Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Бондарко, Общий слой конечных групповых схем;
“конечный дикий” критерий хорошей редукции абеле-
вых многообразий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70,
выпуск 4, 21–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/im691>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:43:59

УДК 512.747+512.741.1+511.22+512.742.7

М. В. Бондарко

Общий слой конечных групповых схем; “конечный дикий” критерий хорошей редукции абелевых многообразий

Исследуется функтор общего слоя для конечных групповых схем над кольцами целых полных дискретно нормированных полей. Доказывается, что он “почти полон”. Из этого выводится “конечный дикий” критерий хорошей редукции абелевых многообразий.

Библиография: 11 наименований.

Введение

Целью работы является изучение конечных плоских групповых схем (далее для краткости просто схем) над кольцом целых чисел полного дискретно нормированного поля. Полученные результаты применяются для получения “конечного дикого” (т.е. p -адического) критерия хорошей редукции абелевых многообразий. Мы называем его *конечным* потому, что, в отличие от критериев Гротендика (см. [7]), здесь достаточно проверить некоторое условие, налагаемое на некоторую конечную подсхему p -крючения многообразия V (вместо все-

го p -крючения); при этом рассматривается подсхема, соответствующая элементам кручения уровня, который зависит только от рассматриваемых полей.

В первой части работы (§ 1–5) мы доказываем, что показатель коядра отображения, индуцированного функтором общего слоя на морфизмах, ограничен константой, зависящей только от поля. Таким образом, если общие слои двух схем совпадают, то между ними существуют морфизмы (в обе стороны) с ядром малого показателя.

Введем следующие обозначения: L – полное дискретно нормированное поле характеристики нуль с полем вычетов $\bar{L}$ характеристики p , e – абсолютный индекс ветвления L , $s = \lfloor \log_p(\frac{pe}{p-1}) \rfloor$, π – некоторый униформизирующий элемент L , $\mathfrak{O}_L$ – кольцо целых L . Основным результатом первой части работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА А. Пусть T, S – конечные плоские коммутативные схемы над кольцом $\mathfrak{O}_L$, T_L, S_L – их общие слои, $h_L: T_L \rightarrow S_L$ – морфизм групповых схем над L . Тогда существует $\mathfrak{O}_L$ -морфизм $g: T \rightarrow S$ такой, что g_L (т.е. общий слой g) совпадает с $p^s h_L$.

Очевидно, этот результат равносильен следующему.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00082а).

ТЕОРЕМА В. В условиях теоремы А показатель группы $\text{Hom}_L(T_L, S_L)/\text{Hom}_{\mathfrak{D}_L}(T, S)$ делит p^s .

Мы также доказываем, что для связных схем оценку можно немного улучшить.

ТЕОРЕМА А'. Пусть $h_L: T_L \rightarrow S_L$ – морфизм групповых схем над L . Тогда если $e \leq (p-1)p^u$ и либо S связна, либо T унитарна, то существует морфизм $g: T \rightarrow S$ такой, что g_L совпадает с $p^u h_L$.

Таким образом, схемы “почти восстанавливаются” по общему слою. Поскольку конечная групповая схема раскладывается в сумму p -схемы (аннулируемой степени p) и не- p -схемы (показателя, не кратного p) и все не- p -схемы этальны, то далее во всей работе мы будем рассматривать только p -схемы. Хорошо известно, что функтор общего слоя унивалентен на плоских схемах, т. е. инъективен на морфизмах. Поэтому морфизм g единствен. Заметим также, что условие теоремы зависит только от индекса ветвления L . Действительно, если искомым g существует над кольцом целых некоторого расширения L , то он определен над $\mathfrak{D}_L$. Таким образом, нам достаточно доказывать теоремы А и А' для некоторого $L' \supset L$, индекс ветвления L'/L равен 1. Поэтому при доказательстве теорем А и А' мы будем считать, что поле $\bar{L}$ совершенно.

Легко видеть, что оценка величины s является точной. Действительно, для $L = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^u})$ мы имеем $e = (p-1)p^{u-1}$. При этом μ_{p^u} и $\mathbb{Z}/p^u\mathbb{Z}$ имеют одинаковые общие слои над L , однако, очевидно, не существует ненулевого морфизма из μ_{p^u} в $\mathbb{Z}/p^u\mathbb{Z}$. Также легко видеть, что μ_{p^u} при $e > (p-1)p^{u-1}$ изоморфна групповой схеме S , соответствующей многочлену $(\pi x + 1)^{p^u} = 1$; при этом снова $\text{Hom}(\mu_{p^u}, S) = \{0\}$. Пользуясь предложением 2, можно показать, что оценка точна также для схем сколь угодно больших показателей.

Частным случаем теоремы А при $e < p$ является основной результат Рено из [11] (о том, что в этом случае функтор общего слоя является полным). Из нее также немедленно следует известный результат Тэйта о том, что функтор общего слоя для p -делимых групп вполне унивалентен. Заметим, что доказательство в случае $e \geq p$ требует техники, существенно отличной от техники Рено, так как утверждение невозможно свести к неприводимым схемам над $\mathfrak{D}_L$.

Основным результатом второй части работы (§ 6, 7) является доказательство следующей гипотезы Н. Катца: пусть абелево многообразие V определено над локальным полем и имеет хорошую редукцию над расширением этого поля, ядро домножения V на некоторую степень p (зависящую только от полей) имеет хорошую редукцию (т. е. его общий слой изоморфен общему слою некоторой плоской схемы над кольцом целых). Тогда V имеет хорошую редукцию и над нижним полем. Соответствующая теорема для случая $e < p$ была основным приложением классификационных результатов в статье [4].

Результат формулируется следующим образом. Пусть e_0 – степень расширения L/K_0 , где K_0 – максимальное неразветвленное подрасширение в L/K .

ТЕОРЕМА С. 1. Пусть абелево многообразие V определено над K и имеет хорошую редукцию над L , $r = 2s + v_p(e_0) + 1$. Если для некоторой плоской коммутативной групповой схемы H над $\mathfrak{D}_K$ ядро изогении $\text{Ker}[p^r]_{V,K}$ изоморфно H_K как K -схема, то V имеет хорошую редукцию над K .

2. Если при этом $e = (p-1)p^{s-1}$, то достаточно взять $r = 2s + v_p(e_0)$.

Таким образом, можно сказать, что если абелево многообразие имеет потенциально хорошую редукцию, то достаточно проверить, имеет ли хорошую редукцию (см. выше) групповая схема $\text{Ker}[p^r]_{V,K}$, где r зависит только от рассматриваемых полей.

В § 1 напомним основные определения и факты теории модулей Картье–Дьедонне (различного типа), а также введем определение замкнутого подмодуля модуля Картье. Выясняется, что замкнутые подмодули модуля Картье обладают всеми необходимыми нам свойствами замкнутых подмножеств топологического пространства.

В § 2 покажем, как с помощью представления схем в виде ядер изогений p -делимых и формальных групп свести теорему А к некоторому утверждению для p -делимых групп (к предложению 3). Далее докажем некоторое утверждение, которое позволяет сводить предложение 3 к изучению формальных групп. Следуя статье [10], введем определение модулей Картье–Дьедонне–Оорта связных групповых схем и напомним, что эти модули классифицируют схемы, а также введем определение инъективных модулей Картье–Дьедонне для формальных групп. Это понятие является новым.

В § 3 напомним доказанные в работе [2] свойства вложения модуля кривых Картье в $L[[\Delta]]^m$ и в $L\{\{\Delta\}\}^m$, а также полностью опишем связь между замкнутыми подмодулями модуля Оорта и замкнутыми подсхемами. Полученные результаты делают модули Оорта очень полезным средством для изучения групповых схем. В частности, они применяются в доказательстве предложения 3. Заметим, что, в отличие от многих других работ по данной тематике, мы не нуждаемся в условии $p > 2$.

Для удобства читателя, знакомого с теорией Фонтена для формальных групп (см. [6]), в конце § 3 мы явно описываем (без доказательства) функтор из категории модулей Картье (соответствующих формальным группам) в категорию Фонтена.

В § 4 мы переходим к доказательству теоремы А. В начале параграфа мы докажем важное утверждение о том, что если морфизм групповых схем – изоморфизм на общем слое, то ядро редукции имеет показатель, не превосходящий p^s (как схема над $\bar{L}$). Этот результат снова сводится к p -делимым и, далее, к формальным группам. Дуализируя его, мы получим ту же оценку показателя коядра. На самом деле, доказанные утверждения даже сильнее: в частности, ядро аннулируется s -й степенью оператора Фробениуса. Те же примеры, что и для теоремы А, показывают, что оценка точная. Из этих утверждений мы выводим теорему А, а затем – теорему А'.

В § 5 мы выводим аналог теоремы А для расширений схем. Будем через Ext обозначать Ext^1 в смысле расширений групповых схем.

ТЕОРЕМА D. Если $e \leq (p-1)p^u$, то показатель группы

$$\text{Ker}(\text{Ext}_{\mathfrak{O}_L}(S, T) \rightarrow \text{Ext}_L(S_L, T_L)) \quad (1)$$

(отображение индуцировано функтором общего слоя) не превосходит p^u .

Теорема D снова является обобщением соответствующего результата, доказанного в работе [11] для случая $e < p-1$. Кроме того, мы получаем, что при $e = p-1$ отображение (1) также инъективно. Заметим, что отделение в доказательстве этальной части от локальной позволяет несколько улучшить оценку (т. е. использовать теорему А' вместо теоремы А).

Мы также используем теорему А для доказательства утверждений о ядре умножения на p^l формальных групп.

ТЕОРЕМА Е. 1. Пусть F, G – формальные группы конечной высоты над кольцом $\mathfrak{O}_L$, общие слои $\text{Ker}[p^{l+u}]_F$ и $\text{Ker}[p^{l+u}]_G$ изоморфны. Тогда если $e \leq (p-1)p^u$, то $\text{Ker}[p^l]_F \cong_{\mathfrak{O}_L} \text{Ker}[p^l]_G$.

2. То же выполнено для произвольных p -делимых групп при $u = s$.

В двух утверждениях отображения, задающие изоморфизм, согласованы с изоморфизмами общих слоев.

Мы также доказываем важную теорему 7 о том, какие схемы могут иметь общий слой, изоморфный $\text{Ker}[p^l]_F$.

В §6, 7 из теоремы А и теоремы 7 выводится теорема С.

Заметим, что если расширение полей вычетов для L/K сепарабельно, то e_0 равно индексу ветвления L/K .

С помощью критерия Гротендика мы, следуя работе [4], сводим теорему А к соответствующему факту для p -делимых групп.

ТЕОРЕМА F. Пусть V – p -делимая группа над K , Y – p -делимая группа над $\mathfrak{O}_L$ и $V \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } L \cong Y \times_{\text{Spec } \mathfrak{O}_L} \text{Spec } L$. Определим r так же, как в теореме С. Тогда если для некоторой плоской коммутативной групповой схемы H над $\mathfrak{O}_K$ ядро изогении $\text{Ker}[p^r]_{V,K}$ изоморфно H_K как K -схема, то существует p -делимая группа Z над $\mathfrak{O}_K$ такая, что $V \cong Z \times_{\text{Spec } \mathfrak{O}_K} \text{Spec } K$.

В §6 теорема С сводится к теореме F.

Мы показываем, что достаточно проверить теорему F для p -делимой группы Y , являющейся формальным групповым законом.

Для этого мы доказываем следующее важное утверждение.

ТЕОРЕМА G. Пусть U – p -делимая группа над K , S – p -делимая группа над $\mathfrak{O}_L$, $U_L \cong S_L$, этот изоморфизм задает изоморфизм связной части S с некоторой формальной группой $S_0/\mathfrak{O}_K$, при этом действие группы инерции K на $U/S_{0K}(F)$, F – алгебраическое замыкание K , тривиально. Тогда U определена над $\mathfrak{O}_K$.

В §7 переходим к доказательству теоремы F (и, соответственно, С). С помощью теоремы 7 мы доказываем, что $\text{Ker}[p^{v_p(e_0)+1}]_{Y, \mathfrak{O}_L}$ определена над $\mathfrak{O}_K$. Изучая модули Оорта, докажем, что Y определена над $\mathfrak{O}_K$. В конце §7 доказывается, что в теоремах С и F можно взять $r = s + v_p(n) + 1$, если потребовать дополнительно, что H – ядро умножения на степень p некоторой p -делимой группы.

В настоящей работе мы будем использовать следующие обозначения: v – нормализованное нормирование на L , мы также продолжаем его на алгебраическое замыкание L , $\mathfrak{M} = (\pi)$ – максимальный идеал L , $J = \mathfrak{M}^{-[e/(1-p)]}$. Запись $a = (a_i)$, $1 \leq i \leq m$, обозначает, что упорядоченный набор a (например, вектор над каким-то кольцом) имеет длину m , a_i – его i -я компонента, $X = (X_i) = (X_1, \dots, X_m)$, x – формальные переменные, F – коммутативный m -мерный формальный групповой закон над $\mathfrak{O}_L$ (далее – просто формальная группа), $\bar{F}$ – редукция F по модулю π (все формальные группы будут коммутативными), $\lambda_F = (\lambda_i(X))$, $1 \leq i \leq m$, – логарифм F , $L^0[[X]]$ ($\mathfrak{O}_L^0[[X]]$) – модуль рядов от $X_1, \dots, X_m$ с коэффициентами из L (из $\mathfrak{O}_L$) с нулевым свободным членом. Для $1 \leq i \leq m$ мы имеем $\lambda_i \in L^0[[X]]$.

Через $\text{Cart} = \text{Cart}(\mathfrak{D}_L)$ обозначим p -типическое кольцо Картье кольца $\mathfrak{D}_L$ (см. определение в п. 1.1), $\bar{a} \in E(\bar{F})$ – вычет по модулю $\text{Cart}(\pi)E(F)$ элемента a модуля Картье–Дьедонне формальной группы F над $\mathfrak{D}_L$, $\bar{S}$ – редукция схемы S , $\bar{f}$ – редукция морфизма f .

Для $m, n > 0$ через $M_m(\mathfrak{A})$ обозначим кольцо матриц размером $m \times m$ над кольцом $\mathfrak{A}$, через $M_{m \times n}(\mathfrak{A})$ – модуль матриц размером $m \times n$. Мы часто будем отождествлять элементы $M_{m \times n}(\mathfrak{A})$ с соответствующими им гомоморфизмами из $\mathfrak{A}^n$ в $\mathfrak{A}^m$.

Для элемента $h(\Delta) \in L[[\Delta]]$ определим его L -линейное действие на $L[[x]]$, пользуясь формулой $\Delta(f(x)) = f(x^p)$ для $f \in L[[x]]$.

Таким образом, для $a_i, b_j \in L$, $i \geq 0$, $j \geq 1$, мы определяем

$$\left(\sum_i a_i \Delta^i \right) \left(\sum_j b_j x^j \right) = \sum_{i,j} a_i b_j x^{jp^i}.$$

Во всей работе термин “схема” будет использоваться для определения конечной плоской коммутативной групповой p -схемы. Напомним, что групповая схема – это групповой объект в категории схем. Термин “конечная и плоская” означает, что схема аффинна, ее координатное кольцо – конечно порожденный плоский модуль (над $\mathfrak{D}_L$ или L), т.е. в данном случае просто конечномерный свободный модуль. (Базовые факты по теории групповых схем можно найти, например, в [5].)

Запись $T \triangleleft Y$ означает, что групповая схема является замкнутой подгруппой схемы или p -делимой группы Y , при этом p -делимая группа рассматривается как инъективный предел групповых схем.

Для схем S, T запись $S \subset T$ означает, что существует морфизм $f: S \rightarrow T$, инъективный на общем слое. Обычно из контекста будет ясно, какой морфизм имеется в виду. Конечно же, отношение $\subset$ транзитивно. Мы также будем говорить, что S – подсхема T . Через $\text{Cl}_T(S)$ обозначим либо замыкание подсхемы S в схеме T (в категории плоских схем), либо замыкание подмодуля в модуле Картье (см. определение в п. 1.2).

§ 1. Модули Картье–Дьедонне

Важную роль в изучении схем и формальных групп играют модули Картье–Дьедонне (различных типов). В этом параграфе мы напоминаем основные определения и свойства этих модулей. Мы также вводим важные понятия разделенного модуля и замкнутого подмодуля модуля Картье.

1.1. Кольцо Картье, функтор Картье. Через $\text{Cart} = \text{Cart}(Q)$ обозначим p -кольцо Картье для коммутативного кольца Q с единицей. Оно порождено над $\mathbb{Z}_p[[\mathbf{V}]]$ элементами $\mathbf{f}$, $\langle a \rangle: a \in Q$ ($\mathbf{V}$ и $\mathbf{f}$ соответствуют в обозначениях книги [8] операторам V_p и f_p соответственно). Кольцо $\text{Cart}(Q)$ определено следующими соотношениями:

$$\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle \quad \text{для любых } a, b \in Q, \quad \mathbf{f} \mathbf{V} = p, \quad (2)$$

$$\langle a \rangle \mathbf{V} = \mathbf{V} \langle a^p \rangle, \quad \langle a^p \rangle \mathbf{f} = \mathbf{f} \langle a \rangle \quad \text{для любого } a \in Q, \quad (3)$$

$$\langle a \rangle + \langle b \rangle = \sum_{n \geq 0} \mathbf{V}^n \langle r_{p^n}(a, b) \rangle \mathbf{f}^n \quad (4)$$

для любых $a, b \in Q$, где r_{p^n} – многочлены, определенные в [8, п.16.2].

Если P – Q -алгебра, то на $f = \sum c_i \Delta^i \in P[[\Delta]]$ операторы $\mathbf{V}, \mathbf{f}, \langle a \rangle, a \in Q$, определяются следующим образом:

$$\mathbf{V}f = f\Delta, \quad \mathbf{f}f = \sum_{i \geq 0} p c_i \Delta^{i-1}, \quad \langle a \rangle f = \sum_{i \geq 0} a^{p^i} c_i \Delta^i. \quad (5)$$

Как было показано в [8], таким образом на $P[[\Delta]]$ определена структура $\text{Cart}(Q)$ -модуля. Поскольку в течение всей работы нам понадобится вводить структуру Cart -модулей только на группах, полученных из колец степенных рядов, проверка соотношений нам не понадобится.

Нетрудно видеть из (4), что если M – $\text{Cart}(Q)$ -модуль, то на $M/\mathbf{V}M$ можно ввести структуру унитарного Q -модуля, если определить

$$ax \bmod \mathbf{V}M = \langle a \rangle x \bmod \mathbf{V}M$$

для $x \in M$.

Основное утверждение классической теории Картье–Дьедонне в случае, когда $Q = \mathbb{Z}_{(p)}$ -алгебра, формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. 1) Для каждой формальной группы E над Q определен некоторый $\text{Cart}(Q)$ -модуль $E(F)$ (модуль p -типических кривых).

2) Группа E задает вполне унивалентный функтор, т.е. ковариантную эквивалентность категории формальных групп над Q и некоторой полной подкатегории категории $\text{Cart}(Q)$ -модулей.

3) Cart -модуль M изоморфен $E(F)$ для некоторой формальной группы F , если и только если:

- (i) $M = \varprojlim M/\mathbf{V}^i M$;
- (ii) $\mathbf{V}$ инъективен на M ;
- (iii) $M/\mathbf{V}M$ – свободный конечномерный Q -модуль.

Такой модуль называется приведенным.

4) Зададим на $\text{Cart}(\bar{L})$ структуру $\text{Cart}(\mathfrak{D}_L)$ -алгебры, индуцированную редукцией $\mathfrak{D}_L \rightarrow \bar{L}$. Тогда модуль $E(\bar{F})$ изоморфен над $\text{Cart}(\bar{L})$ модулю $E(F)/\text{Cart}(\mathfrak{D}_L)\langle \pi \rangle E(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1)–3) являются кратким изложением теории Картье для формальных групп над $\mathbb{Z}_p$ -алгебрами (см. [8, теорема 26.2.3]).

Докажем утверждение 4). Напомним, что F задает групповой закон на $(tQ[[t]])^m$. Полученную группу естественно обозначать через $F(tQ[[t]])$, она называется группой кривых для F . Теперь воспользуемся тем (см. [8, п. 26.2.1]), что $E(F)$ задается как модуль p -типических кривых, т.е. является функториально заданным прямым слагаемым $F(tQ[[t]])$. При этом $F(tQ[[t]])$ является модулем над некоторым кольцом $\text{Cart}_B(\mathfrak{D}_L)$, $E(F)$ задается как $qF(tQ[[t]])$, где q – центральный идемпотент в $\text{Cart}_B(\mathbb{Z}_p) \subset \text{Cart}_B(\mathfrak{D}_L)$ (см. [8, п. 16.3.11]), $\text{Cart}(\mathfrak{D}_L) = \text{Cart}_B(\mathfrak{D}_L)q$. Получаем, что

$$\begin{aligned} E(\bar{F}) &= q\bar{F}(\bar{L}[[t]]) = q(F(t\mathfrak{D}_L[[t]]) / F(\pi t\mathfrak{D}_L[[t]])) \\ &= q(F(t\mathfrak{D}_L[[t]]) / qF(\pi t\mathfrak{D}_L[[t]])). \end{aligned}$$

Поскольку (в обозначениях [8, гл. 16]) для $i > 1$ выполнено $V_i(\pi t) = \pi t^i$, то

$$F(\pi t\mathfrak{D}_L[[t]]) = \text{Cart}_B(\mathfrak{D}_L)\langle \pi \rangle F(t\mathfrak{D}_L[[t]]).$$

Осталось заметить, что

$$q \operatorname{Cart}_B(\mathfrak{O}_L) \langle \pi \rangle F(t\mathfrak{O}_L[[t]]) = \operatorname{Cart}_B(\mathfrak{O}_L) q \langle \pi \rangle qF(t\mathfrak{O}_L[[t]]) = \operatorname{Cart}(\mathfrak{O}_L) \langle \pi \rangle E(F).$$

В случае, когда Q не имеет p -кручения, модуль Картье–Дьедонне группового закона F можно канонически вложить в $\mathbb{Q}\mathbb{Q}[[\Delta]]^m$, где m – размерность группы. Такое вложение в случае, когда Q – кольцо целых полного дискретно нормированного поля, будет подробно рассмотрено далее. В этом случае на $E(F)$ канонически задана структура $\mathbb{Z}_p$ -модуля; кроме того, $E(F)$ не имеет кручения и $E(F) = \varprojlim E(F)/p^n E(F)$. Определение $E(F)$ для других колец нам не понадобится.

1.2. Замкнутые подмодули, разделенные модули. Сформулируем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть Cart -подмодуль M модуля N *замкнутым* и записывать $M \triangleleft N$, если для любого $x \in N$ такого, что $\forall x \in M$, выполнено $x \in M$. Модуль N будем называть *разделенным*, если $\{0\}$ – замкнутый подмодуль N , т. е. умножение на $\mathbf{V}$ инъективно на N .

Таким образом, если F – формальная группа, то $E(F)$ – разделенный Cart -модуль.

Очевидно, M замкнут в N , если и только если N/M – разделенный модуль. Замкнутые подмодули удовлетворяют всем аксиомам топологического пространства, кроме аксиомы о том, что объединение замкнутых замкнуто.

Перечислим те свойства, которые нам понадобятся. Все встречающиеся в формулировках множества будут Cart -модулями.

- ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** 1) Если $M_1 \triangleleft M$, $M_2 \triangleleft M$, то $M_1 \cap M_2 \triangleleft M$.
 2) Если $M_2 \triangleleft M_1$, $M_1 \triangleleft M$, то $M_2 \triangleleft M$.
 3) Если $M_1 \triangleleft M$ и $M_2 \subset M_1$, то $M_1/M_2 \triangleleft M/M_2$.
 4) Если $f: N \rightarrow O$ – Cart -гомоморфизм и $M \triangleleft O$, то $f^{-1}(M) \triangleleft N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) очевидно.

2) Пусть $\mathbf{V}x \in M_2$. Тогда $\mathbf{V}x \in M_1$ и из $M_1 \triangleleft M$ получаем $x \in M_1$. Далее, из $M_2 \triangleleft M_1$ получаем $x \in M_2$.

3) Если для $y \in M$ выполнено $\mathbf{V}y \bmod M_2 \in (M_1/M_2)$, то $\mathbf{V}y \in M_1$, а значит, $y \in M_2$ и $y \bmod M_1 \in (M_1/M_2)$.

4) Конечно, $f^{-1}(M)$ – Cart -подмодуль N . Если $x \in N$, $\mathbf{V}x \in f^{-1}(M)$, то $\mathbf{V}f(y) \in M$, а значит, $f(y) \in M$ и $y \in f^{-1}(M)$.

Если N – Cart -модуль, $O \subset N$, то мы будем называть наименьший замкнутый Cart -подмодуль N , содержащий O , его замыканием и обозначать через $\operatorname{Cl}_N(O)$.

1.3. Модули Дьедонне в характеристике p , свойства редукции. Для доказательства теоремы 6 (см. ниже) нам понадобятся свойства модулей Дьедонне групповых схем над $\bar{L}$.

В случае $Q = \bar{L}$ мы будем через $\operatorname{Cart}' = \operatorname{Cart}'(Q)$ обозначать подкольцо $\operatorname{Cart}(Q)$, равное пополнению по p подкольца, порожденного элементами $\mathbf{f}$, $\langle a \rangle$ и $\mathbf{V}$. Это кольцо содержит $\mathbb{Z}_p$ (канонически), и в нем выполнено соотношение $\mathbf{V}\mathbf{f} = p$. Если $\bar{L}$ совершенно, то функтор модуля Дьедонне можно продолжить до аддитивного ковариантного функтора E из категории p -делимых групп и групповых схем в категорию $\operatorname{Cart}'(\bar{L})$ -модулей.

ТЕОРЕМА 2. Функтор E обладает следующими свойствами:

- 1) вполне унивалентен, т. е. задает ковариантную эквивалентность категории групповых схем над $\bar{L}$ и некоторой полной подкатегории категории $\text{Cart}'(\bar{L})$ -модулей;
- 2) переводит точные последовательности схем в точные последовательности модулей, а значит, является вложением абелевых категорий;
- 3) на образе E задана двойственность (на объектах и морфизмах), при этом операторы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{V}$ переходят друг в друга;
- 4) двойственность согласована с двойственностью Картье для групповых схем, т. е. если T – двойственная по Картье к S , то $E(T) = E(S)^*$;
- 5) функтор E , продолженный на p -делимые группы по правилу $E(\varprojlim S_i) = \varprojlim E(S_i)$, также вполне унивалентен;
- 6) если S – этальная схема или p -делимая группа, то $\mathbf{f}E(S) \subset pE(S)$;
- 7) если Y – p -делимая группа, то $E(Y)$ не имеет $\mathbb{Z}_p$ -кручения;
- 8) если $f: Y \rightarrow Z$ – гомоморфизм p -делимых групп с конечным ядром, то выполнено

$$E(\text{Ker } f) \cong (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} f_E(E(Y))) \cap E(Z) / (f_E(E(Y))); \quad (6)$$

9) если F – формальная группа конечной высоты, то выполнено $E(F) = \varprojlim E(F)/\mathbf{V}^i E(F)$, а значит, на $E(F)$ задана структура $\text{Cart}(\bar{L})$ -модуля, которая совпадает со структурой, упомянутой в п. 1.1;

10) если конечная групповая схема S локальна, то для некоторого $j \in \mathbb{Z}$ выполнено $\mathbf{V}^j E(S) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было доказано, например, в [6, гл. III], на категориях p -делимых групп и конечных коммутативных групповых схем над $\bar{L}$ задан контравариантный функтор μ , удовлетворяющий аналогам утверждений 1)–7) и 10). При этом двойственное к свойству 6) утверждение звучит так: для этальной схемы выполнено включение $\mathbf{V}\mu(S) \subset pE(S)$. Кроме того, для формальной группы конечной высоты выполнено

$$\mu(Y) = \varprojlim \frac{\mu(F)}{\mathbf{f}^i \mu(F)}.$$

Ковариантный функтор получается из μ дуализацией, т. е. переходом к двойственным модулям; он совпадает с функтором Картье на формальных группах (см. предложение 4 ниже). Это дает доказательство утверждений 1)–7) и 9).

Осталось доказать утверждение 8). Для каждого $n > 0$ гомоморфизм f задает гомоморфизм

$$f_n: \text{Ker}[p^n]_Y \rightarrow \text{Ker}[p^n]_Z.$$

Тогда если $p^n \text{Ker } f = 0$, то $\text{Ker } f \cong \text{Ker } f_n$,

$$\begin{aligned} E(\text{Ker } f) &\cong \text{Ker}(E(\text{Ker}[p^n]_Y) \rightarrow E(\text{Ker}[p^n]_Z)) \\ &\cong \text{Ker}(E(Y)/p^n E(Y) \rightarrow E(Z)/p^n E(Z)). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что для любого гомоморфизма $\mathbb{Z}_p$ -модулей без кручения $g: A \rightarrow B$ если $p^n \text{Ker}(\varprojlim (A/p^i A) \rightarrow \varprojlim (B/p^i B)) = 0$, то

$$\text{Ker}((A/p^n A) \rightarrow (B/p^n B)) \cong (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} f(A)) \cap B / (f(A)).$$

Оператор $\mathbf{f}$ в характеристике p соответствует гомоморфизму Фробениуса.

§ 2. Разрешение схем

В настоящем параграфе покажем, как с помощью представления схем в виде ядер изогений p -делимых и формальных групп можно сводить утверждения о схемах к утверждениям для формальных групп. Введем определения модулей Оорта групповых схем и инъективных модулей Картье–Дьедонне формальных групп.

2.1. Вложение схем в p -делимые группы. В работе [10] было доказано, что для каждой конечной плоской коммутативной p -групповой схемы существует разрешение с помощью p -делимых групп (см. также [9, следствие A4]). Оортом было доказано, что каждый морфизм связных схем вкладывается в диаграмму вида (7) (см. ниже). Используем рассуждение из [10] для произвольных (коммутативных плоских p -групповых) схем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f: S \rightarrow T$ – морфизм конечных групповых схем над $\mathfrak{O}_L$. Тогда существуют p -делимые группы U, W, Y, Z над $\mathfrak{O}_L$ и гомоморфизмы p -делимых групп такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{d} & W \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{i} & Z \end{array} \quad (7)$$

коммутативна, при этом d, i – изогении, $S = \text{Ker } d$, $T = \text{Ker } i$, g индуцирует f на S . Если схемы S, T связны, то можно взять U, W, Y, Z , являющиеся формальными группами конечной высоты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольные разрешения

$$0 \rightarrow S \xrightarrow{c} U \xrightarrow{d} W \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow T \xrightarrow{e} V \rightarrow X \rightarrow 0.$$

Теперь рассмотрим отображение $l = (c, -e \circ f): S \rightarrow U \oplus V$, l – замкнутое вложение, так как его первая компонента является замкнутым вложением. Обозначим его коядро (т. е. схему, представляющую коядро отображения пучков) через Y (оно, очевидно, будет p -делимой группой). Отображение $S \oplus T \rightarrow U \oplus V$, первая компонента которого равна l , является замкнутым вложением групповых схем, поэтому задает замкнутое вложение $m: T \rightarrow Y$. Обозначим коядро m через Z , $i: Y \rightarrow Z$. Задано естественное отображение $g: U \rightarrow Y$. Поскольку $i \circ g \circ c = 0$, также задан морфизм $h: W \rightarrow Z$. Тогда полученная диаграмма (7) будет искомой. При этом если схемы S, T связны, то можно взять U, W, V , являющиеся формальными группами конечной высоты (т. е. связными p -делимыми группами), а тогда группы Y, Z также связны.

Заметим, что, когда f_L – изоморфизм, g в нашем построении инъективен (на общем слое).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отображение g индуцирует отображение $\text{Ker}[p^l]_U \rightarrow \text{Ker}[p^l]_Y$ для каждого $l > 0$. Таким образом, используя предложение 2 и примеры из введения, можно построить примеры неизоморфных схем сколь угодно больших показателей с изоморфными общими слоями.

С помощью предложения 2 можно свести теорему А к p -делимым и, далее, к формальным группам.

2.2. Сведение к p -делимым группам. Разложим морфизм h_L в формулировке теоремы А в композицию L -эпиморфизма $h_1: T_L \rightarrow H_L$ и L -вложения $h_2: H_L \rightarrow S_L$, где H_L – схема над L . Если I – замыкание ядра h_L в T (см. [11]), то мы получаем, что фактор T/I изоморфен некоторой схеме H , общий слой которой равен H_L . Таким образом, достаточно доказать теорему А в случае, когда h_L – вложение. Далее, заменив S на замыкание образа T_L в S , мы сводим все к случаю, когда h_L – изоморфизм. Кроме того, как было доказано в [11], для S_L существуют схемы I, J такие, что I – минимальная (в смысле включения $\subset$) схема, общий слой которой равен S_L , J – максимальная такая схема. Это означает, что если общий слой H равен S_L , то существуют морфизмы $I \rightarrow H$ и $H \rightarrow J$, тождественные на общем слое. Таким образом, достаточно доказать теорему для $S = I$, $T = J$; в этом случае задан морфизм $I \rightarrow J$, который является изоморфизмом на общем слое. Следовательно, мы можем считать, что существует морфизм $f: S \rightarrow T$, общий слой которого обратен к h_L .

Непосредственно из предложения 2 получаем, что теорема А сводится к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть Y, Z – p -делимые группы над $\mathfrak{O}_L$, $f: Y \rightarrow Z$ – гомоморфизм p -делимых групп над $\mathfrak{O}_L$, f инъективен (т. е. инъективен на всех конечных подсхемах). Пусть Y' – замыкание образа Y в Z как в пределе конечных $\mathfrak{O}_L$ -схем. Тогда существует морфизм $g: Y' \rightarrow Y$ (в категории инъективных пределов конечных групповых схем) такой, что $g \circ f = p^s \text{id}_Y$.

2.3. Сведение к связной компоненте. Для работы с этальной частью S нам понадобится следующая несложная лемма.

ЛЕММА 1. Пусть S – этальная схема, T – связная схема, $S_L \cong T_L$. Тогда показатель S_L (как показатель групповой L -схемы) не превосходит p^s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть показатель T_L больше p^s . Можно считать, что $\bar{L}$ (поле вычетов L) алгебраически замкнуто, а значит, $\#S = \#S_L(L)$. Тогда количество точек $\#T(\mathfrak{O}_L)$ также равно $\#S$. Вложим T в формальную группу F над $\mathfrak{O}_L$. Получаем, что существует некоторый элемент кручения $x \in F(\mathfrak{M})$ порядка p^{s+1} . С другой стороны, выполнено $[p]_F(X) \equiv pX \pmod{(p, \deg p)}$. Поэтому для каждого $l > 0$ мы имеем $[p]_F(F(\mathfrak{M}^l)) \subset F(\mathfrak{M}^{\min(l+e, pl)})$. Таким образом, существует ненулевой элемент $y = p^s x$ кручения $F(\mathfrak{M})$, лежащий в $F(\mathfrak{M}^{[(e/p-1)+1]})$. Это невозможно, так как для $t \in F(\mathfrak{M}^{[(e/p-1)+1]})$ выполнено $v([p]_F(t)) = v(t) + e$, а значит, $[p]_F(t) \neq 0$ (мы определяем нормирование вектора как минимум нормирований компонент).

Докажем, что достаточно построить g на связной компоненте.

ЛЕММА 2. Пусть T_0 – связная часть T , существуют морфизмы $g_L: T_L \rightarrow S_L$ и $g_0: T_0 \rightarrow S$ такие, что g_0 совпадает с g_L на общем слое S_0 . Тогда g_0 продолжается до $g: T \rightarrow S$, общий слой g равен g_L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (и легко доказать), что функтор общего слоя унивалентен для конечных плоских схем (не обязательно групповых) над конечными плоскими $\mathfrak{O}_L$ -алгебрами, т. е. если C – конечная плоская $\mathfrak{O}_L$ -алгебра, U, V – конечные схемы над C , $B = C \otimes_{\mathfrak{O}_L} L$, то отображение

$$\text{Mor}_C(U, V) \rightarrow \text{Mor}_B(U \times_{\text{Spec } C} \text{Spec } B, V \times_{\text{Spec } C} \text{Spec } B)$$

инъективно. Поэтому достаточно построить g как морфизм конечных плоских (не групповых) $\mathfrak{D}_L$ -схем, так как морфизм групповых схем в категории схем, являющийся групповым над общим слоем, автоматически будет групповым.

Заметим, что достаточно построить нужный морфизм g над A , где A – кольцо целых некоторого конечного расширения P поля L . Действительно, применим строго плоский спуск. Пусть существует морфизм $g_A: T \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } A \rightarrow S \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } A$ с нужным общим слоем. Необходимо проверить, что два $(\text{Spec } A \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } A)$ -морфизма типа $g_A \times \text{id}_{\text{Spec } A}$, действующие из $T \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } A \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } A$ в $S \times_{\mathfrak{D}_L} \text{Spec } A \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } A$ (мы вставляем $\text{id}_{\text{Spec } A}$ на две возможные позиции), совпадают. Поскольку общий слой h_A определен над L , а $A \otimes_{\mathfrak{D}_L} A \otimes_{\mathfrak{D}_L} L$ – произведение расширений L , то два варианта $g_{AL} \times \text{id}_{\text{Spec } P}$ равны. Из унивалентности функтора общего слоя получаем требуемое.

Возьмем P такое, что $\#T(P) = \#T$. Заметим, что всегда $\#T(P) = \#T(A)$, так как A – кольцо дискретного нормирования. Кроме того, для каждой точки $x \in T(A)$ схема S содержит точку gx , общий слой которой равен $g_P(x_P)$. Получаем, что T_A представляется (как схема) как несвязное объединение смежных классов по T_{0A} , т. е. сдвигов T_{0A} на некоторые точки $x_i \in T(A)$. Имеем отображение $g_{0A}: T_{0A} \rightarrow S_A$. Тогда мы можем построить морфизм g_A , переводящий $x_i + T_{0A}$ в $gx_i + g_{0A}(T_{0A})$. Поскольку морфизм g_A имеет нужный общий слой, он является искомым.

2.4. Модули Оорта. Для связной схемы S и ее разрешения $0 \rightarrow S \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ с помощью формальных групп конечной высоты ее модуль Картье–Дьедонне в работе [10] был определен как $C(S) = \text{Coker } f_E: E(F) \rightarrow E(G)$. Чтобы избежать путаницы, мы будем называть $C(S)$ *модулем Оорта* схемы S .

Сформулируем основной результат статьи [10, теорема 4.2ab].

ТЕОРЕМА 3. 1) Как Cart-модуль $C(S)$ не зависит от выбора разрешения схемы S ; сопоставление $S \rightarrow C(S)$ задает аддитивный функтор.

2) Функтор C вполне унивалентен, т. е. задает ковариантную эквивалентность категории (конечных плоских коммутативных групповых) связных схем над $\mathfrak{D}_L$ и некоторой полной подкатегорией категории Cart-модулей.

Получаем, что для формальной группы F конечной высоты и каждого $l \geq 0$ модуль $C(\text{Ker}[p^l]_F)$ изоморфен $p^{-l}E(F)/E(F)$.

Оорт также доказал, что для схем над совершенными полями определенный им функтор получается из стандартного (контравариантного) модуля Дьедонне применением двойственности. Конечно, отсюда следует аналогичное утверждение для формальных групп.

Обозначим через $\mu(Z)$ контравариантный модуль Дьедонне унитарной p -делимой группы Z над совершенным полем $\bar{L}$, через Z^D – двойственную к ней p -делимую группу (она будет связной, т. е. формальным групповым законом).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Существует функториальный изоморфизм $E(Z^D) \cong \mu(Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было доказано в [10, теорема 4.2с], существует функториальный изоморфизм $C(S^D) \cong \mu(S)$, где $\mu(S)$ – модуль Дьедонне унипотентной групповой схемы S . Поскольку и ковариантный, и контравариантный модули Дьедонне p -делимой группы получаются переходом к пределу, нам остается лишь перейти к пределу в $C(\text{Ker}[p^n]_{Z^D}) \cong \mu(\text{Ker}[p^n]_Z)$.

Отметим также, что Оорт строит каноническое вложение $i: C(S) \rightarrow \text{Ext}^1(W, S)$, где W – групповая схема p -векторов Витта, и предполагает, что i – изоморфизм. Автору данной статьи известно доказательство этого утверждения.

2.5. Инъективные модули Картье. Формальной группе мы сопоставляем некоторый Cart -модуль p -крючения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем называть Cart -модуль

$$TC(F) = \varinjlim p^{-n}E(F)/E(F) = \cup p^{-n}E_F/E_F$$

инъективным модулем Картье группы F .

Инъективные модули Картье так же, как и обычные, позволяют описывать гомоморфизмы формальных групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если F, G – формальные группы, то $\text{Hom}_{\mathfrak{D}_K}(F, G) = \text{Hom}_{\text{Cart}}(TC(F), TC(G))$, т. е. существует естественный изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\text{Hom}_{\mathfrak{D}_K}(F, G) = \text{Hom}_{\text{Cart}}(E(F), E(G))$.

Из определения инъективных модулей следует существование отображения

$$g: \text{Hom}_{\text{Cart}}(E(F), E(G)) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Cart}}(TC(F), TC(G)).$$

Формула $E(F) = \varinjlim p^n(TC(F))$ задает отображение h в обратную сторону. Здесь $p^n C$ для (абстрактной) группы C обозначает ядро умножения на p^n в C . Очевидно, отображение h обратно к g .

Далее станет ясно, что инъективные модули Картье удобны в описании ядер гомоморфизмов.

§ 3. Инвариантные модули Картье–Дьедонне

В настоящем параграфе мы напомним доказанные в [2] свойства вложения модуля кривых Картье в $L[[\Delta]]^m$ и в $L\{\{\Delta\}\}^m$. Опишем связь между замкнутыми подмодулями модуля Оорта и замкнутыми подсхемами групповой схемы.

3.1. Определение и основные свойства. Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для m , принимающего все натуральные значения, мы будем рассматривать категорию $\mathfrak{A}$ замкнутых Cart -подмодулей $L[[\Delta]]^m$, удовлетворяющих условию $D \bmod \Delta = \mathfrak{O}_L^m$.

Морфизмы из D_1 размерности m_1 в D_2 размерности m_2 определяются как $A \in M_{m_2 \times m_1} \mathfrak{O}_L: AD_1 \subset D_2$.

Нетрудно видеть, что описание категории почти совпадает с приведенным описанием в работах [1], [2] ($\mathfrak{A}$ отличается от $\mathfrak{D}$, введенной в этих работах, тем, что мы сразу потребовали $\langle \pi \rangle$ -устойчивость).

Для элемента $h(\Delta) \in L[[\Delta]]$ мы определим его L -линейное действие на $L[[x]]$, пользуясь формулой $\Delta(f(x)) = f(x^p)$ для $f \in L[[x]]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для m -мерной формальной группы мы будем называть модуль

$$D_F = \{f \in L[[\Delta]]^m : \exp_F(f(\Delta)(x)) \in \mathfrak{D}_L[[x]]^m\}$$

ее инвариантным модулем Картье–Дьедонне, где $\exp_F$ – обратное отображение к логарифму λ_F .

Рассмотрим кольцо

$$R = \mathfrak{D}_L[[\Delta]] \otimes_{\mathfrak{D}_L} L = \mathfrak{D}_L[[\Delta]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \bigcup_{i>0} p^{-i} \mathfrak{D}_L[[\Delta]] \subset L[[\Delta]].$$

Обозначим через F_π формальный групповой закон $\pi^{-1}F(\pi X, \pi Y)$.

Приведенные ниже предложения были в [2] выведены из теории Хонды. Утверждения 1) и 2) следующего предложения также нетрудно доказать, пользуясь теорией Картье.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. 1) Существует эквивалентность категорий

$$D: \text{FG} \rightarrow \mathfrak{A}, \quad D(F) = D_F,$$

где FG – категория формальных групповых законов. При этом для $f \in \text{Mor}_{\text{FG}}(F_1, F_2)$ его образ $D(f)$ определяется как $A \in \text{Mor}_{\mathfrak{A}}(F_1, F_2)$, где $f(X) \equiv AX \bmod \deg 2$.

2) В частности, для $m_1 = m_2$ группы F_1 и F_2 строго изоморфны в том и только в том случае, если $D_{F_1} = D_{F_2}$. Группы F_1 и F_2 размерности m изоморфны в том и только в том случае, если $AD_{F_1} = D_{F_2}$ для $A \in \text{GL}_m(\mathfrak{D}_L)$.

3) Если F – группа конечной высоты, то $D_F \cap R^m = \pi D_{F_\pi}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. 1) В частности, D_F не зависит от выбора представителя в классе строгой изоморфности формальных групп.

2) Нетрудно видеть, что D_F также может быть описан как модуль p -типических кривых для группы F (см. доказательство теоремы 1). В частности, он может быть получен из $F(t\mathfrak{D}_L[[t]])$ применением некоторого центрального идемпотента в $\text{Cart}_B(\mathbb{Z}_p) \subset \text{Cart}_B(\mathfrak{D}_L)$, после чего наша теория может быть переформулирована, как наличие канонического вложения D_F в $(D_F/\mathbf{V}D_F)\mathbb{Q}_p[[\Delta]]$. Такое изложение теории будет “инвариантным”, т. е. никак не будет зависеть от выбора представителя в классе изоморфности F .

Далее понадобятся образы инвариантных модулей при L -линейных отображениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть D – замкнутый Cart -подмодуль $L[[\Delta]]^n$. Пусть $D \bmod \Delta = I$, где I – свободный $\mathfrak{D}_L$ -модуль размерности m . Выберем матрицу A такую, что $A\mathfrak{D}_L^n = I$. Тогда для некоторой n -мерной формальной группы F выполнено $AD_F = D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in L[[\Delta]]^n$, $f = \sum v_i \Delta^i$, где $v_i \in L^n$, то

$$\mathbf{f}^j f = p^j \sum_{i \geq 0} v_{i+j} \Delta^i,$$

а значит, $(p - \mathbf{V}\mathbf{f})(\mathbf{f}^j f) = p^{j+1} v_j$. Таким образом, так как $\mathbf{f}D \subset D$ и $\mathbf{V}D \subset D$, то $p^{i+1} v_i \in I$. Получаем, что $D \subset LI[[\Delta]]$. Тогда модуль $D' = A^{-1}D$ по определению лежит в $\mathfrak{A}$.

Конечно (см. предложение 6, 2)), формальная группа F единственна с точностью до $\mathfrak{D}_L$ -изоморфизма. Мы будем говорить, что F соответствует D .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. 1) Пусть G – n -мерная формальная группа, U – подпространство L^n размерности m . Тогда существует m -мерная формальная группа F , соответствующая $D = U[[\Delta]] \cap D_G$.

2) Существуют матрица $A \in M_{n \times m} \mathfrak{D}_L$, удовлетворяющая условию $AL^m = U$, и гомоморфизм $f: F \rightarrow G$, $f \equiv AX \pmod{\deg 2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку $D \bmod \Delta \subset \mathfrak{D}_L^n$, модуль $D \bmod \Delta$ свободен над $\mathfrak{D}_L$. Очевидно, его размерность равна m . Модуль D замкнут в $L[[\Delta]]^n$ как пересечение замкнутых (см. предложение 1). Осталось применить предложение 7.

2) Поскольку $D \bmod \Delta \subset \mathfrak{D}_L^n$, матрица A из предложения 7 целочисленная. Таким образом, утверждение немедленно следует из утверждения 1) предложения 6.

Напомним (см. [2]), что пересечение D_F с $L[[\Delta]]^m$ всегда содержит модуль, несколько больший $p\mathfrak{D}_L[[\Delta]]^m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для $J = \mathfrak{M}^{-[e/(1-p)]}$ имеем $(J[[\Delta]])^m \subset D_F$.

Докажем лемму о редукции модулей Дьедонне.

ЛЕММА 3. Пусть F – группа конечной высоты. Тогда в категории Cart-модулей выполнено $E(\bar{F}) \cong D_F/D_F \cap R^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $\text{Cart}(\mathfrak{D}_L)\langle\pi\rangle D_F = \pi D_{F_\pi}$. Тогда согласно утверждению 4) теоремы 1 получаем, что

$$E(\bar{F}) \cong D_F/\pi D_{F_\pi} = D_F/D_F \cap R^m.$$

3.2. Краткое описание модуля M_F и вложения $D_F \rightarrow M_F$. Приведем краткое описание модуля M_F и вложения $D_F \rightarrow M_F$. Основной целью в настоящем пункте является краткое изложение доказательства предложения 11, сформулированного ниже. Намного более подробное изложение (вместе с полным доказательством) может быть найдено в работе [2]. Отметим, что чтение этого пункта не является обязательным для понимания работы.

Для простоты будем считать $\bar{L}$ совершенным (случай несовершенного $\bar{L}$ рассмотрен в [2]).

Обозначим $W_p(\bar{L})$ (векторы Витта) через $\mathfrak{D}_N$, $\mathbb{Q}_p\mathfrak{D}_N$ через N , отображение Фробениуса на N через σ . Конечно, N – поле, канонически вложенное в L , $[L : N] = e$. Рассмотрим отображение Тейхмюллера $\theta: \bar{L} \rightarrow \mathfrak{D}_N$.

Нетрудно видеть, что мультипликативное отображение $\bar{L} \rightarrow \text{Cart}$, $\alpha \rightarrow \langle\theta(\alpha)\rangle$, канонически продолжается до вложения колец $\theta: W_p(\bar{L}) \rightarrow \text{Cart}$. Будем рассматривать кольцо

$$W = \left\{ \sum_{i \geq 0} V_i \theta(a_i), a_i \in \mathfrak{D}_N \right\}.$$

Поскольку $W \subset \text{Cart}$, то W действует на $L[[\Delta]]$ (см. (5)). Если обозначить $\sum_{i \geq 0} V^i \theta(a_i) \in W$ через $\sum a_i \Delta^i$, то действие W на $L[[\Delta]]$ и умножение на W

определяется по формуле

$$\sum_{i \geq 0} a_i \Delta^i \left(\sum_{j \geq 0} b_j \Delta^j \right) = \sum_{i, j \geq 0} \sigma^j a_i b_j \Delta^{i+j}.$$

Поскольку в работе [2] теория Картье явно не применялась, то действие W на $L[[\Delta]]$ описывается там несколько иначе (в обозначениях настоящей статьи там определено правое действие W^{op}).

Рассмотрим кольца $\mathbb{Q}_p W = \bigcup_i p^{-i} W \subset N[[\Delta']]$, элементы в $N[[\Delta']]$ те же, что и в $N[[\Delta]]$, умножение определяется, как в W . Также рассмотрим $N((\Delta')) \supset N[[\Delta']]$,

$$\Omega = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \Delta^i, a_i \in \mathfrak{O}_N, a_i \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow -\infty \right\}$$

и $N\Omega = \bigcup_i p^{-i}\Omega$, умножение определяется, как в W . Действие W на R очевидным образом продолжается до действия Ω на $L\{\{\Delta\}\}$. Заметим также, что Ω – полное дискретно нормированное тело, его идеал нормирования равен $p\Omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. 1) Пусть высота F конечна. Тогда для каждого $f \in D_F$ существует $w \in W$ такое, что $w \notin pW$, $wf \in \pi D_{F_\pi}$.

2) Для W выполнено левое условие Оре.

3) Модуль D_F можно канонически вложить в $L\{\{\Delta\}\}^m$.

4) Обозначим $\Omega D_F \subset L\{\{\Delta\}\}^m$ через M_F . Если высота F конечна, то $M_F = \Omega \pi D_{F_\pi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим $f_1 = f \bmod \pi D_{F_\pi} \in E(\overline{F})$ (см. утверждение 4) теоремы 1), а также $f'_1 = f_1 \bmod pE(F) \in E(\text{Ker}[p]_{\overline{F}})$ (см. утверждение 4) теоремы 2). Согласно п. 10) теоремы 2, примененному к групповой схеме $\text{Ker}[p]_{\overline{F}}$, существует $i \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mathbf{V}^i E(\text{Ker}[p]_{\overline{F}}) = 0$, а значит, $\mathbf{V}^i f_1 \in pE(\overline{F})$. То же выполнено для $f_2 = \mathbf{V}^i f_1/p$, $f_3 = \mathbf{V}^i f_2/p$ и т.д. Поскольку модуль $E(\text{Ker}[p]_{\overline{F}})/\mathbf{V}E(\text{Ker}[p]_{\overline{F}})$ конечномерен над $\overline{L}$, получаем требуемое.

2) Утверждение получается несложной технической проверкой (см. [2, лемма 6.1.1]).

3) Будем считать, что высота F конечна, так как в настоящей работе для групп бесконечной высоты данное утверждение нам не понадобится.

Докажем сначала существование некоторого естественного гомоморфизма $i: D_F \rightarrow L\{\{\Delta\}\}^m$. Согласно утверждению 1) для каждого $f \in D_F$ существует $w \in W$ такое, что $w \in \Omega^*$, $wf \in \pi D_{F_\pi}$. Поэтому D_F однозначно отображается в $\pi D_{F_\pi} \otimes_W \Omega$. Поскольку $\pi D_{F_\pi} \subset R^m$, мы получаем, что D_F однозначно отображается в $(R \otimes_W \Omega)^m = L\{\{\Delta\}\}^m$. Так как D_F – W -модуль без кручения, условие Оре для W дает инъективность i . Другое (более подробное) доказательство см. в [2, следствие 6.1.4].

4) Утверждение непосредственно следует из построения, описанного в доказательстве утверждения 3).

Поскольку $\mathbb{Q}_p W \cap \Omega = W$, то для любой F выполнено $\mathbb{Q}_p D_F \cap M_F = D_F$.

В работе [2] также было доказано, что D_F – свободный W -модуль. Это утверждение может быть доказано аналогично доказательству предложения 19, сформулированного далее.

3.3. Основные свойства пополнения D_F . В настоящем пункте мы также будем считать, что поле $\bar{L}$ совершенно. Это не уменьшит общности основных утверждений работы, так как утверждения этого пункта используются лишь при доказательстве теорем **A** и **A'**.

Подытожим результаты, полученные в п. 3.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Выполнены следующие утверждения:*

- 1) для каждой m -мерной формальной группы F и каждой матрицы $A \in M_{n \times m}(L)$ модуль AD_F канонически вложен в AM_F , а AM_F – в $L\{\{\Delta\}\}^n$ (обозначим вложение AD_F в $L\{\{\Delta\}\}^n$ через i);
- 2) отображение i тождественно на $R^n \cap AD_F$; кроме того, $i^{-1}(R^n) = R^n \cap AD_F$;
- 3) $J\{\{\Delta\}\}^m \subset M_F$;
- 4) если F – группа конечной высоты, то $M_F = \pi M_{F_\pi}$;
- 5) если $e' = -[\log_p((p-1)/e)]$, F – группа конечной высоты, то $M_F \subset p^{-e'} \mathfrak{M}^{p^{e'}} \{\{\Delta\}\}^m$;
- 6) $M_F \cap \mathbb{Q}_p D_F = D_F$;
- 7) на M_F определено естественное действие кольца

$$\mathbb{Z}_p\{\{\Delta\}\} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \Delta^i, a_i \in \mathbb{Z}_p, a_i \rightarrow 0, i \rightarrow -\infty \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1), 2), 4), 6) и 7) были доказаны в п. 3.2. Согласно предложению 9 имеем $(J[[\Delta]])^m \subset D_F$. Тогда

$$\Omega(J[[\Delta]])^m = J\{\{\Delta\}\}^m \subset M_F.$$

Утверждение 3) доказано.

Докажем утверждение 5). Имеем $M_F = \Omega \pi D_{F_\pi}$. Таким образом, достаточно проверить, что $\pi D_{F_\pi} \subset (p^{-e'} \mathfrak{M}^{p^{e'}} [[\Delta]])^m$. Логарифм F_π равен $\pi^{-1} \lambda(\pi X)$, где $\lambda = (\lambda_k) = (\sum_{i,j} c_{ijk} X_i^{p_j})$ – логарифм F . По определению D_{F_π} если $f \in \pi D_{F_\pi}$, то $f(x) = \lambda(\pi h)$ для некоторого $h \in \mathfrak{O}_L[[x]]^m$. Поскольку для всех i, j, k выполнено включение $c_{ijk} \in p^{-j} \mathfrak{O}_L$, то получаем требуемое.

Подробное доказательство можно найти также в работе [2].

Выведем отсюда следующее утверждение для инвариантных модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. 1) Пусть F – m -мерная формальная группа конечной высоты, $A \in M_{n \times m}(\mathfrak{O}_L)$. Выполнены следующие утверждения:

- (i) пусть $AD_F \subset R^n$, тогда $AD_F \subset p^{-e'} \mathfrak{M}^{p^{e'}} [[\Delta]]^n$;
- (ii) пусть для $y \in D_F$ выполнено $Ay \in R^n$, тогда $f^{e'} Ay \in J[[\Delta]]^n$.

2) Пусть F – n -мерная формальная группа конечной высоты, и пусть $A \in M_{m \times n}(\mathfrak{O}_L)$, U – подпространство L^n размерности m , $AL^n = U$; обозначим модуль $U[[\Delta]] \cap D_F$ через D . Тогда

$$\text{Cart}(\mathfrak{O}_L)((f^{e'} AD_F) \cap \mathbb{Q}_p D) \subset D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Имеем

$$AD_F \subset p^{-e'} \mathfrak{M}^{p^{e'}} \{\{\Delta\}\}^n \cap R^n = p^{-e'} \mathfrak{M}^{p^{e'}} [[\Delta]]^n,$$

откуда следует утверждение (i).

Для $y \in D_F$, $c \in L^m$, $y \equiv c \pmod{(L[[\Delta]]\Delta)^m}$ имеем $c \in \mathfrak{O}_L^m$, поэтому

$$fy = p(y - c)\Delta^{-1} \equiv py\Delta^{-1} \pmod{p\mathfrak{O}_L((\Delta))^m}. \quad (8)$$

Получаем, что $(f^{e'}AD_F) \cap R^n \equiv (p^{e'}AD_F \cap R^n)\Delta^{-e'} \pmod{p\mathfrak{O}_L((\Delta))^n}$. Теперь заметим, что

$$(p^{e'}AD_F) \cap R^n \subset \mathfrak{M}^{p^{e'}}\{\{\Delta\}\}^n \cap R^n \subset J[[\Delta]]^n.$$

Поэтому мы получаем, что $(f^{e'}AD_F) \cap R^n \subset (J((\Delta)) \cap R)^n = J[[\Delta]]^n$, т. е. утверждение (ii) доказано.

2) Достаточно доказать, что $(f^{e'}AD_F) \cap \mathbb{Q}_p D \subset D$. Поскольку $p\mathfrak{O}_L((\Delta)) \subset M_F$ и $D_F\mathbb{Z}_p((\Delta)) \subset M_F$, из соотношения (8) получаем

$$(f^{e'}AD_F) \cap \mathbb{Q}_p D \subset (p^{e'}AM_F + p\mathfrak{O}_L((\Delta))) \cap \mathbb{Q}_p D = D.$$

3.4. Связь разделенных модулей с групповыми схемами. Теперь опишем связь между введенными в п. 1.2 понятиями и (связными) групповыми схемами. Будем рассматривать ядра в категории плоских схем, т. е. ядро всегда будет замкнутой плоской подсхемой.

ТЕОРЕМА 4. 1) Если S – схема (конечная плоская коммутативная связная групповая), то $C(S)$ – разделенный модуль.

2) Замкнутые подмодули $C(S)$ однозначно соответствуют замкнутым подсхемам S , т. е. подмодуль $M \subset C(S)$ замкнут тогда и только тогда, когда $M = C(T)$, T – замкнутая подсхема S . При этом отображение $C(T) \rightarrow C(S)$ инъективно и индуцировано вложением T в S . Точные последовательности схем индуцируют точные последовательности модулей Оорта.

3) Если $f: S \rightarrow T$ – морфизм схем, то $\text{Ker } f_C = C(\text{Ker } f)$, где f_C – отображение, полученное из f применением функтора Оорта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f: F \rightarrow G$ – изогения формальных групп размерности m , $S = \text{Ker } f$, $f \equiv AX \pmod{\deg 2}$. Тогда $C(S) \cong D_G/AD_F$. Поскольку AD_F замкнут в $L[[\Delta]]^n$ и $D_G \subset L[[\Delta]]^n$, то $AD_F \triangleleft D_G$ и $C(S)$ разделен.

2) Если T – замкнутая подсхема S , то существует формальная группа H и $g: F \rightarrow H$, $h: H \rightarrow G$ – изогении формальных групп такие, что $T = \text{Ker } g$. Пусть $g \equiv BX \pmod{\deg 2}$, $h \equiv A'X \pmod{\deg 2}$. Тогда мы получаем, что $C(T) = D_H/BD_F$. Поскольку изогении индуцируют инъективные отображения инвариантных модулей Картье–Дьедонне, h индуцирует вложение $C(T)$ в $C(S)$. Тогда модуль $C(S)/C(T)$ равен $D_G/A'D_H$, а значит, $C(S)/C(T)$ разделен. Таким образом, $C(T)$ замкнут в $C(S)$. Кроме того, мы получили, что $C(S/T)$ изоморфен $C(S)/C(T)$.

Осталось доказать, что каждому $M \triangleleft C(S)$ соответствует замкнутая подсхема. Пусть D – прообраз M в D_G . Согласно утверждению 4) предложения 1 D замкнут в D_G . Тогда согласно утверждению 2) предложения 1 $D \triangleleft L[[\Delta]]^m$, а значит, D соответствует некоторой формальной группе H (см. предложение 7). Тогда $f: F \rightarrow G$, так же, как и выше, раскладывается в композицию $h \circ g$. Так как f – изогения и размерность H равна m , мы получаем, что g, h – изогении. Таким образом, $M = C(\text{Ker } g)$, при этом $\text{Ker } g$ – замкнутая подгруппа S .

3) Поскольку C – функтор, то образ отображения $C(\text{Ker } f) \rightarrow C(S)$ лежит в модуле $D = \text{Ker } f_C \subset C(S)$. Проверим, что отображение $C(\text{Ker } f) \rightarrow D$ инъективно. Так как $\text{Ker } f$ – замкнутая подсхема S , то мы можем построить точную последовательность $0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow S \rightarrow V \rightarrow 0$, V – некоторая групповая схема. Согласно утверждению 2) точной последовательности групповых схем соответствует точная последовательность модулей Оорта. Таким образом, $C(\text{Ker } f) \subset C(S)$, т. е. отображение $C(\text{Ker } f) \rightarrow C(S)$ инъективно.

Проверим сюръективность отображения $C(\text{Ker } f) \rightarrow D$. Согласно утверждению 4) предложения 1 модуль D замкнут в D_G . Таким образом, D соответствует некоторой замкнутой подсхеме $U \triangleleft S$ такой, что $\text{Ker } f \triangleleft U$. Пусть $U \neq \text{Ker } f$. Тогда из полноты функтора Оорта получаем, что f пропускается через S/U , т. е. $U \triangleleft \text{Ker } f$.

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) Из полноты функтора Оорта для $S_1, S_2 \subset S$ выполнено $S_1 \subset S_2$, если и только если $C(S_1) \subset C(S_2)$.

2) Из утверждения 1) получаем, что $C(S_1 \cap S_2) = C(S_1) \cap C(S_2)$ и $C(\text{Cl}_S(S_1 + S_2)) = \text{Cl}_{C(S)}(C(S_1) + C(S_2))$.

3) Из утверждения 3) теоремы 4 получаем, что если f инъективен, то $C(S) \subset C(f(S))$.

4) Из второй части утверждения 2) теоремы 4 видим, что если f – эпиморфизм (над $\mathfrak{D}_L$), то отображение модулей Оорта также сюръективно.

5) Из биективности функтора Оорта на морфизмах следует, что в утверждении 4) условия равносильны: сюръективному отображению модулей Оорта соответствует эпиморфизм групповых схем.

3.5. Свойства инъективных модулей Картье; применения к классификации схем. Для формальной группы отождествляем $TC(F)$ с $\varinjlim p^{-l}D_F/D_F = \cup p^{-l}D_F/D_F$. Мы также отождествляем для каждого $l \geq 0$ модуль $C(\text{Ker}[p^l]_F)$ с $p^{-l}D_F/D_F \subset TC(F)$.

Докажем разделенность модуля $TC(F)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. 1) Модуль $TC(F)$ разделен.

2) Для каждого $l > 0$ выполнено $p^{-l}D_F/D_F \triangleleft TC(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n > l \geq 0$, то $\text{Ker}[p^l]_F$ – замкнутая подгруппа $\text{Ker}[p^n]_F$, а значит, $p^{-l}D_F/D_F$ замкнут в $p^{-n}D_F/D_F$. Поскольку модуль $TC(F)$ равен объединению вложенной последовательности $p^{-n}D_F/D_F$, мы получаем, что $p^{-l}D_F/D_F \triangleleft TC(F)$. Применяя этот факт для $l = 0$, получаем, что $\{0\} \triangleleft TC(F)$, т. е. $TC(F)$ разделен.

Опишем ядра гомоморфизмов формальных групп в терминах инъективных модулей Картье.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Если $f: F \rightarrow G$ – изогения формальных групп конечной высоты, то $C(\text{Ker } F)$ изоморфна ядру $\text{Ker } f_{TC}$ отображения, индуцированного на инъективных модулях Картье, как Cart-модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4 для каждого $n > 0$ модуль Оорта ядра сужения f на $\text{Ker}[p^n]_F$ изоморфен ядру отображения f_{C, p^n} , индуцированного f на $C(\text{Ker}[p^n]_F) \cong p^{-n}D_F/D_F$. Возьмем такое n , что $\text{Ker } f \triangleleft \text{Ker}[p^n]_F$. Тогда для каждого $l > n$ ядро f_{C, p^l} канонически изоморфно $C(\text{Ker } F)$. Переходя к пределу, получаем требуемое.

С помощью алгоритма, описанного в работе [2], все возможные D_F могут быть явно описаны. Покажем, как это может быть применено к классификации схем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. 1) Пусть F – формальная группа конечной высоты. Тогда замкнутые подмодули $TC(F)$, аннулируемые умножением на некоторую степень p , однозначно соответствуют замкнутым подсхемам группы F , рассматриваемой как инъективный предел своих групп кручения.

2) Все замкнутые подмодули $TC(F)$ однозначно соответствуют не обязательно конечным подсхемам, т. е. индуктивным пределам подсхем $\text{Ker}[p^n]_F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Действительно, если $p^l M = \{0\}$ и $M \triangleleft TC(F)$, то

$$M \triangleleft_{p^l} TC(F) = p^{-l} D_F / D_F = C(\text{Ker}[p^n]_F).$$

Значит, M соответствует некоторой замкнутой подгруппе $\text{Ker}[p^n]_F$, а значит, замкнутой подгруппе F .

Наоборот, если S – замкнутая подсхема F , то для некоторого l выполнено $p^l S = 0$. Тогда S соответствует некоторому $M \triangleleft C(\text{Ker}[p^n]_F)$. Поскольку $p^{-l} D_F / D_F \triangleleft TC(F)$, то (см. предложение 1) $M \triangleleft TC(F)$.

2) Из утверждения 1) переходом к инъективному пределу следует утверждение 2).

Таким образом, мы можем получить все возможные $C(S)$ как замкнутые подмодули инъективных модулей Картье. В одной из следующих статей все возможные $C(S)$ будут описаны более явно.

3.6. Сравнение с теорией Фонтена. В книге [6] был построен некоторый контравариантный функтор из категории формальных групп (абстрактных, т. е. без фиксированных координат) в некоторую категорию $\Lambda_{\mathcal{O}_L}^I$. Этот функтор классифицирует формальные группы (т. е. является эквивалентностью категорий) в случае $e < p$. Несмотря на то, что результаты работы [6] аналогичны классификационным результатам работ [1] и [2], функтор пополнения (т. е. M_F) Фонтеном построен не был; более того, его определение в рамках формализма книги [6] не представляется возможным. Кроме того, теория Фонтена не рассматривает формальные группы бесконечной высоты, весьма актуальные в настоящей работе.

В данном пункте мы опишем (без доказательства) функтор, индуцированный функтором Фонтена, на категории модулей Картье, удовлетворяющих условиям утверждения 3) теоремы 1.

Сначала опишем связь между обычными и инвариантными модулями Картье для формальных групп.

Пусть F – формальная группа размерности m . Согласно [8, теорема 26.2.3] мы имеем $E(F)/\mathbf{V}E(F) \approx \mathcal{O}_L^m$. Зафиксируем изоморфизм $j: E(F)/\mathbf{V}E(F) \rightarrow \mathcal{O}_L^m$. Для каждого $x \in E(F)$ рассмотрим последовательность $x_i = p^{-i} j(\mathbf{f}^i x)$, $i \geq 0$. Тогда нетрудно видеть, что отображение $x \rightarrow \sum x_i \Delta^i$ является вложением модулей Картье $E(F) \rightarrow L[[\Delta]]^m$.

Если не фиксировать j , то описанная процедура дает каноническое вложение $E(F) \rightarrow \mathbb{Q}_p(E(F)/\mathbf{V}E(F))[[\Delta]]$.

Опишем функтор Фонтена. Будем считать поле $\bar{L}$ совершенным и пользоваться обозначениями из введения.

Обозначим $\text{Cart}(\bar{L})$ через Cart' .

Для m -мерной формальной группы F конечной высоты Фонтен рассматривает тройку $(M(F), L(F), \rho)$. Здесь $M(F)$ – контравариантный модуль Дьедонне для $\bar{F}$, $L(F)$ – конечномерный $\mathfrak{D}_L$ -модуль, $\rho: L(F) \rightarrow M_{\mathfrak{D}_L}(F)$, где $M_{\mathfrak{D}_L}(F)$ получается из $M(F)$ с помощью некоторого функтора расширения скаляров; $L(F) \subset L^0[[X]]$ определяется как $\sum \mathfrak{D}_L \lambda_i$.

Опишем функтор Фонтена для $e = 1$. В этом случае Фонтен задает аддитивную группу $MH_{\mathfrak{D}_L}(F)$ как фактор

$$\{f \in L^0[[X]] : f(F(X, Y)) \equiv f(X) + f(Y) \pmod{(p)}\} / p \mathfrak{D}_L^0[[X]]. \quad (9)$$

На группе $MH_{\mathfrak{D}_L}(F)$ можно определить структуру Cart' -модуля, если для $f = \sum a_I X^I$, где I – положительные m -индексы, $\alpha \in \bar{L}$, положить

$$\langle \alpha \rangle([f]) = [\theta(\alpha)f], \quad \mathbf{f}([f]) = \left[\sum \sigma(a_I) X^{pI} \right], \quad \mathbf{V}([f]) = \left[p \sum \sigma^{-1}(a_I) X^{I/p} \right].$$

Здесь $[f]$ обозначает вычет $f \pmod{p \mathfrak{D}_L^0[[X]]}$, $\theta(\alpha)$ – представитель Тейхмюллера, моном $a_I X^{I/p}$ считаем равным нулю, если I не делится на p . Фонтен строит канонический Cart' -изоморфизм $M(F) \rightarrow MH(F)$ (фактически, с его помощью он и определяет структуру Cart' -модуля на $MH_{\mathfrak{D}_L}(F)$). В частности, $MH_{\mathfrak{D}_L}(F)$ зависит только от редукции F . Вложение $L(F) \subset L^0[[X]]$ задает ρ .

В случае $e > 1$ аддитивная группа $MH_{\mathfrak{D}_L}(F)$ задается сравнением, аналогичным (9), зависит только от $\bar{F}$ и получается из $M(F)$ с помощью некоторой канонической процедуры расширения скаляров. Фонтен также описывает некоторую аддитивную категорию $\Lambda_{\mathfrak{D}_L}^l$, которой принадлежат $(M(F), L(F), \rho)$ для любой F конечной высоты.

Теперь опишем связь между D_F и значением функтора Фонтена.

Для элемента $h(\Delta) = \sum h_i \Delta^i \in L[[\Delta]]^m$, $h_i = (h_{ij}) \in L^m$, мы определим

$$h(X) = \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{i \geq 0} h_{ij} X_j^{p^i}.$$

Аналогично определяется $T(X)$ для $T \in M_m(L[[\Delta]])$.

Хорошо известно (см. [8, теорема 16.4.14]), что каждая m -мерная формальная группа F строго изоморфна над $\mathfrak{D}_L$ формальной группе с логарифмом, равным $\lambda(X)$ для $\Lambda = \Lambda_F \in M_m(L[[\Delta]])$. Такие формальные группы называются *p -типическими*. Поскольку нас интересует связь между функторами, то можно заменять формальные группы на изоморфные, а значит, можно считать, что F – p -типическая формальная группа.

Нетрудно видеть, что мультипликативное отображение $\bar{L} \rightarrow \text{Cart}$, $\alpha \rightarrow \langle \theta(\alpha) \rangle$, канонически продолжается до вложения колец $\theta: W_p(\bar{L}) \rightarrow \text{Cart}$. Будем рассматривать кольцо

$$W = \left\{ \sum_{i \geq 0} V_i \theta(a_i), a_i \in \mathfrak{D}_N \right\}.$$

Так как $W \subset \text{Cart}$, то W действует на $L[[\Delta]]$ (см. (5)). Если обозначить $\sum_{i \geq 0} V_i \theta(a_i)$ через $\sum a_i \Delta^i$, оператор Фробениуса на $\mathfrak{D}_N$ через σ , то действие W на $L[[\Delta]]$ и умножение на W определяются по формуле

$$\sum_{i \geq 0} a_i \Delta^i \left(\sum_{j \geq 0} b_j \Delta^j \right) = \sum_{i, j \geq 0} \sigma^j a_i b_j \Delta^{i+j}.$$

Следуя работам Хонды, будем называть $u \in M_m(W)$, $u \equiv pI_m \pmod V$, *специальной матрицей*. На $L[[\Delta]]^m$ легко определить обратный оператор u^{-1} .

В работах [1] и [2] было доказано, что Λ_F можно представить в виде $u^{-1}(v)$, где u – специальная матрица, $v = (v_i) \in M_m(R)$ (см. определение R после определения 4). Кроме того, если высота F конечна, то выбор u единствен с точностью до умножения слева на $\varepsilon \in I_m + M_m(\mathfrak{O}_N[[V]]V)$.

В случае $e = 1$ можно доказать, что аддитивная группа $MH_{\mathfrak{O}_L}(F)$ совпадает с $u^{-1}(\mathfrak{O}_N[[\Delta]]^m)(X) \pmod{(p)}$. В частности, эта формула выражает $M(F)$ через $E(F)$ (другой вариант – воспользоваться теоремой 1).

В случае $e > 1$ группа $MH_{\mathfrak{O}_L}(F)$ совпадает с группой

$$u^{-1} \left(\sum_{i \geq 0} \mathfrak{M}^{p^i} [[\Delta]] \Delta^i / p^i \right)^m (X) \pmod{\left(\sum_{i \geq 0} (\mathfrak{M}^0 [[X]])^{p^i} / p^i \right)}.$$

Кроме того, $M(F)$ снова Cart-изоморфен модулю $M_{\mathfrak{O}_N}(F) = u^{-1}(\mathfrak{O}_N[[\Delta]]^m)(X) \pmod{(p)}$. Как было доказано в работах [1] и [2], для всех $1 \leq i \leq m$ мы имеем $v_i \in \left(\sum_{i \geq 0} \mathfrak{M}^{p^i} [[\Delta]] \Delta^i / p^i \right)^m$; это дает нам явное описание ρ .

Таким образом, все ингредиенты функтора Фонтена могут быть выражены через $E(F)$ (без ссылки на формальную группу F). Мы выполнили это для $e = 1$. Для того чтобы завершить описание функтора из $E(F)$ в $\Lambda_{\mathfrak{O}_L}^l$ для $e > 1$, необходимо явно описать процедуру расширения скаляров, с помощью которой $MH_{\mathfrak{O}_L}(F)$ получается из $M_{\mathfrak{O}_N}(F)$ (см. [6, гл. 4, § 2]).

Отметим, что классификационные результаты из [1] были обобщены в [2] на случай несовершенного поля вычетов; ничего подобного не было сделано ранее для функтора Фонтена.

§ 4. Доказательство основных утверждений об общем слое групповых схем

Настоящий параграф посвящен доказательству предложения 3. Мы считаем, что $\bar{L}$ совершенно. Однако, как уже было замечено во введении, условия теорем A и A' не меняются при расширениях с индексом ветвления, равным 1, а значит, теоремы A и A' будут доказаны для произвольного поля вычетов. В конце параграфа мы объясним, как надо изменить рассуждения, чтобы получить доказательство теоремы A'.

4.1. Ядро редукции. Докажем, что если f – изоморфизм на общем слое, то ядро его редукции имеет малый показатель. Сначала докажем аналогичное утверждение для формальных групп.

Пусть F, G – формальные группы конечной высоты размерностей m и n над $\mathfrak{O}_L$. Для гомоморфизма $f: F \rightarrow G$ формальных групп мы рассмотрим пространства $I' = A(L^m)$, $C' = L^n/I'$, где $f \equiv AX \pmod{\deg 2}$. Через I и C обозначим модули $\mathfrak{O}_L^n \cap I'$ и $\mathfrak{O}_L^n/I$ соответственно. Рассмотрим отображение rg из $\mathfrak{O}_L^n$ в C , индуцированное A ; кроме того, зафиксируем некоторое сечение $\mathfrak{O}_L$ -гомоморфизма rg , т. е. будем считать, что $C \subset \mathfrak{O}_L^n$ и $I \oplus C = \mathfrak{O}_L^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Пусть $e \leq (p-1)p^u$, f инъективен (т. е. инъективен на всех конечных подсхемах). Тогда модуль $C(\text{Ker } \bar{f})$, т. е. модуль Дьедонне ядра редукции f , аннулируется $\mathfrak{f}^u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = D_G \cap I'[[\Delta]]$. Рассмотрим формальную группу F_1 , соответствующую M согласно предложению 8. Согласно предложению 6 отображение f можно разложить в композицию $F \xrightarrow{i} F_1 \rightarrow G$. Поскольку высота F конечна и размерность F_1 равна m , то высота F_1 конечна и i – изогения. Так как морфизм f инъективен (ядро – нулевая групповая схема), то i – изоморфизм. Таким образом, $AD_F = M$. Поэтому $\text{Cart}(\langle \pi \rangle M) = M \cap \text{Cart}(\langle \pi \rangle D_G)$, а значит, отображение, индуцированное на образах модулей Дьедонне редукций, инъективно (см. теорему 1). Мы будем отождествлять $E(\overline{F})$ с его образом в $E(\overline{G})$.

Рассмотрим модуль $\widetilde{W} = \{x \in D_G : \bar{x} \in \mathbb{Q}_p E(\overline{F})\}$, где $\bar{x}$ – образ x в $E(\overline{G})$ при редукции. Для каждого $z \in \widetilde{W}$ докажем, что $\mathbf{f}^u z$ можно представить в виде $\mathbf{f}^u z = m + c$, $c \in C[[\Delta]] \cap D_G$, $m \in M$. Действительно, имеем $\text{pr}(z) \in CR = C \otimes_{\mathfrak{O}_L} R \subset L[[\Delta]]^n$, а поэтому согласно предложению 12 имеем $\mathbf{f}^u \text{pr}(z) \in (JC)[[\Delta]] \subset D_G$. Поэтому можно взять $c = \mathbf{f}^u \text{pr}(z)$, $m = \mathbf{f}^u(z - \text{pr}(z))$.

Таким образом, для каждого $\bar{x} \in \mathbb{Q}_p E(\overline{F}) \cap E(\overline{G})$ выполнено $\mathbf{f}^u \bar{x} \in E(\overline{F})$. Отсюда и из формулы (6) немедленно получаем требуемое.

Теперь докажем то же утверждение для групповых схем.

ТЕОРЕМА 5. 1) Пусть $e < (p-1)p^u$, $f: S \rightarrow T$ инъективен на общем слое. Тогда ядро $\bar{f}$ аннулируется $\mathbf{f}^u$.

2) То же выполнено, если $e \leq (p-1)p^u$ и S связна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S_0, T_0 – связные компоненты S, T соответственно, $S_e = S/S_0$ – этальная часть S . Обозначим через T' замыкание образа S_0 в T , рассмотрим $T'' = T/T'$. Тогда f индуцирует отображения $f_0: S_0 \rightarrow T'$ и $f_e: S_e \rightarrow T''$. Как известно, схема $\overline{S}$ канонически изоморфна $\overline{S}_e \oplus \overline{S}_0$. Таким образом, утверждение 1) в случае $e < (p-1)p^u$ достаточно доказать отдельно для морфизмов f_0 и f_e , т. е. отдельно для связной и этальной схем S . Поскольку случай $e = (p-1)p^u$ возможен только для утверждения 2), для такого e достаточно рассматривать только связную схему S .

Пусть $e < (p-1)p^u$ и S этальна. Поскольку категория этальных $\mathfrak{O}_L$ -схем эквивалентна категории этальных $\overline{L}$ -схем, мы получаем, что $\text{Ker } \bar{f} = \bar{f}^{-1}(\overline{T_0})$. Согласно теореме 2 имеем $\mathbf{f}^u \text{Ker } \bar{f} \subset p^u \text{Ker } \bar{f}$. Осталось применить лемму 1.

Пусть теперь $e \leq (p-1)p^u$ и схема S связна. Тогда T тоже связна. Применив предложение 2, мы так же, как в п. 2.2, сводим утверждение к формальным группам, т. е. к предложению 16.

В частности, мы доказали, что в описанных выше случаях ядро $\bar{f}$ имеет показатель, не превосходящий p^u , т. е. $p^u \text{Ker } \bar{f} = \{0\}$.

4.2. Коядро редукции. Из теоремы 5 немедленно выводим двойственное утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f: S \rightarrow T$ – изоморфизм на общем слое. Тогда коядро $\bar{f}$ аннулируется $\mathbf{V}^s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S^*, T^* – двойственные по Картье к S и T соответственно, f^* – двойственный к f . Поскольку двойственность сохраняется при замене базы, мы получаем, что f_L^* – изоморфизм. Таким образом, $\mathbf{f}^s \text{Ker } \bar{f}^* = \{0\}$. Осталось заметить, что схема $\text{Coker } \bar{f}$ двойственна по Картье к $\text{Ker } \bar{f}^*$, и применить теорему 2.

4.3. Доказательство предложения 3. Обозначим связную часть Y' (в условиях предложения 3) через G , связную часть Y – через F , прообраз G в Y (в смысле замкнутых подсхем) – через U . Имеем $F \triangleleft U$. С помощью леммы 2 мы сводим предложение 3 к существованию морфизма из G в U с нужным общим слоем (на самом деле, он будет переводить G в F). Таким образом, предложение 3 равносильно тому, что для подмодуля TM модуля $TC(G)$, соответствующего образу F в G , и W , равного замыканию в $TC(G)$ подмодуля, соответствующего образу U , выполнено $p^s W \subset TM$. Далее, так как схема U/F этальна, мы получаем, что редукция образа U в G равна редукции образа F (как схема над $\bar{L}$). Применяя теорему 6, получаем, что предложение 3 сводится к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Пусть гомоморфизм $f: F \rightarrow G$ формальных групп инъективен на общем слое (как гомоморфизм p -делимых групп). Пусть N – инъективный предел некоторой системы замкнутых подсхем формальной группы G , $f(F) \subset N$ и $\mathbf{V}^s(\bar{N}/f(F)) = \{0\}$. Тогда если обозначить образ $\varinjlim p^{-l}M/M$ в $TC(G)$ через TM , то выполнено $p^s C(N) \subset TM$. Здесь $C(N)$ обозначает Cart-подмодуль $TC(G)$, соответствующий N согласно предложению 15.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим M так же, как в доказательстве предложения 16. Поскольку $M = \mathbb{Q}_p M \cap D_G$, выполнено $\varinjlim p^{-l}M/M = TM$ (т.е. естественный гомоморфизм является изоморфизмом).

Построим сначала Cart-отображение $TC(N) \rightarrow TM$ такое, что его сужение на TM совпадает с умножением на p^s .

Очевидно, $\widetilde{W}$ (см. доказательство предложения 16) – разделенный подмодуль D_G . Таким образом (см. предложение 7), $\widetilde{W}$ соответствует некоторой формальной группе, т.е. для некоторой формальной группы $\mathfrak{W}$ размерности n и $B \in M_n(\mathfrak{O}_L)$ выполнено $\widetilde{W} = BD_{\mathfrak{W}}$. Обозначим через w отображение из $TC_{\mathfrak{W}}$ в TC_G , индуцированное вложением $\mathfrak{W}$ в G , и обозначим $w(TC_{\mathfrak{W}})$ через D . Докажем, что w – вложение. Действительно, пусть x лежит в ядре w , и пусть $p^l x = 0$, где l минимально. Тогда для z , являющегося представителем в $\cup p^{-i}\widetilde{W}$ элемента $y = wx$, выполнено $z \in D_G$ и $z \in p^{-l}\widetilde{W} \setminus p^{-l+1}\widetilde{W}$. Так как $E(\bar{G})/E(\bar{\mathfrak{W}}) = D_G/\widetilde{W}$, то вычет $\bar{z} \bmod \widetilde{W}$ лежит в $E(\bar{G})/E(\bar{\mathfrak{W}}) \setminus \{0\}$ и удовлетворяет $p^l \bar{z} = 0$. Тогда получаем, что $E(\bar{G})/E(\bar{\mathfrak{W}})$ имеет ненулевое p -крючение, что противоречит выбору $\widetilde{W}$.

Рассмотрим отображение h' , переводящее $z \in \widetilde{W}$ в $\mathrm{pr}(p^s z)$. Поскольку $\mathrm{pr}(\widetilde{W}) \in CR$, то согласно предложению 12 мы имеем $\mathrm{pr}(p^s \widetilde{W}) \subset JC$. Мы получаем, что h' индуцирует отображение $h: D \rightarrow TM$.

Докажем, что h можно продолжить с $TC(N) \cap D$ на $TC(N)$. Рассмотрим отображение $h'': TC(G) \rightarrow \mathbb{Q}_p \mathrm{pr}(D_G)/p^s \mathrm{pr}(D_G)$, переводящее z в $\mathrm{pr}(p^s z)$. Необходимо доказать, что h'' индуцирует (корректное) отображение из $TC(N)$ в TM . Проверим, что

$$\mathrm{pr}(\mathrm{Cart} \mathbf{f}^s D_G) \cap \mathbb{Q}_p M \subset M, \quad (10)$$

$$\mathrm{pr}(p^s(TC(N))) \bmod (\mathrm{pr}(\mathrm{Cart} \mathbf{f}^s D_G) + M) \subset TM \bmod \mathrm{pr}(\mathbf{f}^s D_G). \quad (11)$$

Соотношение (10) немедленно следует из предложения 12. Далее, если $z \in TC(N)$, то, из условия, $y = \mathbf{V}^s z \in TC(N) \cap D$. Пусть $\bar{z} \in \mathbb{Q}_p D_G$ – представитель z , $\bar{y} \in \mathbb{Q}_p \widetilde{W}$ – представитель y . Мы имеем $\mathbf{V}^s z \equiv y \bmod D_G$. Получаем,

что $\mathrm{pr} p^s \tilde{z} \equiv \mathrm{pr} f^s \tilde{y} \pmod{\mathrm{pr}(f^s D_G)}$. Так как $\mathrm{pr} f^s \tilde{y}$ корректно задает некоторый элемент TM , получаем, что выполнено (11). Таким образом, для каждого $x \in TC(N)$ существует единственный $y \in \mathbb{Q}_p M/M$ такой, что

$$h''(x) \equiv y \pmod{(\mathrm{Cart} f^s \mathrm{pr}(D_G) + M)};$$

для таких x, y определим $h(x) = y$.

Поскольку h индуцировано линейным отображением $p^s \mathrm{pr}$ и сравнением по модулю Cart -модуля $\mathrm{Cart} f^s \mathrm{pr}(D_G) + M$, оно Cart -линейно.

Осталось доказать, что отображение h совпадает с умножением на p^s . Так как $\mathbf{V}^s TC(N) \subset TC(N) \cap D$ и модуль TM разделен, получаем, что достаточно проверить это на $TC(N) \cap D$. Рассуждая так же, как и выше, получаем, что для каждого $c \in \mathfrak{D}_L$ отображение $p^s c(\mathrm{pr} - \mathrm{id}_{TC(N)})$ индуцирует Cart -гомоморфизм g_c из $TC(N)$ в $TC(G)$ (g_c так же, как и h , продолжается с $TC(N) \cap D$ на $TC(N)$). Поскольку g_c равно нулю на TM и модуль $TC(G)$ разделен, то g_c равно нулю на замыкании TM в $TC(N)$. Так как $TC(N)/\mathrm{Cl} TM$ – модуль Оорта схемы $N/\mathrm{Cl}(F)$ и $\mathbf{V}^s(\bar{N}/f(\bar{F})) = \{0\}$, то показатель $TC(N)/\mathrm{Cl} TM$ не превосходит p^s . Поэтому

$$g_c(TC(N)) \subset p^s TC(G) \cong C(\mathrm{Ker}[p^s]_G).$$

Получаем, что g_c для каждого $c \in \mathfrak{D}_L$ индуцирует гомоморфизм из $N/\mathrm{Cl}(F)$ в $\mathrm{Ker}[p^s]_G$. Множество морфизмов из $N/\mathrm{Cl}_G(F)$ в $\mathrm{Ker}[p^n]_G$ конечно и для любых $c_1, c_2 \in \mathfrak{D}_L$ выполнено $g_{c_1+c_2} = g_{c_1} + g_{c_2}$. Поэтому существует подгруппа U конечного индекса аддитивной группы $\mathfrak{D}_L$ такая, что для $c \in U$ выполнено $g_c = 0$. Очевидно, мы можем считать $\bar{L}$ бесконечным, так как расширение поля вычетов не влияет на условие предложения. Если $\tilde{z} \in \mathbb{Q}_p D_G$ – представитель элемента $z \in TC(N) \cap D$, то для $c \in U$ выполнено $\exp_G(cp^s(\mathrm{pr}(z) - z)(x)) \in \mathfrak{D}_L[[x]]^n$. Это равносильно выполнению некоторой системы сравнений. Таким образом, условие $c \in U$ также равносильно выполнению по модулю $\mathfrak{D}_L$ некоторой системы сравнений, коэффициенты которой являются рядами от c с коэффициентами в L (нужно объединить системы для всех z). Очевидно, каждая система сравнений, выполненная на U , выполнена также и на $\mathfrak{D}_L$. Поэтому $U = \mathfrak{D}_L$. Мы получаем требуемое.

Теорема A доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно брать N , отличные от замыкания образа некоторого этального расширения F .

4.4. Доказательство теоремы A'. Пусть сначала S связна.

Рассуждая так же, как в п. 2.2, мы получаем, что достаточно построить морфизм $g: T \rightarrow S$ с нужным общим слоем в случае, когда S – минимальная в смысле $\subset$ среди связных схем, общий слой которых равен S_L , T – максимальная среди всех схем, общий слой которых равен S_L . Поскольку S – минимум связных схем, то ее координатное кольцо порождено локальными кольцами, а значит, локально. Так как $S \subset T$, то T тоже связна. Воспользуемся предложением 17. Получаем, что достаточно в условиях теоремы 6 для случая, когда $e = (p-1)p^u$ и схемы S, T связны, доказать, что коядро $\bar{f}$ аннулируется $\mathbf{V}^u$. Дублируя, сводим все к аналогу теоремы 5 при $e = (p-1)p^u$ для унитарных S, T . Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 5, получаем, что достаточно доказать, что если S этальна, T унитарна, то показатель $\ker \bar{f}$ не превосходит p^u . Поскольку функтор специального слоя задает эквивалентность

категорий этальных $\mathfrak{D}_L$ -схем и этальных $\bar{L}$ -схем, модулю $\ker \bar{f}$ соответствует схема $S' \triangleleft S_0$. Обозначим замыкание образа S' в T через T' . Получаем, что $S'_L = T'_L$ и S' этальна, T' унипотентна. Кроме того, редукция сужения f на S' равна нулю. Тогда редукция двойственного отображения $T'^* \rightarrow S'^*$ также равна нулю. Так как T'^* , S'^* связны, из теоремы 5 получаем, что показатель T'^* не превосходит p^u . Тогда показатель S' также не превосходит p^u .

Случай, когда T унипотентна, получается из предыдущего дуализацией.

§ 5. Приложения

В этом параграфе мы используем теорему А для исследования расширений схем, а также для доказательства утверждений о ядре умножения на p^l формальных и p -делимых групп.

5.1. Доказательство теоремы D. Очевидно, ядро $s_L: \text{Ext}_{\mathfrak{D}_L}(S, T) \rightarrow \text{Ext}_L(S_L, T_L)$ состоит из расширений, общий слой которых равен $S_L \oplus T_L$.

Пусть сначала S связна. Тогда согласно теореме 4 расширению $0 \rightarrow T \rightarrow H \rightarrow S \rightarrow 0$ соответствует $\text{Cart}(\mathfrak{D}_L)$ -точная последовательность

$$0 \rightarrow C(T) \rightarrow C(H) \rightarrow C(S) \rightarrow 0.$$

Далее, изоморфизм $H_L = S_L \oplus T_L$ влечет согласно теореме А' (после применения функтора C) каноническое вложение $p^u C(S)$ в $C(H)$. Таким образом, образ $\text{Ker } s_L$ при функторе Оорта лежит в ядре естественного отображения

$$i: \text{Ext}_{\text{Cart}(\mathfrak{D}_L)}(C(S), C(T)) \rightarrow \text{Ext}_{\text{Cart}(\mathfrak{D}_L)}(p^u C(S), C(T)).$$

Записав длинную точную последовательность для $\text{Ext}_{\text{Cart}(\mathfrak{D}_L)}$, мы получаем, что ядро i равно образу $\text{Ext}_{\text{Cart}(\mathfrak{D}_L)}((C(S)/p^u C(S)), C(T))$. Поскольку показатель $C(S)/p^u C(S)$ не превосходит p^u , то

$$p^u \text{Ext}_{\text{Cart}(\mathfrak{D}_L)}((C(S)/p^u C(S)), C(T)) = \{0\},$$

откуда получаем требуемое.

Пусть теперь S несвязна, S_0 – связная компонента S . Достаточно доказать, что отображение $\text{Ext}(S, T) \rightarrow \text{Ext}(S_0, T)$, индуцированное вложением $S_0 \rightarrow S$, инъективно на ядре s_L . Это равносильно тому, что каждое вложение $S_0 \rightarrow H$, $H_L = S_L \oplus T_L$, можно продолжить на S . Это непосредственно следует из леммы 2.

5.2. Результаты о ядрах эндоморфизмов формальных групп. Докажем сначала некоторое общее утверждение.

Для каждой схемы S и $l \geq 0$ обозначим через $p^l S$ плоскую схему, равную образу S (как плоской схемы) при умножении на p^l , т.е. $[p^l]_S: S \rightarrow p^l S$ – эпиморфизм.

Через Sp^l обозначим замыкание $p^l S$ в S . Заметим (хотя нам это не понадобится), что определения $p^l S$ и Sp^l дуальны друг другу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. 1) Пусть $e < (p-1)p^u$. Тогда для любой схемы T , общий слой которой равен S_L , имеем $p^u T \subset Sp^u$.

2) При $e = (p-1)p^u$ то же выполнено, если S связна или T унипотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Согласно теореме А существует морфизм $g: p^u T \rightarrow \text{Cl}_S p^u S$, биективный на общем слое. Так как общий слой $g(T)$ равен $p^u S_L$, мы получаем требуемое.

2) Применяя теорему А' вместо А, получаем утверждение 2).

Из предложения 18 следует теорема Е. Действительно, из $\text{Ker}[p^l]_F$ в $\text{Ker}[p^l]_G$ существуют взаимно обратные на общем слое морфизмы в обе стороны. Таким образом, $\text{Ker}[p^l]_F$ и $\text{Ker}[p^l]_G$ изоморфны.

Теперь исследуем случай, когда общий слой некоторой $\mathfrak{D}_L$ -схемы H изоморфен общему слою $\text{Ker}[p^l]_F$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть для схем S, H выполнено $H_L \cong S_L$.

1) Пусть $p^s(Sp^s) \triangleleft Sp^s$. Тогда $p^s(Sp^s) \cong_{\mathfrak{D}_L} (p^s H)p^s$.

2) Пусть $e = (p-1)p^u$, $p^{u+1}(Sp^u) \triangleleft Sp^u$ и S связна. Тогда $p^{u+1}(Sp^u) \cong_{\mathfrak{D}_L} (p^u H)p^{u+1}$.

3) Если S этальна, то $p^s H \cong p^s S$.

В утверждениях 1)–3) изоморфизмы согласованы с изоморфизмами общих слоев H и S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Имеем $p^s H \subset Sp^s$. Далее, так как общий слой Sp^s равен общему слою $p^s H$, мы также имеем $p^s(Sp^s) \subset p^s H$. Поскольку $p^s(Sp^s) \triangleleft Sp^s$ и $p^s H \subset Sp^s$, то $p^s(Sp^s) \triangleleft p^s H$. Таким образом, $p^s(Sp^s)$ совпадает с $(p^s H)p^s$ (пользуемся тем, что замкнутая подсхема однозначно восстанавливается по общему слою).

2) Доказательство схоже с доказательством утверждения 1); оно получается из него заменой использования утверждения 1) предложения 18 на использование утверждения 2) того же предложения (в начале рассуждения).

3) Снова $p^s H \subset Sp^s$. Так как Sp^s этальна и ее общий слой совпадает с общими слоями $p^s H$ и $p^s S$, то мы получаем требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. 1) Если $S = \text{Ker}[p^l]_Y$, Y – p -делимая группа, то S удовлетворяет условию предложения. Обобщая этот пример, мы можем взять $S = \text{Ker}[\Pi^l]_Z$, где Z – Π -делимая группа, Π – униформизирующий элемент некоторого локального поля (т. е. конечного расширения $\mathbb{Q}_p$).

2) Если H определена над кольцом целых какого-то подполя $P \subset L$, то схемы $(p^s H)p^s$ и $(p^u H)p^{u+1}$ определены над тем же кольцом. Этот факт имеет большое значение при изучении поведения схем в расширениях полных дискретно нормированных полей.

3) Нетрудно видеть, что утверждение 1) предложения 7 является наилучшим возможным. Для построения примера нужно вложить, пользуясь замечанием 1, пример из введения в пример для $S = \text{Ker}[p^r]_Y$, Y – p -делимая группа, $r \gg s$, а затем сложить с двойственным.

§ 6. Сведение теоремы С к формальным группам

В настоящем параграфе мы сводим теорему С к теореме F, а затем теорему F с помощью теоремы G к случаю формальных групповых законов.

6.1. Сведение к p -делимым группам. Сводим теорему С к теореме F, повторяя рассуждение, приведенное в [4, § 5].

Пусть Y_K – p -делимая группа, соответствующая V над K . Имеем

$$Y_K \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } L = Y_{\mathfrak{D}_L} \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } L,$$

где $Y_{\mathfrak{D}_L}$ – p -делимая группа модели Нерона V_L над $\mathfrak{D}_L$. Если теорема В справедлива, то для некоторой p -делимой группы Y над $\mathfrak{D}_K$ выполнено $Y_K = Y \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } K$. По теореме Гротендика (см. [7, следствие 5.10]) получаем, что V имеет хорошую редукцию над K .

6.2. Доказательство теоремы Г. Для того чтобы свести теорему F к случаю формальных групп, нам понадобится следующее важное утверждение, которое является несколько более расширенным вариантом теоремы Г.

Обозначим (абсолютную) группу инерции K через G , алгебраическое замыкание K – через F . Заметим, что поле F неполно, но является прямым пределом полных полей (конечных расширений K).

ТЕОРЕМА 8. 1) Пусть U, S и S_0 – p -делимые группы над K , $\mathfrak{D}_L$ и $\mathfrak{D}_K$ соответственно, $f: U_L \rightarrow S_L$ – изоморфизм, $h: S_{0\mathfrak{D}_L} \rightarrow S$ – изоморфизм $S_{0\mathfrak{D}_L}$ со связной частью S , $i: S_{0K} \rightarrow U$ – вложение. Пусть $h_L = f_L \circ i_L$. Тогда U определена над $\mathfrak{D}_K$ (т. е. существует p -делимая группа $T/\mathfrak{D}_K$ и изоморфизмы $j: T_{\mathfrak{D}_L} \rightarrow S$ и $l: T_K \rightarrow U$, удовлетворяющие условию $fl_L = j_L$), если и только если действие G на группе $R = U/i(S_{0K})(F)$ тривиально.

2) Пусть U, S, f такие же, как в утверждении 1), и пусть R – факторгруппа U , соответствующая этальной части S . Пусть действие G на $\text{Ker}[p]_R$ тривиально, в случае $p = 2$, $2 \mid e_0$, также потребуем, чтобы действие G на $\text{Ker}[4]_R$ было тривиально. Тогда действие G на R тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку замена K на пополнение его максимального неразветвленного расширения не влияет на условия теоремы, мы можем (и будем) считать, что поле вычетов $\mathfrak{D}_K$ сепарабельно замкнуто. Таким образом, $S_1 = S/h(S_{0\mathfrak{D}_L})$ – постоянная p -делимая группа, $n = e_0$.

Обозначим (абсолютную) группу Галуа L через H .

1) Необходимость тривиальности действия G на $\text{Ker}[p]_R$ очевидна. Докажем достаточность.

Применим строго плоский спуск. Достаточно доказать существование некоторого $(\text{Spec } \mathfrak{D}_L \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } \mathfrak{D}_L)$ -изоморфизма

$$g: S \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } \mathfrak{D}_L \rightarrow \text{Spec } \mathfrak{D}_L \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} S,$$

удовлетворяющего условию коцикла, т. е. композиция двух морфизмов типа $g \times \text{id}_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L}$ равна третьему (мы вставляем $\text{id}_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L}$ на три возможных места), и согласованного с h .

Аналогично замечанию, сделанному в доказательстве леммы 2, достаточно построить морфизм g , общий слой которого равен $g_L = f \times f^{-1}$; при этом достаточно построить его как морфизм плоских (не групповых) $(\mathfrak{D}_L \otimes_{\mathfrak{D}_K} \mathfrak{D}_L)$ -схем, так как морфизм групповых схем как схем, являющийся групповым над общим слоем, автоматически будет групповым.

Достаточно проверить существование T, j, l на всех конечных уровнях, т. е. для S, U, S_0 , замененных на $S' = \text{Ker}[p^m]_S$, $U' = \text{Ker}[p^m]_U$, $S'_0 = \text{Ker}[p^m]_{S_0}$ для некоторого $m > 0$.

Заметим, что для каждого m достаточно построить нужный g над A , где A – кольцо целых некоторого конечного расширения P поля L . Действительно, снова применим строго плоский спуск. Пусть существует морфизм

$$g'_A: S'_A \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} S'_A$$

с нужным общим слоем. Необходимо проверить, что два морфизма типа $g'_A \times \text{id}_{\text{Spec } A} \times \text{id}_{\text{Spec } A}$, действующие из $(S' \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } A \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } A) \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } A \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } A$ в $\text{Spec } A \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } A \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} (S' \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } A \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } A)$ (в первом морфизме мы оба раза вставляем $\text{id}_{\text{Spec } A}$ на первую из двух возможных позиций, во втором – на вторую), совпадают. Так как общий слой g_P морфизма g_A определен над L , а $(A \otimes_{\mathfrak{D}_L} A) \otimes_{\mathfrak{D}_K} A \otimes_{\mathfrak{D}_K} A \otimes_{\mathfrak{D}_K} K$ – произведение расширений L , то два варианта $g'_P \times \text{id}_{\text{Spec } P} \times \text{id}_{\text{Spec } P}$ равны. Из унивалентности функтора общего слоя получаем требуемое.

Таким образом, мы можем считать, что $\#S'(L) = \#S'$. Заметим также, что всегда $\#S'(L) = \#S'(\mathfrak{D}_L)$, так как $\mathfrak{D}_L$ – кольцо дискретного нормирования. Мы получаем, что $S' \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } \mathfrak{D}_L$ разбивается (как схема) на несвязное объединение смежных классов по $h(S'_{0\mathfrak{D}_L}) \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } \mathfrak{D}_L$, т. е. сдвигов $h(S'_{0\mathfrak{D}_L}) \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } \mathfrak{D}_L$ на некоторые точки x_i , равные $x'_i \otimes 1$ для $x'_i \in S'(\mathfrak{D}_L)$. Мы имеем отображение

$$g_0: h(S'_{0\mathfrak{D}_L}) \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } \mathfrak{D}_L \rightarrow \text{Spec } \mathfrak{D}_L \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} S',$$

индуцированное h .

Предположим, что для каждой точки $x \in S' \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } \mathfrak{D}_L (\mathfrak{D}_L \otimes_{\mathfrak{D}_K} \mathfrak{D}_L)$, равной $x' \otimes 1$, где точка x' принадлежит $S'(\mathfrak{D}_L)$, схема $\text{Spec } \mathfrak{D}_L \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} S'$ содержит точку gx , общий слой которой равен $g_L(x_L)$. Тогда мы можем построить отображение g' , переводящее $x_i + h(S'_{0\mathfrak{D}_L}) \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } \mathfrak{D}_L$ в $g'x_i + g_0(h(S'_{0\mathfrak{D}_L}) \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } \mathfrak{D}_L)$. Поскольку отображение g' будет иметь нужный общий слой, оно будет искомым.

Обозначим кольцо целых F через $\mathfrak{D}_F$. Для завершения доказательства достаточно проверить, что для каждого $x \in S(\mathfrak{D}_F)$ точка $g_L(x_F \otimes 1) - x_F \otimes 1 \in S(F \otimes_K F)$ равна общему слою некоторой точки $y \in h(S_0)(\mathfrak{D}_F \otimes_{\mathfrak{D}_K} \mathfrak{D}_F) \subset S(\mathfrak{D}_F \otimes_{\mathfrak{D}_K} \mathfrak{D}_F)$.

Поскольку групповая схема S_1 постоянна, $\mathfrak{D}_F \otimes_{\mathfrak{D}_L} \mathfrak{D}_F$ – локальное кольцо, то естественная проекция $\mathfrak{D}_F \otimes_{\mathfrak{D}_K} \mathfrak{D}_F \rightarrow \mathfrak{D}_F$ индуцирует изоморфизм $S_1(\mathfrak{D}_F \otimes_{\mathfrak{D}_K} \mathfrak{D}_F) \rightarrow S_1(\mathfrak{D}_F)$. Отсюда для каждого $x \in S(\mathfrak{D}_F)$ выполнено

$$x \otimes 1 -_S 1 \otimes x \in h(S_0)(\mathfrak{D}_F \otimes_{\mathfrak{D}_L} \mathfrak{D}_F); \quad (12)$$

здесь $-_S$ – вычитание в групповой схеме S .

Обозначим через X формальную группу, соответствующую S_0 . Для каждой полной $\mathfrak{D}_K$ -алгебры B точки $S_0(B)$ – это в точности элементы кручения $X(B)$. Для каждого $\sigma \in G$ обозначим через a_σ элемент $S(\mathfrak{D}_F)$, общий слой которого равен $x_F -_S f(\sigma f^{-1}(x_F))$. Так как групповая схема S_1 постоянна, мы имеем $a_\sigma \in h(S_0(\mathfrak{D}_F))$. Обозначим $h^{-1}(a_\sigma)$ через b_σ . Легко видеть, что отображение $\sigma \rightarrow b_\sigma$ – это 1-коцикл Галуа группы G . По основной теореме 2.3.1 статьи [3] из (12) получаем, что существует $z \in X(\mathfrak{D}_F)$ такой, что для каждого $\sigma \in H$ выполнено $z -_X \sigma(z) = b_\sigma$. Для каждого $\sigma \in G$ обозначим $b_\sigma -_X (z -_X \sigma(z))$ через c_σ . Тогда отображение $\sigma \rightarrow c_\sigma$ – это G -коцикл, тривиальный на H . Обозначим через P нормализацию L/K , через C – группу Галуа P/K , через A – кольцо целых P , через d – индекс ветвления P/L . Тогда для каждого $\sigma \in G$ мы имеем $c_\sigma \in X(A)$. Отсюда $v(c_\sigma) \geq 1/d$ (где $v(c_\sigma)$ определяется как минимум нормирований всех компонент, v – нормирование на F , нормализованное относительно L). Заметим, что это условие не зависит от выбора x .

Теперь рассмотрим $x_m \in S(\mathfrak{D}_F)$ такой, что $[p^m]_{S-(x_m)} = x$, и рассмотрим соответствующие ему z_m и $c_{\sigma,m}$. Аналогично доказательству леммы 1 мы получаем, что

$$v([p^m]_X(c_{\sigma,m})) \geq \min_{0 \leq i \leq m} ((m-i)e + p^i/d).$$

Кроме того, отображение $\sigma \rightarrow [p^m]_X(c_{\sigma,m})$ обладает всеми свойствами коцикла c_σ . Отображение $\sigma \rightarrow [p^m]_X(c_{\sigma,m})$ пропускается через C , его значения лежат в $X(A)$ и $c_{\sigma,m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$. Поэтому для любого достаточно большого m существует элемент $u_m \in X(A \otimes_{\mathfrak{D}_K} A) \subset X(\mathfrak{D}_F \otimes_{\mathfrak{D}_K} \mathfrak{D}_F)$ такой, что для каждого $\sigma \in G$ отображение $P \otimes_{\mathfrak{D}_K} P \rightarrow P$, переводящее $x \otimes y$ в $x\sigma(y)$, переводит u_m в $c_{\sigma,m}$. Это немедленно следует, например, из [3, теорема 1.2]. Поскольку все значения b_σ лежат в p -крючении $X(A)$, то

$$u_m +_X [p^m]_X z_m \otimes 1 -_X 1 \otimes [p^m]_X z_m \in S_0(\mathfrak{D}_F \otimes_{\mathfrak{D}_K} \mathfrak{D}_F).$$

Тогда $h(u_m +_X [p^m]_X z_m \otimes 1 -_X 1 \otimes [p^m]_X z_m)$ дает искомую точку $y \in h(S_0) \times (\mathfrak{D}_F \otimes_{\mathfrak{D}_K} \mathfrak{D}_F)$.

2) Необходимо проверить, что действие G на R тривиально. Известно, что H действует на R тривиально. Обозначим через Q группу автоморфизмов R . отождествим Q с $\mathrm{Gl}_r(\mathbb{Z}_p)$ для некоторого $r > 0$.

Действие G на R задает гомоморфизм $y: G \rightarrow Q$, y тривиален на H , поэтому все $y(\sigma)$ – автоморфизмы конечного порядка. При этом если n нечетно, то порядки всех $y(\sigma)$ нечетны. Поэтому все матрицы $y(\sigma)$ диагонализуются над алгебраическим замыканием $\mathbb{Q}_p$, их собственные числа $\lambda_{\sigma i}$ – корни из единицы степени $n = e_0$. Так как G действует на $\mathrm{Ker}[p]_R$ тривиально, а в случае $p = 2$, $2 \mid e_0$, действие G на $\mathrm{Ker}[4]_R$ также тривиально, то все $\lambda_{\sigma i} = 1$. Таким образом, все $y(\sigma)$ – единичные матрицы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. 1) В условиях утверждения 2) теоремы 8 достаточно потребовать, чтобы действие G на $\mathrm{Ker}[p^{v_p(e_0)+1}]_R$ было тривиально.

2) Нетрудно видеть, что метод, использованный в доказательстве первой части теоремы 8, позволяет также доказать некоторое утверждение о конечных групповых схемах.

§ 7. Доказательство теорем C и F

Поскольку достаточно доказать, что V имеет хорошую редукцию над пополнением максимального неразветвленного расширения K , мы будем считать, что $e_0 = n$.

7.1. Поведение модулей Оорта при расширении колец. Пусть $Q \subset U$ – локальные нётеровы $\mathbb{Z}_p$ -алгебры без кручения. Очевидно, если S – схема над Q , то каждый гомоморфизм колец $Q \rightarrow U$ индуцирует $\mathrm{Cart}(Q)$ -гомоморфизм $C_Q(S) \rightarrow C_U(S)$.

Докажем следующие несложные свойства модулей Оорта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. 1) $C_Q(S)$ порождает $C_U(S)$ над $\mathrm{Cart}(U)$.

2) Если $U \cap \mathbb{Q}_p Q = Q$, то $C_Q(S) \subset C_U(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Достаточно доказать, что для формальной группы F выполнено $\text{Cart}_U D_{QF} = D_{UF}$.

Мы имеем $\text{Cart}_U D_{QF} \bmod \Delta^m = U^m$. Поскольку $\mathbf{V}$ переводит $\text{Cart}_U D_{QF}$ в себя и при этом для каждого $i \geq 0$ оператор V индуцирует изоморфизмы $V^i D_{UF}/V^{i+1} D_{UF}$ и $V^{i+1} D_{UF}/V^{i+2} D_{UF}$, $D_{UF} = \varprojlim D_{UF}/\mathbf{V}^i D_{UF}$, то мы получаем требуемое.

2) Пусть $0 \rightarrow S \rightarrow F \xrightarrow{h} G \rightarrow 0$ – разрешение S , при этом $h(X) \equiv AX \bmod \deg 2$, где $A \in M_M(Q)$. Мы имеем (над любым расширением Q) $C(S) = D_G/AD_F$. Необходимо доказать, что $AD_{UF} \cap D_{QG} = AD_{QF}$. Имеем

$$\begin{aligned} A^{-1}D_{QG} \cap D_{UF} &\subset (\mathbb{Q}_p Q)[[\Delta]]^m \cap D_{UF} \\ &= \{f \in (\mathbb{Q}_p Q)[[\Delta]]^m : \exp_F(f(\Delta)(x)) \in (\mathbb{Q}_p Q \cap U)[[x]]^m\}. \end{aligned}$$

Отсюда немедленно получаем нужное утверждение.

7.2. Сведение к формальным группам. Обозначим $v_p(n) + 1$ через t и связную часть Y через F , этальную часть Y – через U . Применив утверждение 3) теоремы 7, мы получаем, что группа инерции K действует тривиально на факторе $\text{Ker}[p^t]_V$, соответствующем U . Поэтому согласно теореме 8 (см. также замечание 5) нам достаточно проверить, что F определена над $\mathfrak{D}_K$ и соответствующие изоморфизмы согласованы. Согласно утверждениям 1), 2) теоремы 7 групповая схема $\text{Ker}[p^t]_F$ определена над $\mathfrak{D}_K$. Таким образом, теорема F сводится к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Пусть F – формальная группа конечной высоты над $\mathfrak{D}_L$, ее общий слой (в смысле p -делимой группы) $F \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } L$ определен над K , т. е. существует p -делимая группа Z_K над K такая, что

$$Z_K \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } L \cong F \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } L. \quad (13)$$

Пусть, кроме того, схема $\text{Ker}[p^t]_Z$ изоморфна $T \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } K$ для некоторой схемы T над $\mathfrak{D}_K$, этот изоморфизм в композиции с изоморфизмом (13) является общим слоем некоторого изоморфизма $T \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_K} \text{Spec } \mathfrak{D}_L \cong \text{Ker}[p^t]_F$. Тогда Z_K изоморфна F'_K для некоторого формального группового закона F' над $\mathfrak{D}_K$.

7.3. Сведение к модулям Картье–Дьедонне–Оорта. Обозначим $\text{Ker}[p^t]_F$ через S . Из условия предложения 20 получаем, что существует вложение $C_{\mathfrak{D}_K}(T) \rightarrow C_{\mathfrak{D}_L}(S)$, согласованное с изоморфизмом общих слоев, при этом модуль $C_{\mathfrak{D}_K}(T)$ порождает $C_{\mathfrak{D}_L}(S)$ над $\text{Cart}(\mathfrak{D}_L)$. Обозначим нормализацию расширения L/K через P , кольцо целых P через A , группу Галуа P/K через C , группу F , рассматриваемую как формальную группу над A , через F_A , ее общий слой (как p -делимой группы) через F_P . Поскольку общий слой F определен над K , то для каждого $\sigma \in C$ мы имеем $\sigma(F_P) \cong F_P$. Обозначим изоморфизм общих слоев $F \times_{\text{Spec } \mathfrak{D}_L} \text{Spec } L \rightarrow Z_K \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } L$ через γ . Очевидно, изоморфизм общих слоев $\sigma(F_P) \rightarrow F_P$ задается отображением $\gamma_P^{-1} \sigma(\gamma_P)$. Из теоремы Тэйта об общем слое p -делимых групп (которую легко получить из теоремы A) получаем, что $F_A \cong \sigma(F_A)$; обозначим этот изоморфизм через a_σ . Обозначим $D_{F,P}$ (инвариантный модуль Картье для F_A) через D' . Из предложения 6 получаем, что каждому $\sigma \in C$ соответствует некоторая матрица $M_\sigma \in \text{Gl}_m(A)$ такая, что $M_\sigma D' = \sigma(D')$; оператор M_σ на модулях Картье

соответствует отображению a_σ на соответствующих p -делимых группах. Так как общие слои a_σ – это 1-кограница, получаем, что M_σ образуют 1-коцикл Галуа, т. е. для каждого $\sigma, \tau \in C$ выполнено $M_{\tau\sigma} = M_\tau\tau(M_\sigma)$. Поскольку в $\mathrm{Gl}_m(P)$ каждый коцикл Галуа расщепляется, мы можем взять матрицу $B \in \mathrm{Gl}_m(P)$, расщепляющую коцикл $\sigma \rightarrow M_\sigma$. Получаем, что модуль $D = BD'$ инвариантен при действии C , так как для каждого $\sigma \in C$ отображению a_σ соответствует тождественное отображение на D . Так как изоморфизм S и T определен над $\mathfrak{O}_K$ (т. е. σ -инвариантен для каждого $\sigma \in C$), получаем, что образ $C_{\mathfrak{O}_K}(T)$ при вложении $C_{\mathfrak{O}_K}(T) \rightarrow C_A(S) \cong D/p^t D$ C -инвариантен. Мы будем отождествлять $C_A(S)$ с $D/p^t D$. Кроме того, образ $E_L(F)$ в D g -инвариантен для каждого $g \in C' = \mathrm{Gal}(P/L)$, а значит, $E_L(F) \subset L[[\Delta]]^m \cap D$. Так как $D_{F,L} = D_{F,P} \cap \mathbb{Q}_p D_{L,F}$, то $E_L(F) = L[[\Delta]]^m \cap D$.

7.4. Доказательство предложения 20. Обозначим $D \cap K[[\Delta]]^m$ через E . Очевидно, E является замкнутым $\mathrm{Cart}(\mathfrak{O}_K)$ -подмодулем $K[[\Delta]]^m$. Мы получаем, что E соответствует некоторой m -мерной (так как E содержит $p^u \mathfrak{O}_K[[\Delta]]^m$ для достаточно большого u) формальной группе F' над $\mathfrak{O}_K$ (см. предложение 7).

Пусть для $y \in E_L(F)$ мы имеем $y \bmod p^t D \in C_{\mathfrak{O}_K}(T)$. Рассмотрим $z = \sum_{\sigma \in J} y \in E$, где J – некоторое множество представителей C/C' . Имеем $z \bmod p^t D = ny \bmod p^t D$. Поскольку $n \mid z \bmod p^t D$, мы получаем $z/n \in \mathbb{Q}_p E \cap D = E$. Кроме того, $z/n \equiv y \bmod pD$. Таким образом, $C_{\mathfrak{O}_K}(T) \bmod pD \subset E \bmod pD$, а значит, $\mathrm{Cart}_{\mathfrak{O}_L} E \bmod pD = E_L(F) \bmod pD$. Рассуждая, как в доказательстве предложения 19, мы получаем, что $\mathrm{Cart}_{\mathfrak{O}_L} E$ содержит $E_L(F)$. Таким образом, группа F' изоморфна F над $\mathfrak{O}_L$.

7.5. Вариант формулировки основных теорем. В случае, когда H – ядро умножения на степень p некоторой p -делимой группы, значение r в теоремах C и F может быть уменьшено.

Заменив в рассуждении, приведенном в п. 7.2, использование теоремы 7 на использование теоремы E, немедленно получаем, что следующие аналоги теорем F и C следуют из предложения 20.

ТЕОРЕМА 9. Пусть V – p -делимая группа над K , Y – p -делимая группа над $\mathfrak{O}_L$ и $V \times_{\mathrm{Spec} K} \mathrm{Spec} L \cong Y \times_{\mathrm{Spec} \mathfrak{O}_L} \mathrm{Spec} L$, $r = s + v_p(n) + 1$. Тогда если для некоторой p -делимой группы U над $\mathfrak{O}_K$ групповая схема $\mathrm{Ker}[p^r]_V$ изоморфна $\mathrm{Ker}[p^r]_{U,K}$ над K , то существует p -делимая группа Z над $\mathfrak{O}_K$ такая, что $V \cong Z \times_{\mathrm{Spec} \mathfrak{O}_K} \mathrm{Spec} K$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть абелево многообразие V определено над K и имеет хорошую редукцию над L , $r = s + v_p(n) + 1$. Тогда если для некоторой p -делимой группы U над $\mathfrak{O}_K$ групповая схема $\mathrm{Ker}[p^r]_{V,K}$ изоморфна $\mathrm{Ker}[p^r]_{U,K}$ над K , то V имеет хорошую редукцию над K .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Очевидно, вместо $\mathrm{Ker}[p^r]_{U,K}$ можно брать любую групповую схему H , удовлетворяющую условию $p^s H = H p^s$. Действительно, воспользовавшись предложением 18, можно легко обобщить теорему E на этот случай.

Автор глубоко благодарен С. В. Востокову, Н. Дурову и О. Габберу за полезные замечания.

Список литературы

1. Бондарко М. В., Востоков С. В., “Явная классификация формальных групп над локальными полями”, *Тр. МИАН*, **241** (2003), 43–67.
2. Бондарко М. В., “Явная классификация формальных групп над полными дискретно нормированными полями с несовершенным полем вычетов”, *Тр. СПб. матем. об-ва*, **11** (2005), 1–36.
3. Bondarko M. V., “Links between associated additive Galois modules and computation of H^1 for local formal group modules”, *J. Number Theory*, **101**:1 (2003), 74–104.
4. Conrad B., “Finite group schemes over bases with low ramification”, *Compos. Math.*, **119**:3 (1999), 239–326.
5. Demazure M., Gabriel P., *Groupes algébriques*, Masson, Paris, 1970.
6. Fontaine J.-M., “Groupes p -divisibles sur les corps locaux”, *Astérisque*, 1977, № 47–48.
7. Grothendieck A., “Groupes de monodromie en geometrie algebrique”, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I)*, *Exposé IX*, Lecture Notes in Math., **288**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1972.
8. Hazewinkel M., *Formal groups and applications*, Academic Press, New York–London, 1978.
9. Milne J. S., *Arithmetic duality theorems*, Academic Press, Boston, 1986.
10. Oort F., “Dieudonné modules of finite local group schemes”, *Indag. Math.*, **36** (1974), 284–292.
11. Raynaud M., “Schemas en groupes de type $(p, \dots, p)$ ”, *Bull. Soc. Math. France*, **102** (1974), 241–280.

М. В. БОНДАРКО (M. V. BONDARKO)
E-mail: M@VB1058.spb.edu

Поступило в редакцию
31.05.2004