Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Солдатов, Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 6, 161–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/im692>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 09:40:36

УДК 517.9

А. П. Солдатов

Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости

Для эллиптической системы второго порядка с постоянными и старшими коэффициентами рассматриваются краевые задачи в верхней полуплоскости. С помощью преобразования Бицадзе эти задачи эквивалентным образом редуцируются к задачам для аналитических функций. На этом пути получены явные формулы решений основных краевых задач, изучена их фредгольмова разрешимость, включая аналитическое выражение для индекса. Рассмотрения ведутся в весовых пространствах Гёльдера и Харди.

Библиография: 21 наименование.

§ 1. Представление решений

Рассмотрим эллиптическую систему второго порядка

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

с постоянными коэффициентами $a_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times l}$. Под его решением понимается l -вектор-функция $u = (u_1, \dots, u_l)$ из класса C^2 в рассматриваемой области, удовлетворяющая тождественно уравнению (1.1). Условие эллиптичности заключается в том, что

$$\det \left(\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j a_{ij} \right) \neq 0 \quad (1.2)$$

для любого ненулевого вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Оно равносильно тому, что $\det a_{22} \neq 0$ и характеристический многочлен

$$\chi(z) = \det P(z), \quad P(z) = a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2, \quad (1.3)$$

степени $2l$ не имеет вещественных корней. Пусть $\nu_1, \dots, \nu_m$ – все различные корни многочлена χ , лежащие в верхней полуплоскости $\text{Im} z > 0$, которые называем также собственными значениями матричного многочлена $P(z)$. Под кратностью и порядком значения ν_i понимаем соответственно его кратность в многочлене $\chi(z)$ и порядок полюса в точке ν_i рациональной матрицы-функции $P^{-1}(z)$.

ЛЕММА 1.1. *Существуют такие матрицы $b, J \in \mathbb{C}^{l \times l}$, что*

$$\det \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \bar{b}J \end{pmatrix} \neq 0, \quad \sigma(J) = \{\nu_1, \dots, \nu_m\}, \quad (1.4)$$

$$a_{11}b + (a_{12} + a_{21})bJ + a_{22}bJ^2 = 0. \quad (1.5)$$

С точностью до подобия матрица J определяется единственным образом и может быть выбрана в жордановой форме, причем кратности и порядки собственных значений ν_i многочлена P и матрицы J совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = -a_{22}^{-1}(a_{12} + a_{21}), \quad a_0 = -a_{22}^{-1}a_{11};$$

здесь и ниже 1 означает единичную матрицу (порядок которой обычно ясен из контекста). Тожество

$$(z - A) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ -a_0 & z^2 - a_1z - a_0 \end{pmatrix}$$

показывает, что с точностью до множителя $\det a_{22} \neq 0$ характеристический многочлен матрицы A совпадает с $\chi(z)$. Существует такая обратимая матрица $B \in \mathbb{C}^{2l \times 2l}$ блочного вида $(B_{ij})_1^2$, что $B_{j2} = \bar{B}_{j1}$ и $AB = B \operatorname{diag}(J, \bar{J})$. Например, в качестве первых l столбцов матрицы B можно взять элементы базиса собственного подпространства матрицы A как оператора в $\mathbb{C}^{2l}$, отвечающего ее собственным значениям в верхней полуплоскости. Расписывая последнее равенство для блочных элементов, получим $B_{11}J = B_{21}$, $B_{21}J = a_0B_{11} + a_1B_{21}$. Полагая $b = B_{11}$, отсюда приходим к соотношениям (1.4), (1.5).

Таким образом, решение матричного уравнения (1.4), (1.5) всегда существует, причем при подходящем выборе B матрицу J можно выбрать в жордановой форме. Если b_1, J_1 – другая пара решений этого уравнения, то матрицы $\operatorname{diag}(J, \bar{J})$ и $\operatorname{diag}(J_1, \bar{J}_1)$ подобны. Поскольку $\sigma(J) = \sigma(J_1) \subseteq \{\operatorname{Im} z > 0\}$, матрицы J и J_1 имеют общую жорданову форму и, значит, подобны.

Последнее утверждение леммы является непосредственным следствием указанного выше матричного тождества.

Особо рассмотрим случай, когда

$$P(\nu) = 0 \tag{1.6}$$

для некоторого ν , $\operatorname{Im} \nu > 0$. Тогда $P(\bar{\nu}) = 0$ и, значит, матричный многочлен $P(z)$ делится нацело на $(z - \nu)(z - \bar{\nu})$, так что $P(z) = a_{22}(z - \nu)(z - \bar{\nu})$. Таким образом, умножением на a_{22}^{-1} слева система (1.1) сводится к скалярному уравнению. Из (1.6) видно, что решением матричного уравнения (1.5) служит любая невырожденная матрица b и $J = \nu$.

С эллиптической системой (1.1) тесно связана каноническая система первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{1.7}$$

которая при $J = i$ соответствует системе Коши–Римана. Хорошо известно [1], что решения линейных эллиптических уравнений и систем с постоянными коэффициентами вещественно-аналитичны. В частности, этим свойством обладают решения $\phi(z)$ системы (1.7), так что в окрестности каждой точки $z_0 = x_0 + iy_0$ они раскладываются в обобщенный степенной ряд Тейлора:

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [z - z_0]^k \phi^{(k)}(z_0), \quad \phi^{(k)} = \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k};$$

здесь и ниже принято матричное обозначение $[x + iy] = x + Jy$, $x, y \in \mathbb{R}$. По этой причине вектор-функции $\phi(z)$ называем *J-аналитическими*.

Из (1.5), (1.7) непосредственно следует, что формула

$$u = \operatorname{Re} b\phi \quad (1.8)$$

переводит *J*-аналитические функции ϕ в решения уравнения (1.1). Дифференцируя это равенство и пользуясь (1.7), получим $2u_x = 2 \operatorname{Re} b\phi' = b\phi' + \bar{b}\bar{\phi}'$, $2u_y = 2 \operatorname{Re} bJ\phi' = bJ\phi' + \bar{b}\bar{J}\bar{\phi}'$. Полагая

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ \bar{b}_1 & \bar{c}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \bar{b}\bar{J} \end{pmatrix}^{-1} \quad (1.9)$$

для обратной матрицы в условии (1.4), получим формулу

$$\phi' = 2(b_1 u_x + c_1 u_y), \quad (1.10)$$

обращающую (1.8). В частности, функция ϕ определяется по u однозначно с точностью до постоянного слагаемого и восстанавливается криволинейным интегралом

$$\phi = 2 \int (dx + J dy)(b_1 u_x + c_1 u_y).$$

В многосвязной области она, вообще говоря, многозначна. Нетрудно показать [2], что равенство (1.10) дает *J*-аналитическую функцию для любого решения u уравнения (1.1) и, значит, формула (1.8) описывает общее решение этого уравнения.

Существует простая связь между *J*-аналитическими и обычными аналитическими вектор-функциями. Предположим сначала, что матрица J имеет единственное собственное значение ν , так что матрица $J - \nu$ нильпотентна, т.е. $(J - \nu)^l = 0$. Тогда прямая проверка показывает, что операция

$$(E\psi)(z) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{y^k}{k!} (J - \nu)^k \psi^{(k)}(x + \nu y), \quad z = x + iy, \quad (1.11)$$

переводит аналитическую вектор-функцию ψ комплексной переменной $\zeta = x + \nu y$ в *J*-аналитическую вектор-функцию $\phi = E\psi$. Эта операция обратима, и формула обращения

$$\psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{-\eta}{\operatorname{Im} \nu} \right)^k (J - \nu)^k \phi^{(k)}(\xi + \tilde{\nu}\eta), \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (1.12)$$

где $\tilde{\nu} = (i - \operatorname{Re} \nu) / \operatorname{Im} \nu$, переводит *J*-аналитические функции ϕ в аналитические.

В общем случае согласно лемме 1.1 матрицу J можно подчинить условию

$$J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_m), \quad J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}, \quad \sigma(J_i) = \{\nu_i\}. \quad (1.13)$$

Пусть вектор ψ записывается в аналогичном блочном виде: $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$ с l_i -векторами ψ_i . Тогда ψ_i является J_i -аналитической вектор-функцией и соответствующую операцию E следует задать поблочно равенством

$$(E\psi)_i = E_i \psi_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.14)$$

где E_i определяется формулой (1.11) по отношению к $J = J_i$ и $\nu = \nu_i$.

В комплексных обозначениях производных

$$2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

система (1.7) переходит в систему

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = Q \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad Q = (1 - iJ)^{-1}(1 + iJ).$$

Собственные значения матрицы Q лежат внутри единичного круга $|w| < 1$, поскольку дробно-линейное преобразование $w = (1 + iz)/(1 - iz)$ переводит верхнюю полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ на этот круг. Аналогом (1.11) в этом случае является формула

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\bar{z}^k}{k!} \psi^{(k)}(z + q\bar{z}), \quad \sigma(Q) = \{q\}.$$

Особенно простое выражение получается при $\sigma(J) = \{i\}$, когда $q = 0$ и матрица Q нильпотентна:

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\bar{z}^k}{k!} Q^k \psi^{(k)}(z). \quad (1.15)$$

В этом случае области определения вектор-функций ϕ и ψ совпадают.

Подстановка формулы $\phi = E\psi$ в (1.8) дает известное представление А. В. Битцадзе [3]

$$u = \operatorname{Re} bE\psi \quad (1.16)$$

общего решения эллиптической системы (1.1) через аналитическую вектор-функцию ψ . На этом представлении основывается классический способ исследования краевых задач для уравнения (1.1). Он заключается в их эквивалентной редукции к соответствующим задачам для аналитических функций с последующим применением хорошо развитого аппарата [4] интегралов типа Коши и сингулярных интегральных уравнений.

В общем случае матрицы (1.14) область определения блочных компонент ψ_i в операции E зависит от i , что вместе с наличием производных в этой операции доставляет определенные затруднения в применении указанного метода. В этой связи в работе [5] был развит аналогичный подход, основанный на представлении (1.8) и прямом исследовании соответствующих краевых задач для J -аналитических функций.

Рассмотрим этот подход несколько подробнее. Если аналитическая функция $\psi(\zeta)$ скалярна, то формула (1.11) доставляет $(l \times l)$ -матрицу-функцию, удовлетворяющую уравнению (1.7). При этом ее значения $\psi(z)$ коммутируют с J . При фиксированном $z = x + iy$ правую часть (1.11) можно рассматривать как значение функции ψ , аналитической в окрестности точки $x + \nu y$, от матрицы $[z] = x + Jy$, имеющей своим единственным собственным значением эту точку. В самом деле, по определению [6] имеем

$$\psi([z]) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\psi^{(k)}(x + \nu y)}{k!} ([z] - x - \nu y)^k,$$

что совпадает с правой частью (1.11). Таким образом,

$$\psi([z]) = (E\psi)(z). \quad (1.17)$$

Если матрица J произвольна и для заданной области $D \subseteq \mathbb{C}$ скалярная функция ψ аналитична в каждой области $\{x + \nu y, x + iy \in D, \nu \in \sigma(J)\}$, то матрица-функция $\psi([z])$ по-прежнему удовлетворяет уравнению (1.7) в области D .

В самом деле, пусть z меняется в малой окрестности D_0 точки $z_0 \in D$ и контур Γ охватывает точки $x + \nu y$, где $\nu \in \sigma(J)$, $z \in D_0$. Тогда значение $\psi([z])$ можем записать с помощью интеграла [6]:

$$\psi([z]) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\zeta - [z])^{-1} \psi(\zeta) d\zeta.$$

Остается заметить, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \psi([z]) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} J(\zeta - [z])^{-2} \psi(\zeta) d\zeta = J \frac{\partial}{\partial x} \psi([z]).$$

В качестве примера J -аналитических матриц-функций этого типа отметим

$$[t - z]^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad [z]^{\zeta}, \quad \ln^j [z], \quad j = 0, 1, \dots, \quad (1.18)$$

им отвечают соответственно скалярные функции $\psi = (t - z)^{-1}$, z^{ζ} , $\ln^j z$. В частности, для любой суммируемой на кусочно гладкой ориентируемой кривой Γ вектор-функции φ интеграл типа Коши

$$(I_{\Gamma, J} \varphi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} [t - z]^{-1} [dt] \varphi(t) \quad (1.19)$$

дает вектор-функцию, J -аналитическую вне Γ . Присутствие матричного дифференциала $[dt] = dt_1 + J dt_2$ под знаком интеграла вызвано соображениями удобства в связи с теоремой Коши:

$$\int_{\partial D} [dt] \phi^+(t) = 0.$$

Это равенство справедливо для конечной области $D \subseteq \mathbb{C}$, ограниченной кусочно гладким контуром $\Gamma = \partial D$ и J -аналитической в D функцией $\phi \in C(\overline{D})$. Контур Γ предполагается ориентированным положительно по отношению к области D , т. е. оставляет ее слева. Указанное равенство является непосредственным следствием формулы Грина, примененной к уравнению (1.7).

Из теоремы Коши обычным образом выводится формула Коши:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} [t - z]^{-1} [dt] \phi^+(t), \quad z \in D.$$

Более точно, с помощью теоремы Коши она сводится к случаю постоянной функции ϕ , или, что равносильно, к матричному равенству

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-t|=\varepsilon} [t - z]^{-1} [dt] = 1.$$

В свою очередь, оно получается подстановкой в равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon} (t_1 + \nu t_2)^{-1} (dt_1 + \nu dt_2) = 1$$

вместо скаляра ν , $\operatorname{Im} \nu > 0$, матрицы J (в смысле значения функций от матрицы). Этот прием уже использовался выше при обосновании (1.17).

Наряду с (1.19) рассмотрим сингулярный интеграл

$$(I_{\Gamma, J}^* \varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} [t - t_0]^{-1} [dt] \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \quad (1.20)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши как предел интегралов по $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap \{|t - t_0| \geq \varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Он, очевидно, существует, если в окрестности точки t_0 кривая Γ гладкая, а функция φ удовлетворяет в этой точке условию Гёльдера. Далее запись, обозначающую зависимость интегралов (1.19) и (1.20) от Γ или J , опускаем во всех случаях, когда это не вызывает путаницы.

Для интегралов типа Коши справедливы те же граничные свойства [7], [8], что и в классическом случае $J = i$. В частности, если $I\varphi$ рассматривается в конечной области D , ограниченной гладким контуром Γ , и функция φ непрерывна по Гёльдеру на Γ , то функция $I\varphi$ непрерывно продолжима на Γ и для ее предельных значений $(I\varphi)^+$ справедлива формула Сохоцкого–Племеля

$$(I\varphi)^+ = \varphi + I^* \varphi. \quad (1.21)$$

Здесь, как и в формуле Коши, предполагается, что контур Γ ориентирован положительно по отношению к D , т.е. оставляет эту область слева.

С помощью интегралов (1.19), (1.20) все основные элементы классической теории краевых задач для аналитических функций [4] могут быть распространены на J -аналитические функции. Это обобщение лежит в основе развиваемого в [5] подхода.

§ 2. Преобразование Бицадзе в верхней полуплоскости

Отмеченное выше затруднение в использовании представления Бицадзе (1.17) отсутствует в случае, когда функции рассматриваются в полуплоскости $D = \{y > 0\}$. В этом случае фигурирующие в (1.11), (1.12) аффинные преобразования переводят эту полуплоскость на себя и оставляют ее граничные точки $x \in \mathbb{R}$ неподвижными. Кроме того, в силу (1.17), (1.18) интегралы типа Коши (1.19) для $\Gamma = \mathbb{R}$, отвечающие случаям J и i , связаны между собой преобразованием E :

$$I_{\mathbb{R}, J} \varphi = E(I_{\mathbb{R}, i} \varphi). \quad (2.1)$$

Рассмотрим действие преобразования E в весовых пространствах Гёльдера. Напомним сначала соответствующие определения [9]. Обозначим через $C^\mu(G)$ совокупность всех заданных на множестве $G \subseteq \mathbb{C}$ функций φ , для которых конечна норма

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + \{\varphi\}_\mu = \sup_{z \in G} |\varphi(z)| + \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}. \quad (2.2)$$

Относительно данной нормы пространство C^μ банахово. Его элементы продолжаются по непрерывности с G на замыкании $\bar{G}$ с сохранением C^μ -нормы. По этой причине множество G всегда можно предполагать замкнутым. В силу очевидного неравенства $\{\varphi\psi\}_\mu \leq |\varphi|_0\{\psi\}_\mu + |\psi|_0\{\varphi\}_\mu$ пространство C^μ является банаховой алгеброй по умножению. Ясно также, что C^μ -норма (2.2) инвариантна относительно операторов переноса $\varphi(z) \rightarrow \varphi(z+a)$, $a \in \mathbb{C}$.

Отмеченное выше граничное свойство интегралов типа Коши (1.19) в рассматриваемых пространствах может быть сформулировано следующим образом [7].

ЛЕММА 2.1. Пусть конечная область $D_0 \subseteq \mathbb{C}$ лежит справа от ориентированной гладкой дуги Γ и граничит с ней по некоторой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, причем Γ_0 и Γ не имеют общих концов. Тогда оператор $I_{\Gamma, J}$ ограничен $C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^\mu(\bar{D}_0)$ и имеет место формула Соболева–Племеля (1.21).

Расширим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ до сферы Римана $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, считая окрестностями ∞ внешность кругов. Вообще, удобно под $B(\tau, \delta)$, где $\tau \in \bar{\mathbb{C}}$ и $\delta > 0$, понимать круг с центром τ и радиусом δ при $\tau \in \mathbb{C}$ и внешность круга $B(0, 1/\delta)$ при $\tau = \infty$.

Пусть задано конечное (возможно, пустое) множество $F_0 \subseteq \mathbb{C}$, и пусть $F = F_0 \cup \{\infty\}$. Семейство вещественных чисел $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ называем *весовым порядком*. Операции сложения, умножения и отношения порядка над ними понимаются покомпонентно. Весовые порядки, все компоненты которых совпадают, отождествляем с вещественными числами. Кроме того, зафиксируем специальный весовой порядок

$$\sigma_\tau = \begin{cases} 1, & \tau \in F_0, \\ -1, & \tau = \infty. \end{cases} \quad (2.3)$$

Условимся под весовой функцией $\rho_\lambda(z)$ порядка λ понимать гладкую на $\mathbb{C} \setminus F$ функцию, которая всюду отлична от нуля и в окрестности точек $\tau \in F_0$ совпадает с функцией $|z - \tau|^{\lambda_\tau}$, а в окрестности $\tau = \infty$ – с функцией $|z|^{-\lambda_\tau}$. По определению весовое банахово пространство $C^\mu_\lambda(G; F)$ состоит из всех функций $\varphi(z)$ на $G \setminus F$, для которых конечна норма

$$|\varphi| = |\rho_{-\lambda}\varphi|_0 + \{\rho_{\sigma_\mu - \lambda}\varphi\}_\mu. \quad (2.4)$$

Очевидно, с точностью до эквивалентности норма (2.4) не зависит от тех точек $\tau \in F$, которые изолированы от G . По этой причине в дальнейшем предлагаем, что все точки $\tau \in F$ являются предельными для $G \setminus F$. Из сравнения (2.4) с (2.2), (2.3) видно, что пространство $C^\mu_{\sigma_\mu}$ состоит из всех функций φ на $G \setminus F$, для которых конечна полунорма $\{\varphi\}_\mu$ и которые обращаются в нуль в точках $\tau \in F_0$.

С помощью локализации определение пространства C^μ_λ всегда можно свести к случаю одноточечного множества F . С этой целью выберем $\delta > 0$ столь малым, что окрестности $B(\tau, \delta)$, $\tau \in F$, попарно не пересекаются. Тогда, полагая $G_\tau = G \cap B(\tau, \delta)$ и обозначая через G_* дополнение в G к объединению окрестностей $B(\tau, \delta/2)$, $\tau \in F$, пространство $C^\mu_\lambda(G; F)$ можем описать условиями

$$\varphi \in C^\mu_{\lambda_\tau}(G_\tau; \tau), \quad \tau \in F; \quad \varphi \in C^\mu(G_*). \quad (2.5)$$

При $\lambda > 0$ функции $\varphi \in C_\lambda^\mu$ продолжаются по непрерывности нулем на F . Удобно наряду с пространством C_λ рассматривать и его конечномерное расширение $C_{(\lambda)}$, заменяя в первом условии (2.5) при $\lambda_\tau > 0$ функцию $\varphi(z)$ на $\varphi(z) - \varphi(\tau)$. Пространство $C_{(\lambda)}^\mu(G; F)$ рассматриваем при $\lambda < 1$; в случае $\lambda \leq 0$ оно совпадает с C_λ^μ .

В случае $F \subseteq \{0, \infty\}$, к которому всегда можно прийти с помощью переноса и локализации (2.5), согласно (2.3) в качестве весовой функции $\rho_{\sigma\mu}(z)$ можем взять $|z|^\mu$. В частности, при $\lambda = 0$ норма (2.4) переходит в норму

$$|\varphi|_{C_0^\mu} = |\varphi|_0 + \{|z|^\mu \varphi\}_\mu, \quad F \subseteq \{0, \infty\}. \quad (2.6)$$

Очевидно, данная норма инвариантна относительно операторов растяжений $\varphi(z) \rightarrow \varphi(qz)$. На этом факте основан другой полезный вариант нормы этого пространства. Зафиксируем положительные числа $0 < 2r_1 < r_2$, так что $\mathbb{C} \setminus 0$ покрывается кольцами $2^i r_1 < |z| < 2^i r_2$, $i = 0, \pm 1, \dots$. Соответственно этому с каждой функцией φ на $2^i r_1 < |z| < 2^i r_2$, $i = 0, \pm 1, \dots$, можем связать последовательность функций

$$\varphi_i(z) = \varphi(2^i z), \quad G_i = \{r_1 < |z| < r_2, 2^i z \in G\}. \quad (2.7)$$

Заметим, что при $G \subseteq B(0, \delta)$ и $G \subseteq B(\infty, \delta)$ множества G_i пусты при соответственно $i \geq n$ и $i \leq -n$ для некоторого натурального n . Ясно также, что φ непрерывна на $G \setminus 0$ тогда и только тогда, когда все φ_i непрерывны на G_i . Нетрудно теперь убедиться в том, что в обозначениях (2.7) норма (2.6) эквивалентна норме

$$|\varphi| = \sup_{i=0, \pm 1, \dots} |\varphi_i|_{C^\mu(G_i)}, \quad (2.8)$$

где C^μ -норма функции φ_i на пустом множестве G_i считается равной нулю. Из этого факта, в частности, следует, что оператор инверсии $\varphi(z) \rightarrow \varphi(1/\bar{z})$ обратим: $C_0^\mu(G) \rightarrow C_0^\mu(G')$, $G' = \{z \mid 1/\bar{z} \in G\}$, и что пространство C_0^μ является банаховой алгеброй по умножению.

В силу локализации (2.5) последнее свойство справедливо и в общем случае произвольного множества F . Из этих же соображений семейство банаховых пространств C_λ^μ монотонно убывает (в смысле вложения) по каждому из параметров μ и λ_τ , $\tau \in F$. В частности, можем ввести классы

$$C_{\lambda+0}^\mu = \bigcup_{\varepsilon>0} C_{\lambda+\varepsilon}^\mu, \quad C_{\lambda+0}^{\mu+0} = \bigcup_{\varepsilon>0} C_{\lambda+\varepsilon}^{\mu+\varepsilon}, \quad C_{\lambda-0}^\mu = \bigcap_{\varepsilon>0} C_{\lambda-\varepsilon}^\mu.$$

В дальнейшем G – это либо кусочно гладкие кривые, либо области с кусочно гладкой границей. Напомним, что кусочно гладкая кривая $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ представляет собой объединение конечного числа гладких дуг, которые попарно пересекаются лишь по своим концам. Это определение сохраняет свою силу и для кривых на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, нужно лишь под гладкой дугой Γ с концами $\tau \in \mathbb{C}$ и $\tau_0 = \infty$ понимать образ гладкой дуги $\Gamma' \subseteq \mathbb{C}$ с концами τ'_1 и $\tau'_0 = 0$ при инверсии $z \rightarrow z' = 1/\bar{z}$.

Аналогом леммы 2.1 для весовых пространств служит следующее предложение.

ЛЕММА 2.2. Пусть область D ограничена кусочно гладким контуром Γ и множество $F \subseteq \Gamma$ содержит все его угловые точки (включая точку $\tau = \infty$, если кривая Γ неограничена). Тогда оператор типа Коши $I_{\Gamma, J}$ ограничен: $C_\lambda^\mu(\Gamma; F) \rightarrow C_\lambda^\mu(D; F)$ при $-1 < \sigma\lambda < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью локализации (2.5) и леммы 2.1 получаем случай, когда Γ является гладкой дугой с концами 0 и ∞ , множество F состоит из ее концов и $\lambda_0 = -\lambda_\infty$. В этом случае можем положить $\rho_\lambda(z) = |z|^{\lambda_0}$, так что остается установить ограниченность оператора из $C_0^\mu(\Gamma)$ в $C_0^\mu(D)$, определяемого весовым интегралом

$$\phi(z) = \int_\Gamma |z|^{\lambda_0} |t|^{-\lambda_0} [t - z]^{-1} [dt] \varphi(t).$$

Очевидно, достаточно это осуществить по отношению к окрестностям $D_\tau = D \cap B(\tau, \delta)$ точек $\tau = 0$ и $\tau = \infty$. Применительно к D_0 лемма с помощью нормы (2.8) установлена в работе [7], случай D_∞ рассматривается аналогично.

В условиях леммы 2.2 для J -аналитических в D функций $\phi \in C_\lambda^\mu(D; F)$ обычным образом обосновывается теорема Коши:

$$\int_{\partial D} [dt] \phi^+(t) = 0, \quad \lambda|_{F_0} > -1, \quad \lambda_\infty > 1, \quad (2.9)$$

и формула Коши:

$$2\phi = I\phi^+, \quad \lambda|_{F_0} > -1, \quad \lambda_\infty > 0, \quad (2.10)$$

где контур Γ ориентирован положительно по отношению к D . В частности, совместно с леммой 2.2 отсюда следует оценка

$$|\phi|_{C_\lambda^\mu(D)} \leq A |\phi^+|_{C_\lambda^\mu(\Gamma)}, \quad (2.11)$$

где постоянная $A > 0$ не зависит от ϕ .

В самом деле, при $-1 < \sigma\lambda < 0$ она является следствием (2.10) и леммы 2.2, а в общем случае нужно воспользоваться весовой подстановкой. Более точно, по аналогии с $\rho_\nu(z)$ введем весовую J -аналитическую матрицу-функцию $\rho_{\nu, J}$ порядка ν , полагая

$$\rho_{\nu, J}(z) = \prod_{\tau \in F_0} [z - \tau]^{\nu_\tau} [z - \tau_*]^{\nu_*}, \quad z \in D, \quad (2.12)$$

где $\tau_* \in \overline{C} \setminus \overline{D}$ и $\nu_* = -\nu_\infty - \sum_{F_0} \nu_\tau$.

Тогда достаточно для произвольного λ подобрать весовой порядок ν так, чтобы $-1 < \sigma(\lambda - \nu) < 0$, и к функции $\rho_{\lambda, \nu}^{-1} \phi$ применить оценку (2.11).

Рассмотрим оператор дифференцирования $\varphi \rightarrow \varphi'$, где φ' означает вектор-градиент (φ_x, φ_y) в случае области и производную по параметру длины дуги в случае кривой. С помощью этого оператора индуктивно можем ввести пространства $C^{n, \mu}$, $C_\lambda^{n, \mu}$ и $C_{(\lambda)}^{n, \mu}$, $\lambda < n+1$, дифференцируемых функций условиями

$$\begin{aligned} C^{n, \mu} : \quad & \varphi, \varphi' \in C^{n-1, \mu}, \\ C_\lambda^{n, \mu} : \quad & \varphi \in C_\lambda^{n-1, \mu}, \quad \varphi' \in C_{\lambda-\sigma}^{n-1, \mu}, \\ C_{(\lambda)}^{n, \mu} : \quad & \varphi, \varphi' \in C_{(\lambda-\sigma)}^{n-1, \mu}, \quad \lambda < n+1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где при $n = 0$ обозначение $C^{0,\mu}$ следует отождествить с C^μ . В случае, когда все компоненты λ_τ не целые, определение (2.13) пространства $C_{(\lambda)}^{n,\mu}$ можно понимать по отношению только к производной φ' функции φ .

ЛЕММА 2.3. Пусть G является кусочно гладкой кривой Γ либо областью D , ограниченной кусочно гладким контуром, а множество $F \subseteq \Gamma$ содержит все угловые точки Γ (включая $\tau = \infty$ в случае неограниченной кривой). Тогда имеет место равенство

$$\{\varphi \mid \varphi' \in C_{\lambda-1}^\mu\} = C_{(\lambda)}^{1,\mu}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь локализацией (2.5), не ограничивая общности, можно считать, что $F = \{\tau\}$ является либо гладкой дугой с концом τ , либо криволинейным сектором с гладкими боковыми сторонами и вершиной τ . Переходя к инверсии $\varphi(z) \rightarrow \varphi(1/\bar{z})$, можно также свести рассмотрение к одному случаю $\tau = 0$. Таким образом, пусть $\varphi' \in C_{\lambda-1}^\mu(G; 0)$, $0 < \lambda < 1$. В этом случае непосредственным интегрированием убеждаемся, что $\varphi(z) = C + O(1)|z|^\lambda$ при $z \rightarrow 0$ с точностью до постоянного слагаемого C . Очевидно, можно считать $C = 0$. Тогда функция $\psi(z) = |z|^{1-\lambda}\varphi(z)$ и ее производная ψ' ограничены на G , так что $\psi \in C_1^{0,1}(G; 0)$. Следовательно, $\varphi \in C_\lambda^{0,1}(G; 0) \subseteq C_\lambda^\mu(G; 0)$, и по определению (2.13) совместно с $\varphi' \in C_{\lambda-1}^\mu$ отсюда имеем $\varphi \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}$.

Рассмотрим теперь преобразование Бицадзе в верхней полуплоскости D .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть D – верхняя полуплоскость и $F_0 \subseteq \mathbb{R}$. Тогда оператор E осуществляет изоморфизм банахового пространства $C_\lambda^\mu(D, F)$ аналитических функций на аналогичное пространство J -аналитических функций, причем $(E\psi)^+ = \psi^+$. В частности, при $0 < \lambda < 1$ преобразование Бицадзе устанавливает изоморфизм между подпространством $\{u \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}(D; F), u(\infty) = 0\}$ решений уравнения (1.1) и аналогичным подпространством аналитических l -вектор-функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом (1.8), (1.10) и леммы 2.3 второе утверждение теоремы непосредственно следует из первого. Доказательство первой части теоремы разобьем на несколько этапов.

1. Пусть конечная область $G \subseteq D$ с кусочно гладкой границей Γ такова, что $\Gamma^0 = \mathbb{R} \cap \Gamma$ состоит из конечного числа интервалов, так что за исключением концов этих интервалов кривая $\Gamma^1 = \Gamma \setminus \Gamma^0$ целиком содержится в полуплоскости D . Пусть подобласть $G^0 \subseteq G$ такова, что $\overline{G^0} \cap \Gamma^1 = \emptyset$. Тогда оператор E ограничен: $C^\mu(G) \rightarrow C^\mu(G^0)$.

В самом деле, пусть функция $\psi \in C^\mu(G)$ аналитична в G , так что по формуле Коши имеем

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\psi^+(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^1} \frac{\psi^+(t) dt}{t-z} = \psi^0(z) + \psi^1(z), \quad z \in G^0.$$

Поскольку $\overline{G^0} \cap \Gamma^1 = \emptyset$, то функция ψ^1 и все ее производные оцениваются через суп-норму ψ^+ на Γ^1 . В частности,

$$|E\psi^1|_{C_\lambda^\mu(G^0)} \leq C|\psi^+|_{C(\Gamma^1)}.$$

Для ψ^0 в силу (2.1) имеем

$$(E\psi^0)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} [t - z]^{-1} \psi^+(t) dt.$$

Поэтому на основании леммы 2.1 получаем

$$|E\psi^0|_{C^\mu(G^0)} \leq C|\psi^+|_{C^\mu(\Gamma^0)}.$$

Совместно с предыдущей оценкой отсюда следует ограниченность оператора $C^\mu(G) \rightarrow C^\mu(G^0)$.

2. Пусть G представляет собой полукруг $D \cap \{|z - \tau| < \delta\}$ с центром $\tau \in \mathbb{R}$ и G^0 определяется аналогично с заменой δ на δ^0 . Тогда оператор E ограничен: $C^\mu_\lambda(G; \tau) \rightarrow C^\mu_\lambda(G^0; \tau)$.

В самом деле, без ограничения общности можно считать $\tau = 0$. Пусть $0 < 2r_1 < r_2$. С функцией φ на $G \setminus 0$ по правилу (2.7) свяжем последовательность функций $\varphi_i(z)$, где i принимает значения из множества целых чисел, не превосходящих некоторого натурального числа n . Поскольку $(|z|^{-\lambda}\varphi)_i = 2^{-i\lambda}|z|^{-\lambda}\varphi_i(z)$, то в соответствии с (2.8) пространство $C^\mu_\lambda(G; 0)$ можем задать нормой

$$|\varphi| = \sup_{i \leq n} 2^{-i\lambda} |\varphi_i|_{C^\mu(G_i)}. \quad (2.14)$$

Аналогично поступим по отношению к полукругу G^0 , исходя из условия $0 < 2r_1^0 < r_2^0$ и последовательности $\varphi_i^0(z) = \varphi(2^i z)$, $z \in G_i^0$. Тогда пространство $C^\mu_\lambda(G^0; 0)$ можно задать нормой (2.14), где φ_i и G_i следует снабдить сверху нулем. Выбор r_1^0 и r_2^0 подчиним дополнительному условию $r_1 < r_1^0 < r_2^0 < r_2$. Тогда при каждом i области G_i и G_i^0 удовлетворяют требованиям предложения из п. 1. В силу определений (1.11) и (1.14) операторы $E^{\pm 1}$ коммутируют с растяжениями $\psi(t) \rightarrow (\psi \circ q)(z) = \psi(qz)$, $q > 0$. Другими словами, $(E^{\pm 1}\psi) \circ q = E^{\pm 1}(\psi \circ q)$. Следовательно, в принятых выше обозначениях $(E\psi)_i^0 = E\psi_i$. Очевидно, все множества G_i , за исключением, быть может, одного, не зависят от i . Поэтому на основании (2.13) и предложения из п. 1, примененного к G_i и G_i^0 , приходим к справедливости рассматриваемого предложения.

3. Пусть G представляет собой область $D \cap \{|z| > \delta^{-1}\}$ и G^0 имеет аналогичный смысл по отношению к $\delta^0 < \delta$. Тогда операторы $E^{\pm 1}$ ограничены: $C^\mu_\lambda(G; \infty) \rightarrow C^\mu_\lambda(G^0; \infty)$.

Доказательство аналогично доказательству предложения из п. 2.

4. (Общий случай.) Пусть норма пространства $C^\mu_\lambda(D; F)$ определяется условиями (2.5). Тогда в силу предложения из п. 1 оператор E ограничен из C^μ_λ в $C^\mu(D_*)$, а на основании предложений из п. 2 и п. 3 этот оператор ограничен из C^μ_λ в $C^\mu_{\lambda\tau}(D_\tau; \tau)$.

Следовательно, оператор E ограничен в $C^\mu_\lambda(D; F)$. Поскольку предыдущие рассуждения в равной мере применимы и к E^{-1} , оператор E в действительности обратим.

Заметим, что при $-1 < \sigma\lambda < 0$ утверждение теоремы относительно E непосредственно следует из равенства (2.1), леммы 2.2 и формулы Коши (2.10).

§ 3. Краевые задачи

Для уравнения (1.1) в полуплоскости D рассмотрим краевую задачу

$$(pu_x + qu_y + p_0u)|_{\mathbb{R}} = g. \quad (3.1)$$

Решение u находим в классе $C_{(\lambda)}^{1,\mu}(D; F)$, $0 < \lambda < 1$. В соответствии с этим правая часть g выбирается из класса $C_{\lambda-\sigma}^{\mu}(D; F)$, а $(l \times l)$ -матричные коэффициенты p, q и p_0 предполагаются кусочно непрерывными на $\mathbb{R}$ с возможными разрывами в точках $\tau \in F$. Более точно, существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$p, q \in C_{(\varepsilon)}^{\mu+\varepsilon}(G; a, b), \quad p_0 \in C_{\varepsilon-\sigma}^{\mu+\varepsilon}(G; a, b) \quad (3.2)$$

для любого интервала $G = (a, b)$, на которые разбивается дополнение $\mathbb{R} \setminus F_0$.

В силу теоремы 2.1 задача (1.1), (3.1) в классе $\{u \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}, u(\infty) = 0\}$, $0 < \lambda < 1$, равносильна отысканию в этом классе аналитических вектор-функций $\psi(z)$ по краевому условию

$$\operatorname{Re}(G\psi' + G_0\psi)|_{\mathbb{R}} = g \quad (3.3)$$

с матричными коэффициентами $G = pb + qbJ$, $G_0 = p_0b$. Связь между решениями этих задач осуществляется формулой Бицадзе (1.16). В частности, задачу, для которой

$$\det G(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus F, \quad \det G(\tau \pm 0) \neq 0, \quad \tau \in F, \quad (3.4)$$

естественно отнести к нормальному типу. Здесь и ниже под $G(\tau \pm 0)$ для $\tau = \infty$ понимается предельное значение $G(\mp\infty)$. При выполнении этого условия можем ввести приращение

$$\arg(\det G)|_{\mathbb{R}} = \sum_{\tau \in F} \{(\arg \det G)(\tau - 0) - (\arg \det G)(\tau + 0)\} \quad (3.5)$$

непрерывной вне F_0 ветви $\arg \det G$, которое не зависит от выбора этой ветви, и семейство обратимых матриц

$$Q_{\tau} = (G\overline{G}^{-1})(\tau + 0)(\overline{G}G^{-1})(\tau - 0). \quad (3.6)$$

Заметим, что матрица Q_{τ} подобна $\overline{Q}_{\tau}^{-1}$, поэтому ее собственные значения $w \in \sigma(Q_{\tau})$ лежат на единичной окружности.

С каждой обратимой матрицей $Q \in \mathbb{C}^{l \times l}$ этого типа свяжем кусочно постоянную на $\mathbb{R}$ функцию

$$\chi(\delta, Q) = \sum_{w \in \sigma(Q)} l_w \left\{ \left[\delta - \frac{\arg w}{2\pi} \right] + \frac{\arg w}{2\pi} \right\}, \quad (3.7)$$

где l_w – кратность собственного значения $w \in \sigma(Q)$ и $[\cdot]$ означает целую часть числа. Очевидно, это определение не зависит от выбора $\arg w$. Функция χ имеет разрывы в точках δ , для которых $e^{2\pi i \delta} \in \sigma(Q_{\tau})$, причем $\chi(\delta+1) = \chi(\delta) + l$.

ТЕОРЕМА 3.1. Задача (1.1), (3.1) фредгольмова в классе $C_{(\lambda)}^{1,\mu}(D; F)$, $0 < \lambda < 1$, тогда и только тогда, когда она принадлежит к нормальному типу и

$$e^{2\pi i \lambda \tau} \notin \sigma(Q_\tau), \quad \tau \in F. \quad (3.8)$$

При выполнении этого условия ее индекс задается формулой

$$\mathfrak{x} = -\frac{1}{\pi} \arg \det G|_{\mathbb{R}} - \sum_{\tau \in F} \chi(\lambda_\tau, Q_\tau). \quad (3.9)$$

Из определения (3.7) видно, что величина $\chi(\delta, Q)$ с точностью до целочисленного слагаемого совпадает с $(2\pi)^{-1} \arg \det Q$. Поэтому с учетом (3.5), (3.6) правая часть (3.9) является целым числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно провести в классе $u \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}$, $u(\infty) = 0$, добавив к правой части (3.9) слагаемое $-l$ (при сужении класса на l измерений индекс уменьшается на это же число). В силу эквивалентности задач (1.1), (3.1) и (3.3) в этом классе утверждение достаточно установить для задачи (3.3).

Оператор дифференцирования $\psi \rightarrow \psi'$ обратим: $\{\psi \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}, \psi(\infty) = 0\} \rightarrow C_{\lambda-\sigma}^\mu$. Для $\psi_1 \in C_{\lambda-\sigma}^\mu$ положим $T\psi_1 = \operatorname{Re} G_0 \psi^+$, где $\psi' = \psi_1$. В силу (3.2) этот оператор ограничен: $C_{\lambda-\sigma}^\mu(D; F) \rightarrow C_{\lambda-\sigma+\varepsilon}^{\mu+\varepsilon}(\mathbb{R}; F)$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Поскольку вложение $C_{\nu+\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} \subseteq C_\nu^\mu$ компактно, оператор T компактен $C_{\lambda-\sigma}^\mu(D; F) \rightarrow C_{\lambda-\sigma}^\mu(\mathbb{R}; F)$. Поэтому задача (3.3) в классе $\psi \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}$, $\psi(\infty) = 0$ фредгольмово эквивалентна задаче

$$\operatorname{Re} G\phi_1 = g_1 \quad (3.10)$$

в классе $C_{\lambda-\sigma}^\mu$ и их индексы совпадают.

В свою очередь, с помощью подстановки

$$\tilde{\psi}_1(\tilde{z}) = \psi_1(z), \quad \tilde{z} = \frac{z-i}{z+i},$$

задача (3.10) редуцируется к аналогичной задаче

$$\operatorname{Re} \tilde{G}\tilde{\psi}_1 = \tilde{g}_1 \quad (3.10')$$

в единичном круге $\tilde{D} = \{|\tilde{z}| < 1\}$. При этой подстановке пространство $C_{\lambda-\sigma}^\mu(D; F)$ переходит в $C_{\lambda-\sigma}^\mu(\tilde{D}; \tilde{F})$, причем $\tau = \infty$ соответствует точка $\tilde{\tau} = 1$ единичной окружности.

Теорема 3 из [9], установленная для скалярного случая, сохраняет свою силу и для задачи (3.10') с матричным коэффициентом $\tilde{G}$ (с тем же доказательством). Поэтому условия (3.4), (3.8) составляют критерий ее фредгольмовости. Соответственно, формула индекса задачи (3.10') в классе $C_{\lambda-\sigma}^\mu$ в принятых обозначениях принимает следующий вид:

$$\tilde{\mathfrak{x}} = l - \frac{1}{\pi} \arg \det \tilde{G}|_{\tilde{\Gamma}} - \sum_{\tau \in F} \chi(\lambda_\tau - \sigma_\tau, Q_\tau) - ml,$$

где m – число точек множества F и $\tilde{\Gamma}$ – единичная окружность. С учетом (2.3) и соотношения $\chi(\delta+1) = \chi(\delta) + l$ это равенство можем переписать в форме $\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - l$, где $\mathfrak{x}$ определяется правой частью (3.9). Тем самым утверждения теоремы полностью установлены.

Как и в [9], теорему 3.1 дополним соответствующим результатом об асимптотике решений задачи в точках $\tau \in F$. Пусть $C_{\lambda+0}^\mu$ ($C_{\lambda-0}^\mu$) – объединение (пересечение) классов $C_{\lambda+\varepsilon}^\mu$ ($C_{\lambda-\varepsilon}^\mu$) по $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены условия (3.2), (3.4) и $u \in C_{(\lambda-0)}^{1,\mu}$, $0 \leq \lambda < 1$, есть решение задачи (1.1), (3.1) с правой частью $g \in C_{\lambda-\sigma+0}^\mu$. Тогда при $e^{2\pi i\lambda_\tau} \notin \sigma(Q_\tau)$ в обозначениях (2.9) выполнено $u \in C_{(\lambda_\tau+0)}^{1,\mu}(D_\tau; \tau)$. Пусть, далее, $e^{2\pi i\lambda_\tau}$ – собственное значение матрицы Q_τ порядка r . Тогда справедливы разложения

$$\begin{aligned} u(z) - u(\tau) &= \operatorname{Re} \left\{ b[z - \tau]^{\lambda_\tau} \sum_{j=0}^{r-1} (\ln^j[z - \tau]) \eta_{\tau,j} \right\} + u^0(z), \quad \tau \neq \infty, \\ u(z) - u(\tau) &= \operatorname{Re} \left\{ b[z]^{-\lambda_\tau} \sum_{j=0}^{r-1} (\ln^j[z]) \eta_{\tau,j} \right\} + u^0(z), \quad \tau = \infty, \end{aligned} \quad (3.11)$$

с некоторыми $\eta_{\tau,j} \in \mathbb{C}^l$ и $u^0 \in C_{\lambda_\tau+0}^{1,\mu}(D_\tau; \tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u \in C_{(\lambda-0)}^{1,\mu}$, то и $\psi' \in C_{\lambda-\sigma-0}^\mu$. С учетом (3.2) в обозначениях доказательства теоремы 3.1 отсюда имеем $T\psi_1 = \operatorname{Re} G_0\psi \in C_{\lambda-\sigma+0}^\mu$. Следовательно, функция $\psi_1 = \psi'$ является решением задачи (3.10) с правой частью $g_1 \in C_{\lambda-\sigma+0}^\mu$, и аналогичным свойством обладает решение $\tilde{\psi}_1$ задачи (3.10').

Теорема 4 из [9] сохраняет свою силу и в рассматриваемом матричном случае (с тем же доказательством). В результате для решения $\tilde{\psi}_1$ этой задачи в окрестности граничной точки $\tilde{\tau} \in F$ круга $\tilde{D}$ можем выписать соответствующие асимптотические разложения. Для $\psi_1 = \psi'$ они переходят в разложения

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= (z - \tau)^{\lambda_\tau - 1} \sum_{j=0}^{r-1} (\ln^j(z - \tau)) \xi_j + \psi^0(z), \quad \tau \neq \infty, \\ \psi'(z) &= z^{-\lambda_\tau - 1} \sum_{j=0}^{r-1} (\ln^j z) \xi_j + \psi_1^0(z), \quad \tau = \infty, \end{aligned}$$

с некоторыми $\xi_j \in \mathbb{C}^l$ и $\psi^0 \in C_{\lambda-\sigma+0}^\mu(D_\tau; \tau)$. Интегрируя эти равенства, получим

$$\begin{aligned} \psi(z) - \psi(\tau) &= (z - \tau)^{\lambda_\tau} \sum_{j=0}^{r-1} (\ln^j(z - \tau)) \eta_j + \psi^0(z), \quad \tau \neq \infty, \\ \psi(z) - \psi(\tau) &= z^{-\lambda_\tau} \sum_{j=0}^{r-1} (\ln^j z) \eta_j + \psi_1^0(z), \quad \tau = \infty, \end{aligned}$$

с некоторыми $\eta_j \in \mathbb{C}$ и $\psi^0 \in C_{\lambda_\tau+0}^{1,\mu}(D_\tau; \tau)$.

Для $\phi = E\psi$ в соответствии с (1.17), (1.18) справедливы аналогичные соотношения для $[z - \tau]$. Применительно к $u = \operatorname{Re} b\phi$ они приводят к (3.11).

Утверждения теорем 3.1, 3.2 особенно упрощаются для непрерывных на $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ функций p, q . В этом случае $G(\tau + 0) = G(\tau - 0)$, $\tau \in F$, так что

все матрицы (3.6) единичны. В частности, формула индекса (3.9) переходит в формулу

$$\mathfrak{a} = -\frac{1}{\pi} \arg \det G|_{\mathbb{R}}. \quad (3.12)$$

§ 4. Задачи Дирихле и Неймана

Рассмотрим случай, когда коэффициенты p, q в (3.1) постоянны, а $p_0 = 0$, т. е. задачу

$$(pu_x + qu_y)|_{\mathbb{R}} = g, \quad p, q \in \mathbb{R}^{l \times l}. \quad (4.1)$$

В этом случае $G = pb + qbJ \in \mathbb{C}^{l \times l}$ и утверждения теоремы 3.1 можно существенно дополнить.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если $\det G = 0$, то однородная задача (1.1), (4.1) в классе $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$, $0 < \lambda < 1$, имеет бесконечное число линейно независимых решений. Например, если $G\eta = 0$ для некоторого ненулевого $\eta \in \mathbb{C}^l$, то решениями однородной задачи являются функции $u = \operatorname{Re} b(E\psi_0)\eta$ для любой скалярной аналитической функции $\psi_0 \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}$. Если $\det G \neq 0$, то условие*

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) dt = 0 \quad (4.2)$$

необходимо и достаточно для разрешимости неоднородной задачи в классе $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$, $0 < \lambda < 1$. При дополнительном предположении $u(\infty) = 0$ ее решение единственно и задается формулой

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} b[t - z]^{-1} G^{-1} f(t) dt, \quad f(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt. \quad (4.3)$$

Заметим, что в силу (4.2) функция $f \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}$ имеет предельные значения $f(\pm\infty) = 0$, так что интеграл в представлении $u(z)$ существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае задача (3.3) в теореме 3.1 переходит в задачу

$$\operatorname{Re} G\psi' = g, \quad \psi' \in C_{\lambda-\sigma}^{\mu}. \quad (4.4)$$

Если $\det G = 0$, то решениями этой однородной задачи служат аналитические вектор-функции $\psi(z) = \psi_0(z)\eta$ со скалярной функцией $\psi_0 \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}$, что доказывает первую часть теоремы. Пусть $\det G \neq 0$. Поскольку аналитическая функция $G\psi'$ принадлежит классу $C_{\lambda-\sigma}^{\mu}(D; F)$ и $0 < \lambda < 1$, к ней можно применить теорему Коши в полуплоскости D . Следовательно, условие (4.2) необходимо для разрешимости задачи (4.4), а значит, и задачи (1.1), (4.1). При его выполнении первообразная $f \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}$ функции g обладает свойством $f(+\infty) = f(-\infty)$. Поэтому можем считать, что $\psi(\infty) = 0$ и $f(\pm\infty) = 0$. Тогда, интегрируя краевое условие (4.4) и применяя к функции $G\psi$ формулу Шварца [4], получим представление

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{G^{-1} f(t) dt}{t - z}.$$

На основании (1.16) и (2.1) отсюда приходим к формуле (4.3).

Заметим, что утверждение теоремы 4.1 согласуется с формулой индекса (3.12), которая в рассматриваемом случае переходит в равенство $\alpha = 0$.

Краевое условие (4.1) можно записать в проинтегрированной форме. С этой целью введем понятие сопряженной функции v к решению u уравнения (1.1). Она определяется криволинейным интегралом

$$v(z) = v(z_0) + \int_{z_0}^z (a_{21}u_x + a_{22}u_y) dx - (a_{11}u_x + a_{12}u_y) dy,$$

который согласно (1.1) не зависит от кривой, соединяющей точки z_0 и z в полуплоскости D . В силу (1.6), (1.9) этот интеграл совпадает с

$$\operatorname{Re} \int_{z_0}^z (a_{21}b + a_{22}bJ)(\phi_x dx + \phi_y dy),$$

так что для v получаем представление

$$v = \operatorname{Re} c\phi, \quad c = a_{21}b + a_{22}bJ, \quad (4.5)$$

аналогичное (1.9). Вместе с $u(z)$ эта функция также принадлежит классу $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$, $0 < \lambda < 1$.

Согласно (1.5) матрица

$$\begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \bar{b}J \end{pmatrix}$$

обратима. Если аналогично (1.10) положить

$$\begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ \bar{b}_2 & \bar{c}_2 \end{pmatrix}$$

для обратной к ней матрицы, то можем написать формулу

$$\phi = 2(b_2u + c_2v), \quad (4.6)$$

обращающую пару равенств (1.9), (4.5). Ее можно рассматривать как проинтегрированный аналог формулы (1.10).

Из (1.9), (4.6), в частности, следует, что

$$u_y = \operatorname{Re} bJ\phi' = \operatorname{Re}(bJb_2)u_x + \operatorname{Re}(bJc_2)v_x.$$

Поэтому краевое условие (4.1) можно представить в форме $p_1u_x + q_1u_y = g$ с подходящими матрицами $p_1, q_1 \in \mathbb{R}^{l \times l}$. Соответственно этому от (4.1) можно перейти к “проинтегрированной” краевой задаче

$$(pu + qv)|_{\mathbb{R}} = f \quad (4.7)$$

в классе $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$, $0 < \lambda < 1$, где p_1, q_1 обозначены снова p, q .

Теорему 4.1 можем переформулировать по отношению к этой задаче с матрицей $G = pb + qc$. Аналогичный результат, очевидно, сохраняет свою силу и для задачи (1.1), (4.7) в классе

$$u + iv \in C_{(\lambda)}^{\mu}(D; F), \quad 0 < \lambda < 1. \quad (4.8)$$

Заметим, что условие $f(\pm\infty) = 0$ в (4.3) можно опустить, если интеграл в представлении решения $u(z)$ понимать как сингулярный на ∞ , т. е. как предел при $R \rightarrow \infty$ интегралов по $[-R, R]$.

Хорошо известно [4], что в классическом случае уравнения Лапласа условие (4.8) равносильно $u \in C^\mu_{(\lambda)}$, $0 < \lambda < 1$. В общем случае произвольной эллиптической системы (1.1) этот вопрос остается открытым.

Особую роль играют случаи $p = 1$, $q = 0$ и $p = 0$, $q = 1$, отвечающие так называемым первой и второй краевым задачам, или задачам Дирихле и Неймана. Для этих задач роль G в теореме 4.1 играют, соответственно, матрицы b и c . В частности, условия $\det b \neq 0$ и $\det c \neq 0$ не зависят от выбора матриц b , J в (1.5), (1.6).

Как показано в [10], условие $\det b \neq 0$ равносильно условию

$$\det \Delta \neq 0, \quad \Delta = \int_{\mathbb{R}} (a_{11} + (a_{12} + a_{21})t + a_{22}t^2)^{-1} dt. \quad (4.9)$$

Последнее представляет собой известное условие дополнительности [11] по отношению к задаче Дирихле для уравнения (1.1).

Заметим, что матрица зависит от разбиения второго коэффициента в (1.1) на сумму $a_{12} + a_{21}$. Следовательно, эта матрица целиком определяется не исходным уравнением (1.1), а блочной (2×2) -матрицей

$$a = (a_{ij})_1^2 \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}. \quad (4.10)$$

По терминологии А. В. Бицадзе [3] системы (1.1), удовлетворяющие условию $\det b \neq 0$ ($\det b = 0$) называются *слабо (сильно) связанными*. Более полувека назад им [12] была указана сильно связанная эллиптическая система

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

для которой однородная задача Дирихле в единичном круге имеет бесконечное число линейно независимых решений. Прямая проверка показывает, что для этой системы в соотношениях (1.5), (1.6) можно положить

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Обозначая

$$a_{12} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{21} = \begin{pmatrix} -x_{11} & 2 - x_{12} \\ -2 - x_{21} & -x_{22} \end{pmatrix},$$

для определителя матрицы $c = xb + bJ$ получим выражение $\det c = i(x_{11} - x_{12}) + (x_{12} - x_{22})$. Таким образом, матрицы a , отвечающие системе Бицадзе, могут как удовлетворять, так и не удовлетворять условию $\det c \neq 0$.

Особую роль играет введенное М. И. Вишиком [13] понятие сильно эллиптических систем, для которых матрица под знаком определителя в (1.2) положительно определена для любых α_1, α_2 . В этом случае матрица Δ в условии (4.9) также положительно определена, так что сильно эллиптические системы всегда слабо связаны.

Еще более узкий класс доставляют эллиптические системы, для которых матрица a в (4.10) неотрицательно определена. Системы этого типа были введены в [14] и названы *усиленно эллиптическими*. Как показано в [10], при дополнительном требовании

$$\text{rang } a \geq 2l - 1 \quad (4.11)$$

условие $\det c \neq 0$ всегда выполнено.

Возникает вопрос: существует ли задача вида (4.1), корректная для любой эллиптической системы (1.1)? Если пара матриц (b, J) удовлетворяет условию (1.5) с некоторыми $\text{Im } \nu_j > 0$, то, обращая рассуждения в лемме 1.1, можем построить эллиптическую систему (1.1) со свойством (1.6). Тогда на основании теоремы 4.1 и следующей ниже леммы приходим к отрицательному ответу на этот вопрос.

ЛЕММА 4.1. *Не существует матриц $p, q \in \mathbb{R}^{l \times l}$, удовлетворяющих условию*

$$\det(pb + qbJ) \neq 0 \quad (4.12)$$

для любой пары b, J со свойством (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пример сильно связанных систем показывает, что каждая из матриц p, q должна быть ненулевой. Предположим, что указанные матрицы существуют. Тогда, как будет показано ниже, условие (4.12) будет нарушено уже среди обратимых матриц b . Переходя от J к bJb^{-1} , можем положить $b = 1$ с заменой (1.5) на

$$\det(\text{Im } J) \neq 0, \quad \sigma(J) \subseteq \{\nu \mid \text{Im } \nu > 0\}. \quad (4.13)$$

Заметим, что условие $\det(p + qJ) \neq 0$ инвариантно относительно умножения $p + qJ$ слева и справа на обратимые матрицы $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{l \times l}$. В самом деле, $e_1(p + qJ)e_2 = \tilde{p} + \tilde{q}\tilde{J}$, где $\tilde{p} = e_1pe_2$, $\tilde{q} = e_1qe_2$ и $\tilde{J} = e_2^{-1}Je_2$. Ясно, что подобная матрица $\tilde{J}$ также удовлетворяет условию (4.13).

Очевидно, утверждение леммы достаточно доказать по отношению к диагональным матрицам J с двумя собственными значениями ν и ζ вдоль диагонали. В этом случае функция $h(\zeta, \nu) = \det(p + qJ)$ является многочленом переменных ζ, ν и условие (4.12) означает, что уравнение $h(\zeta, \nu) = 0$ имеет только вещественные решения (ζ, ν) . Разрешая это уравнение относительно ν , получим алгебраические функции $\nu = g(\zeta)$ комплексной переменной ζ , которые по предположению должны принимать вещественные значения. Следовательно, эти функции постоянны, что невозможно.

Положение существенно меняется при переходе к нелокальным задачам. В качестве простейшего примера рассмотрим для системы (1.1) краевую задачу

$$u(x, 0) + u(-x, 0) = f(x), \quad v(x, 0) + v(-x, 0) = g(x), \quad (4.14)$$

где f, g – заданные четные l -вектор-функции.

ТЕОРЕМА 4.2. Задача (1.1), (4.14) в классе $u + iv \in C_{(\lambda)}^{\mu}(D; F)$, $0 < \lambda < 1$, однозначно разрешима и ее решение задается формулой

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} b[t - z]^{-1} h(t) dt, \quad h = b_2 f + c_2 g, \quad (4.15)$$

где матрицы b_2, c_2 такие, как в (4.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было условлено при обсуждении задачи (4.7), преобразование $u = \operatorname{Re} b\phi$, $v = \operatorname{Re} c\phi$ устанавливает изоморфизм в классе $C_{(\lambda)}^{\mu}$ между парой (u, v) , составленной из решения уравнения (1.1) и отвечающей ему сопряженной функции, и J -аналитической функцией ϕ . Обратное отображение описывается формулой (4.6). Следовательно, задача (4.14) равносильна задаче

$$\phi(x) + \phi(-x) = 2h(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

для J -аналитической функции $\phi \in C_{(\lambda)}^{\mu}(D; F)$. С помощью преобразования E она сводится к аналогичной задаче для аналитической вектор-функции ψ . Полагая $\tilde{\psi}(z) = \psi(z)$, $z \in D$, и $\tilde{\psi} = -\psi(-z)$, $z \in D'$, где D' – нижняя полуплоскость, ее краевое условие можем переписать в форме линейного сопряжения $\tilde{\psi}^+ - \tilde{\psi}^- = 2h$. С учетом формул Сохоцкого–Племеля отсюда следует, что решение этой задачи единственно и задается формулой

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(t) dt}{t - z}, \quad z \in D.$$

Применяя к этому равенству преобразование Бицадзе (1.16), получим (4.15).

§ 5. Приложения к плоской анизотропной упругости

Состояние среды в анизотропной плоской теории упругости [15], [16] описывается тензорами напряжения σ и деформации ε – симметричными (2×2) -матрицами-функциями, элементы которых записываем в форме $\sigma_{ii} = \sigma_i$, $i = 1, 2$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_3$ (и аналогично для ε). С вектором смещений $u = (u_1, u_2)$ тензор ε связан формулами

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad 2\varepsilon_3 = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}. \quad (5.1)$$

Связь между σ и ε в линейной теории осуществляется законом Гука – линейными соотношениями $\sigma_1 = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_4 \varepsilon_2 + 2\alpha_6 \varepsilon_3$, $\sigma_2 = \alpha_4 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + 2\alpha_5 \varepsilon_3$, $\sigma_3 = \alpha_6 \varepsilon_1 + \alpha_5 \varepsilon_2 + 2\alpha_3 \varepsilon_3$ с постоянной положительно определенной матрицей

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Элементы этой матрицы называются *модулями упругости*.

В состоянии равновесия тензор σ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial \sigma_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{(2)}}{\partial y} = 0,$$

где $\sigma_{(j)}$ обозначает j -й столбец матрицы σ . Подставляя (5.1) в соотношения Гука, для этих столбцов имеем выражения

$$\sigma_{(i)} = a_{i1}u_x + a_{i2}u_y, \quad i = 1, 2, \quad (5.3)$$

с матричными коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, & a_{12} &= \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \\ a_{21} &= \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, & a_{22} &= \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В свою очередь, подстановка (5.3) в уравнение равновесия приводит к системе Ламе (1.1) для вектора смещений u с указанными коэффициентами a_{ij} . В силу положительной определенности α составленная из этих коэффициентов матрица (4.10) неотрицательно определена и ее ранг равен 3. Таким образом, система Ламе усиленно эллиптическая и удовлетворяет условию (4.11), так что обе матрицы b и c обратимы.

В терминах сопряженной функции v равенства (5.3) можем переписать в форме $\sigma_{(2)} = v_x$, $\sigma_{(1)} = -v_y$. Таким образом, вектор-смещения u и тензор напряжения σ выражаются через J -аналитические функции ϕ по формулам

$$u = \operatorname{Re} b\phi, \quad \sigma_{(1)} = -\operatorname{Re}(cJ)\phi', \quad \sigma_{(2)} = \operatorname{Re} cJ\phi'. \quad (5.4)$$

Напомним, что b и J здесь являются решениями (1.5), (1.6), а $c = a_{12}b + a_{22}bJ$.

Применительно к рассматриваемому случаю теорема 4.1 для первой и второй краевых задач может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 5.1. *В классе $u + iv \in C_\lambda^\mu(\bar{D}; \infty)$, $0 < \lambda < 1$, задачи Дирихле и Неймана однозначно разрешимы. Их решения задаются формулами*

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} b[t - z]^{-1} b^{-1} f(t) dt, \quad v(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} c[t - z]^{-1} b^{-1} f(t) dt$$

для задачи Дирихле и формулами

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} b[t - z]^{-1} c^{-1} f(t) dt, \quad v(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} c[t - z]^{-1} c^{-1} f(t) dt$$

для задачи Неймана.

Явные выражения матриц b и c в этих формулах анонсированы в [17]. Для их описания в обозначениях (1.3) положим

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} p_2 & -p_3 \\ -p_3 & p_1 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

с многочленами $p_1(z) = \alpha_1 + 2\alpha_6 z + \alpha_3 z^2$, $p_2(z) = \alpha_3 + 2\alpha_5 z + \alpha_2 z^2$ и $p_3(z) = \alpha_6 + (\alpha_3 + \alpha_4)z + \alpha_5 z^2$.

Рассмотрим далее многочлены $q_i(z) = \det(a_{i1} + za_{i2})$, $i = 1, 2$. Их коэффициенты проще всего вычислять в терминах матрицы $\beta = (\det \alpha)\alpha^{-1}$, присоединенной к α . Ее элементы, записанные аналогично (5.2), определяются равенствами

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_5^2, & \beta_2 &= \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_6^2, & \beta_3 &= \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_4^2, \\ \beta_4 &= \alpha_5 \alpha_6 - \alpha_3 \alpha_4, & \beta_5 &= \alpha_4 \alpha_6 - \alpha_1 \alpha_5, & \beta_6 &= \alpha_4 \alpha_5 - \alpha_2 \alpha_6. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Эта матрица положительно определена вместе с α , так что $\alpha_i > 0$ и $\beta_i > 0$ при $i = 1, 2, 3$. Матрица $\gamma = (\det \beta)\beta^{-1}$, присоединенная к β , совпадает с $(\det \alpha)\alpha$. В принятых обозначениях

$$\begin{aligned} q_1(z) &= \det(a_{11} + za_{12}) = \beta_2 - \beta_5 z + \beta_4 z^2, \\ q_2(z) &= \det(a_{21} + za_{22}) = \beta_4 - \beta_6 z + \beta_1 z^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Эти многочлены не имеют общих корней в верхней полуплоскости, т. е.

$$|q_1(\nu)| + |q_2(\nu)| > 0, \quad \operatorname{Im} \nu > 0. \quad (5.8)$$

В противном случае $q_1 = \lambda q_2$ с некоторым $\lambda \in \mathbb{R}$ и, значит,

$$\frac{\beta_2}{\beta_4} = \frac{\beta_5}{\beta_6} = \frac{\beta_4}{\beta_1},$$

что противоречит неравенству $\gamma_3 = \beta_1\beta_2 - \beta_4^2 > 0$.

Обратимся к матрице Q в (5.5). Прямая проверка показывает, что

$$(a_{21} + a_{22}z)Q(z) = R(z), \quad R(z) = \begin{pmatrix} zq_2 & q_1 \\ -q_2 & q_3 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

где в дополнение к (5.7) положено $q_3(z) = -\beta_5 + (\beta_3 + \beta_4)z - 2\beta_6 z^2 + \beta_1 z^3$.

Переходя в этом равенстве к определителям, с учетом (5.5), (5.7) получим

$$\chi(z) = q_1(z) + zq_3(z) = \beta_2 - 2\beta_5 z + (\beta_3 + \beta_4)z^2 - 2\beta_6 z^3 + \beta_1 z^4. \quad (5.10)$$

ЛЕММА 5.1. *Равенства $p_i(\nu) = 0$, $1 \leq i \leq 3$, не возможны ни для какого ν . Для $\nu \in \sigma(J)$ и $i = 1, 2$ равенства $p_i(\nu) = p_3(\nu) = 0$ равносильны $q_i(\nu) = 0$ и возможны только в случае $\sigma(J) = \{\nu_1, \nu_2\}$, $\nu_1 \neq \nu_2$. В частности, $q_1(\nu)q_2(\nu) \neq 0$ при $\sigma(J) = \{\nu\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в одну сторону непосредственно следует из (5.9). Обратное, если $q_1(\nu) = 0$, то с учетом (5.10) выполнено и $q_3(\nu) = 0$. В силу (5.8) матрица $S(\nu) = a_{21} + \nu a_{22}$, определитель которой совпадает с $q_2(\nu)$, обратима. Поэтому $p_1(\nu) = p_3(\nu) = 0$.

Пусть далее $q_2(\nu) = 0$. Рассмотрим вектор-строки x_1, x_2 матрицы $S(\nu)$ и вектор-столбцы y_1, y_2 матрицы $R(\nu)$. Поскольку $\det S(\nu) = \det Q(\nu) = 0$, эти пары векторов линейно зависимы. Оба вектора x_i отличны от нуля, так что $x_1 = \lambda x_2$ с некоторым ненулевым $\lambda \in \mathbb{C}$. Второй столбец матрицы $R(\nu)$ отличен от нуля, как это следует из (5.8), (5.9). Поэтому отличен от нуля и вектор y_2 , так что $y_1 = \mu y_2$ с некоторым $\mu \in \mathbb{C}$. Но тогда

$$R(\nu) = S(\nu)Q(\nu) = \delta \begin{pmatrix} \lambda\mu & \lambda \\ \mu & 1 \end{pmatrix},$$

где δ – скалярное произведение векторов x_2 и y_2 . Поскольку первый столбец матрицы $R(\nu)$ равен нулю, то $\mu = 0$ и, значит, $x_1 = 0$.

Для доказательства второго утверждения леммы положим, например, $p_1(\nu) = p_2(\nu) = 0$, $\nu \in \sigma(J)$. Тогда $p_3 = \lambda p_1$ с некоторым $\lambda \in \mathbb{R}$ и, значит, $\chi = p_1 p_2 - p_3^2 = p_1(p_2 - \lambda^2 p_1)$. Многочлен $p_* = p_2 - \lambda^2 p_1$ отличен от нуля

в точке ν , так как одновременно все три многочлена p_1, p_2, p_3 в нуль не обращаются. Таким образом, с точностью до ненулевого множителя характеристический многочлен $\chi(z)$ совпадает с произведением $(z - \nu)(z - \bar{\nu})(z - \nu_*)(z - \bar{\nu}_*)$, $\nu_* \neq \nu$. Следовательно, равенства $p_1(\nu) = p_3(\nu) = 0$ возможны только в случае различных корней многочлена χ . Случай $p_2(\nu) = p_3(\nu) = 0$ рассматривается аналогично.

Пусть матрица J в лемме 1.1, отвечающая системе Ламе, выбрана в жордановой форме. Согласно лемме 5.1 матричное равенство (1.7) невозможно. Поэтому при $\sigma(J) = \{\nu_1, \nu_2\}$ матрица J диагональна, а при $\sigma(J) = \{\nu\}$ она является клеткой Жордана:

$$(i) \quad J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 \neq \nu_2; \quad (ii) \quad J = \begin{pmatrix} \nu & i \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

В частности, соответственно этим случаям матричное ядро $[t - z]^{-1}$ в интегральных представлениях теоремы 5.1 принимает вид:

$$(i) \quad [t - z]^{-1} = (t - x - \nu_1)^{-1} e_1 + (t_1 - x - \nu_2 y)^{-1} e_2, \\ (ii) \quad [t - z]^{-1} = (t - x - \nu_1)^{-1} + y(t - x - \nu y)^{-2} e,$$

где положено

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следующая теорема дает полное описание матриц b и c в этих представлениях для каждого из двух случаев (i), (ii) матрицы J . Пусть $x_{(i)}$ обозначает i -й столбец матрицы $x \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

ТЕОРЕМА 5.2. (i) Пусть $\sigma(J) = \{\nu_1, \nu_2\}$. Тогда

$$b_{(i)} = k_i Q_{(1)}(\nu_i), \quad c_{(i)} = k_i R_{(1)}(\nu_i), \quad q_2(\nu_i) \neq 0, \\ b_{(i)} = k_i Q_{(2)}(\nu_i), \quad c_{(i)} = k_i R_{(2)}(\nu_i), \quad q_1(\nu_i) \neq 0$$

с произвольными ненулевыми множителями $k_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$.

(ii) Пусть $\sigma(J) = \{\nu\}$. Тогда

$$b_{(1)} = k_1 Q_{(i)}(\nu), \quad b_{(2)} = k_1 Q'_{(i)}(\nu) + k_2 Q_{(i)}(\nu), \\ c_{(1)} = k_1 R_{(i)}(\nu), \quad c_{(2)} = k_1 R'_{(i)}(\nu) + k_2 R_{(i)}(\nu),$$

где $k_1 \neq 0$, номер $i = 1, 2$ выбран произвольно и штрих означает дифференцирование.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Поскольку $(bJ^k)_{(i)} = \nu_i^k b_{(i)}$, уравнение (1.6) для b равносильно $P(\nu_i)b_{(i)} = 0$. Согласно (5.5) при $\nu \in \sigma(J)$ справедливо матричное равенство $P(\nu)Q(\nu) = 0$, так что в качестве $b_{(i)}$ можно выбрать любой из ненулевых столбцов матрицы $Q(\nu)$. Пусть для определенности $q_2(\nu_i) \neq 0$, тогда по лемме 5.1 первый столбец $Q_{(1)}(\nu_i)$ не равен нулю и, следовательно, $b_{(i)} = k_i Q_{(1)}(\nu_i)$.

Обратимся к матрице $c = a_{21}b + a_{22}bJ$. Очевидно, $c_{(i)} = a_{21}b_{(i)} + \nu_i a_{22}b_{(i)}$, так что с учетом (5.9) имеем $c_{(i)} = k_i R_{(i)}(\nu_i)$.

(ii) В этом случае

$$\begin{aligned}(bJ)_{(1)} &= \nu b_{(1)}, & (bJ)_{(2)} &= b_{(1)} + \nu b_{(2)}, \\ (bJ^2)_{(1)} &= \nu^2 b_{(1)}, & (bJ^2)_{(2)} &= 2\nu b_{(1)} + \nu^2 b_{(2)}\end{aligned}$$

и (1.6) перепишется в форме векторных равенств $P(\nu)b_{(1)} = 0$, $P(\nu)b_{(2)} + P'(\nu)b_{(1)} = 0$. Поскольку $P(z)Q(z) = \chi(z)$, $P(z)Q'(z) + p'(z)Q(z) = \chi'(z)$ и $\chi(\nu) = \chi'(\nu) = 0$, отсюда с учетом леммы 5.1 заключаем, что $b_{(1)} = k_1 Q_{(i)}(\nu)$, $b_{(2)} = k_1 Q'_{(i)} + k_2 Q_{(i)}(\nu)$ с произвольными $i = 1, 2$ и $k_j \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$.

Для c в рассматриваемом случае имеем $c_{(1)} = (a_{21} + \nu a_{22})b_{(1)}$, $c_{(2)} = (a_{21} + \nu a_{22})b_{(2)} + a_{22}b_{(1)}$ и, значит,

$$\begin{aligned}c_{(1)} &= k_1(\nu), & c_{(2)} &= k_1(a_{21} + \nu a_{22})Q'_{(i)}(\nu) \\ &+ k_2(a_{21} + \nu a_{21})Q'_{(i)}(\nu) + k_1 a_{22}Q_{(i)}(\nu) = k_1 R'_{(i)}(\nu) + k_2 R_{(i)}(\nu).\end{aligned}$$

Если $\nu_1 \in \sigma(J)$ в (i) выбрать так, чтобы $q_2(\nu_1) \neq 0$, то в явной форме

$$b = \begin{pmatrix} p_2(\nu_1) & p_2(\nu_2) \\ -p_3(\nu_1) & -p_3(\nu_2) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \nu_1 q_2(\nu_1) & \nu_2 q_2(\nu_1) \\ -q_2(\nu_1) & -q_2(\nu_2) \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

при $q_2(\nu_2) \neq 0$ и

$$b = \begin{pmatrix} p_2(\nu_1) & -p_3(\nu_2) \\ -p_3(\nu_1) & p_1(\nu_2) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \nu_1 q_2(\nu_1) & q_1(\nu_2) \\ -q_2(\nu_1) & q_3(\nu_2) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

при $q_2(\nu_2) = 0$.

Аналогично, в случае (ii) можем положить

$$b = \begin{pmatrix} p_2(\nu) & p'_2(\nu) \\ -p_3(\nu) & -p'_3(\nu) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \nu q_2(\nu) & q_2(\nu) + \nu q'_2(\nu) \\ -q_2(\nu) & -q'_2(\nu) \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Рассматриваемый в (5.12) случай $q_2(\nu_1) \neq 0$, $q_2(\nu_2) = 0$ является исключительным. Его можно описать равенствами $\chi(\nu) = q_2(\nu) = 0$ или одним равенством $\chi[(2\beta_1)^{-1}(\beta_6 + \sqrt{\beta_6^2 - 4\beta_1\beta_6})] = 0$.

Заметим, что формулы (5.11)–(5.13) дают явное описание матриц b и c только в предположении, что известны корни характеристического уравнения. Данное затруднение снимается в ортотропном случае, когда

$$\alpha_5 = \alpha_6 = 0. \quad (5.14)$$

В этом случае матрица (5.2) блочно-диагональна и аналогичную структуру имеет присоединенная матрица β , т. е. $\beta_5 = \beta_6 = 0$. Поэтому выражения для многочленов p_j , q_j и χ в (5.5), (5.7) и (5.10) несколько упрощаются:

$$\begin{aligned}p_1 &= \alpha_1 + \alpha_3 z^2, & p_2 &= \alpha_3 + \alpha_2 z^2, & p_3 &= (\alpha_3 + \alpha_4)z, \\ q_1 &= \beta_2 + \beta_4 z^2, & q_2 &= \beta_4 + \beta_1 z^2, & \chi &= \beta_2 + (\beta_3 + 2\beta_4)z^2 + \beta_1 z^4.\end{aligned}$$

В частности, корни характеристического уравнения находятся из равенства

$$2\beta_1 \nu^2 = -(\beta_3 + 2\beta_4) \pm \sqrt{\gamma}, \quad \gamma = (\beta_3 + 2\beta_4)^2 - 4\beta_1\beta_2. \quad (5.15)$$

Случай $\sigma(J) = \{\nu\}$ кратных корней получается при $\gamma = 0$, т. е. при $\beta_3 + 2\beta_4 = 2\sqrt{\beta_1\beta_2}$. С учетом (5.6) и положительной определенности матрицы α последнее равенство равносильно

$$2\alpha_3 + \alpha_4 = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}. \quad (5.16)$$

Из (5.7), (5.15) видно, что равенство $q_2(\nu) = 0$, $\nu \in \sigma(J)$, равносильно равенству $\beta_3\beta_4 + \beta_4^2 = \beta_1\beta_2$. С учетом (5.6) и положительной определенности α оно, в свою очередь, эквивалентно $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Аналогично проверяется, что и $q_1(\nu) = 0$, $\nu \in \sigma(J)$, равносильно $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Этот факт согласуется с леммой 5.1, так как многочлены $p_i(z)$, $i = 1, 2$, второй степени и $p_3(z) = (\alpha_3 + \alpha_4)z$ могут иметь общий корень ν , $\text{Im } \nu \geq 0$, лишь при $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$.

Таким образом, при $\sigma(J) = \{\nu_1, \nu_2\}$ матрицы b и c в ортотропном случае можно определять равенствами (5.11), если только $\alpha_3 + \alpha_4 \neq 0$, и равенствами (5.12) в противном случае.

Изотропная среда соответствует ситуации, когда в дополнение к (5.14) выполнены условия $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_3 + \alpha_4$, или, что равносильно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda + 2\mu, \quad \alpha_3 = \mu, \quad \alpha_4 = \lambda \quad (5.17)$$

с некоторыми положительными λ и μ (постоянными Ламе). В этом случае условие (5.16), очевидно, выполнено и $\sigma(J) = \{i\}$, а система Ламе может быть записана в форме

$$\mu \Delta u_1 + (\lambda + \mu)(\text{div } u)_x = 0, \quad \mu \Delta u_2 + (\lambda + \mu)(\text{div } u)_y = 0,$$

где положено $\text{div } u = u_{1x} + u_{2y}$.

В силу (5.6) и (5.14), (5.17) имеем $\beta_1 = \beta_2 = \mu(\lambda + 2\mu)$, $\beta_3 = (\lambda + 2\mu)^2$, $\beta_4 = -\mu\lambda$ и $\beta_5 = \beta_6 = 0$. Поэтому равенства (5.13) приводят к выражениям

$$b = \begin{pmatrix} -\delta & 2i(\delta + \mu) \\ -i\delta & -\delta \end{pmatrix}, \quad c = 2\mu \begin{pmatrix} \delta & 2\delta + \mu \\ -\delta & i(\delta + \mu) \end{pmatrix}$$

с $\delta = \lambda + \mu$. Согласно теореме 5.2 в этих матрицах можем ко второму столбцу прибавить первый, умноженный на $2i(\delta + \mu)\delta^{-1}$. Тогда, сокращая матрицы на общий множитель $-\delta$, приведем их к виду [17]

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -\varkappa \end{pmatrix}, \quad c = \mu \begin{pmatrix} 2i & \varkappa - 1 \\ 2 & i(\varkappa + 2) \end{pmatrix}, \quad \varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}. \quad (5.18)$$

Подставляя эти матрицы в (5.4) и выражая J -аналитические функции ϕ через аналитические, получаем известные формулы Колосова–Мусхелишвили (см. [15]). В рассматриваемом случае удобнее пользоваться вариантом (1.15) преобразования E . Поскольку в этом случае

$$J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

формула (1.11) принимает вид $\psi(z) = \psi(z) + \bar{z}Q\psi'(z)$.

Подставляя вместе с (5.18) это выражение в (5.4) и полагая $\chi_1 = -i\mu\psi_2$, $\psi_2 = -2\mu\psi_1 - i\varkappa\mu\psi_2$, после несложных вычислений приходим к формулам Колосова–Мусхелишвили

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 4 \text{Re } \chi'_1, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + i\sigma_3 = \bar{z}\chi''_1 + \chi'_2, \\ 2\mu(u_1 + iu_2) = \varkappa\chi_1 - z\bar{\chi}'_1 - \bar{\chi}'_2.$$

§ 6. Краевые задачи в весовых пространствах Харди

Пусть заданы кусочно гладкая кривая Γ на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ и конечное подмножество F ее точек (в состав которых включается ∞ , если Γ неограничена). В силу (2.3) обозначим $L_\lambda^p(\Gamma; F)$, $1 < p < \infty$, пространство всех измеримых функций φ на Γ , для которых конечна норма

$$|\varphi| = |\rho_{-\sigma/p-\lambda}\varphi|_{L^p}. \quad (6.1)$$

В частности, L^p совпадает с $L_{-1/p}^p(\Gamma; F)$ в случае ограниченной кривой и с $L_{-\sigma/p}^p(\Gamma; F)$ в общем случае. Очевидно, семейство весовых пространств L_λ^p монотонно убывает по λ . С помощью локализации точек $\tau \in F$ оно, аналогично (2.5), может быть описано условиями

$$\varphi \in L_{\lambda_\tau}^p(\Gamma_\tau; \tau), \quad \tau \in F; \quad \varphi \in L^p(\Gamma_*). \quad (6.2)$$

В случае $F \subseteq \{0, \infty\}$ в качестве $\rho_{\sigma/p}(z)$ можем взять $|z|^{1/p}$ и рассматривать $L_0^p(\Gamma; F)$ как L^p -пространство относительно меры $ds_t/|t|$ с L^p -нормой

$$|\varphi| = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p \frac{ds_t}{|t|} \right)^{1/p}, \quad F \subseteq \{0, \infty\}. \quad (6.3)$$

В обозначениях (2.7) эта норма эквивалентна

$$|\varphi| = \left(\sum \xi_i^p \right)^{1/p}, \quad \xi_i = |\varphi_i|_{L^p(\Gamma_i)}. \quad (6.4)$$

Рассмотрим сингулярный оператор Коши (1.20). Напомним, что дуга $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ляпуновская, если производная ее естественной параметризации (по параметру длины дуги) удовлетворяет условию Гёльдера. С помощью этих дуг и инверсии понятие кусочно ляпуновской кривой на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ вводится аналогично предыдущему.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть кривая Γ кусочно ляпуновская и $\varphi \in L_\lambda^p(\Gamma; F)$, $1 < p < \infty$, $-1 < \sigma\lambda < 0$. Тогда сингулярный интеграл $(I^*\varphi)(t_0)$ существует почти для всех $t_0 \in \Gamma$ и определяет ограниченный оператор в $L_\lambda^p(\Gamma; F)$.

Отметим, что при $J = i$ эта теорема составляет классический результат Рисса для преобразования Гильберта $I_{\mathbb{R}, i}^*$. В случае общей кусочно ляпуновской кривой он принадлежит Б. В. Хведелидзе [18].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала Γ является ляпуновской дугой Γ_0 на плоскости с параметризацией $z = \gamma(s)$, $0 \leq s \leq 1$, где $\gamma'(s) \in C^{+0}[0, 1]$, $\gamma'(s) \neq 0$, $0 \leq s \leq 1$. Необходимо показать, что для $\varphi \in L^p(\Gamma_0)$ интеграл $(I^*\varphi)(t_0)$ существует почти для всех $t_0 \in \Gamma_0$ и справедлива оценка

$$|I^*\varphi|_{L^p(\Gamma_0)} \leq C|\varphi|_{L^p(\Gamma_0)}, \quad (6.5)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ . Согласно (1.20) имеем

$$(I^*\varphi)(s_0) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{k(s_0, s)}{s - s_0} \varphi(\gamma(s)) ds$$

с матричным ядром

$$k(s_0, s) = \left[\frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0} \right] [\gamma'(s)] \in C^{+0}([0, 1] \times [0, 1]).$$

Поскольку $k(s, s) \equiv 1$, утверждение сводится к двум случаям, когда $k(s_0, s) \equiv 1$ и когда $k(s, s) \equiv 0$. Первый случай охватывается теоремой Рисса, а второй соответствует интегралу со слабой особенностью и доказывается обычным образом с помощью неравенства Гёльдера.

Дальнейшие рассуждения аналогичны использованным при доказательстве леммы 2.2. С помощью локализации (6.2) и оценки (6.5) доказательство сводится к случаю, когда Γ является гладкой дугой с концами $\tau = 0$ и $\tau = \infty$, множество F состоит из этих концов и $\lambda_0 = -\lambda_\infty$. В этом случае можем положить $\rho_\lambda(z) = |z|^{\lambda_0}$, так что остается установить ограниченность в $L_0^p(\Gamma; F) \rightarrow L_0^p(\Gamma_\tau, \tau)$, $\Gamma_\tau = \Gamma \cap B(\tau, \delta)$, оператора, определяемого весовым сингулярным интегралом

$$\phi^*(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} |t_0|^{\lambda_0} |t|^{-\lambda_0} [t - t_0]^{-1} [dt] \varphi(t).$$

По отношению к Γ_0 этот факт установлен в [8] с помощью нормы (6.4), случай Γ_∞ рассматривается аналогично.

Обратимся к интегралу типа Коши (1.19). Аналогом леммы 2.1 в L^p -случае для него служит следующая

ЛЕММА 6.1 [8]. Пусть область D конечна и ограничена кусочно гладким контуром, содержащим ляпуновскую дугу Γ , и $\varphi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$. Тогда интеграл $\phi = \Gamma_{\Gamma, J} \varphi$ имеет угловые предельные значения $\phi^+(t_0)$ для почти всех $t_0 \in \Gamma$ и справедлива формула Соболевского–Племеля (1.21). При этом для любой последовательности $\Gamma_n \subseteq D$, $n = 1, 2, \dots$, гладких дуг, сходящихся по C^1 -норме их параметризации, справедлива оценка

$$\sup_n |I\varphi|_{L^p(\Gamma_n)} \leq C |\varphi|_{L^p(\Gamma)},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ .

Рассмотрим на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ область D , ограниченную кусочно ляпуновским контуром $\Gamma = \partial D$. По аналогии с [9] введем весовое пространство Харди J -аналитических в D функций $\phi(z)$, отвечающее пространству $L_\lambda^p(\Gamma; F)$ их граничных значений ϕ^+ . С этой целью определим в классе $C_{\lambda+0}^{+0}(D; F)$ этих функций норму

$$|\phi| = |\phi^+|_{L_\lambda^p(\Gamma; F)}. \quad (6.6)$$

Как и при обосновании оценки (2.11), с помощью весовой функции (2.12) нетрудно убедиться, что для любого компакта $K \subseteq D$ справедлива оценка

$$\max_{z \in K} |\phi(z)| \leq C |\phi^+|_{L_\lambda^p},$$

где $C > 0$ не зависит от $\phi \in C_{\lambda+0}^{+0}(D; F)$.

Эта оценка показывает, что банахово пространство $H_\lambda^p(D; F)$, полученное пополнением класса $C_{\lambda+0}^{+0}$ по норме (6.6), состоит из J -аналитических в D

функций. При этом каждому элементу $\phi \in H_\lambda^p$ естественным образом сопоставляется “граничная” функция $\phi^+ \in L_\lambda^p(\Gamma; F)$ и отображение $\phi \rightarrow \phi^+$ есть изометрический изоморфизм H_λ^p на некоторое замкнутое подпространство L_λ^p .

Теорема 6.1 совместно с принятым определением непосредственно приводит к следующему аналогу леммы 2.2.

ЛЕММА 6.2. Пусть область D ограничена кусочно ляпуновским контуром и множество $F \subseteq \Gamma$ содержит все его угловые точки (включая $\tau = \infty$, если кривая Γ неограничена). Тогда оператор типа Коши $I_{\Gamma, J}$ ограничен из $L_\lambda^p(\Gamma; F)$ в $H_\lambda^p(D; F)$ при $-1 < \sigma\lambda < 0$.

Из определения также видно, что оператор умножения на весовую функцию (2.12) осуществляет изоморфизм $H_\lambda^p \rightarrow H_{\lambda+\nu}^p$. Из тех же соображений формула Коши (2.9) и теорема Коши (2.10) сохраняют свою силу и для функций $\phi \in H_\lambda^p$. Совместно с леммой 6.2 отсюда получается следующее эквивалентное описание пространства H_λ^p .

ТЕОРЕМА 6.2. Функция ϕ принадлежит пространству $H_\lambda^p(D; F)$, $-1 < \sigma\lambda < 0$, тогда и только тогда, когда она имеет почти всюду угловые предельные значения $\phi^+ \in L_\lambda^p(\Gamma; F)$ и представима формулой Коши.

При $\lambda = -\sigma/p$ пространство $H_\lambda^p(D; F)$ называем пространством Харди и обозначаем $H^p(\Gamma)$, ему соответствует подпространство $L^p(\Gamma)$ граничных значений. Таким образом, для произвольного весового порядка λ пространство H_λ^p может быть получено из H^p умножением на весовую функцию $\rho_{\nu, J}$ порядка $\nu = \lambda + \sigma/p$. Дадим внутреннее описание этого пространства.

ТЕОРЕМА 6.3. (i) Пусть область D ограничена кусочно ляпуновским контуром Γ и лежит в конечной части плоскости. Пусть последовательность кусочно гладких контуров $\Gamma_n \subseteq D$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к Γ по $\sup$ -норме для производных их параметризаций. Тогда пространство $H^p(D)$ можно определить эквивалентной нормой

$$|\phi| = \sup_n |\phi|_{L^p(\Gamma_n)}.$$

(ii) В условиях (i) для любой подобласти $D_0 \subseteq D$ с кусочно гладкой границей оператор сужения на D_0 ограничен из $H^p(D)$ в $H^p(D_0)$.

(iii) Если D является верхней полуплоскостью $\{y > 0\}$, то $H^p(D)$ можно определить эквивалентной нормой

$$|\phi| = \sup_{y>0} |\phi(x + iy)|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (6.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i), (ii) являются следствием теоремы 6.2, леммы 6.1 и слабой компактности единичного шара в L^p . Они установлены в [8].

Докажем утверждение (iii) и обозначим через $\|\cdot\|$ норму (6.7). Доказательство утверждения в одну сторону в соответствии с теоремой 6.2 сводится к оценке

$$\|I\varphi\| \leq C|\varphi|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (6.8)$$

для интеграла типа Коши $I = I_{\mathbb{R}, J}$.

Соответствующий ему сингулярный оператор I^* совпадает с преобразованием Гильберта

$$(I^*\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0}$$

для любой матрицы J . Пусть $(I_\varepsilon^*\varphi)(t_0)$ отвечает интегралу по $\mathbb{R} \setminus \{|t - t_0| \geq \varepsilon\}$. Как хорошо известно [19], операторы I_ε^* в (6.5) ограничены в L^p равномерно по ε , т. е.

$$|I_\varepsilon^*\varphi|_{L^p} \leq C_0 |\varphi|_{L^p}, \quad (6.9)$$

где постоянная $C_0 > 0$ не зависит от ε . При фиксированном $y > 0$ имеем

$$\begin{aligned} -(I\varphi)(t_0 + iy) &= \frac{1}{\pi i y} \int_{\mathbb{R}} (t_0 + Jy - t)^{-1} \varphi(t) dt = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \left(J + \frac{t}{y}\right)^{-1} \varphi(t - t_0) dt, \\ -(I_y^*\varphi)(t_0) &= \frac{1}{\pi i y} \int_{|t| \geq y} \frac{y}{t} \varphi(t - t_0) dt, \end{aligned}$$

так что

$$(I\varphi)(t_0 + iy) - (K_y\varphi)(t_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y} \chi\left(\frac{t}{y}\right) \varphi(t_0 - t) dt$$

с матрицей функций

$$\pi i \chi(t) = \begin{cases} -(J + t)^{-1}, & |t| \leq 1, \\ t^{-1} - (J + t)^{-1}, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что вместе с $\chi(t)$ классу $L^1(\mathbb{R})$ принадлежит и скалярная функция

$$\tilde{\chi}(t_0) = \sup_{|t| \geq |t_0|} |\chi(t)|,$$

где под $|\cdot|$ справа понимается какая-либо норма в $\mathbb{C}^{l \times l}$. Поэтому в силу [19, теорема 1.25] для почти всех $t_0 \in \mathbb{R}$ существует предел

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y} \chi\left(\frac{t_0}{y}\right) \varphi(t_0 - t) dt = \varphi(t_0) \int_{\mathbb{R}} \chi(t) dt \quad (6.10)$$

и справедлива оценка

$$|\phi(t_0 + iy) - (K_y\varphi)(t_0)|_{L^p} \leq \chi|_{L^1} |f|_{L^p}.$$

Совместно с (6.9) из этой оценки следует (6.8).

Обратно, пусть J -аналитическая в полуплоскости D функция $\phi(z)$ имеет конечную норму (6.7). Тогда для $\phi_\varepsilon(z) = \phi(z + i\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, справедлива формула Коши

$$2\phi_\varepsilon(z) = (I\phi_\varepsilon)^+(z), \quad \text{Im } z > 0. \quad (6.11)$$

Для аналитических функций, соответствующих случаю $J = i$, этот факт установлен в [20]. В общем случае он доказывается аналогично.

В силу слабой компактности единичного шара пространства $L^p(\mathbb{R})$ существует последовательность ϕ_{ε_n} при $\varepsilon_n \rightarrow 0$, слабо сходящаяся к некоторой функции $\varphi \in L^p$. Поэтому при фиксированном z в (6.11) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получим равенство $2\phi = I\varphi$, которое совместно с леммой 6.2 завершает доказательство теоремы.

Аналогично C^μ - и L^p -случаям можно также дать внутреннее описание пространств H_λ^p .

ЛЕММА 6.3. *Пространство $H_\lambda^p(D; F)$, где область D ограничена кусочно ляпуновским контуром, состоит из всех J -аналитических в D функций, для которых в обозначениях (2.5)*

$$\phi \in H_{\lambda_\tau}^p(D_\tau; \tau), \quad \tau \in F, \quad \phi \in H^p(D_*). \quad (6.12)$$

При $F \subseteq \{0, \infty\}$ в обозначениях (2.7) пространство $H_0^p(D; F)$ может быть определено с помощью нормы (6.4), где ξ_i – норма ϕ в $H^p(D)$, $i = 0, \pm 1, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь весовым преобразованием, без ограничения общности можно считать, что $-1 < \sigma\lambda < 0$. Пусть $\tilde{D}$ – дополнение в D к объединению D_τ , $\tau \in F$. Выбирая $\delta > 0$ достаточно малым, границы всех областей D_τ и $\tilde{D}$ можно считать кусочно ляпуновскими. Если к функции $\phi(z)$ в этих областях применима теорема Коши, то она справедлива и во всей области D . Поэтому первое утверждение теоремы является следствием теоремы 6.2 и утверждения (ii) теоремы 6.3.

В одну сторону второе утверждение теоремы очевидно. Обратно, пусть для J -аналитической функции ϕ_0 норма (6.4) с $\xi_i = |\phi_i|_{H^p(D_i)}$ конечна, обозначим ее $\|\phi_0\|$. Достаточно показать, что при $1/p - 1 < \lambda_0 < 0$ функция $\phi(z) = [z]^{\lambda_0} \phi_0(z)$ принадлежит $H_\lambda^p(F; 0, \infty)$, где $\lambda_\infty = -\lambda_0$ с соответствующей оценкой норм.

Обозначим $D_{(n)}$ пересечение D с кольцом $\{2^{-n} < |z| < 2^n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Используя предыдущие рассуждения, получим, что в области $D_{(n)}$ к функции $\phi(z)$ применима теорема Коши. Убедимся, что в обозначениях (2.7) для фиксированного $z \in D$

$$I_i = \int_{D \cap \{|t|=2^i\}} [dt] [t - z]^{-1} \phi(t) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \pm\infty. \quad (6.13)$$

Тогда в пределе для функции ϕ области D будет обоснована теорема Коши и нужный результат является следствием теоремы 6.2.

В силу неравенства Гёльдера и определения норм ξ_i имеем равномерные по n оценки

$$|I_n| \leq C 2^{n(\lambda_0 - 1/p)} \xi_n, \quad |I_{-n}| \leq C 2^{n(\lambda_0 + 1 - 1/p)} \xi_{-n}.$$

Поскольку $\xi_{\pm n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, соотношение (6.13) и вместе с ним и лемма доказаны.

С помощью леммы 6.3 аналогично теореме 2.1 доказывается аналог ее первой части и для весовых пространств Харди.

ТЕОРЕМА 6.4. *Пусть D – верхняя полуплоскость и $F_0 \subseteq \mathbb{R}$. Тогда оператор E осуществляет изоморфизм банахового пространства $H_\lambda^p(D; F)$ аналитических вектор-функций на аналогичное пространство J -аналитических функций.*

Пусть пространство $H_{(\lambda)}^p(D; F)$, $\lambda < 1$, определяется условиями (6.12) с точностью до аддитивных постоянных. Другими словами, при $0 < \lambda_\tau < 1$ первое условие в (6.12) нужно понимать по отношению к $\phi(z) - C_\tau$ с некоторым $C_\tau \in \mathbb{C}$.

Полагая $H^{0,p} = H^p$, пространства $H^{p,n}$, $H_{\lambda}^{n,p}$ и $H_{(\lambda)}^{n,p}$ определим индуктивно по $n = 1, 2, \dots$ условиями, аналогичными (2.13). Применительно к L^p и L_{λ}^p эти определения приводят к соболевским пространствам $W^{n,p}$ и весовым пространствам $W_{\lambda}^{n,p}$, $W_{(\lambda)}^{n,p}$ на кривых, где через $W^{0,p}$ обозначено L^p .

Из неравенства Гёльдера непосредственно следует, что для гладкой дуги $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ имеем вложение

$$W^{1,p}(\Gamma) \subseteq C^{\mu}(\Gamma), \quad \mu = 1 - \frac{1}{p}. \quad (6.14)$$

Пользуясь нормой (6.4), отсюда выводим, что для гладкой дуги $\Gamma \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ с концами $\tau = 0, \infty$ справедливо вложение $W_0^{1,p} \subseteq C_0^{\mu}$. Как обычно, с помощью локализации в результате получается вложение

$$W_{\lambda}^{1,p}(\Gamma; F) \subseteq C_{\lambda}^{\mu}(\Gamma; F), \quad \mu = 1 - \frac{1}{p}, \quad (6.15)$$

для любой кусочно гладкой кривой $\Gamma \subseteq \overline{\mathbb{C}}$.

С учетом определения весовых пространств Харди и оценки (2.11) отсюда, в свою очередь, следуют вложения

$$H_{\lambda}^{1,p}(D; F) \subseteq C_{\lambda}^{1,\mu}(D; F), \quad \mu = 1 - \frac{1}{p}. \quad (6.16)$$

Аналогом леммы 2.3 здесь служит следующая

ЛЕММА 6.4. *В условиях леммы 2.3 имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \{\varphi \mid \varphi' \in L_{\lambda-\sigma}^p(\Gamma; F)\} &= W_{(\lambda)}^{1,p}(\Gamma; F), \\ \{\phi \mid \phi' \in H_{\lambda-\sigma}^p(D; F)\} &= H_{(\lambda)}^{1,p}(D; F), \quad 0 < \lambda < 1. \end{aligned} \quad (6.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно провести для первого равенства. Второе равенство является следствием первого и определения весовых пространств Харди.

Как и при доказательстве леммы 2.3, рассмотрим случай гладкой дуги Γ с концом $\tau = 0$. Переходя к ее параметризации, можем также считать Γ отрезком $[0, 1]$ действительной оси. Поскольку функции класса $L_{\lambda-1}^p([0, 1]; 0)$, $0 < \lambda < 1$, суммируемы, первообразная φ производной φ' непрерывна на $[0, 1]$. Поэтому, полагая $\varphi(0) = 0$, ее можно записать в форме

$$\varphi(t_0) = \int_0^{t_0} \varphi'(t) dt = \int_0^{t_0} t^{\lambda-1} \varphi_1(t) dt$$

с некоторой $\varphi_1 \in L_0^p([0, 1]; 0)$. Следовательно,

$$t_0^{-\lambda} \varphi(t_0) = \int_0^1 f\left(\frac{t_0}{t}\right) \varphi(t) \frac{dt}{t}, \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1, \\ t^{-\lambda}, & t \geq 1. \end{cases}$$

Как показано в [21], при выполнении условия $\int_0^{\infty} |f(t)| t^{-1} dt < \infty$ интегральный оператор мультипликативной свертки с функцией f ограничен в пространстве $L_0^p((0, \infty); 0, \infty)$. Поскольку в рассматриваемом случае это условие выполнено, функция φ принадлежит L_{λ}^p с соответствующей оценкой норм. Тем самым равенства (6.17) леммы установлены.

В соответствии с (1.8), (1.10) и леммой 6.4 определение класса $H_{(\lambda)}^{1,p}(D; F)$ можем распространить с J -аналитических функций на решения уравнения (1.1). Тогда с помощью лемм 6.3, 6.4 аналогично теореме 2.1 доказывается ее аналог и для весовых пространств Харди.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть D – верхняя полуплоскость и $F_0 \subseteq \mathbb{R}$. Тогда при $0 < \lambda < 1$ преобразование Бицадзе (1.16) устанавливает изоморфизм между подпространством $\{u \in H_{(\lambda)}^{1,p}(D; F), u(\infty) = 0\}$ решений уравнения (1.1) и аналогичным подпространством аналитических вектор-функций.

Данная теорема позволяет рассматривать в классе $H_{(\lambda)}^{1,p}$, $0 < \lambda < 1$, задачу (1.1), (3.1) при более слабых, чем (3.2), предположениях. Именно, пусть матрицы-функции p , q и p_0 удовлетворяют условиям

$$p, q \in C(\overline{G}), \quad p_0 \in C_{-1}(G; a, b) \quad (6.18)$$

для любого интервала $G = (a, b)$ дополнения $\mathbb{R} \setminus F_0$. В обозначениях (2.4) класс $C_\lambda(G; F)$ здесь определяется для непрерывных на $G \setminus F$ функций условием конечности нормы $|\rho_{-\lambda}\varphi|_0$.

ТЕОРЕМА 6.6. В предположении (6.18) теорема 3.1 сохраняет свою силу и для задачи (1.1), (3.1) в классе $H_{(\lambda)}^{1,p}$, $0 < \lambda < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО осуществляется аналогично теореме 3.1. Некоторого уточнения требует только связь между задачами (3.10) и (3.10'). Первая из них рассматривается в весовом классе Харди $H_{\lambda-\sigma}^p(D; F)$ функций, аналитических в полуплоскости D , а вторая – в “перенесенном” классе функций в единичном круге. Последний класс обозначим $\tilde{H}_{\lambda-\sigma}^p(\tilde{D}; \tilde{F})$. Дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 3.1 проводим без изменений, если выполнено равенство

$$\tilde{H}_\lambda^p(\tilde{D}; \tilde{F}) = H_\lambda^p(\tilde{D}; \tilde{F}) \quad (6.19)$$

для соответствующих пространств функций, аналитических в единичном круге $\tilde{D}$. Очевидно, (6.19) достаточно установить хотя бы для одного весового порядка λ . Выберем $\lambda = -\sigma/p$, когда $\tilde{H}_\lambda^p(D; F)$ соответствует пространству Харди $H^p(D)$ в полуплоскости D . В этом случае равенство (6.19) устанавливает теорема из [20, гл. 8].

С помощью теоремы 6.6 утверждения теоремы 4.1 также можем распространить на задачу (1.1), (4.1) в классе $H_{(\lambda)}^{1,p}$, $0 < \lambda < 1$. Это же относится и к теореме 4.2.

Список литературы

1. Петровский И. Г., *Дифференциальные уравнения. Теория вероятности. Избранные труды*, Наука, М., 1987.
2. Солдадов А. П., “Эллиптические системы высокого порядка”, *Дифференц. уравн.*, **25**:1 (1989), 136–144.
3. Бицадзе А. В., “О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными”, *УМН*, **3**:6 (1948), 211–212.
4. Мусхелишвили Н. И., *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, М., 1968.

5. Солдатов А. П., “Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 1070–1100.
6. Гантмахер Ф. П., *Теория матриц*, Наука, М., 1966.
7. Солдатов А. П., “Граничные свойства интегралов типа Коши”, *Дифференц. уравн.*, **26**:1 (1990), 131–136.
8. Александров А. В., Солдатов А. П., “Граничные свойства интегралов типа Коши. L_p -случай”, *Дифференц. уравн.*, **27**:1 (1991), 3–8.
9. Солдатов А. П., “Задача R для системы Лаврентьева–Бицадзе в весовых классах Харди”, *Дифференц. уравн.*, **38**:10 (2002), 1418–1430.
10. Солдатов А. П., “О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости”, *Дифференц. уравн.*, **39**:5 (2003), 674–686.
11. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1966.
12. Бицадзе А. В., *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*, Наука, М., 1966.
13. Вишик М. И., “О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений”, *Матем. сб.*, **29**:3 (1951), 615–676.
14. Солдатов А. П., Митин С. П., “Об одном классе сильно эллиптических систем”, *Дифференц. уравн.*, **33**:8 (1997), 1118–1122.
15. Мусхелишвили Н. И., *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Наука, М., 1966.
16. Купрадзе В. Д., *Методы потенциала в теории упругости*, Физматгиз, М., 1963.
17. Солдатов А. П., “Система Ламе плоской анизотропной теории упругости”, *Докл. РАН*, **385**:2 (2002), 163–167.
18. Хведелидзе Б. В., “Линейные разрывные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения”, *Тр. Тбил. матем. ин-та АН ГрССР*, **23**, 1957, 3–158.
19. Стейн И., Вейс Г., *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
20. Гофман К., *Банаховы пространства аналитических функций*, ИЛ, М., 1963.
21. Солдатов А. П., “Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно гладкой кривой. I. Операторы типа свертки на полуоси”, *Дифференц. уравн.*, **36**:9 (2000), 1209–1219.

А. П. Солдатов (A. P. SOLDATOV)
Белгородский государственный университет
E-mail: soldatov@bsu.edu.ru

Поступило в редакцию
07.12.2004