{\sqrt{\pi}} (q+1)^q (1+o(1)). \end{aligned} \quad (1.25)$$

(ii) *Рассмотрим случай Q_2 . Пусть $x > 0$ и $y > 0$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\int_0^\infty s^2 L_T(\xi_q, ds) < d \mid \xi_q(0) = x\right\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \xi_q^2(t) dt < d \mid \xi_q(0) = x\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left\{-\frac{(1-q)^2}{2d} T\right\} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{q+1/2}}{(1-q)^{1+q}\Gamma(1-q)} x^{-2q} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1-q}{2d} x^2\right\} (1+o(1)), \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\int_0^\infty s^2 L_T(\xi_q, ds) < d \mid \xi_q(0) = x, \xi_q(T) = y\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \xi_q^2(t) dt < d \mid \xi_q(0) = x, \xi_q(T) = y\right\} \\ &= \left(\frac{T}{d}\right)^{-q+1/2} \exp\left\{-\frac{(1-q)^2}{2d} T\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1-q}{2d} (x^2 + y^2)\right\} \frac{2^{-q+3/2}}{\sqrt{\pi}} (1-q)^{-q} (1+o(1)). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Для значений $q = \frac{n}{2} - 1$, $n = 1, 2, \dots$, результаты о точных асимптотиках малых уклонений бesselевских процессов $\xi_q(t)$ в норме-супремум изложены в статье [2, § 2] (см. также [11, с. 359, п. 1.1.4]).

СЛЕДСТВИЕ 1.4 (случай $p = 1$, $q = 1/2$). *Пусть $x \geq 0$ и $y > 0$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\int_0^\infty s L_T(\xi_{1/2}, ds) < d \mid \xi_{1/2}(0) = x\right\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \xi_{1/2}(t) dt < d \mid \xi_{1/2}(0) = x\right\} \\ &= \frac{b_2(x)}{\sqrt{T}} \exp\left\{-\frac{2a_1^3}{27d^2} T\right\} (1+o(1)), \end{aligned} \quad (1.28)$$

где

$$b_2(x) = \frac{27d^2}{4\sqrt{2\pi} a_1^{5/2} [\text{Ai}'(-a_1)]^2 x} \text{Ai}\left(\frac{2a_1}{3d} x - a_1\right) \times \left[a_1 \left(\frac{1}{3} + \int_0^{a_1} \text{Ai}(-s) ds \right) - \text{Ai}'(-a_1) \right], \quad x > 0, \\ b_2(0) = \lim_{x \downarrow 0} b_2(x);$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \int_0^\infty s L_T(\xi_{1/2}, ds) < d \mid \xi_{1/2}(0) = x, \xi_{1/2}(T) = y \right\} \\ &= \mathbb{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \xi_{1/2}(t) dt < d \mid \xi_{1/2}(0) = x, \xi_{1/2}(T) = y \right\} \\ &= b_3(x, y) \left(\frac{T}{d^2} \right)^{q+1/2} \exp \left\{ -\frac{2a_1^3}{27d^2} T \right\} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.29)$$

где

$$b_3(x, y) = \frac{3d}{2\sqrt{a_1} [\text{Ai}'(-a_1)]^2 xy} \text{Ai}\left(\frac{2a_1}{3d} x - a_1\right) \text{Ai}\left(\frac{2a_1}{3d} y - a_1\right), \quad x > 0, \quad y > 0, \\ b_3(0, y) = \lim_{x \downarrow 0} b_3(x, y).$$

Используя предложение 2.9 (см. ниже), можно получить результат, аналогичный следствию 1.4 в случае, когда $p = 1$, $q = -1/2$ и точка 0 является убывающей границей.

§ 2. Метод Лапласа для времен пребывания; логарифмическая асимптотика

2.1. Связь задачи о малых отклонениях с теорией больших отклонений для времен пребывания в случае Q_1 . В случае винеровского процесса указанная связь была использована в работе [5]. На самом деле две упомянутые задачи близки для любого случайного процесса, обладающего свойством автомодельности. Покажем это для класса бesselевских процессов, рассмотренных в теореме 1.1.

Справедливо следующее утверждение (см. [13, гл. 6], [20, гл. 1, формула (4.1)]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть действительная функция g измерима по Борелю и интегрируема на любом компактном множестве из $[0, \infty)$. Тогда для каждого $t > 0$ и всех $\omega \in \Omega$ выполнено равенство

$$\frac{1}{t} \int_0^t g(\xi_q(s)) ds = \int_0^\infty g(x) L_t(\xi_q, dx). \quad (2.1)$$

Заметим, что в равенстве (2.1) слева стоит нелинейный функционал от процесса ξ_q , в то время как справа присутствует линейный функционал от времени пребывания этого процесса.

Обозначим в случае Q_1 через $\{\xi_{q,0}(s), s \geq 0\}$ бesselевский процесс, выходящий из нуля, т.е. $\xi_{q,0}(0) = 0$ п.н. Имеет место следующий факт (см. [11, с. 93]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 (масштабная инвариантность, или автомодельность, бesselевского процесса, выходящего из нуля). *В случае Q_1 для любого фиксированного $T > 0$ справедливы утверждения:*

- (i) *процессы $\{T^{1/2}\xi_{q,0}(s), s \geq 0\}$ и $\{\xi_{q,0}(Ts), s \geq 0\}$ имеют одинаковые распределения;*
- (ii) *процессы $\{[T^{1/2}\xi_{q,0}(s) \mid \xi_{q,0}(1) = T^{-1/2}y], s \geq 0\}$ и $\{[\xi_{q,0}(Ts) \mid \xi_{q,0}(T) = y], s \geq 0\}$ имеют одинаковые распределения.*

Здесь утверждение (ii) вытекает из утверждения (i).

ЛЕММА 2.1. *Пусть $p > 0$ и выполнены условия предложения 2.2. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ справедливы равенства*

$$T^{p/2} \int_0^1 \xi_{q,0}^p(t) dt = \int_0^1 \xi_{q,0}^p(Tt) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \xi_{q,0}^p(t) dt = \int_0^\infty x^p L_T(\xi_{q,0}, dx) \quad \text{п.н.}, \quad (2.2)$$

$$\left\{ T^{p/2} \int_0^1 \xi_{q,0}^p(t) dt \mid \xi_{q,0}(1) = \frac{y}{\sqrt{T}} \right\} = \left\{ \int_0^\infty x^p L_T(\xi_{q,0}, dx) \mid \xi_{q,0}(T) = y \right\} \quad \text{п.н.} \quad (2.3)$$

Равенства (2.2), (2.3) доказываются с помощью предложений 2.1 и 2.2.

В условиях теоремы 1.1 согласно равенствам (2.2), (2.3) для любого фиксированного $T > 0$ выполнены соотношения

$$\mathbb{P} \left\{ \int_0^1 \xi_{q,0}^p(t) dt < \varepsilon^p \right\} = \mathbb{P} \left\{ \int_0^\infty x^p L_T(\xi_{q,0}, dx) < 1 \right\}, \quad \varepsilon = T^{-1/2}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \int_0^1 \xi_{q,0}^p(t) dt < \varepsilon^p \mid \xi_{q,0}(1) = \varepsilon y \right\} \\ &= \mathbb{P} \left\{ \int_0^\infty x^p L_T(\xi_{q,0}, dx) < 1 \mid \xi_{q,0}(T) = y \right\}, \quad \varepsilon = T^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Как видим, для доказательства формул (1.14), (1.15) достаточно найти точные асимптотики вероятностей из правых частей соотношений (2.4), (2.5) при $T \rightarrow \infty$. Для этого мы используем теорию больших уклонений для времен пребывания, развитую в работах [5], [9], [10], [24]. Таким образом, в силу формул (2.4), (2.5) утверждение теоремы 1.1 легко следует из п. (i) теоремы 1.2 при $d = 1$ и $x = 0$. В случае Q_2 равенства типа (2.4), (2.5) не имеют места.

Перейдем к описанию метода доказательства теоремы 1.2. Приведем некоторые сведения, которые нам понадобятся для изложения метода Лапласа для времен пребывания.

2.2. Свойства производящего оператора $\mathcal{A}$ и форма Дирихле. Пусть $I_q(x)$ – модифицированная функция Бесселя порядка q (см. [16, гл. 9], [17, гл. 7]). Напомним (см. [11, с. 148]), что переходная плотность $p(t, x, y)$ бesselевского процесса относительно меры скорости $m(dx)$ имеет вид:

– в случае Q_1

$$\begin{aligned} p(t, x, y) &= \frac{1}{2t} (xy)^{-q} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right\} I_q\left(\frac{xy}{t}\right), \quad x > 0, \quad y > 0, \\ p(t, 0, y) &= \frac{1}{2^{q+1}t^{q+1}\Gamma(q+1)} \exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

– в случае Q_2

$$p(t, x, y) = \frac{1}{2t} (xy)^{-q} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right\} I_{|q|}\left(\frac{xy}{t}\right), \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (2.7)$$

Как видим, переходная плотность – это симметричная функция по переменным x, y , т. е. $p(t, x, y) = p(t, y, x)$. Напомним, что это общее свойство одномерных диффузий (см. [11, с. 29]). Таким образом, бesselевский процесс принадлежит классу так называемых *m -симметричных марковских процессов* (см. [10], [30], [31], [22, с. 311]), т. е. для него выполнено определяющее соотношение

$$\langle P_t g, h \rangle = \langle g, P_t h \rangle, \quad g, h \in C_0[0, \infty),$$

где $P_t g(x) := \int_0^\infty p(t, x, y) g(y) m(dy)$ – полугрупповой оператор и $C_0[0, \infty)$ – пространство непрерывных действительных функций на $[0, \infty)$ с компактным носителем. Для m -симметричных марковских процессов развита эффективная теория больших уклонений (см. [10], [22], [7, § 5.1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Производящий оператор $\mathcal{A}: \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}} \rightarrow L^2$ бesselевского процесса является симметричным, т. е.*

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \langle \mathcal{A}v, u \rangle, \quad u, v \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}, \quad (2.8)$$

и отрицательным, т. е.

$$\langle \mathcal{A}v, v \rangle \leq 0, \quad v \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}. \quad (2.9)$$

Свойства (2.8) и (2.9) следуют из общих результатов, доказанных для регулярных m -симметричных марковских процессов (см. [30], [22, с. 311]).

Как видим, оператор $-\mathcal{A}$ является симметричным и положительным. Следуя работе [30] и учитывая (2.8) и (2.9), определим билинейную форму Дирихле:

$$\mathcal{E}(u, v) := \langle \sqrt{-\mathcal{A}}u, \sqrt{-\mathcal{A}}v \rangle, \quad u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \equiv \mathcal{D}(\sqrt{-\mathcal{A}}), \quad (2.10)$$

где $\sqrt{-\mathcal{A}}$ – квадратный корень из симметричного положительного оператора $-\mathcal{A}$, $\mathcal{D}(\sqrt{-\mathcal{A}})$ – область определения оператора $\sqrt{-\mathcal{A}}$.

Имеет место равенство

$$\mathcal{E}(u, v) = -\langle \mathcal{A}u, v \rangle, \quad u \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}, \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad (2.11)$$

(см. [30, § 1.3]).

2.3. Принцип больших уклонений и логарифмическая асимптотика. Доказательство утверждений (i) и (ii) теоремы 1.2 до определенного места проводится единым образом. Приведем нужные нам результаты теории больших уклонений для рассматриваемого случая бесселевских процессов.

Обозначим через $\mathcal{M}$ метрическое пространство вероятностных мер на $[0, \infty)$, снабженное метрикой Прохорова и борелевской σ -алгеброй. Ради краткости мы будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_x\{\xi_q \in (\cdot)\} &:= P\{\xi_q \in (\cdot) \mid \xi_q(0) = x\}, \\ P_{x,y}\{\xi_q \in (\cdot)\} &:= P\{\xi_q \in (\cdot) \mid \xi_q(0) = x, \xi_q(T) = y\}. \end{aligned}$$

Далее E , E_x , $E_{x,y}$ означают усреднение по соответствующей вероятности.

Определим функционал действия $I(\nu)$, заданный на $(\mathcal{M}, \rho)$, следующим образом:

$$I(\nu) := \begin{cases} \mathcal{E}(v, v), & \text{если } v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ и } \nu(dx) = v^2(x) dx, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.12)$$

ТЕОРЕМА 2.1. В случаях Q_1 и Q_2 справедливы следующие утверждения:

(i) семейства вероятностных мер

$$[P_x\{L_T(\xi_q, \cdot) \in (\cdot)\}]_{T>0}, \quad [P_{x,y}\{L_T(\xi_q, \cdot) \in (\cdot)\}]_{T>0} \quad (2.13)$$

удовлетворяют в пространстве $(\mathcal{M}, \rho)$ при $T \rightarrow \infty$ принципу больших уклонений с одними и теми же функционалом действия $I(\nu)$ и скоростью T ;

(ii) для любого открытого в $\mathcal{M}$ множества G выполнены неравенства

$$\begin{aligned} -\inf_{\nu \in G} I(\nu) &\leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_x\{L_T(\xi_q, \cdot) \in G\} \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_x\{L_T(\xi_q, \cdot) \in \bar{G}\} \leq -\inf_{\nu \in \bar{G}} I(\nu), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\bar{G}$ – замыкание множества G ; аналогичные соотношения справедливы для того же семейства мер из формулы (2.13);

(iii) для слабо непрерывного функционала F на $\mathcal{M}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log E_x[\exp\{-TF(L_T(\xi_q, \cdot))\}] \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log E_{x,y}[\exp\{-TF(L_T(\xi_q, \cdot))\}] = -\inf_{\nu \in \mathcal{M}} (F(\nu) + I(\nu)). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Доказательство можно получить, используя работы [9] и [21, ч. III] (см. также [22]). Точные асимптотики двух интегралов из формулы (2.15) уже различны, указанные асимптотики можно вычислить, используя результаты работы [10] (см. ниже теоремы 3.1, 3.2).

В зависимости от ситуации мы будем использовать или пространство функций L^2 , или пространство мер $\mathcal{M}$. Так, хотя основная теорема 2.1 сформулирована в терминах пространства мер, решать экстремальные задачи типа (2.15) легче в пространстве функций, где можно использовать развитые методы вариационного исчисления.

Введем функционал, посредством которого можно легко записать вероятности из теоремы 1.2:

$$F_0(\nu) := \int_0^\infty x^p \nu(dx), \quad \nu \in \mathcal{M}. \quad (2.16)$$

Учитывая формулы (1.5)–(1.7), (2.11), легко убедиться в том, что

$$F_0(\nu) \equiv U(v), \quad \text{если} \quad \nu(dx) = v^2(x) dx, \quad (2.17)$$

$$I(\nu) \equiv J(v), \quad \text{если} \quad \nu(dx) = v^2(x) dx \quad \text{и} \quad v \in \mathcal{H}. \quad (2.18)$$

ЛЕММА 2.2 (логарифмическая асимптотика). *Для любых $p > 0$, $d > 0$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_x \left\{ \int_0^\infty x^p L_T(\xi_q, dx) < d \right\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_{x,y} \left\{ \int_0^\infty x^p L_T(\xi_q, dx) < d \right\} \\ &= -\inf \{I(\nu) : F_0(\nu) < d\} = -\inf \{I(\nu) : F_0(\nu) \leq d\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению (2.16) выполнены равенства

$$\begin{aligned} P_x \left\{ \int_0^\infty x^p L_T(\xi_q, dx) < d \right\} &= P_x \{F_0(L_T(w)) < d\}, \\ P_{x,y} \left\{ \int_0^\infty x^p L_T(\xi_q, dx) < d \right\} &= P_{x,y} \{F_0(L_T(w)) < d\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

С учетом соотношений (2.20) и линейности функционала F_0 формулы (2.19) выводятся при помощи теоремы 2.1 посредством рассуждений, стандартных для теории больших уклонений (ср. с замечанием 2.2, теоремой 2.2, теоремой 2.5, следствием 2.1 из работы [7]). Отметим, что соотношения (2.19) соответствуют тому случаю формулы (2.14), когда выполнено равенство $\inf_{\nu \in G} I(\nu) = \inf_{\nu \in \overline{G}} I(\nu)$, $G = \{\nu : F_0(\nu) < d\}$.

Итак, согласно формуле (2.19) нужно решить следующую экстремальную задачу:

$$I(\nu) \rightarrow \inf, \quad F_0(\nu) \leq d. \quad (2.21)$$

2.4. Решение экстремальной задачи (2.21). **Доказательство предложения 1.1.** Учитывая формулы (1.6), (2.12) и (2.17), убеждаемся, что задача (2.21) эквивалентна следующей экстремальной задаче:

$$\mathcal{E}(v, v) \rightarrow \inf, \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \quad N(v) = 1, \quad U(v) \leq d. \quad (2.22)$$

Задача (2.22) очень близка задаче (1.8); ниже мы покажем, что эти две экстремальные задачи эквивалентны.

Для формы Дирихле $\mathcal{E}(u, v)$, определенной в (2.10), имеет место следующее важное свойство (см. [10, с. 543]):

(*) *если $v \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, то $|v| \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ и выполнено неравенство $\mathcal{E}(v, v) \geq \mathcal{E}(|v|, |v|)$.*

Таким образом, в силу (*) задача (2.22) эквивалентна экстремальной задаче

$$\mathcal{E}(v, v) \rightarrow \inf, \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \quad N(v) = 1, \quad U(v) \leq d, \quad v \geq 0. \quad (2.23)$$

Согласно первой теореме Вейерштрасса (см. [32, с. 114]) минимум в задаче (2.23) достигается. Рассуждая так же, как в работах [10, с. 543, предложение (2.1)], [33, лемма 1], можно показать, что точки, доставляющие минимум в задаче (2.23), принадлежат области определения $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ производящего оператора $\mathcal{A}$. Поэтому задачи (2.23) и (1.8) эквивалентны, следовательно, эквивалентны и задачи (2.22) и (1.8).

Решим задачу (1.8) методом множителей Лагранжа [23, с. 52, 252] с привлечением теоремы Куна–Таккера. Функция Лагранжа задается формулой

$$\mathcal{L}(v) = -\lambda_1 \langle \mathcal{A}v, v \rangle + \lambda_2 [U(v) - d] + \lambda_3 [\langle v, v \rangle - 1], \quad v \in \mathcal{D}, \quad v \geq 0, \quad (2.24)$$

где

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 > 0. \quad (2.25)$$

Дифференцируя квадратичные функционалы, получаем, что для того, чтобы точка v доставляла минимум в задаче (1.8), необходимо выполнение условия стационарности

$$\mathcal{L}'(v) \equiv -2\lambda_1 \mathcal{A}v + 2\lambda_2 x^p v + 2\lambda_3 v = 0, \quad v \in \mathcal{D}, \quad v \geq 0, \quad (2.26)$$

и условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_2 [U(v) - d] = 0, \quad \lambda_3 [\langle v, v \rangle - 1] = 0. \quad (2.27)$$

Легко проверить, что в нашей задаче $\lambda_1 > 0$. Обозначим $\lambda = \lambda_2/\lambda_1 > 0$, $\beta = -\lambda_3/\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Исследуя соотношения (2.24)–(2.27), несложно убедиться в том, что точка v , доставляющая минимум в задаче (1.8), является *граничной точкой* и для нее выполнены соотношения

$$\begin{aligned} -\mathcal{A}v + \lambda x^p v - \beta v &= 0, & x \in [0, \infty), \\ \tilde{v}(0) &= 0, & \lim_{x \rightarrow \infty} v^2(x) f(x) = 0, \\ \int_0^\infty v^2(x) m(dx) &= 1, & \int_0^\infty x^p v^2(x) m(dx) = d. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Учитывая изложенное выше и внимательно просматривая доказательство теоремы Куна–Таккера в [23, с. 52–56], заключаем, что в рассматриваемой ситуации существует единственная пара положительных чисел (β_0, λ_0) такая, что

$$\begin{aligned} \min\{J(z): z \in \mathcal{H}, U(z) \leq d, z \geq 0\} \\ = \min\{-\langle \mathcal{A}z, z \rangle + \lambda_0 [U(z) - d] + \beta_0 [\langle z, z \rangle - 1]: z \in \mathcal{D}, z \geq 0\}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

и при этом для точки v , доставляющей минимум справа в (2.29), выполнены соотношения (2.28) при $\beta = \beta_0$, $\lambda = \lambda_0$, т. е. соотношения (1.9).

Для доказательства основной части предложения 1.1 осталось доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 2.3. *Граничная задача (1.9) имеет единственное решение – положительную функцию $v_0(x)$, описанную в предложении 1.1.*

Для доказательства леммы 2.3 нам понадобятся некоторые определения и факты, связанные с приведением дифференциальных выражений второго порядка к нормальной форме Лиувилля.

Пусть $L^2(dt)$ – обычное гильбертово пространство функций $y(t)$, $t \in [0, \infty)$, с нормой $\|y\|_{L^2(dt)} := [\int_0^\infty y^2(t) dt]^{1/2}$ и скалярным произведением $\langle y, z \rangle_{L^2(dt)} := \int_0^\infty y(t)z(t) dt$, $y, z \in L^2(dt)$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $B: L^2(dt) \rightarrow L^2(dt)$, действующий по правилу

$$(By)(t) = y''(t) + \left(\frac{1}{4} - q^2\right) \frac{y(t)}{t^2}, \quad t \in (0, \infty), \quad (2.30)$$

и определенный на всюду плотном множестве $\mathcal{D}_B \subset \{y \in L^2(dt): By \in L^2(dt)\}$.

Отметим, что дифференциальное выражение $-By$ представляет собой дифференциальное выражение Бесселя (см. [15, с. 244]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *При замене переменной*

$$y(t) = x^{q+1/2}v(x), \quad t = 2x, \quad x \in [0, \infty), \quad (2.31)$$

справедливы равенства

$$(\mathcal{A}v)(x) = 2^{q+3/2}t^{-q-1/2}(By)(t), \quad v \in \mathcal{D}_A, \quad (2.32)$$

$$\langle \mathcal{A}v, v \rangle = 2\langle By, y \rangle_{L^2(dt)}, \quad v \in \mathcal{D}_A, \quad (2.33)$$

$$\int_0^\infty v^2(x) m(dx) = \int_0^\infty y^2(t) dt, \quad v \in L^2, \quad (2.34)$$

$$\int_0^\infty x^p v^2(x) m(dx) = \frac{1}{2^p} \int_0^\infty t^p y^2(t) dt, \quad v \in \mathcal{D}_0. \quad (2.35)$$

Таким образом, в силу (2.9) и (2.33) оператор B является отрицательным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно получить, непосредственно проверяя равенства (2.32)–(2.35). Отметим, что сама замена переменной (2.31) найдена на основе известных формул приведения дифференциальных выражений второго порядка к нормальной форме Лиувилля (см., например, [19, с. 150, 275]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Рассмотрим случай Q_1 . Пусть функция $v(x)$ принадлежит множеству $\mathcal{D}_A$, заданному в формулах (1.3), (1.4), т. е. для нее имеет место соотношение*

$$\lim_{x \downarrow 0} v'(x)x^{2q+1} = 0. \quad (2.36)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *выполнено равенство*

$$\lim_{x \downarrow 0} v(x)x^{2q} = 0; \quad (2.37)$$

(ii) при замене переменной (2.31) предельные соотношения (2.36) и (2.37) принимают вид

$$\lim_{t \downarrow 0} y'(t) t^{q+1/2} = 0, \quad (2.38)$$

$$\lim_{t \downarrow 0} y(t) t^{q-1/2} = 0. \quad (2.39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем соотношение (2.36) в виде

$$v'(x) = o(x^{-2q-1}), \quad x \downarrow 0. \quad (2.40)$$

В условиях предложения в силу известных результатов (см. [18, с. 17], [35, с. 9]) асимптотическое соотношение (2.40) можно интегрировать. Интегрируя его, мы получаем (2.37).

Из формул (2.31) и (2.37) легко получаем (2.39). В силу замены (2.31) справедливо равенство

$$x^{2q+1} v'(x) = 2x^{q+1/2} y'(2x) - \left(q + \frac{1}{2}\right) x^{q-1/2} y(2x), \quad x \in [0, \infty).$$

Отсюда, используя (2.36) и (2.39), получаем соотношение (2.38). Предложение доказано.

Напомним, что, по сравнению с интегрированием, дифференцирование асимптотических соотношений допустимо при значительно более сильных условиях, например при монотонности производной (см. [18, с. 18]). Заметим, что из соотношения (2.38) следует (2.39).

Для краткости записи введем обозначение

$$\hat{y}(0) := \begin{cases} \lim_{t \downarrow 0} y'(t) t^{q+1/2} & \text{в случае } Q_1, \\ \lim_{t \downarrow 0} y(t) t^{-q-1/2} & \text{в случае } Q_2. \end{cases} \quad (2.41)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. При замене переменной (2.31) граничная задача (1.9) переходит в следующую эквивалентную граничную задачу:

$$y''(t) + \left(\frac{1}{4} - q^2\right) \frac{y(t)}{t^2} + \frac{1}{2} \left(\beta_0 - \frac{\lambda_0}{2^p} t^p\right) y(t) = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

$$\hat{y}(0) = 0, \quad y(+\infty) = 0, \quad (2.42)$$

$$\int_0^\infty y^2(t) dt = 1, \quad \int_0^\infty t^p y^2(t) dt = 2^p d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получаем непосредственно из формулы (1.9) и предложений 2.4 и 2.5, (ii).

С учетом предложений 2.4 и 2.6 мы будем полагать, что для функций $y(t)$ из области определения $\mathcal{D}_B$ оператора B выполнено условие $\hat{y}(0) = 0$.

Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор Шрёдингера $S: L^2(dt) \rightarrow L^2(dt)$, действующий по правилу

$$(Sy)(t) := -(By)(t) + \frac{\lambda_0}{2^{p+1}} t^p y(t) \equiv -y''(t) + \left[\frac{\lambda_0}{2^{p+1}} t^p + \left(q^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{t^2} \right] y(t) \quad (2.43)$$

и определенный на всюду плотном множестве $\mathcal{D}_S := \{y \in L^2(dt): \hat{y}(0) = 0, Sy \in L^2(dt)\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Оператор Шрёдингера S является самосопряженным положительным и имеет чисто дискретный простой спектр, т. е. уравнение $Sy = \mu y$ обладает счетным числом решений (y_n, μ_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, где $0 < \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots$ – собственные значения, $\{y_n\}$ – соответствующие им нормированные собственные функции, $\|y_n\|_{L^2(dt)} = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положительность оператора S следует из его определения (2.43) и положительности оператора $-B$ (см. предложение 2.4). При этом, как легко видеть, выполнено неравенство $\langle Sy, y \rangle_{L^2(dt)} > 0$, $0 \neq y \in \mathcal{D}_S$, так как $\lambda_0 > 0$.

Оператор Шрёдингера (2.43) соответствует так называемому радиальному случаю (см. [15, с. 431]), поскольку его можно записать в следующем виде:

$$S = -\frac{d^2}{dt^2} + \left(q^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{t^2} + \Pi(t), \quad \Pi(t) := \frac{\lambda_0}{2^{p+1}} t^p, \quad t \geq 0; \quad (2.44)$$

здесь функция $\Pi(t)$ называется *потенциалом*. Поскольку $\Pi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то оператор (2.44) имеет растущий потенциал. Следовательно, оператор Шрёдингера S , заданный на $\mathcal{D}_S$, является самосопряженным и имеет чисто дискретный однократный спектр (см. [15, с. 432, п. а)). Отметим, что здесь нужно различать два случая, первый – когда $|q| \geq 1/2$, и второй – когда $|q| < 1/2$. Первый случай более простой, здесь при $|q| \geq 1/2$ функция $r(t) := (q^2 - 1/4)t^{-2} + \Pi(t)$ ограничена снизу нулем при всех $t \geq 0$ (см. утверждения для аналогичных задач в [34, с. 398], [36, с. 83], [37, с. 43, пример 5.5]). Во втором случае справедлива важная оценка $r(t) \geq -kt^{-2}$ при всех $t \geq 0$, где $1/4 \geq k = \frac{1}{4} - q^2 > 0$. Вследствие этой оценки методы исследования и результат первого случая переносятся на второй, более сложный случай (ср. с [38, с. 195, 391], [37, с. 29, теорема 2.7]). Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.3. В силу предложения 2.6, очевидно, достаточно доказать, что граничная задача (2.42) имеет единственное решение. Используя оператор (2.43), дифференциальное уравнение из задачи (2.42) можно записать в виде

$$Sy = \frac{\beta_0}{2} y, \quad y \in \mathcal{D}_S. \quad (2.45)$$

Согласно предложению 2.7 при фиксированных $\lambda_0 > 0$ и β_0 уравнение (2.45) имеет не более одного решения, причем единственное решение существует только при $\beta_0 > 0$. Поскольку уже доказано, что экстремальная задача (1.8) имеет решение, то отсюда следует, что уравнение (2.45) имеет в точности одно решение – функцию $y_0(t) \in L^2(dt)$, определенную в предложении 2.7. При

этом $\beta_0 = 2\mu_0$ и для функции $y_0(t)$ выполнены равенства из формулы (2.42). По найденной функции $y_0(t)$ с учетом замены (2.31) находим искомую функцию

$$v_0(x) = x^{-q-1/2} y_0(2x) \in L^2(dm), \quad x \in [0, \infty). \quad (2.46)$$

Из вышеизложенного следует, что функция (2.46) положительна (см. (*)) и является единственным решением граничной задачи (1.9). Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Производящий оператор $\mathcal{A}$, рассматриваемый на множестве $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \cap L^2$, является инъективным, т.е. для элементов из этого множества выполнено $\mathcal{A}v = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем решения граничной задачи

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}v)(x) &= 0, & x &\in [0, \infty), \\ \tilde{v}(0) &= 0, & \lim_{x \rightarrow \infty} v^2(x)f(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Согласно формулам (2.30), (2.32), (2.41) при замене переменной (2.31) граничная задача (2.47) переходит в следующую эквивалентную граничную задачу:

$$\begin{aligned} (By)(t) &\equiv y''(t) + \left(\frac{1}{4} - q^2\right) \frac{y(t)}{t^2} = 0, & t &\in [0, \infty), \\ \hat{y}(0) &= 0, & y(+\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Дифференциальное уравнение из соотношений (2.48) представляет собой уравнение Эйлера. Используя формулы примера 2.14 из [19, с. 408], убеждаемся в том, что общее решение уравнения из (2.48) имеет вид

$$y(t) = \begin{cases} C_1 t^{|q|+1/2} + C_2 t^{-|q|+1/2} & \text{при } q \neq 0, \\ C_1 \sqrt{t} + C_2 \sqrt{t} \log t & \text{при } q = 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

Легко видеть, что при $C_1^2 + C_2^2 > 0$ решение (2.49) не удовлетворяет граничным условиям задачи (2.48). Таким образом, задача (2.48) имеет только тривиальное решение $y \equiv 0$. Отсюда, очевидно, следует утверждение предложения.

Завершим доказательство предложения 1.1. Докажем второе равенство в формуле (1.10). В силу уже доказанной части предложения 1.1 для экстремали $v_0(x)$ выполнены равенства

$$-\frac{1}{2} v_0''(x) - \frac{2q+1}{2x} v_0'(x) = \beta_0 v_0(x) - \lambda_0 x^p v_0(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (2.50)$$

$$\int_0^\infty v_0^2(x) f(x) dx = 1, \quad \int_0^\infty x^p v_0^2(x) f(x) dx = d. \quad (2.51)$$

Умножим равенство (2.50) почленно на функцию $v_0(x)f(x)$ и проинтегрируем полученное равенство в пределах от 0 до ∞ . В результате с учетом формул (1.2), (1.7), (2.51) находим

$$J(v_0) = -\langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle = \beta_0 \langle v_0, v_0 \rangle - \lambda_0 \langle x^p v_0, v_0 \rangle = \beta_0 - d\lambda_0 \geq 0;$$

здесь последнее неравенство вытекает из свойства отрицательности оператора $\mathcal{A}$ (см. (2.9)). Таким образом, мы показали, что $\beta_0 \geq d\lambda_0 > 0$.

Докажем, что $J(v_0) > 0$. Из предложений 2.3 и 2.8 вытекает, что оператор $-\mathcal{A}$, рассматриваемый на множестве $\mathcal{D}$, является симметричным, положительным и инъективным. Отсюда, согласно [39, предложение 1.3] следует, что квадратическая форма $\langle \mathcal{A}v, v \rangle$ равна нулю тогда и только тогда, когда $v = 0$. Таким образом, $J(v_0) > 0$. Формула (1.10), а вместе с ней и предложение 1.1 полностью доказаны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. (i) Функция $y_0(t) \equiv y_0(t; q)$, являющаяся решением граничной задачи (2.42) в случае Q_1 при $q > 0$, и функция $\tilde{y}_0(t) \equiv \tilde{y}_0(t; q)$, являющаяся решением граничной задачи (2.42) в случае Q_2 , связаны равенством $\tilde{y}_0(t; q) = y_0(t; -q)$, $t \in [0, \infty)$. При этом для соответствующих множителей Лагранжа выполнены равенства $\tilde{\beta}_0(q) = \beta_0(-q)$, $\tilde{\lambda}_0(q) = \lambda_0(-q)$.

(ii) Экстремальная функция $\tilde{v}_0(x) := x^{-q-1/2}\tilde{y}_0(2x)$ в случае Q_2 удовлетворяет равенству $\tilde{v}_0(x) = x^{-2q}v_0(x; -q)$, где $v_0(x) \equiv v_0(x; q)$ – экстремальная функция в случае Q_1 при $q > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая формулу (2.41) и утверждение (ii) предложения 2.5, убеждаемся в том, что задача (2.42) инвариантна относительно преобразования $q \mapsto -q$, если рассматривать случай Q_1 только при $q > 0$ и случай Q_2 . Отсюда, очевидно, следует утверждение (i) предложения. Утверждение (ii) предложения вытекает из (i) и формулы замены переменных (2.31). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10 (приближение Лиувилля–Грина). Минимальная функция $v_0(x)$ из предложения 1.1 удовлетворяет при $x \rightarrow \infty$ следующему соотношению:

$$\log v_0(x) = -\frac{2\sqrt{2\lambda_0}}{p+2} x^{1+p/2} (1 + o(1)). \quad (2.52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $y_0(t)$, введенную при доказательстве леммы 2.3; эта функция является единственным положительным решением граничной задачи (2.42). Найдем асимптотику функции $\log y_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$, используя приближение Лиувилля–Грина, сформулированное в теореме 2.1 из [18, с. 189]. Следуя формуле (1.09) из [18, с. 188], запишем дифференциальное уравнение из соотношений (2.42) в следующем виде:

$$y''(t) = [\tilde{f}(t) + \tilde{g}(t)] y(t), \quad t > 0,$$

где

$$\tilde{f}(t) := \frac{\lambda_0}{2^{p+1}} t^p, \quad \tilde{g}(t) := \left(q^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{t^2} - \frac{\beta_0}{2}, \quad t > 0.$$

Учитывая, что $|\tilde{g}(t)| = o(\tilde{f}(t))$ при $t \rightarrow \infty$, применим второе соотношение из формулы (2.03) книги [18, с. 189]; в результате получим

$$\log y_0(t) = -\frac{\sqrt{2\lambda_0}}{2^{p/2}(p+2)} t^{1+p/2} (1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.53)$$

Из соотношений (2.46) и (2.53) следует формула (2.52). Предложение доказано.

§ 3. Метод Лапласа для времен пребывания; точная асимптотика. Доказательство теоремы 1.2

В настоящей работе мы приведем полное доказательство формулы (1.20), вывод формул (1.21)–(1.23) проводится по той же самой схеме (см. также доказательство предложения 1 из работы [5]). Изложенный ниже метод подходит также для доказательства результатов типа теоремы 1.2 в случае иных марковских процессов, времена пребывания которых удовлетворяют принципу больших уклонений. В частности, в работе [24] доказан аналог теоремы 1.2 для эргодического процесса Орнштейна–Уленбека.

Следующие ниже рассуждения аналогичны рассуждениям, использованным в работах [10] и [5], [24].

Выберем последовательность элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_b[0, \infty)$ и последовательность чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$ такие, чтобы выполнялись следующие три условия:

- 1) $\varphi_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $\|\varphi_n\|_{C_b[0, \infty)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\{\|\varphi_n\|_{L^2}^{-1} \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в L^2 ;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|\varphi_n\|_{L^2}^{-2} < \infty$.

Пусть $\mathcal{M}_A$ – банахово пространство знакопеременных мер μ на $[0, \infty)$ с нормой

$$\|\mu\|_A := \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|\varphi_n\|_{L^2}^{-2} \left(\int_0^{\infty} \varphi_n d\mu \right)^2 \right]^{1/2}$$

(см. [10, с. 534]).

Введем новую вероятностную меру на $[0, \infty)$:

$$\nu_0(dx) := v_0^2(x) f(x) dx. \quad (3.1)$$

3.1. Выделение малой полуокрестности точки минимума. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. *Для любого $\delta > 0$ найдется такое $c = c(\delta) > 0$, что при $T \rightarrow \infty$ имеет место равенство*

$$\mathbb{P}_x\{F_0(L_T(\xi_q)) < d\} = K(T)(1 + O(e^{-Tc})), \quad (3.2)$$

где

$$K(T) = \mathbb{P}_x\left\{F_0(L_T(\xi_q)) < d, \sup_{n=1,2,\dots} \left| \int_0^{\infty} \varphi_n d(L_T(\xi_q) - \nu_0) \right| < \delta \right\}. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы основано на леммах 2.2, 2.3, полунепрерывности снизу функционала действия $I(\nu)$ и проводится стандартно методами теории больших уклонений (ср. с [7, лемма 3.6], [25, лемма 7] и началом доказательства теоремы 2.19 в [10]).

3.2. Использование экспоненциального преобразования типа Крамера. Экстремальная функция $v_0(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению из формулы (1.9), поэтому в силу (1.2), (1.11) справедливо равенство

$$(\mathcal{A}v_0)(x) = -V(x)v_0(x), \quad x \in [0, \infty). \quad (3.4)$$

Следуя работам [10, с. 545, 556], [25, с. 527] и учитывая формулу (3.4), введем следующее экспоненциальное преобразование типа Крамера. Для фиксированного $T > 0$ определим вероятностную меру на основном вероятностном пространстве:

$$\mathbf{Q}_T(d\omega) = \mathbf{Q}_{T,x}(d\omega) := \frac{1}{K_1(T)} \exp\left\{T \int_0^\infty V(s) L_T(\xi_q, ds)\right\} \mathbf{P}_x(d\omega), \quad (3.5)$$

где

$$K_1(T) = \mathbf{E}_x \left[\exp\left\{T \int_0^\infty V(s) L_T(\xi_q, ds)\right\} \right].$$

В результате замены меры (3.5) получаем для вероятности (3.3) равенство

$$K(T) = K_1(T)K_2(T), \quad (3.6)$$

где

$$K_2(T) = \int_{\mathcal{O}(T)} \exp\left\{-T \int_0^\infty V(s) L_T(\xi_q, ds)\right\} \mathbf{Q}_T(d\omega), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{O}(T) \equiv \mathcal{O}(T, \delta) := \left\{ \omega : F_0(L_T(\xi_q)) < d, \sup_{n=1,2,\dots} \left| \int_0^\infty \varphi_n d(L_T(\xi_q) - \nu_0) \right| < \delta \right\}.$$

Найдем точные асимптотики интегралов $K_1(T)$ и $K_2(T)$.

3.3. Точная асимптотика интеграла $K_1(T)$. Заметим, что

$$K_1(T) = \mathbf{E}_x [\exp\{TF_1(L_T(\xi_q, \cdot))\}], \quad (3.8)$$

где

$$F_1(\nu) := \int_0^\infty V(s) \nu(ds), \quad \nu \in \mathcal{M},$$

– линейный функционал.

Легко видеть, что в наших условиях применима теорема 2.20, п. (1) из [10]. Приведем формулировку этой теоремы с учетом того, что вторая производная по Фреше линейного функционала равна нулю.

ТЕОРЕМА 3.1 (точная асимптотика типа Лапласа для линейного функционала [10]). Пусть для линейного функционала $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ экстремальная задача

$$-\Psi(u^2 dx) - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{H}, \quad u \geq 0,$$

имеет единственное решение u_0 . Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x [\exp\{T\Psi(L_T(\xi_q, \cdot))\}] \\ &= \exp\{T[\Psi(u_0^2 dx) + \langle \mathcal{A}u_0, u_0 \rangle]\} u_0(x) \int_0^\infty u_0(s) m(ds) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

ЛЕММА 3.2. При $T \rightarrow \infty$ выполнено соотношение

$$K_1(T) = v_0(x) \int_0^\infty v_0(s) m(ds) (1 + o(1)). \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 3.1 к среднему (3.8), положив $\Psi = F_1$. Для этого решим экстремальную задачу

$$-\int_0^\infty V(x) u^2(x) m(dx) - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{H}, \quad u \geq 0.$$

Используя метод множителей Лагранжа, убеждаемся в том, что в силу предложения 1.1 эта задача имеет единственное решение v_0 – то же самое, что и основная экстремальная задача (1.8), при этом в силу (3.4) получаем

$$\begin{aligned} \inf_{u \in \mathcal{H}, u \geq 0} \left(-\int_0^\infty V(x) u^2(x) m(dx) - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \right) \\ = -\int_0^\infty V(x) v_0^2(x) m(dx) - \langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Применение формулы (3.9) доказывает соотношение (3.10). Лемма доказана.

3.4. Точная асимптотика интеграла $K_2(T)$. Используя (3.1), (3.7), последнее равенство в (3.11) и (1.7), получаем

$$K_2(T) = \exp\{-TJ(v_0)\} K_3(T), \quad (3.12)$$

где

$$K_3(T) := \int_{\mathcal{O}(T)} \exp\left\{-T \int_0^\infty V(x) d(L_T(\xi_q) - \nu_0)\right\} dQ_T. \quad (3.13)$$

В работе [10, с. 551] имеется формула Тейлора для разложения общего нелинейного функционала $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ в окрестности некоторой точки $\mu_0 \in \mathcal{M}$. Применяя эту формулу для рассматриваемого линейного функционала F_0 , получаем

$$F_0(L_T(\xi_q)) = F_0(\nu_0) + \int_0^\infty V(x) d(L_T(\xi_q) - \nu_0), \quad \omega \in \mathcal{O}(T). \quad (3.14)$$

Используя (3.14) и учитывая, что $F_0(\nu_0) = d$, запишем интеграл (3.13) в виде

$$K_3(T) := \int_{\mathcal{O}_1(T)} \exp\left\{-T \int_0^\infty V(x) d(L_T(\xi_q) - \nu_0)\right\} dQ_T, \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1(T) := \left\{ \omega: \int_0^\infty V(x) d(L_T(\xi_q) - \nu_0) < 0, \right. \\ \left. \sup_{n=1,2,\dots} \left| \int_0^\infty \varphi_n d(L_T(\xi_q) - \nu_0) \right| < \delta \right\} \equiv \mathcal{O}(T) \end{aligned}$$

– иная форма записи множества $\mathcal{O}(T)$.

Для нахождения асимптотики интеграла $K_3(T)$ применим следующую лемму; необходимые сведения о случайных мерах можно найти в [26], [27].

ЛЕММА 3.3 (центральная предельная теорема). *Справедливы следующие утверждения.*

- (i) *Случайная мера $\sqrt{T}(L_T(\xi_q) - \nu_0)$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится относительно меры $\mathbf{Q}_T$ к гауссовской случайной мере γ на $[0, \infty)$ с нулевым средним.*
- (ii) *Для любого $s \in \mathbb{R}$ выполнено соотношение*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{Q}_T \left\{ \omega : \sqrt{T} \int_0^\infty V(x) d(L_T(w) - \nu_0) < s \right\} = \Phi \left(\frac{s}{\sigma} \right),$$

где Φ – стандартная нормальная функция распределения и σ определено в (1.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) леммы выводится с помощью леммы 2.12 из [10]. Докажем утверждение (ii), т.е. покажем, как получается формула (1.12) для σ^2 . Обозначим через $L^2(d\nu_0)$ гильбертово пространство функций, заданных на $[0, \infty)$, со скалярным произведением

$$\langle y, z \rangle_{L^2(d\nu_0)} := \int_0^\infty y(x)z(x)v_0^2(x) m(dx).$$

Согласно утверждению (i) леммы, определению меры $\mathbf{Q}_T$ в (3.5) и виду характеристической функции меры γ (см. [10, с. 557]) имеем

$$\sigma^2 = \int_0^\infty [\mathcal{G}V](x)V(x)v_0^2(x) m(dx), \quad (3.16)$$

где, как следует из [10, с. 545], линейный оператор $\mathcal{G}$ отображает гильбертово пространство $L^2(d\nu_0)$ в себя по правилу

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}y](x) = & 2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{v_0(x)} \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [v_0 y](x) \right. \\ & \left. - \int_0^\infty v_0(s) \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [v_0 y](s) m(ds) \right) dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Несложно видеть, что в силу (3.4) имеет место равенство

$$[\mathcal{G}y](x) = [\mathcal{G}(y + c_0)](x), \quad y \in L^2(d\nu_0), \quad c_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Используя (3.17), (3.18) и (1.11), получаем

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}V](x) = & -\lambda_0 d[\mathcal{G}\psi](x) \\ = & -2\lambda_0 d \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{v_0(x)} \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [v_0 \psi](x) \right. \\ & \left. - \int_0^\infty v_0(s) \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [v_0 \psi](s) m(ds) \right\} dt, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где, напомним, $v_0 \psi \in E_1$.

Пусть Π – (действующий в L^2) оператор проектирования на подпространство E_1 , т.е. для $z = z_0 + z_1 \in L^2$, $z_0 \in E_0$, $z_1 \in E_1$, выполнено $\Pi z = z_1$. Тогда из формулы (3.4) следует равенство

$$(\mathcal{A} + V)z = (\mathcal{A} + V)\Pi z, \quad z \in L^2. \quad (3.20)$$

Определим линейный оператор $\mathbf{T}: E_1 \rightarrow E_1$ по правилу

$$(\mathbf{T}y)(x) := [(\mathcal{A}+V)y](x) - v_0(x) \int_0^\infty [(\mathcal{A}+V)y](s) v_0(s) m(ds), \quad y \in E_1. \quad (3.21)$$

Легко проверить, используя (3.4) и равенство $N(v_0) = 1$, что

$$\mathbf{T}y = \Pi(\mathcal{A} + V)y, \quad y \in E_1. \quad (3.22)$$

Из формул (3.20)–(3.22) следуют соотношения

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}^n y)(x) &= ([\Pi(\mathcal{A} + V)]^n y)(x) = [\Pi(\mathcal{A} + V)^n y](x) \\ &= [(\mathcal{A} + V)^n y](x) - v_0(x) \int_0^\infty [(\mathcal{A} + V)^n y](s) v_0(s) m(ds), \\ & \quad y \in E_1, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

Разлагая в формуле (3.19) операторную экспоненту в ряд и используя (3.23), получаем

$$[\mathcal{G}V](x) = -\frac{2\lambda_0 d}{v_0(x)} \int_0^\infty \exp\{t\mathbf{T}\}[v_0\psi](x) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.24)$$

Покажем, что оператор $\mathbf{T}: E_1 \rightarrow E_1$ имеет дискретный однократный отрицательный спектр $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, где $\alpha_n = 2(\mu_0 - \mu_n) < 0$, $n \geq 1$, числа $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ определены в предложении 2.7. В самом деле, рассмотрим уравнение для собственных чисел

$$(\mathcal{A} + V)v(x) = \alpha v(x), \quad v \in L^2. \quad (3.25)$$

В силу формул (1.11), (2.32), (2.43), при замене переменной (2.31) уравнение (3.25) переходит в следующее эквивалентное уравнение:

$$(Sy)(t) = \left(\mu_0 - \frac{\alpha}{2}\right)y(t), \quad y \in L^2(dt), \quad (3.26)$$

так как $\beta_0 = 2\mu_0$. Согласно предложению 2.7 уравнение (3.26) имеет в качестве собственных чисел значения $\alpha_n = 2(\mu_0 - \mu_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда, с учетом формулы (3.4), вытекает утверждение о спектре оператора $\mathbf{T}$.

Известно, что полугруппа бesselовского процесса ξ_q является феллеровской сильно непрерывной сжимающей полугруппой (см. [11, с. 30, п. 5], [13], [15, с. 133], [38, с. 262]); кроме того, спектр оператора $\mathbf{T}: E_1 \rightarrow E_1$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq \alpha_1$ при $\alpha_1 < 0$. Таким образом, в наших условиях применима известная формула теории полугрупп, связывающая преобразование Лапласа от операторной экспоненты и обратную степень производящего оператора (см. [38, с. 264], [15, с. 136]). Согласно этой формуле из равенства (3.24), с учетом (1.13), получаем

$$[\mathcal{G}V](x) = \frac{2\lambda_0 d}{v_0(x)} (\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0\psi](x). \quad (3.27)$$

Из формул (3.16), (3.27), (1.11) и (1.13) следует соотношение (1.12). Утверждение (ii) леммы доказано.

ЛЕММА 3.4. При $T \rightarrow \infty$ выполнено соотношение

$$K_2(T) = \exp\{-TJ(v_0)\} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma} (1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 3.3 для интеграла (3.15), получаем

$$K_3(T) := K_4(T)(1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty, \quad (3.28)$$

где $K_4(T) := \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{T}s} d\Phi\left(\frac{s}{\sigma}\right)$. Используя асимптотику

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty,$$

находим

$$K_4(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma} (1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

Утверждение леммы следует из формул (3.12), (3.28) и (3.29).

3.5. Вывод формул (1.20), (1.22). Эти соотношения (которые отличаются только значениями входящих в них параметров q, x, y) получаем, используя равенство (2.1) с $g(x) = x^p$, формулы (2.20), (3.2), (3.6) и леммы 3.2 и 3.4. Описание величин $\tilde{v}_0(x)$, $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\lambda}_0$, $\tilde{V}(x)$, $\tilde{\sigma}^2$, данное в утверждении (ii) теоремы 1.2, следует из предложения 2.9 и формул (1.11) и (1.12).

Доказательство соотношений (1.21), (1.23) проводится аналогично доказательству формул (1.20), (1.22), только вместо теоремы 3.1 используются следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть для линейного функционала $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ экстремальная задача

$$-\Psi(u^2 dx) - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{H}, \quad u \geq 0,$$

имеет единственное решение u_0 . Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\mathbb{E}_{x,y} [\exp\{T\Psi(I_T(\xi_q, \cdot))\}] = \exp\{T[\Psi(u_0^2 dx) + \langle \mathcal{A}u_0, u_0 \rangle]\} \frac{u_0(x)u_0(y)}{p(T, x, y)} (1 + o(1)).$$

Утверждение теоремы 3.2 выводится аналогично доказательству теоремы 2.19 из статьи [10].

ЛЕММА 3.5. При $T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} p(T, x, y) &= \frac{1}{(2T)^{1+q}\Gamma(1+q)} (1 + o(1)) && \text{в случае } Q_1, \\ p(T, x, y) &= \frac{1}{(2T)^{1-q}\Gamma(1-q)(xy)^{2q}} (1 + o(1)) && \text{в случае } Q_2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (3.30) следуют из определений (2.6), (2.7) и следующего асимптотического соотношения (см. [16, гл. 9, п. 9.6.7]):

$$I_q(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^q \frac{1}{\Gamma(1+q)} (1 + o(1)), \quad z \rightarrow 0,$$

верного при $q \geq 0$.

Следующее предложение показывает, что для бесселевского процесса, выходящего из нуля, вычисления можно проводить только при $d = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *В случае Q_1 для любых фиксированных $T > 0$, $d > 0$ выполнено равенство*

$$P_0 \left\{ \int_0^\infty s^p L_T(\xi_q, ds) < d \right\} = P_0 \left\{ \int_0^\infty s^p L_{T_1}(\xi_q, ds) < 1 \right\}, \quad (3.31)$$

где $T_1 = \frac{T}{d^{2/p}}$.

Равенство (3.31) легко получается из предложения 2.2.

§ 4. Случай $p = 2$. Доказательство следствий 1.1 и 1.3

На протяжении данного параграфа $p = 2$.

Очевидно, что в силу соотношения (2.4) утверждение следствия 1.1 получается из утверждения (i) следствия 1.3, поэтому мы докажем здесь только следствие 1.3.

При $p = 2$ граничная задача (1.9) для экстремали $v_0 \geq 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v''(x) + \frac{2q+1}{2x} v'(x) - \lambda_0 x^2 v(x) &= -\beta_0 v(x), \quad x \in [0, \infty), \\ \tilde{v}(0) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} v^2(x) f(x) &= 0, \\ \int_0^\infty v^2(x) m(dx) &= 1, \quad \int_0^\infty x^2 v^2(x) m(dx) = d, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $m(dx) = f(x) dx$, $f(x) = 2x^{2q+1}$.

4.1. Доказательство утверждения (i) следствия 1.3. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 4.1. *В случае Q_1 экстремаль v_0 задается формулой*

$$v_0(x) = \frac{\left(\frac{q+1}{d}\right)^{(q+1)/2}}{\sqrt{\Gamma(q+1)}} \exp \left\{ -\frac{q+1}{2d} x^2 \right\}, \quad x \in [0, \infty). \quad (4.2)$$

При этом

$$\lambda_0 = \frac{(q+1)^2}{2d^2}, \quad \beta_0 = \frac{(q+1)^2}{d}, \quad (4.3)$$

$$J(v_0) = \beta_0 - d\lambda_0 = \frac{(q+1)^2}{2d}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференциальное уравнение из формулы (4.1)

$$v''(x) + \frac{2q+1}{x} v'(x) + 2[\beta_0 - \lambda_0 x^2] v(x) = 0, \quad x \in [0, \infty), \quad (4.5)$$

посредством стандартной замены (см., например, [19, с. 150]) сводится к хорошо изученному вырожденному гипергеометрическому уравнению [28, гл. 6], [16,

гл. 13], [18, гл. 7, § 9–11]. Используя [11, с. 625, № 14] и [18, гл. 7, пп. 10.1, 11.1], находим, что фундаментальная пара решений уравнения (4.5) имеет вид

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= \exp\left\{-\frac{\sqrt{2\lambda_0}}{2}x^2\right\}U(a, q+1, \sqrt{2\lambda_0}x^2), \\ \phi_1(x) &= \exp\left\{-\frac{\sqrt{2\lambda_0}}{2}x^2\right\}V(a, q+1, \sqrt{2\lambda_0}x^2);\end{aligned}$$

здесь

$$a := \frac{q+1}{2} - \frac{\beta_0}{2\sqrt{2\lambda_0}}, \quad (4.6)$$

$U(\cdot, \cdot, z)$, $V(\cdot, \cdot, z)$ – функции типа Куммера, определенные в [18, гл. 7, п. 10.1]. Учитывая формулы (10.01) и (10.02) из книги [18, гл. 7], получаем следующие соотношения, справедливые при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= \exp\left\{-\frac{\sqrt{2\lambda_0}}{2}x^2\right\}(\sqrt{2\lambda_0}x^2)^{-a}(1+o(1)), \\ \phi_1(x) &= \exp\left\{\frac{\sqrt{2\lambda_0}}{2}x^2\right\}(-\sqrt{2\lambda_0}x^2)^{a-q-1}(1+o(1)).\end{aligned} \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что третьему соотношению из формулы (4.1) удовлетворяет только функция $\phi_0(x)$. Итак, искомая экстремаль имеет вид

$$v_0(x) = C_0 \exp\left\{-\frac{\sqrt{2\lambda_0}}{2}x^2\right\}U(a, q+1, \sqrt{2\lambda_0}x^2), \quad x \in [0, \infty), \quad (4.8)$$

где $C_0 > 0$. Рассмотрим сначала случай, когда $a \neq -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Используя формулы (6.1.15), (13.4.22), (13.5.6)–(13.5.8) из [16], находим

$$v'_0(x) = -2C_0(\sqrt{2\lambda_0})^{-q} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(a)} x^{-2q-1}(1+o(1)), \quad x \downarrow 0. \quad (4.9)$$

Второе равенство из формулы (4.1) и соотношения (1.3), (1.4), (4.9) показывают, что в данном случае функция (4.8) не принадлежит области определения производящего оператора $\mathcal{A}$.

Пусть теперь $a = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда согласно [16, гл. 13, формула (13.6.27)] получаем равенство

$$U(-n, q+1, \sqrt{2\lambda_0}x^2) \equiv (-1)^n n! L_n^q(\sqrt{2\lambda_0}x^2), \quad x \in [0, \infty),$$

где $L_n^q(z)$, $z \in [0, \infty)$, – обобщенный многочлен Лагерра (см. [17, § 10.12]), имеющий n действительных простых нулей на полуоси $[0, \infty)$ (см. [16, § 22.16]). Мы ищем неотрицательную функцию v_0 , поэтому, учитывая сказанное выше, приходим к выводу, что параметр a равен нулю, следовательно, в силу (4.6)

$$\frac{\beta_0}{\sqrt{2\lambda_0}} = q+1 \quad (4.10)$$

и экстремаль имеет вид

$$v_0(x) = C_0 \exp\left\{-\frac{\sqrt{2\lambda_0}}{2} x^2\right\}, \quad x \in [0, \infty). \quad (4.11)$$

Вычислим постоянные $C_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$. Подставляя функцию (4.11) в два последних равенства из формулы (4.1), находим, используя определение гамма-функции:

$$\lambda_0 = \frac{(q+1)^2}{2d^2}, \quad C_0 = \frac{\left(\frac{q+1}{d}\right)^{(q+1)/2}}{\sqrt{\Gamma(q+1)}}. \quad (4.12)$$

Из равенств (4.11), (4.12) следует формула (4.2). Используя соотношения (4.10), (4.12), получаем формулы (4.3) и (4.4). Лемма доказана.

4.2. Вычисление постоянной σ^2 по формуле (1.12). Для функции $\psi(x) = \frac{x^2}{d} - 1$, $x \in [0, \infty)$, обозначим через

$$y_0(x) := (\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0\psi](x) \quad (4.13)$$

такую функцию, что

$$\int_0^\infty y_0(x)v_0(x)m(dx) = 0. \quad (4.14)$$

ЛЕММА 4.2. *Функция $y_0(x)$ задается формулой*

$$y_0(x) = \frac{v_0(x)}{2(q+1)} \left(1 - \frac{x^2}{d}\right), \quad x \in [0, \infty). \quad (4.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению (4.13) функция y_0 удовлетворяет уравнению $(\mathcal{A} + V)y = v_0\psi$, или

$$y''(x) + \frac{2q+1}{x} y'(x) + 2(\beta_0 - \lambda_0 x^2)y(x) = 2v_0(x) \left(\frac{x^2}{d} - 1\right), \quad x \in [0, \infty). \quad (4.16)$$

Дифференциальное уравнение (4.16) является неоднородным по отношению к однородному уравнению (4.5). Зная два линейно независимых решения однородного уравнения (4.5), найдем, применяя известный метод [19, ч. 1, § 24.2, п. (б)], нужное нам решение уравнения (4.16), удовлетворяющее условию (4.14).

В процессе доказательства леммы 3.5 мы установили, что однородное уравнение (4.5) имеет два линейно независимых решения $v_0(x) = C_0 \exp\left\{-\frac{q+1}{2d}x^2\right\}$, $\phi_1(x) = \exp\left\{-\frac{q+1}{2d}x^2\right\} V(0, q+1, \frac{q+1}{d}x^2)$, $x \in [0, \infty)$. Следовательно, используя [19, ч. 1, § 24.2, п. (б)], убеждаемся в том, что общее решение уравнения (4.16) имеет вид

$$y(x) = C_1 v_0(x) + C_2 \phi_1(x) + 2v_0(x) \int \frac{\exp\left\{\frac{q+1}{d}x^2\right\}}{x^{2q+1}} \times \left[\int \left(\frac{x^2}{d} - 1\right) x^{2q+1} \exp\left\{-\frac{q+1}{d}x^2\right\} dx \right] dx, \quad x \in [0, \infty), \quad (4.17)$$

где C_1 и C_2 — действительные константы.

Из условия (4.14) и формулы (4.7) следует, что $C_2 = 0$ в (4.17). Вычислим повторный интеграл в (4.17). Пусть $\gamma(c, z)$, $c > 0$, обозначает неполную гамма-функцию (см. [16, § 6.5, п. 6.5.2]). Применяя тождество (см. [16, § 6.5, п. 6.5.22])

$$\gamma(c+1, z) = c\gamma(c, z) - z^c e^{-z},$$

получаем

$$\int \left(\frac{x^{2q+3}}{d} - x^{2q+1} \right) \exp \left\{ -\frac{q+1}{d} x^2 \right\} dx = \frac{1}{2d(q+1)^{q+2}} \left[\gamma \left(q+2, \frac{q+1}{d} x^2 \right) - (q+1) \gamma \left(q+1, \frac{q+1}{d} x^2 \right) \right] = -\frac{1}{2d(q+1)} x^{2q+2} \exp \left\{ -\frac{q+1}{d} x^2 \right\}. \quad (4.18)$$

Учитывая (4.17), (4.18) и то, что $C_2 = 0$, заключаем, что нужное нам решение уравнения (4.16) имеет вид

$$y_0(x) = C_1 v_0(x) - \frac{x^2}{2d(q+1)} v_0(x), \quad x \in [0, \infty). \quad (4.19)$$

Найдем постоянную C_1 . Согласно (4.14), (4.19) и двум последним равенствам из формулы (4.1) имеем

$$0 = \int_0^\infty y_0(x) v_0(x) m(dx) = C_1 - \frac{1}{2(q+1)},$$

отсюда получаем $C_1 = \frac{1}{2(q+1)}$. Теперь формула (4.15) следует из соотношения (4.19). Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\sigma^2 = \frac{(q+1)^2}{4d}, \quad (4.20)$$

$$\int_0^\infty v_0(x) m(dx) = \frac{2^{q+1} d^{(q+1)/2} \sqrt{\Gamma(q+1)}}{(q+1)^{(q+1)/2}}. \quad (4.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (4.20) следует из (1.12), (4.2), (4.13) и (4.15) в результате прямых вычислений. Равенство (4.21) также получается посредством простых вычислений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ (i) СЛЕДСТВИЯ 1.3. Асимптотические формулы (1.24), (1.25) получаем из соотношений (1.20), (1.21) с учетом лемм 4.1–4.3.

4.3. Доказательство утверждения (ii) следствия 1.3. Справедливы следующие две леммы.

ЛЕММА 4.4. *В случае Q_2 экстремаль $\tilde{v}_0$ задается формулой*

$$\tilde{v}_0(x) = \frac{\left(\frac{1-q}{d}\right)^{(1-q)/2}}{\sqrt{\Gamma(1-q)}} x^{-2q} \exp \left\{ -\frac{1-q}{2d} x^2 \right\}, \quad x \in [0, \infty).$$

При этом

$$\tilde{\lambda}_0 = \frac{(1-q)^2}{2d^2}, \quad \tilde{\beta}_0 = \frac{(1-q)^2}{d}, \quad J(\tilde{v}_0) = \tilde{\beta}_0 - d\tilde{\lambda}_0 = \frac{(1-q)^2}{2d}.$$

Утверждение леммы 4.4 следует из предложения 2.9 и леммы 4.1.

ЛЕММА 4.5. Функция $\tilde{y}_0(x) := (\mathcal{A} + V)^{-1}[\tilde{v}_0\psi](x)$, удовлетворяющая равенству (1.13), задается формулой

$$\tilde{y}_0(x) = \frac{\tilde{v}_0(x)}{2(1-q)} \left(1 - \frac{x^2}{d}\right), \quad x \in [0, \infty).$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{(1-q)^2}{4d}, \quad \int_0^\infty \tilde{v}_0(x) m(dx) = \frac{2(1-q)^{-(1+q)/2} d^{(1+q)/2}}{\sqrt{\Gamma(1-q)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству лемм 4.2, 4.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ (ii) СЛЕДСТВИЯ 1.3. Асимптотические формулы (1.26), (1.27) получаем из соотношений (1.22), (1.23) с учетом лемм 4.4, 4.5.

Следствие 1.3 полностью доказано.

§ 5. Случай $p = 1$, $q = 1/2$. Доказательство следствий 1.2 и 1.4

На протяжении данного параграфа $p = 1$, $q = 1/2$.

Здесь граничная задача (1.9) для экстремали $v_0 \geq 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v''(x) + \frac{1}{x} v'(x) + [\beta_0 - \lambda_0 x] v(x) &= 0, \quad x \in [0, \infty), \\ \tilde{v}(0) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} v^2(x) f(x) &= 0, \\ \int_0^\infty v^2(x) m(dx) &= 1, \quad \int_0^\infty x v^2(x) m(dx) = d, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $m(dx) = f(x) dx$, $f(x) = 2x^2$.

ЛЕММА 5.1. Экстремаль v_0 задается формулой

$$v_0(x) = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{3d} \operatorname{Ai}'(-a_1)x} \operatorname{Ai}\left(\frac{2}{3d} a_1 x - a_1\right), \quad x \in [0, \infty), \tag{5.2}$$

где по непрерывности полагаем

$$v_0(0) = \lim_{x \downarrow 0} v_0(x) = \frac{2a_1 \sqrt{a_1}}{3d \sqrt{3d}} > 0. \tag{5.3}$$

При этом выполнены равенства

$$\lambda_0 = \frac{4a_1^3}{27d^3}, \quad \beta_0 = \frac{2a_1^3}{9d^2}, \quad J(v_0) = \beta_0 - d\lambda_0 = \frac{2a_1^3}{27d^2}. \tag{5.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по схеме вывода леммы 4.1 (см. также [5, §4]). Укажем основные моменты доказательства.

Используя [11, с. 624, пп. 9, 10] и [18, гл. 11, § 1], находим, что фундаментальная пара решений дифференциального уравнения из формулы (5.1) имеет вид

$$\phi_0(x) = \frac{\text{Ai}(Cx - \theta)}{x}, \quad \phi_1(x) = \frac{\text{Bi}(Cx - \theta)}{x}, \quad x > 0,$$

где

$$C := (2\lambda_0)^{1/3} > 0, \quad \theta := \frac{2\beta_0}{(2\lambda_0)^{2/3}} > 0,$$

$\text{Bi}(z)$ – вторая функция Эйри. Учитывая оставшиеся четыре соотношения из формулы (5.1) и свойства функций Эйри (см. [29, § 1.8]), убеждаемся, что $\theta = a_1$, $C = \frac{2}{3d}a_1$, а сама искомая экстремаль имеет вид $v_0(x) = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{3d} \text{Ai}'(-a_1)} \phi_0(x)$, $x > 0$. Отсюда легко получаем формулы (5.2)–(5.4). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Функция $y_0(x) := (\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0\psi](x)$, $\psi(x) = \frac{x}{d} - 1$, удовлетворяющая (1.13), задается формулой

$$y_0(x) = \frac{9d^2}{8a_1^3} v_0(x) + \frac{\sqrt{3}d^{3/2}}{2a_1^{3/2} \text{Ai}'(-a_1)} \text{Ai}'\left(\frac{2}{3d}a_1x - a_1\right), \quad x \in [0, \infty).$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\sigma^2 = \frac{4a_1^3}{81d^2},$$

$$\int_0^\infty v_0(x) m(dx) = \frac{3\sqrt{3}d^{3/2}}{2a_1\sqrt{a_1} \text{Ai}'(-a_1)} \left[a_1 \left(\frac{1}{3} + \int_0^{a_1} \text{Ai}(-s) ds \right) - \text{Ai}'(-a_1) \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству лемм 4.2, 4.3 с использованием формул для интегралов от функций Эйри $\text{Ai}(z)$, $\text{Bi}(z)$ из справочника [29, § 1.8].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.4. Формулы (1.28), (1.29) получаем из соотношений (1.20), (1.21) и лемм 5.1, 5.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.2. Формулы (1.18), (1.19) получаем, используя соотношения (1.28), (1.29) с $d = 1$ и формулу (2.4). Следствия 1.2 и 1.4 доказаны.

Отметим, что формулы (4.2), (5.2) согласуются с приближением Лиувилля–Грина (2.52).

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, ТВИМС, Киев, 1995; англ. пер.: М. А. Lifshits, *Gaussian random functions*, Math. Appl., **322**, Kluwer, Dordrecht, 1995.

2. В. Р. Фаталов, “Константы в асимптотиках вероятностей малых отклонений для гауссовских процессов и полей”, *УМН*, **58**:4 (2003), 89–134; англ. пер.: V. R. Fatalov, “Constants in the asymptotics of small deviation probabilities for Gaussian processes and fields”, *Russian Math. Surveys*, **58**:4 (2003), 725–772.
3. W. V. Li, “Small ball probabilities for Gaussian Markov processes under the L^p -norm”, *Stochastic Process. Appl.*, **92**:1 (2001), 87–102.
4. М. А. Лифшиц, W. Linde, “Approximation and entropy numbers of Volterra operators with applications to Brownian motion”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **157**:745 (2002), 1–87.
5. В. Р. Фаталов, “Метод Лапласа для малых отклонений гауссовских процессов типа винеровского”, *Матем. сб.*, **196**:4 (2005), 135–160; англ. пер.: V. R. Fatalov, “The Laplace method for small deviations of Gaussian processes of Wiener type”, *Sb. Math.*, **196**:4 (2005), 595–620.
6. W. V. Li, Q.-M. Shao, “Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications”, *Stochastic processes: theory and methods*, Handbook of Statist., **19**, eds. D. N. Shanbhag et al., North-Holland, Amsterdam, 2001, 533–597.
7. В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, “Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах”, *УМН*, **50**:6 (1995), 57–150; англ. пер.: V. I. Piterbarg, V. R. Fatalov, “The Laplace method for probability measures in Banach spaces”, *Russian Math. Surveys*, **50**:6 (1995), 1151–1239.
8. M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan, “On laws of the iterated logarithm for local times”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **30**:6 (1977), 707–753.
9. M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan, “Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I, II, III, IV”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **28**:1 (1975), 1–47; **28**:2 (1975), 279–301; **29**:4 (1976), 389–461; **36**:2 (1983), 183–212.
10. S. Kusuoka, Y. Tamura, “Precise estimate for large deviation of Donsker–Varadhan type”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math.*, **38**:3 (1991), 533–565.
11. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению*, Лань, СПб., 2000; пер. с англ.: A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian motion: facts and formulae*, Probab. Appl., Birkhäuser, Basel, 1996.
12. Н. Икэда, С. Ватанабэ, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Math. Library, **24**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1981.
13. D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Grundlehren Math. Wiss., **293**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
14. К. Ито, Г. Маккин, *Диффузионные процессы и их траектории*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: K. Itô, H. P. McKean, *Diffusion processes and their sample paths*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1965.
15. С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972.
16. М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: M. Abramowitz, I. Stegun (eds.), *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Wiley, New York, 1972.
17. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
18. Ф. Олвер, *Асимптотики и специальные функции*, Наука, М., 1990; пер. с англ.: F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York–London, 1974.

19. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1961; пер. с нем.: E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Akademie-Verlag, Leipzig, 1959.
20. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий*, Тр. МИАН, **195**, Наука, СПб., 1994; англ. пер.: A. N. Borodin, I. A. Ibragimov, *Limit theorems for functionals of random walks*, Proc. Steklov Inst. Math., **195**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
21. L. M. Wu, "Grandes déviations pour les processus de Markov essentiellement irréductibles. I: Temps discret; II: Temps continu; III: Quelques applications", *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I, Math.*, **312**:8 (1991), 609–614; **314**:12 (1992), 941–946; **316**:8 (1993), 853–858.
22. M. Fukushima, M. Takeda, "A transformation of a symmetric Markov process and the Donsker–Varadhan theory", *Osaka J. Math.*, **21**:2 (1984), 311–326.
23. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1987.
24. В. Р. Фаталов, "Времена пребывания и точные асимптотики распределений L^p -функционалов от процессов Орнштейна–Уленбека, $p > 0$ ", *Теория вероятн. и ее примен.* (в печати).
25. V. R. Fatalov, "The Laplace method for computing exact asymptotics of distributions of integral statistics", *Math. Methods Statist.*, **8**:4 (1999), 510–535.
26. К. Маттес, Й. Керстан, Й. Мекке, *Безгранично делимые точечные процессы*, Наука, М., 1982; пер. с англ.: K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke, *Infinitely divisible point processes*, Wiley, Chichester–New York–Brisbane, 1978.
27. Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971.
28. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1973; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, G. F. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.
29. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Дополнительные главы*, Наука, М., 1986; англ. пер.: A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series. V. 3: More special functions*, Gordon and Breach, New York, 1990.
30. M. Fukushima, *Dirichlet forms and Markov processes*, North-Holland Math. Library, **23**, North-Holland, Amsterdam–New York; Konansha, Tokyo, 1980.
31. M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, de Gruyter Stud. Math., **19**, de Gruyter, Berlin, 1994.
32. М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*, Наука, М., 1972; англ. пер.: M. M. Vainberg, *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*, Wiley, New York–Toronto, 1973.
33. В. Р. Фаталов, "Точные асимптотики больших уклонений для гауссовских мер в гильбертовом пространстве", *Изв. НАН Армении. Математика*, **27**:5 (1992), 43–57; англ. пер.: V. R. Fatalov, "Exact asymptotics of large deviations of Gaussian measures in a Hilbert space", *J. Contemp. Math. Anal.*, **27**:5 (1992), 36–50.
34. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969; англ. пер.: M. A. Naimark, *Linear differential operators*, I, II, Frederick Ungar Publ., New York, 1967, 1968.
35. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
36. А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян, *Распределение собственных значений. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1979.
37. Г. В. Розенблум, М. З. Соломяк, М. А. Шубин, "Спектральная теория дифференциальных операторов", *Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем.*

- Фундам. напр., **64**, ВИНТИ, М., 1989, 1–248; англ. пер.: G. V. Rozenblum, M. A. Shubin, M. Z. Solomyak, “Spectral theory of differential operators”, *Partial differential equations*, VII, Encyclopaedia Math. Sci., **64**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1994, 1–261.
38. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 2, Мир, М., 1978; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. V. 2: Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York, 1975.
39. Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985; англ. пер.: N. N. Vakhaniya, V. I. Tarieladze, S. A. Chobanyan, *Probability distributions on Banach spaces*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **14**, Reidel, Dordrecht, 1987.

В. Р. ФАТАЛОВ (V. R. FATALOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
13.07.2004