Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Р. Акчурин, Р. А. Минлос, Теория рассеяния для одного класса двучастичных операторов математической физики (случай слабого взаимодействия), *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 6, 5–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/im6938>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:34:37

УДК 517.98

Э. Р. Акчурина, Р. А. Минлос

Теория рассеяния для одного класса двучастичных операторов математической физики (случай слабого взаимодействия)

Изучаются спектральные свойства двучастичного оператора A со слабым взаимодействием при размерности пространства $d \geq 3$. Показано, что этот оператор унитарно эквивалентен двучастичному оператору A_0 , полученному из A вычеркиванием членов взаимодействия. Для этого используется специальная диаграммная техника, развитая в настоящей работе.

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: двучастичный оператор, волновые операторы, метод Кука, метод стационарной фазы, диаграммы.

§ 1. Формулировка результата и начало его доказательства

В настоящей статье исследуется спектральная структура некоторого класса так называемых двучастичных операторов, встречающихся в разных разделах математической физики. Это самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$, по правилу

$$\begin{aligned} (Af)(q_1, q_2) &= a(q_1, q_2)f(q_1, q_2) \\ &+ \int_{\Omega_1} D_1(q_1, q_2; p_1)f(p_1, q_2) dp_1 + \int_{\Omega_2} D_2(q_1, q_2; p_2)f(q_1, p_2) dp_2 \\ &+ \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} H(q_1, q_2; p_1, p_2)f(p_1, p_2) dp_1 dp_2, \quad f \in \mathcal{H}, \quad q_i \in \Omega_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Операторы вида (1.1) возникают, например, при изучении двучастичной ветви спектра у гамильтонианов, описывающих квантовые системы с большим (или бесконечным) числом частиц (см., например, [1]–[3]), или у генераторов сложных марковских процессов, в теории упругости, гидродинамике и других разделах механики сплошных сред [4], [5].

В настоящей работе предполагается, что $\Omega_1, \Omega_2 = \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, $a(q_1, q_2) = \omega(q_1) + \omega(q_2)$. Здесь ω – вещественнозначная бесконечно дифференцируемая функция, имеющая единственную критическую точку q_0 – точку невырожденного минимума (можно считать, что $q_0 = 0$) – и неограниченно возрастающая на бесконечности. Кроме того:

1) вне любой окрестности нуля U градиент функции ω по модулю ограничен снизу, $|\nabla\omega| > C = C(U) > 0$;

2) производные $\partial_q^\alpha \omega = (\prod_{k=1}^d \partial_{q_k}^{\alpha_k}) \omega$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $q = (q_1, \dots, q_d)$, растут на бесконечности не быстрее, чем полиномиально: $|(\partial_q^\alpha \omega)(q)| \leq C_1 |q|^m + C_2$, где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $m \geq 0$ – некоторые константы, зависящие от мультииндекса α .

Примерами могут служить функции $\omega(q) = |q|^2$, $\omega(q) = \sqrt{|q|^2 + \mu^2}$.

Относительно ядер D_1 , D_2 и H предполагается, что каждое из них принадлежит своему пространству Шварца $\mathcal{S}$ [6] (по совокупности своих переменных) и, кроме того, выполнены условия

$$\begin{aligned} D_1(q_1, q_2; p_1) &= \overline{D_1(p_1, q_2; q_1)}, & D_2(q_1, q_2; p_2) &= \overline{D_2(q_1, p_2; q_2)}, \\ H(q_1, q_2; p_1, p_2) &= \overline{H(p_1, p_2; q_1, q_2)}, \end{aligned}$$

из которых следует самосопряженность оператора A .

Дополнительно в настоящей работе предполагается, что функции D_1 , D_2 и H достаточно малы, а именно

$$D_i = \delta \overline{D_i}, \quad i = 1, 2, \quad H = \delta \overline{H}, \quad (1.2)$$

где $\overline{D_1}$, $\overline{D_2}$ и $\overline{H}$ не зависят от δ , а $\delta > 0$ – малый параметр¹. Однако, чтобы упростить запись формул, мы почти нигде явно не вводим этот параметр, кроме некоторых оценок (т. е. дальше используются функции D_1 , D_2 и H).

Обозначим через A_0 оператор умножения на функцию $\omega(q_1) + \omega(q_2)$ в $\mathcal{H}$:

$$(A_0 f)(q_1, q_2) = (\omega(q_1) + \omega(q_2)) f(q_1, q_2), \quad f \in \mathcal{H}.$$

Основной результат работы заключен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. *При $d \geq 3$ и указанных выше условиях операторы A и A_0 унитарно эквивалентны.*

Докажем существование сильных пределов

$$W(A, A_0) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itA} e^{-itA_0}, \quad (1.3)$$

$$W(A_0, A) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itA_0} e^{-itA}, \quad (1.4)$$

т. е. волновых операторов (ВО, прямого (1.3) и обратного (1.4)), что и обеспечивает унитарную эквивалентность A и A_0 . Действительно, если эти пределы существуют, то:

1) сужение $A|_{\mathcal{H}_{\text{ac}}}$ оператора A на его абсолютно непрерывное подпространство $\mathcal{H}_{\text{ac}}$ унитарно эквивалентно оператору A_0 (это известный факт из общей теории рассеяния; см. [7], [8]);

2) A не имеет собственных значений (существование $\lambda \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{H}$, $f \neq 0$, таких, что $Af = \lambda f$, несовместимо с существованием обратного ВО (1.4), поскольку предел $W(A_0, A)f = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{it(\omega(q_1) + \omega(q_2) - \lambda)} f$ в данном случае не существует);

3) A не имеет сингулярного спектра (согласно критерию, изложенному в [9], и из приводимого ниже вида его резольвенты $R_A(z) = (A - zE)^{-1}$; см. [10]).

Таким образом, $\mathcal{H}_{\text{ac}} = \mathcal{H}$, откуда и следует утверждение теоремы.

¹Если в предыдущем абзаце черта сверху означает комплексное сопряжение, то здесь это просто элемент обозначения функции.

ЛЕММА 1.1. *Оператор $W(A, A_0)$ существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства существования прямого волнового оператора (1.3) воспользуемся методом Кука [8]. Пусть $V = A - A_0$. Согласно этому методу достаточно показать, что для каждого φ из всюду плотного в $\mathcal{H}$ множества элементов верно неравенство

$$\int_0^\infty \|V e^{-itA_0} \varphi\| dt < \infty, \quad (1.5)$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)}$ – гильбертова норма в $\mathcal{H}$.

Возьмем в качестве всюду плотного множества $\{\varphi\}$ пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ и введем операторы $\widehat{D}_1$, $\widehat{D}_2$, $\widehat{H}$ в $\mathcal{H}$, действие которых на функцию $f \in \mathcal{H}$ совпадает с соответствующим слагаемым в (1.1). Тогда

$$V e^{-itA_0} \varphi = \widehat{D}_1 e^{-itA_0} \varphi + \widehat{D}_2 e^{-itA_0} \varphi + \widehat{H} e^{-itA_0} \varphi. \quad (1.6)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (1.6). Воспользовавшись представлением

$$D_1(q_1, q_2; p_1) = \frac{\widetilde{D}_1(q_1, q_2; p_1)}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)]^d}, \quad (1.7)$$

где $\widetilde{D}_1(q_1, q_2; p_1)$ по-прежнему является функцией из пространства Шварца, получим

$$(\widehat{D}_1 e^{-itA_0} \varphi)(q_1, q_2) = \frac{e^{-it\omega(q_2)}}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)]^d} \int \widetilde{D}_1(q_1, q_2; p_1) \varphi(p_1, q_2) e^{-it\omega(p_1)} dp_1. \quad (1.8)$$

Используя метод стационарной фазы [11], последний интеграл можно при больших t представить в виде

$$\frac{\Pi(q_1, q_2; t)}{(t+1)^{d/2}}, \quad (1.9)$$

где $\Pi(q_1, q_2; t)$ – ограниченная функция:

$$\sup_{q_1, q_2, t} |\Pi(q_1, q_2; t)| \leq C(\varphi) < \infty.$$

Здесь $C(\varphi)$ – некоторый функционал на пространстве Шварца (явный вид этого функционала, даже для более общего случая, приведен в § 4). Из соотношений (1.8) и (1.9) следует, что

$$\int_0^\infty \|\widehat{D}_1 e^{-itA_0} \varphi\| dt < \infty.$$

Аналогично оцениваются вклады остальных членов суммы (1.6) в неравенство (1.5). Таким образом, при $d \geq 3$ выполнено неравенство (1.5) и существование прямого ВО (1.3) доказано.

Для доказательства существования обратного ВО (1.4) вновь воспользуемся методом Кука. Наша цель – показать, что для каждого $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$

$$\int_0^\infty \|V e^{-itA} \varphi\| dt < \infty.$$

Учитывая (1.5), достаточно показать, что для любого $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$

$$\int_0^\infty \|V(e^{-itA} - e^{-itA_0})\varphi\| dt < \infty. \quad (1.10)$$

Поскольку доказательство неравенства (1.10) складывается из многих шагов, сопровождаемых порой длинными выкладками, приведем сначала краткую схему этого доказательства.

§ 2. План доказательства существования обратного ВО

Опишем кратко последовательность действий, которая приводит к доказательству неравенства (1.10).

2.1. Переход к резольвенте. Исходя из известного представления [12]

$$e^{-itB} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{-itz} R_B(z) dz,$$

где B – самосопряженный оператор, $R_B(z)$ – его резольвента, а γ – контур в комплексной плоскости, обходящий по часовой стрелке спектр оператора B , мы приходим к равенству

$$V(e^{-itA} - e^{-itA_0})\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{-itz} V(R_A(z) - R_{A_0}(z))\varphi dz, \quad (2.1)$$

где $\gamma = l_- \cup l_+$ – пара прямых $l_\pm = \{z = x \pm i\varepsilon : x \in \mathbb{R}\}$, $\varepsilon > 0$ (обходимая по часовой стрелке).

2.2. Формула для $R_A(z)$. Далее мы получим формулу для действия резольвенты $R_A(z) = (A - zE)^{-1}$ оператора A на функцию $\varphi \in \mathcal{H}$. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество $\mathbb{C} \setminus [2\kappa, \infty)$, где $\kappa = \min_q \omega(q)$.

ЛЕММА 2.1. *При сформулированных выше условиях и $z \in \mathcal{E}$ имеет место формула*

$$\begin{aligned} (R_A(z)\varphi)(q_1, q_2) &= \frac{\varphi(q_1, q_2)}{\omega(q_1) + \omega(q_2) - z} \\ &+ \int L_1(q_1, q_2; p_1)\varphi(p_1, q_2) dp_1 + \int L_2(q_1, q_2; p_2)\varphi(q_1, p_2) dp_2 \\ &+ \iint M(q_1, q_2; p_1, p_2)\varphi(p_1, p_2) dp_1 dp_2, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где ядра $L_1(q_1, q_2; p_1)$, $L_2(q_1, q_2; p_2)$ и $M(q_1, q_2; p_1, p_2)$ являются ограниченными гладкими функциями своих аргументов и порождаемые ими операторы $\widehat{L}_1$, $\widehat{L}_2$, $\widehat{M}$ (например, $(\widehat{L}_1 f)(q_1, q_2) = \int L_1(q_1, q_2; p_1)f(p_1, q_2) dp_1$ и аналогичные для $\widehat{L}_2$ и $\widehat{M}$) ограничены в норме $\mathcal{H}$. Кроме того, функции L_1 , L_2 , M аналитически зависят от $z \in \mathcal{E}$ (для краткости обозначений эту переменную мы выписывать не будем).

Доказательство леммы 2.1 приведено в § 3.

2.3. Сведение к оценкам $J_{i,j}$. Напомним, что оператор V записывается в виде

$$V = \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 + \widehat{H}, \quad (2.3)$$

где операторы $\widehat{D}_1, \widehat{D}_2, \widehat{H}$ были введены выше.

Заметив, далее, что

$$(R_{A_0}(z)\varphi)(q_1, q_2) = \frac{\varphi(q_1, q_2)}{\omega(q_1) + \omega(q_2) - z}, \quad (2.4)$$

и воспользовавшись (2.2) и (2.3), получим, что правая часть в (2.1) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-itz} \left(\sum_{i,j=1,2} \widehat{D}_i \widehat{L}_j + \sum_{i=1,2} \widehat{D}_i \widehat{M} + \sum_{j=1,2} \widehat{H} \widehat{L}_j + \widehat{H} \widehat{M} \right) \varphi dz. \quad (2.5)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J_{i,j}(q_1, q_2; t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-itz} ((\widehat{D}_i \widehat{L}_j)\varphi)(q_1, q_2) dz, & i, j = 1, 2, \\ J_{i,0}(q_1, q_2; t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-itz} ((\widehat{D}_i \widehat{M})\varphi)(q_1, q_2) dz, & i = 1, 2, \\ J_{0,j}(q_1, q_2; t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-itz} ((\widehat{H} \widehat{L}_j)\varphi)(q_1, q_2) dz, & j = 1, 2, \\ J_{0,0}(q_1, q_2; t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-itz} ((\widehat{H} \widehat{M})\varphi)(q_1, q_2) dz. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Как видно из (2.1) и (2.5), оценка (1.10) следует из неравенств

$$\int_0^{\infty} \|J_{i,j}(\cdot, \cdot; t)\| dt < \infty, \quad i, j = 0, 1, 2. \quad (2.7)$$

Мы выведем неравенство (2.7) для двух случаев: $i = j = 1$ и $i = 1, j = 0$. Остальные интегралы в (2.6) оцениваются аналогично одному из этих двух.

2.4. Оценка $J_{1,1}$. Для получения оценки (2.7) интеграла $J_{1,1}$ рассмотрим разложение ядра $L_1(q_1, q_2; p)$ в ряд:

$$L_1(q_1, q_2; p) = \sum_{n=1}^{\infty} L_1^{(n)}(q_1, q_2; p), \quad (2.8)$$

приведенное в § 3 (см. (3.16)–(3.19)).

Разложение (2.8) порождает разложение

$$J_{1,1}(q_1, q_2; t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_{1,1}^{(n)}(q_1, q_2; t), \quad (2.9)$$

где

$$J_{1,1}^{(n)}(q_1, q_2; t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-itz} ((\widehat{D}_1 \widehat{L}_1^{(n)})\varphi)(q_1, q_2) dz. \quad (2.10)$$

Здесь $\widehat{L}_1^{(n)}$ – ограниченный оператор в $\mathcal{H}$, порождаемый ядром $L_1^{(n)}(q_1, q_2; p)$ (см. выше).

С помощью явных выражений для функций $J_{1,1}^{(n)}(q_1, q_2; t)$, которые выводятся из (2.10), мы устанавливаем в § 4 следующую оценку.

ЛЕММА 2.2. *Для любого $n = 1, 2, \dots$ верно неравенство*

$$\int_0^\infty \|J_{1,1}^{(n)}(\cdot, \cdot; t)\| dt \leq B(C\delta)^{n+2} \left(\int_0^\infty \frac{d\tau}{(\tau+1)^{d/2}} \right)^{n+2}, \quad (2.11)$$

где $B > 0$ и $C > 0$ – некоторые константы, не зависящие от n , а $\delta > 0$ – малый параметр (см. (1.2)).

Из оценки (2.11) и разложения (2.9) следует, что при достаточно малых δ верно неравенство (2.7) для случая $i = j = 1$.

2.5. Оценка $J_{1,0}$. Функция $J_{1,0}(q_1, q_2; t)$, как мы увидим далее (см. § 5), представляется уже довольно сложным рядом:

$$J_{1,0}(q_1, q_2; t) = \sum_{\Gamma} I_{\Gamma}(q_1, q_2; t), \quad (2.12)$$

где функция $I_{\Gamma}(q_1, q_2; t)$ определена ниже, а суммирование происходит по некоторому классу диаграмм Γ . *Диаграмма Γ в общем случае определяется:*

а) целым числом $n = n(\Gamma) \geq 0$;

б) набором $S_{\Gamma} := \{q_1, q_2; r_1, \dots, r_n; p_1, p_2\}$ переменных, принадлежащих $\mathbb{R}^d$, где $\{q_1, q_2, p_1, p_2\}$ – *внешние* переменные, а $\{r_j\}_{j=1}^n$ – *внутренние* переменные диаграммы Γ , причем (q_1, q_2) называются *входными*, а (p_1, p_2) – *выходными* переменными;

в) графом E_{Γ} , множество вершин которого совпадает либо со всем набором S_{Γ} , либо с его частью;

г) функцией $W_{\Gamma}(q_1, q_2; r_1, \dots, r_n; p_1, p_2)$ от переменных набора S_{Γ} , называемой *весом* диаграммы Γ , гладкой, быстро убывающей на бесконечности (вместе со своими производными), не зависящей от переменной z .

В § 5 будет приведено подробное описание класса тех диаграмм, которые участвуют в суммировании (2.12).

Каждой диаграмме Γ сопоставляется функция

$$B_{\Gamma}(q_1, q_2; p_1, p_2; z) = \int \frac{W_{\Gamma}(q_1, q_2; r_1, \dots, r_n; p_1, p_2)}{\prod_{e \in E_{\Gamma}} (\omega(y_1) + \omega(y_2) - z)} \prod_{j=1}^n dr_j, \quad z \in \mathcal{E}, \quad (2.13)$$

называемая *вкладом* диаграммы. Произведение в знаменателе берется по всем ребрам $e = (y_1, y_2)$ графа E_{Γ} ; $y_1, y_2 \in S_{\Gamma}$.

Функция $I_{\Gamma}(q_1, q_2; t)$ в (2.12) имеет вид

$$I_{\Gamma}(q_1, q_2; t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-itz} \int B_{\Gamma}(q_1, q_2; p_1, p_2; z) \varphi(p_1, p_2) dp_1 dp_2 dz, \quad (2.14)$$

а функция φ – та же, что и в формулах (2.6).

В § 6 выведена следующая оценка.

ЛЕММА 2.3. *Верно неравенство*

$$\int_0^\infty \|I_\Gamma(\cdot, \cdot; t)\| dt \leq \overline{B}(\overline{C}\delta^{1/4})^{n(\Gamma)} \left(\int_0^\infty \frac{2d\tau}{(\tau+2)^{d/2}} \right)^{|E_\Gamma|}. \quad (2.15)$$

Из оценки (2.15), а также из подсчета числа диаграмм, входящих в сумму (2.12), число $n(\Gamma)$ которых фиксировано, непосредственно выводится при малых δ оценка (2.6) для случая $i = 1, j = 0$. Вместе с аналогичными оценками для остальных функций $J_{i,j}(q_1, q_2; t)$ мы установим неравенство (1.10), т. е. существование обратного волнового оператора (1.4).

Здесь мы заканчиваем краткий обзор доказательства неравенства (1.10) и переходим к последовательному и подробному его изложению.

§ 3. Резольвента оператора A

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Ядро (обобщенное) оператора $A - zE$ имеет вид

$$(A - zE)(q_1, q_2; p_1, p_2) = (\omega(q_1) + \omega(q_2) - z)\delta(q_1 - p_1)\delta(q_2 - p_2) + D_1(q_1, q_2; p_1)\delta(p_2 - q_2) + D_2(q_1, q_2; p_2)\delta(p_1 - q_1) + H(q_1, q_2; p_1, p_2). \quad (3.1)$$

Запишем предположительно обобщенное ядро оператора $(A - zE)^{-1}$ в виде

$$(A - zE)^{-1}(q_1, q_2; p_1, p_2) = \frac{1}{\omega(q_1) + \omega(q_2) - z}\delta(q_1 - p_1)\delta(q_2 - p_2) + L_1(q_1, q_2; p_1)\delta(p_2 - q_2) + L_2(q_1, q_2; p_2)\delta(p_1 - q_1) + M(q_1, q_2; p_1, p_2), \quad (3.2)$$

где функции L_1, L_2 и M подлежат определению.

Воспользуемся тождеством

$$\int (A - zE)(q_1, q_2; s_1, s_2)(A - zE)^{-1}(s_1, s_2; p_1, p_2) ds_1 ds_2 = \delta(p_1 - q_1)\delta(p_2 - q_2)$$

и подставим в него выражения (3.1) и (3.2). Группируя члены с одинаковыми δ -функциями, мы получим уравнения

$$\begin{aligned} (\omega(q_1) + \omega(q_2) - z)L_1(q_1, q_2; p_1) + \int D_1(q_1, q_2; \tilde{p}_1)L_1(\tilde{p}_1, q_2; p_1) d\tilde{p}_1 \\ = -\frac{D_1(q_1, q_2; p_1)}{\omega(p_1) + \omega(q_2) - z}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} (\omega(q_1) + \omega(q_2) - z)L_2(q_1, q_2; p_2) + \int D_2(q_1, q_2; \tilde{p}_2)L_2(q_1, \tilde{p}_2; p_2) d\tilde{p}_2 \\ = -\frac{D_2(q_1, q_2; p_2)}{\omega(q_1) + \omega(p_2) - z}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$((A - zE)M)(q_1, q_2; p_1, p_2) = \Phi(q_1, q_2; p_1, p_2), \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned}
 -\Phi(q_1, q_2; p_1, p_2) &= \frac{H(q_1, q_2; p_1, p_2)}{\omega(p_1) + \omega(p_2) - z} + D_1(q_1, q_2; p_1)L_2(p_1, q_2; p_2) \\
 &+ D_2(q_1, q_2; p_2)L_1(q_1, p_2; p_1) + \int H(q_1, q_2; \tilde{p}_1, p_2)L_1(\tilde{p}_1, p_2; p_1) d\tilde{p}_1 \\
 &+ \int H(q_1, q_2; p_1, \tilde{p}_2)L_2(p_1, \tilde{p}_2; p_2) d\tilde{p}_2.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Мы можем переписать уравнение (3.5) в виде

$$M(q_1, q_2; p_1, p_2) = ((A - zE)^{-1}\Phi)(q_1, q_2; p_1, p_2),$$

откуда, учитывая (3.2), получаем

$$M(q_1, q_2; p_1, p_2) - \iint \Phi(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2; p_1, p_2)M(q_1, q_2; \tilde{p}_1, \tilde{p}_2) d\tilde{p}_1 d\tilde{p}_2 = \Psi(q_1, q_2; p_1, p_2), \tag{3.7}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Psi(q_1, q_2; p_1, p_2) &= \frac{\Phi(q_1, q_2; p_1, p_2)}{\omega(q_1) + \omega(q_2) - z} + \int L_1(q_1, q_2; \tilde{p}_1)\Phi(\tilde{p}_1, q_2; p_1, p_2) d\tilde{p}_1 \\
 &+ \int L_2(q_1, q_2; \tilde{p}_2)\Phi(q_1, \tilde{p}_2; p_1, p_2) d\tilde{p}_2.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для решения уравнения (3.3) введем функцию

$$\tilde{L}_1(q_1, q_2; p_1) = (\omega(q_1) + \omega(q_2) - z)L_1(q_1, q_2; p_1) \tag{3.9}$$

и перепишем (3.3) в виде

$$\tilde{L}_1(q_1, q_2; p_1) + \int \frac{D_1(q_1, q_2; \tilde{p}_1)\tilde{L}_1(\tilde{p}_1, q_2; p_1) d\tilde{p}_1}{\omega(q_2) + \omega(\tilde{p}_1) - z} = \frac{D_1(q_1, q_2; p_1)}{\omega(p_1) + \omega(q_2) - z}. \tag{3.10}$$

Семейство операторов $\hat{T}_{q_2, z}$, $q_2 \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathcal{E}$, с ядрами

$$T_{q_2, z}(q, p) = -\frac{\delta \bar{D}_1(q, q_2; p)}{\omega(q_2) + \omega(p) - z}$$

(мы использовали представление (1.2) для D_1), действующих в пространстве $C^1(\mathbb{R}^d)$ гладких ограниченных функций, является равномерно ограниченным и непрерывным, и для всех $q_2 \in \mathbb{R}^d$ и $z \in \bar{\mathcal{E}}$ (здесь $\bar{\mathcal{E}}$ – замыкание $\mathcal{E}$, включающее оба берега разреза $[2\kappa, \infty)$) их норма не превосходит $C\delta$, где $C > 0$ – некоторая константа, не зависящая от q_2 и $z \in \bar{\mathcal{E}}$. При $d \geq 3$ это следует из невырожденности критической точки функции $\omega(q)$, известной леммы Привалова о предельных значениях сингулярных интегралов (см. [13], [14]) и принципа максимума для аналитических функций. Таким образом, решение $\tilde{L}_1(q_1, q_2; p_1)$ уравнения (3.10) при достаточно малых δ может быть представлено в виде ряда Неймана

$$\tilde{L}_1(q_1, q_2; p_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{L}_1^{(n)}(q_1, q_2; p_1), \tag{3.11}$$

где

$$\tilde{L}_1^{(0)}(q_1, q_2; p_1) = \frac{D_1(q_1, q_2; p_1)}{\omega(q_2) + \omega(p_1) - z} \quad (3.12)$$

и при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_1^{(n)}(q_1, q_2; p_1) &= (\widehat{T}_{q_2, z}^n D_1(\cdot, q_2; p_1))(q_1) \frac{1}{\omega(q_2) + \omega(p_1) - z} \\ &= \frac{\delta^2}{(|q_1|^2 + 1)^d (|p_1|^2 + 1)^d} \int \frac{\tilde{D}_1(q_1, q_2; \sigma)}{\omega(q_2) + \omega(\sigma) - z} ((\widehat{T}_{q_2, z}^{n-1} \tilde{D}_1(\cdot, q_2; p_1))(\sigma) d\sigma \\ &\quad \times \frac{1}{\omega(q_2) + \omega(p_1) - z}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где совершены замены

$$\overline{D}_1(q_1, q_2; p_1) = \frac{\tilde{D}(q_1, q_2; p_1)}{(|q_1|^2 + 1)^d}, \quad \tilde{D}_1(q_1, q_2; p_1) = \frac{\tilde{\tilde{D}}_1(q_1, q_2; p_1)}{(|p_1|^2 + 1)^d}.$$

Вводя функции

$$L_1^{(n)}(q_1, q_2; p_1) = \frac{\tilde{L}_1^{(n)}(q_1, q_2; p_1)}{\omega(q_1) + \omega(q_2) - z}, \quad (3.14)$$

мы получаем оценки

$$|L_1^{(n)}(q_1, q_2; p_1)| \leq \frac{B(C\delta)^{n+1}}{[(|q_1|^2 + 1)(|p_1|^2 + 1)]^d} \frac{1}{\rho^2(z)}, \quad (3.15)$$

где $B > 0$ – некоторая константа, а $\rho(z) = \min_{x \in [2\kappa, \infty)} |z - x|$ – расстояние от точки $z \in \mathcal{E}$ до луча $[2\kappa, \infty)$. При этом

$$L_1(q_1, q_2; p_1) = \sum_{n=0}^{\infty} L_1^{(n)}(q_1, q_2; p_1), \quad (3.16)$$

где ряд поточечно сходится и функция L_1 удовлетворяет оценке, аналогичной оценке (3.15) с заменой множителя $(C\delta)^{n+1}$ в числителе множителем $C'\delta$.

Поскольку норма $\|\widehat{L}_1\|_{\mathcal{H}}$ оператора $\widehat{L}_1$ допускает оценку

$$\|\widehat{L}_1\|_{\mathcal{H}} \leq \left(\int \sup_{q_2} |L_1(q_1, q_2; p_1)|^2 dp_1 dq_1 \right)^{1/2},$$

из (3.15) и (3.16) следует, что оператор $\widehat{L}_1$ ограничен в $\mathcal{H}$ при любом $z \in \mathcal{E}$.

Из (3.12)–(3.14) вытекает следующее выражение для $L_1^{(n)}(q_1, q_2; p_1)$, которое нам понадобится в дальнейшем: при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} L_1^{(n)}(q_1, q_2; p_1) &= \int \frac{W_{L_1^{(n)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_{i=1}^n; p_1)}{\prod_{i=1}^n (\omega(\sigma_i) + \omega(q_2) - z)} \prod_{i=1}^n d\sigma_i \\ &\quad \times [(\omega(q_1) + \omega(q_2) - z)(\omega(p_1) + \omega(q_2) - z)]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$W_{L_1^{(n)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_{i=1}^n; p_1) = D_1(q_1, q_2; \sigma_1) \prod_{i=1}^{n-1} D_1(\sigma_i, q_2; \sigma_{i+1}) D_1(\sigma_n, q_2; p_1), \quad (3.18)$$

и при $n = 0$

$$L_1^{(0)}(q_1, q_2; p_1) = D_1(q_1, q_2; p_1) [(\omega(q_1) + \omega(q_2) - z)(\omega(p_1) + \omega(q_2) - z)]^{-1}. \quad (3.19)$$

Аналогичные представления и оценки верны и для функции $L_2(q_1, q_2; p_2)$.

Переходя к решению уравнения (3.7) относительно функции $M(q_1, q_2; p_1, p_2)$, мы (пока чисто формально) запишем это решение в виде ряда Неймана

$$M(q_1, q_2; p_1, p_2) = \sum_{k=0}^{\infty} M^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2), \quad (3.20)$$

где

$$M^{(0)}(q_1, q_2; p_1, p_2) = \Psi(q_1, q_2; p_1, p_2)$$

и при $k \geq 1$

$$\begin{aligned} M^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2) = & \int \cdots \int \Psi(q_1, q_2; s_1^{(1)}, s_2^{(1)}) \Phi(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}; s_1^{(2)}, s_2^{(2)}) \\ & \times \Phi(s_1^{(2)}, s_2^{(2)}; s_1^{(3)}, s_2^{(3)}) \cdots \Phi(s_1^{(k)}, s_2^{(k)}; p_1, p_2) \prod_{i=1}^k ds_1^{(i)} ds_2^{(i)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Оценим функцию $M^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2)$. Заметим предварительно, что, как это видно из (3.6) и (3.8), функции Φ и Ψ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Phi(q_1, q_2; p_1, p_2) &= \tilde{\Phi}(q_1, q_2; p_1, p_2) \frac{1}{\omega(p_1) + \omega(p_2) - z}, \\ \Psi(q_1, q_2; p_1, p_2) &= \frac{1}{\omega(q_1) + \omega(q_2) - z} \tilde{\Psi}(q_1, q_2; p_1, p_2), \end{aligned} \quad (3.22)$$

а также

$$\tilde{\Psi}(q_1, q_2; p_1, p_2) = \tilde{\tilde{\Psi}}(q_1, q_2; p_1, p_2) \frac{1}{\omega(p_1) + \omega(p_2) - z}.$$

Функция $\tilde{\Phi}(q_1, q_2; p_1, p_2)$ образуется вычеркиванием в выражении (3.6) множителя $\omega(p_1) + \omega(p_2) - z$ в знаменателе у всех слагаемых. Аналогично определяются $\tilde{\tilde{\Psi}}$ и $\tilde{\Psi}$ из формулы (3.8). Таким образом, функция $M^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2)$ при $k \geq 1$ может быть представлена в виде

$$M^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2) = (\omega(q_1) + \omega(q_2) - z)^{-1} \tilde{M}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2) (\omega(p_1) + \omega(p_2) - z)^{-1}, \quad (3.23)$$

где при $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2) = & \int \cdots \int \tilde{\tilde{\Psi}}(q_1, q_2; s_1^{(1)}, s_2^{(1)}) \Phi(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}; s_1^{(2)}, s_2^{(2)}) \times \cdots \\ & \cdots \times \Phi(s_1^{(k-1)}, s_2^{(k-1)}; s_1^{(k)}, s_2^{(k)}) \tilde{\tilde{\Phi}}(s_1^{(k)}, s_2^{(k)}; p_1, p_2) \prod_{i=1}^k ds_1^{(i)} ds_2^{(i)}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\tilde{M}^{(0)}(q_1, q_2; p_1, p_2) = \tilde{\tilde{\Psi}}(q_1, q_2; p_1, p_2).$$

ЛЕММА 3.1. *При каждом $k \geq 0$ верна оценка*

$$|\widetilde{M}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2)| \leq B(C\delta^{1/4})^{k+1} [(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)(|p_1|^2 + 1)(|p_2|^2 + 1)]^{-d}, \quad (3.25)$$

где $C > 0$ и $B > 0$ – некоторые константы.

Доказательство леммы 3.1 приведено в § 6. Из нее следует, что ряд

$$\widetilde{M}(q_1, q_2; p_1, p_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{M}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2) \quad (3.26)$$

сходится и его сумма удовлетворяет оценке, подобной (3.25) (с заменой $(C\delta)^{k+1}$ на $C'\delta$). Отсюда вытекает, что оператор $\widehat{M}$ с ядром $\widetilde{M}$ является оператором Гильберта–Шмидта, следовательно, он ограничен в $\mathcal{H}$. Этим же свойством обладает оператор $\widehat{M}$, ядро которого есть

$$M(q_1, q_2; p_1, p_2) = (\omega(q_1) + \omega(q_2) - z)^{-1} \widetilde{M}(q_1, q_2; p_1, p_2) (\omega(p_1) + \omega(p_2) - z)^{-1}. \quad (3.27)$$

Теперь следует убедиться в том, что функция M в (3.27) действительно является решением уравнения (3.7). Заметим, что для z из области $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E} \subset \mathbb{C}$, достаточно далеко удаленной от луча $[2\kappa, \infty)$, норма оператора $\widehat{\Phi}$ (как оператора в пространстве $C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$) становится меньше единицы и сумма ряда Неймана (3.20) есть решение уравнения (3.7). Поскольку функции Φ и Ψ аналитически зависят от $z \in \mathcal{E}$, построенная нами функция M , также аналитически зависящая от $z \in \mathcal{E}$ и совпадающая с решением уравнения (3.7) при $z \in \mathcal{E}_0$, является решением этого уравнения уже для всех $z \in \mathcal{E}$.

Итак, лемма 2.1 доказана, т. е. построена резольвента оператора A .

§ 4. Оценка функции $J_{1,1}^{(n)}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2. Из формул (2.10), (3.17)–(3.19) мы получим следующее представление функции $J_{1,1}^{(n)}(q_1, q_2; t)$ при $t > 0$:

$$\begin{aligned} J_{1,1}^{(n)}(q_1, q_2; t) &= \int_{l_+} e^{-itz} \int \cdots \int D_1(q_1, q_2; \sigma_0) \\ &\quad \times \frac{\prod_{j=0}^n D_1(\sigma_j, q_2; \sigma_{j+1}) \varphi(\sigma_{n+1}, q_2)}{\prod_{j=0}^{n+1} (\omega(\sigma_j) + \omega(q_2) - z)} \prod_{j=0}^{n+1} d\sigma_j dz. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь мы оставили от контура $\gamma = l_- \cup l_+$ лишь l_+ , потому что при $t > 0$ рассматриваемый интеграл по l_- равен нулю (не будучи зависимым от $\varepsilon > 0$, он стремится к нулю, когда $\varepsilon \rightarrow \infty$). При этом в силу гладкости функции, стоящей в числителе под внутренним интегралом в (4.1), этот интеграл имеет предел при выходе $z = x + i\varepsilon$ на верхний берег разреза $[2\kappa, \infty)$ (см. [13], [14]). Поэтому можно считать, что $l_+ = \{x + i0: x \in \mathbb{R}\}$.

Представим, таким образом, (4.1) в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} dx \int_{(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d)^{n+2}} \prod_{j=0}^{n+1} \left\{ dx_j d\sigma_j e^{-i\tau_j x_j} \delta(x - x_j) \frac{D_1(\sigma_j, q_2; \sigma_{j+1})}{\omega(\sigma_j) + \omega(q_2) - x_j - i0} \right\} \\ \times D_1(q_1, q_2; \sigma_0) \varphi(\sigma_{n+1}, q_2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^{n+1}$ – набор положительных чисел, сумма которых равна t , $\delta(\cdot)$ – дельта-функция на $\mathbb{R}$, а множитель $D_1(\sigma_{n+1}, q_2; \sigma_{n+2})$ в фигурных скобках отсутствует, и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} K(q_1, q_2; \tau_0, \dots, \tau_{n+1}) &= \int_{(\mathbb{R}^1)^{n+2}} \prod_{j=0}^{n+1} e^{-i\tau_j x_j} dx_j \int_{(\mathbb{R}^d)^{n+2}} D_1(q_1, q_2; \sigma_0) \\ &\times \prod_{j=0}^n \left(\frac{D_1(\sigma_j, q_2; \sigma_{j+1})}{\omega(\sigma_j) + \omega(q_2) - x_j - i0} \right) \frac{\varphi(\sigma_{n+1}, q_2)}{\omega(\sigma_{n+1}) + \omega(q_2) - x_{n+1} - i0} \prod_{j=0}^{n+1} d\sigma_j. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Внутренний интеграл в (4.2) можно рассматривать как преобразование Фурье по переменным $x_0, \dots, x_{n+1}$ от произведения двух функций: обобщенной функции $\prod_{j=0}^{n+1} \delta(x - x_j)$ и функции, задаваемой внутренним интегралом в (4.3). Поскольку произведение двух функций после преобразования Фурье переходит в свертку образов Фурье этих функций, мы получаем, что функция $J_{1,1}^{(n)}(q_1, q_2; t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^1} dx \int_{(\mathbb{R}^1)^{n+2}} K(q_1, q_2; \tau'_0, \dots, \tau'_{n+1}) \prod_{j=0}^{n+1} e^{-i(\tau_j - \tau'_j)x} \prod_{j=0}^{n+1} d\tau'_j \\ &= 2\pi \int_{(\mathbb{R}^1)^{n+2}} K(q_1, q_2; \tau'_0, \dots, \tau'_{n+1}) \delta\left(t - \sum_{j=0}^{n+1} \tau'_j\right) \prod_{j=0}^{n+1} d\tau'_j \\ &= 2\pi \int_{\{\sum_{j=0}^{n+1} \tau'_j = t\}} K(q_1, q_2; \tau'_0, \dots, \tau'_{n+1}) \prod_{j=0}^{n+1} d\tau'_j. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь мы воспользовались тождеством (см. [6])

$$\int_{\mathbb{R}^1} e^{-ixy} dx = 2\pi \delta(y), \quad y \in \mathbb{R}^1.$$

ЛЕММА 4.1. *Функция $K(q_1, q_2; \tau_0, \dots, \tau_{n+1})$ допускает оценку*

$$|K(q_1, q_2; \tau_0, \dots, \tau_{n+1})| \leq \frac{B(\overline{C}\delta)^{n+2}}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)]^d} \prod_{j=0}^{n+1} \frac{\theta(\tau_j)}{(\tau_j + 1)^{d/2}} \cdot b(\varphi), \quad (4.5)$$

где $B > 0$, $\overline{C} > 0$ – константы, зависящие только от ω и D_1 , а константа $b(\varphi)$ зависит от функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ и нескольких ее первых производных. Функция $\theta(\tau)$ имеет вид

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leq 0. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Из (4.4) и (4.5) вытекает, что*

$$\int_0^\infty \|J_{1,1}^{(n)}(\cdot, \cdot; t)\| dt \leq 2\pi B(C\delta)^{n+2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dq}{(|q|^2 + 1)^{2d}} \left(\int_0^\infty \frac{d\tau}{(\tau + 1)^{d/2}} \right)^{n+2}, \quad (4.6)$$

а значит, при малых $\delta > 0$ выполнено условие (2.7) для $i = j = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. В интеграле правой части (4.3) произведем интегрирование по переменным $x_0, \dots, x_{n+1}$ и, пользуясь равенством

$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{e^{-i\tau x} dx}{\omega(\sigma) + \omega(q_2) - x - i0} = -2\pi i e^{-i\tau\omega(q_2) - i\tau\omega(\sigma)} \theta(\tau), \quad (4.7)$$

получим, что интеграл (4.3) преобразуется в интеграл

$$\begin{aligned} & (-2\pi i)^{n+2} \prod_{j=0}^{n+1} e^{-i\tau_j \omega(q_2)} \theta(\tau_j) \frac{\delta^{n+2}}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)]^d} \int \tilde{D}_1(q_1, q_2; \sigma_0) \\ & \times \prod_{j=0}^n \overline{D}_1(\sigma_j, q_2; \sigma_{j+1}) \varphi(\sigma_{n+1}, q_2) \prod_{j=0}^{n+1} e^{-i\tau_j \omega(\sigma_j)} d\sigma_j, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где мы воспользовались представлениями (1.2) и (1.7).

Здесь нам понадобится утверждение, доказательство которого получается с помощью метода стационарной фазы (см. подробнее об этом в [11]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $f(r_0, \dots, r_l)$, $r_j \in \mathbb{R}^d$, $j = 0, \dots, l$, – функция из пространства Шварца $\mathcal{S}((\mathbb{R}^d)^{l+1})$. Тогда интеграл

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{l+1}} \prod_{j=0}^l e^{-i\tau_j \omega(r_j)} f(r_0, \dots, r_l) \prod_{j=0}^l dr_j$$

равен

$$\prod_{j=0}^l \frac{1}{(|\tau_j| + 1)^{d/2}} \cdot G(\tau_0, \dots, \tau_l), \quad (4.9)$$

где G – ограниченная функция, допускающая оценку

$$|G(\tau_0, \dots, \tau_l)| \leq C^{l+1} \sum_{V \subseteq \{0, \dots, l\}} \sum_{\substack{\{\alpha_j\}_{j=0}^l \\ |\alpha_j| \leq 2, j \in V \\ |\alpha_j| \leq 1, j \in V'}} \int \prod_{j \in V'} dr_j \max_{\{r_j, j \in V\}} \left| \left(\prod_j \partial_{r_j}^{\alpha_j} \right) f(\{r_j\}) \right|. \quad (4.10)$$

Здесь $C > 0$ – константа, зависящая от функции ω и размерности d , а суммирование во внешней сумме происходит по всем подмножествам V из $\{0, \dots, l\}$, $V' = \{0, \dots, l\} \setminus V$, $\alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(d)})$ – мультииндекс и $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha^{(i)}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть функция f имеет вид

$$f(r_0, \dots, r_l) = \prod_{u=1}^m g_u(\{r_j, j \in \Delta_u\}), \quad (4.11)$$

где $\Delta_u \subseteq \{0, \dots, l\}$, $u = 1, \dots, m$, причем $\bigcup_u \Delta_u = \{0, \dots, l\}$, а $g_1, \dots, g_m$ – функции из пространства Шварца соответствующего числа переменных $h_u = |\Delta_u|$. Для каждого j обозначим через $\chi_j \subseteq \{1, \dots, m\}$ множество тех u , для

которых $j \in \Delta_u$, а через $\varkappa_j$ обозначим мощность χ_j . Тогда для функции G из (4.9) верно неравенство

$$|G(\tau_0, \dots, \tau_l)| \leq C^{d+1} \prod_{u=1}^m B_u \prod_{j=0}^l \left(\frac{\varkappa_j(\varkappa_j + 1)}{2} d^2 + 2\varkappa_j d + 2 \right), \quad (4.12)$$

где $\{B_u = B_u(g_u)\}$ – константы, каждая из которых зависит от функции g_u и нескольких ее первых производных, $C > 0$ – константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого j

$$\partial_{r_j}^{\alpha_j} f = \left(\partial_{r_j}^{\alpha_j} \prod_{u \in \chi_j} g_u \right) \prod_{u \notin \chi_j} g_u. \quad (4.13)$$

При этом производная, записанная в скобках в (4.13), в зависимости от значения мультииндекса $\alpha_j = (\alpha_j^{(1)}, \dots, \alpha_j^{(d)})$ имеет один из следующих видов:

1) при $\alpha_j^{(k_1)} = \alpha_j^{(k_2)} = 1$, $k_1 \neq k_2$, $\alpha_j^{(k)} = 0$, $k \neq k_1, k_2$,

$$\partial_{r_j}^{\alpha_j} \prod_{u \in \chi_j} g_u = \left(\sum_{u_1, u_2 \in \chi_j, u_1 \neq u_2} \frac{\partial g_{u_1}}{\partial r_j^{(k_1)}} \frac{\partial g_{u_2}}{\partial r_j^{(k_2)}} \right) \prod_{u \in \chi_j, u \neq u_1, u_2} g_u$$

или

$$\partial_{r_j}^{\alpha_j} \prod_{u \in \chi_j} g_u = \left(\sum_{u' \in \chi_j} \frac{\partial^2 g_{u'}}{\partial r_j^{(k_1)} \partial r_j^{(k_2)}} \right) \prod_{u \in \chi_j, u \neq u'} g_u;$$

2) при $\alpha_j^{(k)} = 2$, $\alpha_j^{(k')} = 0$, $k' \neq k$,

$$\partial_{r_j}^{\alpha_j} \prod_{u \in \chi_j} g_u = \left(\sum_{u' \in \chi_j} \frac{\partial^2 g_{u'}}{\partial^2 r_j^{(k)}} \right) \prod_{u \in \chi_j, u \neq u'} g_u;$$

3) при $\alpha_j^{(k)} = 1$, $\alpha_j^{(k')} = 0$, $k' \neq k$,

$$\partial_{r_j}^{\alpha_j} \prod_{u \in \chi_j} g_u = \left(\sum_{u' \in \chi_j} \frac{\partial g_{u'}}{\partial r_j^{(k)}} \right) \prod_{u \in \chi_j, u \neq u'} g_u;$$

4) при $\alpha_j^{(k)} = 0$, $k = 1, \dots, d$,

$$\partial_{r_j}^{\alpha_j} \prod_{u \in \chi_j} g_u = \prod_{u \in \chi_j} g_u. \quad (4.14)$$

Заметим, что после раскрытия скобок в соответствующем мультииндексу α_j выражении в (4.14) и подстановки его в (4.13) возникнет сумма членов, каждый из которых снова имеет вид произведения функций, подобный (4.11), где некоторые множители g_u , $u \in \chi_j$, заменены их производными по r_j . Записав $\prod_{j=0}^l \partial_{r_j}^{\alpha_j}$ в виде

$$\prod_{j=0}^l \partial_{r_j}^{\alpha_j} = \partial_{r_0}^{\alpha_0} (\partial_{r_1}^{\alpha_1} (\dots (\partial_{r_l}^{\alpha_l} f)) \dots)$$

и последовательно применив описанную операцию, в результате получим сумму слагаемых, имеющих вид (4.11) (с заменой, как сказано выше, некоторых g_u их производными). Далее, заменяя каждый член этой суммы максимумом (по переменным $\{r_j, j \in V\}$) его абсолютной величины и суммируя затем по всем указанным в (4.10) наборам $\{\alpha_j, j = 0, \dots, l\}$, мы получим сумму

$$\sum \int \prod_{j \in V'} dr_j \prod_{u=1}^m A_{Q(u)}^{(u)}(\{r_j, j \in \Delta_u''\}), \quad (4.15)$$

состоящую, как нетрудно подсчитать, из

$$\prod_{j \in V} \left(\frac{\kappa_j(\kappa_j + 1)}{2} + \kappa_j d + 1 \right) \prod_{j \in V'} (\kappa_j d + 1) \quad (4.16)$$

слагаемых. В (4.15) имеем $\Delta_u'' = \Delta_u \cap V'$, при этом $\Delta_u' = \Delta_u \cap V$; индексы $Q(u)$ представляют собой наборы из двух непересекающихся подмножеств $\eta_0^{(u)}, \eta_1^{(u)}$ множества Δ_u , а также наборов индексов $\{k_j\}$ и $\{(k'_j, k''_j)\}$. Точнее,

$$Q(u) = (\eta_0^{(u)} \subseteq \Delta_u, \eta_1^{(u)} \subseteq \Delta_u'; \{k_j, j \in \eta_0^{(u)}\}, \{(k'_j, k''_j), j \in \eta_1^{(u)}\}), \quad (4.17)$$

где $k_j, k'_j, k''_j \in (0, \dots, d)$. Величина $A_{Q(u)}^{(u)}$ при этом равна

$$A_{Q(u)}^{(u)}(\{r_j, j \in \Delta_u''\}) = \max_{r_j, j \in \Delta_u'} \left| \left(\prod_{j \in \eta_0^{(u)}} \frac{\partial g_u}{\partial r_j^{(k_j)}} \prod_{j \in \eta_1^{(u)}} \frac{\partial^2 g_u}{\partial r_j^{(k'_j)} \partial r_j^{(k''_j)}} \right) (\{r_j, j \in \Delta_u''\}) \right|. \quad (4.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Наборы $\{Q(u), u = 1, \dots, m\}$, входящие в (4.15), не произвольны, а удовлетворяют некоторым ограничениям. Однако для наших дальнейших оценок эти ограничения несущественны, и мы их явно не вводим.

Далее, для того чтобы “расщепить” интеграл в (4.15) на m множителей, выберем для каждого $j \in V'$ произвольным образом одно из значений $u_j \in \chi_j$, и пусть

$$\xi_u = \{j \in V' : u_j = u\}, \quad u = 1, \dots, m.$$

Очевидно, что множества $\xi_u, u = 1, \dots, m$, задают разбиение V' и $\xi_u \subseteq \Delta_u''$. Отсюда имеем

$$\int \prod_{j \in V'} dr_j \prod_{u=1}^m A_{Q(u)}^{(u)} = \int \prod_{u=1}^m \left(A_{Q(u)}^{(u)} \prod_{j \in \xi_u} dr_j \right) \leq \prod_{u=1}^m B_{\Delta_u'', \xi_u, Q(u)}^{(u)}, \quad (4.19)$$

где

$$B_{\Delta_u'', \xi_u, Q(u)}^{(u)} = \int \prod_{j \in \xi_u} dr_j \max_{\{r_j, j \in \Delta_u'' \setminus \xi_u\}} A_{Q(u)}^{(u)}(\{r_j, j \in \Delta_u''\}). \quad (4.20)$$

Наконец, введем величину

$$B_u = \max_{\Delta', \xi, Q} B_{\Delta_u', \xi_u, Q(u)}^{(u)}, \quad (4.21)$$

где максимум берется по значениям $Q(u)$ (т.е. при фиксированном множестве Δ_u и его подмножестве Δ'_u по всем наборам $\{\eta_0^{(u)}, \eta_1^{(u)}\}$ и $\{k_j\}, \{(k'_j, k''_j)\}$, входящим в (4.17)), затем по всем подмножествам $\xi_u \subseteq \Delta''_u$ и, наконец, по всем подмножествам $\Delta'_u \subseteq \Delta_u$. Из формул (4.17)–(4.21) легко усмотреть, что величина B_u зависит только от функции g_u и не зависит от общего числа переменных l и разбиения (V, V') . Иными словами,

$$B_u = \mathcal{L}_h(g)|_{g=g_u}, \quad h = |\Delta_u|,$$

где $\{\mathcal{L}_h(\cdot), h = 1, 2, \dots\}$ – последовательность функционалов, каждый из которых определен на своем пространстве Шварца $\mathcal{S}((\mathbb{R}^d)^h)$ функций от h переменных. Таким образом, каждое слагаемое в сумме (4.15) не превосходит $\prod_{u=1}^m B_u$, а число всех слагаемых равно выражению (4.16). Суммируя теперь по всем разбиениям (V, V') множества $(0, \dots, l)$, мы приходим к оценке (4.12). Следствие доказано.

Используем теперь представление (4.9) и неравенство (4.12) для оценки интеграла (4.8), в котором переменные $\{r_j\}$ обозначены $\{\sigma_j\}$.

Подынтегральное выражение в (4.8) имеет вид произведения (4.11), состоящего из $n + 3$ функций:

$$g_0^{q_1, q_2}(\sigma_0) = \tilde{D}_1(q_1, q_2; \sigma_0), \quad g_k^{q_2}(\sigma_{k-1}, \sigma_k) = \overline{D}_1(\sigma_{k-1}, q_2; \sigma_k), \quad k = 1, \dots, n+1, \\ g_{n+2}^{q_2}(\sigma_{n+1}) = \varphi(\sigma_{n+1}, q_2),$$

и для каждого $k = 0, \dots, n+2$ имеем $\varkappa_k = 2$.

Полагая теперь

$$b_0 = \max_{q_1, q_2} \mathcal{L}_1(g_0^{q_1, q_2}), \quad b_1 = \dots = b_{n+1} = b = \max_{q_2} \mathcal{L}_2(g_k^{q_2}), \quad b(\varphi) = \max_{q_2} \mathcal{L}_1(g_{n+2}^{q_2}),$$

где $\mathcal{L}_h(g)$ – функционалы, введенные выше, мы с помощью оценки (4.12) получим неравенство (4.5), в котором

$$B_0 = b_0, \quad \overline{C} = 2\pi Cb(3d^2 + 4d + 2).$$

Итак, лемма 4.1 и вместе с ней лемма 2.2 доказаны.

§ 5. Диаграммы

В § 2 мы ввели понятие диаграммы Γ , ее веса W_Γ , а также связанной с ней функции B_Γ от внешних переменных диаграммы, названной ее вкладом. Здесь мы подробно опишем класс диаграмм, которые возникают в дальнейших построениях, и укажем некоторые их свойства.

5.1. Элементарные диаграммы. Введем сначала простейшие диаграммы, из которых в дальнейшем будут строиться более сложные – *кластерные* – диаграммы.

Диаграммы V_a^ .* Рассмотрим представление (3.6) для величины Φ и в слагаемые, содержащие функции L_1 и L_2 , подставим их разложения в ряды:

ряд (3.16) для L_1 и аналогичный ряд для L_2 . В результате функция $\Phi(q_1, q_2; p_1, p_2)$ представится в виде

$$\begin{aligned} \Phi(q_1, q_2; p_1, p_2) = & V_0(q_1, q_2; p_1, p_2) + \sum_{n=0}^{\infty} [V_{(1,2),n}(q_1, q_2; p_1, p_2) \\ & + V_{(2,1),n}(q_1, q_2; p_1, p_2) + V_{(0,1),n}(q_1, q_2; p_1, p_2) + V_{(0,2),n}(q_1, q_2; p_1, p_2)], \end{aligned} \quad (5.1)$$

где слагаемые V_a при

$$a = 0, ((12), n), ((21), n), ((01), n), ((02), n), \quad n \geq 0, \quad (5.2)$$

имеют вид

$$V_0(q_1, q_2; p_1, p_2) = \frac{H(q_1, q_2; p_1, p_2)}{\omega(p_1) + \omega(p_2) - z}, \quad (5.3)$$

$$V_{((12),n)}(q_1, q_2; p_1, p_2) = D_1(q_1, q_2; p_1) L_2^{(n)}(p_1, q_2; p_2), \quad (5.4)$$

$$V_{((21),n)}(q_1, q_2; p_1, p_2) = D_2(q_1, q_2; p_2) L_1^{(n)}(q_1, p_2; p_1), \quad (5.5)$$

$$V_{((01),n)}(q_1, q_2; p_1, p_2) = \int H(q_1, q_2; \bar{s}_1, p_2) L_1^{(n)}(\bar{s}_1, p_2; p_1) d\bar{s}_1, \quad (5.6)$$

$$V_{((02),n)}(q_1, q_2; p_1, p_2) = \int H(q_1, q_2; p_1, \bar{s}_1) L_2^{(n)}(p_1, \bar{s}_1; p_2) d\bar{s}_1. \quad (5.7)$$

Здесь $L_1^{(n)}$ и $L_2^{(n)}$ – члены рядов, представляющих функции L_1 и L_2 соответственно. Оказывается, все такие функции V_a являются вкладами соответствующих диаграмм, которые мы будем обозначать V_a^* (эти диаграммы описаны в приложении). В § 3, кроме функции Φ , мы рассмотрели функцию $\tilde{\Phi}$, которая получается из Φ вычеркиванием множителя $\omega(p_1) + \omega(p_2) - z$ в знаменателях V_a (что соответствует стиранию ребра (p_1, p_2) во всех диаграммах V_a^*). Эта функция также имеет разложение, аналогичное (5.1), со слагаемыми $\tilde{V}_a$. Диаграммы, соответствующие функциям $\tilde{V}_a$ (мы их обозначим $\tilde{V}_a^*$), как уже сказано, получаются из диаграмм V_a^* стиранием ребра (p_1, p_2) , а веса их те же, что и у V_a^* .

Диаграммы Ψ_b^* . Запишем функцию Ψ в виде суммы трех слагаемых:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3,$$

совпадающих с соответствующими членами в (3.8):

$$\begin{aligned} \Psi_1(q_1, q_2; p_1, p_2) &= \frac{\Phi(q_1, q_2; p_1, p_2)}{\omega(q_1) + \omega(q_2) - z}, \\ \Psi_2(q_1, q_2; p_1, p_2) &= \int L_1(q_1, q_2; \tilde{p}_1) \Phi(\tilde{p}_1, q_2; p_1, p_2) d\tilde{p}_1, \\ \Psi_3(q_1, q_2; p_1, p_2) &= \int L_2(q_1, q_2; \tilde{p}_2) \Phi(q_1, \tilde{p}_2; p_1, p_2) d\tilde{p}_2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Теперь в каждое из слагаемых (5.8) подставим разложения функций L_1 и L_2 в ряды (см. выше), а также разложение (5.1) функции Φ . В результате получим ряд

$$\Psi = \sum_b \Psi_b,$$

где индекс b принимает значения

$$b = (i, \alpha, n_1, n_2), \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 0, (12), (21), (01), (02), \quad (5.9)$$

причем $n_1 = 0$ при $i = 1$, а $n_2 = 0$ при $\alpha = 0$. В остальных случаях переменные n_1, n_2 принимают любые целые неотрицательные значения.

Как и в случае функции Φ , в § 3 были введены две функции $\tilde{\Psi}$ и $\tilde{\tilde{\Psi}}$, которые получаются стиранием ребра (q_1, q_2) в диаграммах Ψ_b^* в случае $\tilde{\Psi}$ (т. е. вычеркиванием множителя $\omega(q_1) + \omega(q_2) - z$ в знаменателе Ψ) и, дополнительно, стиранием ребра (p_1, p_2) в случае $\tilde{\tilde{\Psi}}$ (т. е. вычеркиванием множителя $(\omega(p_1) + \omega(p_2))^{-1}$ у функции $\tilde{\Psi}$). Веса W_Γ в диаграммах $\tilde{\Psi}_b^*$ и $\tilde{\tilde{\Psi}}_b^*$ такие же, как и у Ψ_b^* .

Диаграммы N_b^* . Введем функции

$$N_b(q_1, q_2; p_1, p_2) = \int D_1(q_1, q_2; s) \Psi_b(s, q_2; p_1, p_2) ds, \quad (5.10)$$

где b пробегает значения (5.9). Эти функции снова являются вкладами диаграмм, обозначаемых N_b^* и описанных в приложении.

Диаграммы V_a^* , Ψ_b^* , $\tilde{\Psi}_b^*$, $\tilde{\tilde{\Psi}}_b^*$ и N_b^* исчерпывают список элементарных диаграмм, необходимых для наших построений.

Поскольку веса W_Γ элементарных диаграмм представляются как произведения функций D_1, D_2, H , аргументы которых принадлежат набору S_Γ , мы определим для каждой элементарной диаграммы Γ число $r(\Gamma)$ как общее число таких множителей, входящих в W_Γ .

Введем табл. 1; она получена рассмотрением списка элементарных диаграмм.

ТАБЛИЦА 1

Диаграмма Γ	$r(\Gamma)$	$n(\Gamma)$
V_0^*	1	0
$V_{(\alpha, n)}^*, \alpha = (12), (21)$	$n + 2$	n
$V_{(\alpha, n)}^*, \alpha = (01), (02)$	$n + 2$	$n + 1$
$N_{(10)}^*$	2	1
$N_{(1, \alpha, n)}^*, \alpha = (12), (21)$	$n + 3$	$n + 1$
$N_{(1, \alpha, n)}^*, \alpha = (01), (02)$	$n + 3$	$n + 2$
$N_{(i, 0, n)}^*, i = 2, 3$	$n + 3$	$n + 2$
$N_{(i, \alpha, n_1, n_2)}^*, \alpha = (12), (21); i = 2, 3$	$n_1 + n_2 + 4$	$n_1 + n_2 + 2$
$N_{(i, \alpha, n_1, n_2)}^*, \alpha = (01), (02); i = 2, 3$	$n_1 + n_2 + 4$	$n_1 + n_2 + 3$

Из этой таблицы можно увидеть, что

$$r(\Gamma) = n(\Gamma) + \nu(\Gamma), \quad (5.11)$$

где $\nu(\Gamma) = 1, 2$.

Из (1.2) следует, что вес W_Γ диаграммы Γ имеет вид

$$W_\Gamma = \delta^{r(\Gamma)} \overline{W}_\Gamma, \quad (5.12)$$

где $\overline{W}_\Gamma$, по-прежнему, есть произведение функций $\overline{D}_1, \overline{D}_2$ и $\overline{H}$.

Отметим следующие два свойства элементарных диаграмм:

а) диаграммы типа N_b^* имеют только одну изолированную входную переменную; в диаграммах типа V_a^* и типа $\tilde{\Psi}_b^*$ изолирована либо одна, либо обе входные переменные (переменную из набора S_Γ называем *изолированной переменной*, если она не соединена ребром из E_Γ с какой-нибудь другой переменной из S_Γ);

б) всякая связная компонента графа E_Γ для элементарной диаграммы Γ всегда есть дерево.

5.2. Кластерные диаграммы. Здесь мы определим классы более общих диаграмм Γ , с помощью которых выражаются введенные выше функции $J_{0,1}$, $M^{(k)}$ и $\tilde{M}^{(k)}$ (см. (2.6), (3.21) и (3.24)).

Пусть заданы две диаграммы Γ_1 и Γ_2 , причем входные переменные $q_1^{(2)}$, $q_2^{(2)}$ диаграммы Γ_2 не связаны ребром из графа E_{Γ_2} . Определим теперь новую диаграмму Γ' , которую мы назовем *композицией* диаграмм Γ_1 и Γ_2 и обозначим

$$\Gamma' = \Gamma_1 * \Gamma_2. \quad (5.13)$$

Набор $S_{\Gamma'}$ переменных диаграммы Γ' имеет вид

$$S_{\Gamma'} = \{q_1^{(1)}, q_2^{(1)}; \{r_j^{(1)}\}_1^{n(\Gamma_1)}; s_1, s_2; \{r_j^{(2)}\}_1^{n(\Gamma_2)}; p_1^{(2)}, p_2^{(2)}\},$$

где $q_1^{(1)}$, $q_2^{(1)}$ (входные переменные Γ_1) являются входными переменными диаграммы Γ' , а $p_1^{(2)}$, $p_2^{(2)}$ (выходные переменные Γ_2) образуют выходные переменные Γ' . Остальные переменные в $S_{\Gamma'}$, включающие два набора внутренних переменных диаграмм Γ_1 и Γ_2 и еще две дополнительные переменные s_1 , s_2 , являются внутренними для Γ' .

Иначе говоря, набор $S_{\Gamma'}$ образуется из наборов S_{Γ_1} и S_{Γ_2} при “склеивании” выходных переменных S_{Γ_1} с входными переменными S_{Γ_2} :

$$p_i^{(1)} = q_i^{(2)} = s_i, \quad i = 1, 2. \quad (5.14)$$

Граф $E_{\Gamma'}$ получается объединением графов E_{Γ_1} и E_{Γ_2} с учетом этого “склеивания”. При этом в силу приведенного выше условия относительно Γ_2 имеется не более одного ребра в $E_{\Gamma'}$, соединяющего переменные s_1 и s_2 .

Вес $W_{\Gamma'}$ получается как произведение весов W_{Γ_1} и W_{Γ_2} также с учетом “склеивания” (5.14):

$$W_{\Gamma'} = W_{\Gamma_1}(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}; \{r_j^{(1)}\}; s_1, s_2) W_{\Gamma_2}(s_1, s_2; \{r_j^{(2)}\}; p_1^{(2)}, p_2^{(2)}). \quad (5.15)$$

Вклад $B_{\Gamma'}$ диаграммы Γ' есть

$$B_{\Gamma'}(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}; p_1^{(2)}, p_2^{(2)}; z) = \int B_{\Gamma_1}(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}; s_1, s_2; z) B_{\Gamma_2}(s_1, s_2; p_1^{(2)}, p_2^{(2)}; z) ds_1 ds_2. \quad (5.16)$$

Введем, наконец, нужные нам классы диаграмм, которые будем называть *кластерными диаграммами*.

Диаграммы типа N (или, иначе, N -кластерные диаграммы). Пусть $(N_b^*, V_{a_1}^*, \dots, V_{a_k}^*)$ – набор элементарных диаграмм. При $k > 0$ определим k -этажную диаграмму типа N равенством

$$\Gamma_{b, \{a_s\}_{s=1}^k}^N = N_b^* * V_{a_1}^* * \dots * V_{a_k}^* \quad (5.17)$$

(мы не расставляем здесь скобки, поскольку композиция диаграмм является ассоциативной операцией). При $k = 0$ имеем $\Gamma_b^N = N_b^*$.

Заметим, что определение (5.17) корректно, так как все диаграммы V_a^* не имеют ребра, соединяющего входные переменные.

Диаграммы типа Ψ (Ψ -кластерные диаграммы) определяются аналогично с заменой диаграммы N_b^* в (5.17) диаграммой Ψ_b^* . Эти диаграммы будем обозначать $\Gamma_{b, \{a_s\}}^\Psi$ при $k > 0$ и $\Gamma_b^\Psi = \Psi_b^*$ при $k = 0$.

Диаграммы типа $\tilde{\Psi}$ вводятся аналогично (5.17) с заменой N_b^* на $\tilde{\Psi}_b^*$ и $V_{a_k}^*$ на $\tilde{V}_{a_k}^*$ при $k > 0$ и обозначаются $\Gamma_{b, \{a_s\}_1^k}^{\tilde{\Psi}}$ или $\Gamma_b^{\tilde{\Psi}} = \tilde{\Psi}_b^*$ при $k = 0$.

В качестве примера кластерной диаграммы типа N приведем двухэтажную диаграмму $\Gamma_{b, \{a_1, a_2\}}^N$, где $b = (1, (12), n_3)$, $a_1 = ((02), n_2)$, $a_2 = ((12), n_1)$, т. е. $\Gamma = N_{(1, (12), n_3)}^* * V_{((02), n_2)}^* * V_{((12), n_1)}^*$ (см. рисунки в приложении):

Заметим, что, как непосредственно следует из (3.21),

$$M^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; z) = \sum_{\Gamma} B_{\Gamma}^{\Psi}(q_1, q_2; p_1, p_2; z), \quad (5.18)$$

где суммирование происходит по всем k -этажным кластерным диаграммам Γ типа Ψ , а B_{Γ}^{Ψ} – вклад соответствующей диаграммы.

Точно такое же представление справедливо и для функции $\tilde{M}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; z)$, где суммируются вклады от $\tilde{\Psi}$ -кластерных k -этажных диаграмм. Наконец, для ядра оператора $\hat{D}_1 \tilde{M}^{(k)}$, которое мы обозначим $J_{1,0}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; z)$, верно представление, аналогичное (5.18):

$$J_{1,0}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; z) = \sum_{\Gamma} B_{\Gamma}^N(q_1, q_2; p_1, p_2; z), \quad (5.19)$$

где суммирование проводится по всем N -кластерным k -этажным диаграммам.

5.3. Некоторые свойства кластерных диаграмм. Установим теперь некоторые факты, касающиеся кластерных диаграмм.

1. Вес W_Γ любой кластерной диаграммы, как следует из (5.15), представляется по-прежнему в виде произведения множителей D_1, D_2, H , зависящих от тех или иных переменных из набора S_Γ ; число таких множителей в W_Γ обозначим через $r(\Gamma)$. Очевидно, что для кластерной k -этажной диаграммы $\Gamma_{b, \{a_s\}_1^k}$ типа N

$$r(\Gamma) = r(N_b^*) + \sum_{s=1}^k r(V_{a_s}^*). \quad (5.20)$$

Аналогичная формула верна и для остальных типов кластерных диаграмм. При этом число внутренних переменных $n(\Gamma)$ в k -этажной диаграмме типа N (и, аналогично, для типов Ψ и $\bar{\Psi}$) имеет вид

$$n(\Gamma) = n(N_b^*) + \sum_{s=1}^k n(V_{a_s}^*) + 2k. \quad (5.21)$$

Далее, учитывая (5.11) и (5.20), находим, что

$$r(\Gamma) = n(N_b^*) + \nu(N_b^*) + \sum_{s=1}^k [n(V_{a_s}^*) + \nu(V_{a_s}^*)] \geq n(\Gamma) - k \geq \frac{1}{2}n(\Gamma), \quad (5.22)$$

где мы воспользовались тем, что для N -кластерной k -этажной диаграммы выполнено $n(\Gamma) \geq 2k$.

2. Приведем оценку числа $\mathcal{N}(k, \bar{n})$ k -этажных кластерных диаграмм, число внутренних переменных $n(\Gamma) = \bar{n}$ которых фиксировано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Для кластерных диаграмм типа N

$$\mathcal{N}(k, \bar{n}) \leq C \cdot 2^{\bar{n}} \left(\frac{5}{2}\right)^k, \quad (5.23)$$

где C – константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая N -кластерная k -этажная диаграмма задается двумя упорядоченными последовательностями:

а) последовательностью

$$(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (5.24)$$

где $\beta = (i, \alpha)$, $i = 1, 2, 3$, $\alpha = (0), (12), (21), (01), (02)$, и те же значения принимают α_s , $s = 1, \dots, k$; число таких последовательностей равно $15 \cdot 5^k$;

б) последовательностью целых неотрицательных чисел

$$n_1^\beta, n_2^\beta, n^{\alpha_1}, \dots, n^{\alpha_k}, \quad (5.25)$$

причем при фиксированной последовательности (5.24) для последовательности (5.25) могут возникнуть некоторые ограничения (например, $n_1^\beta = 0$ при $\beta = (1, (12))$ или $n^{\alpha_s} = 0$ при $\alpha_s = (0)$ и т.д.). Мы не будем учитывать эти

ограничения и оценим общее число $O(n, k)$ последовательностей вида (5.25) при условии, что они удовлетворяют неравенству

$$n_1^\beta + n_2^\beta + \sum_{s=1}^k n^{\alpha_s} \leq n - 2k \equiv v. \quad (5.26)$$

Число $O(n, k)$ можно подсчитать при помощи наглядной картинке вида

$$| \square \square || \square \square \square || \square \square | \square | \square \square ||| \square \square | \quad (5.27)$$

где изображена цепочка из v (здесь $v = 12$) квадратиков-окон с $v + 1$ промежутками между ними (пространство левее первого окна и пространство правее последнего окна относим к промежуткам). В каждом промежутке поставлено некоторое количество вертикальных черточек-перегородок; пусть p_i – число перегородок в i -м промежутке, $p_i = 0, 1, \dots$, и мы рассматриваем картинки, на которых общее число перегородок равно

$$\sum_i p_i = k + 2.$$

Очевидно, что по картинке (5.27) однозначно восстанавливается последовательность (5.25), удовлетворяющая условию (5.26). Так, число n_1^β равно числу окон, расположенных левее первой (слева) перегородки, число n_2^β равно числу окон, расположенных между первой и второй перегородками, и т. д.

Таким образом, число $O(n, k)$ равно числу способов расстановок $k + 2$ перегородок в $v + 1$ промежутках между v окнами. Это число хорошо известно, и оно вычисляется по формуле (см. [15])

$$O(n, k) = \frac{(k + v + 2)!}{(k + 2)!v!} = C_{k+v+2}^v \equiv C_{n-k+2}^{n-2k} < 4 \cdot 2^{n-k}.$$

Таким образом, общее число N -кластерных диаграмм Γ с фиксированными значениями $n(\Gamma)$ и $k(\Gamma)$ не превосходит

$$C \cdot 2^n \left(\frac{5}{2} \right)^k.$$

Предложение доказано.

Поскольку каждой Ψ -диаграмме с $n(\Gamma) = \bar{n}$ соответствует, как видно из соотношения (5.10), N -диаграмма, у которой $n(\Gamma) = \bar{n} + 1$, число $\mathcal{N}(k, \bar{n})$ для диаграмм типа Ψ (а также типа $\tilde{\Psi}$) допускает оценку (5.23) (с измененной константой).

3. Рассматривая рисунки элементарных диаграмм (см. рис. 2–4 в приложении), мы замечаем, что в них нет изолированных переменных, кроме одной или двух входных переменных q_1, q_2 , а выходные переменные p_1 и p_2 соединены ребром. Отсюда следует, что в любой диаграмме Γ типа N все переменные из S_Γ , кроме одной переменной q_1 , входят в множество вершин графа E_Γ . В случае диаграмм Γ типа $\tilde{\Psi}$ одна или обе входные переменные q_1, q_2 , а также одна или обе выходные переменные не принадлежат к вершинам графа E_Γ .

Таким образом, все внутренние переменные кластерной диаграммы Γ принадлежат множеству вершин графа E_Γ .

4. Обозначим для каждой кластерной диаграммы Γ через $G_1, \dots, G_m$ связанные компоненты графа E_Γ . Оказывается, все они являются деревьями. Действительно, как уже было сказано, этим свойством обладают все элементарные диаграммы, в частности 0-этажные диаграммы N_b^* , Ψ_b^* и $\tilde{\Psi}_b^*$. Пусть теперь установлено, что все k -этажные диаграммы также обладают этим свойством. Каждая $(k+1)$ -этажная диаграмма, скажем, типа N

$$\Gamma^{(k+1)} = N_b^* * V_{a_1}^* * \dots * V_{a_k}^* * V_{a_{k+1}}^*$$

получается из k -этажной диаграммы

$$\Gamma^{(k)} = N_b^* * V_{a_1}^* * \dots * V_{a_k}^*$$

“приклеиванием” к ней элементарной диаграммы $V_{a_{k+1}}^*$, причем, как видно из рис. 2 (в приложении), не более чем одно из входных переменных $q_1^{(k+1)}$, $q_2^{(k+1)}$ диаграммы $V_{a_{k+1}}^*$ соединено ребром с остальными переменными этой диаграммы. Таким образом, если в графе $E_{\Gamma^{(k)}}$ диаграммы $\Gamma^{(k)}$ не было циклов, то они не возникнут и в графе $E_{\Gamma^{(k+1)}}$ диаграммы $\Gamma^{(k+1)}$. Эти рассуждения дословно применимы и к другим классам кластерных диаграмм.

5. Как видно из приведенных в приложении весов элементарных диаграмм, веса W_Γ кластерных диаграмм содержат в виде множителя либо функцию $D_i(q_1, q_2; \cdot)$, $i = 1, 2$, либо $H(q_1, q_2; \cdot, \cdot)$, где в местах точек стоят внутренние (или выходные) переменные диаграммы Γ . Таким образом, воспользовавшись заменой (1.2), а также заменой, аналогичной заменам (3.14), (1.7), можем записать

$$D_i(q_1, q_2; \cdot) = \frac{\delta \tilde{D}_i(q_1, q_2; \cdot)}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)]^d}, \quad i = 1, 2,$$

$$H(q_1, q_2; \cdot, \cdot) = \frac{\delta \tilde{H}(q_1, q_2; \cdot, \cdot)}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)]^d},$$

где функции $\tilde{D}_i$ и $\tilde{H}$ по-прежнему из пространства Шварца. Таким образом, в случае кластерной диаграммы типа N ее вес W_Γ представим в виде

$$W_\Gamma = \frac{\delta^{r(\Gamma)} \widetilde{W}_\Gamma}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)]^d}, \quad (5.28)$$

где новый вес $\widetilde{W}_\Gamma$ снова представляется в виде произведения функций $\tilde{D}_i$, $\bar{D}_i$, $\tilde{H}$, $\bar{H}$.

Аналогично, в случае Ψ - или $\tilde{\Psi}$ -кластерной диаграммы ее вес можно представить снова в виде

$$W_\Gamma = \frac{\delta^{r(\Gamma)} \widetilde{W}_\Gamma}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)(|p_1|^2 + 1)(|p_2|^2 + 1)]^d}, \quad (5.29)$$

где вес $\widetilde{W}_\Gamma$ также представляется в виде произведения функций $\tilde{D}_i$, $\bar{D}_i$, $\tilde{H}$, $\bar{H}$.

§ 6. Завершение доказательства теоремы

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.3. Величину $I_\Gamma(q_1, q_2; t)$ (см. соотношения (2.12), (2.14), (5.19)) при $t > 0$ после замен вида (1.2) и (5.28) и с учетом замечания о том, что интеграл по l_- равен нулю, можно представить в следующем виде:

$$I_\Gamma(q_1, q_2; t) = \frac{\delta^{r(\Gamma)}}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)]^d} \int_{l_+} e^{-itx} dx \int \frac{\widetilde{W}_\Gamma(q_1, q_2; \{r_j\}_{j=-1}^{n(\Gamma)}) \prod dr_j}{\prod_{e \in E_\Gamma} (\omega(y_1) + \omega(y_2) - x - i0)}. \quad (6.1)$$

Мы включили функцию $\varphi(p_1, p_2)$ множителем в вес $\widetilde{W}_\Gamma$ (так что число этих множителей равно $r(\Gamma) + 1$), а выходные переменные p_1, p_2 превратили во внутренние, обозначив их r_{-1}, r_0 . Числитель в выражении под интегралом в формуле (6.1) является произведением $r(\Gamma) + 1$ функций

$$\{g_u, u = 1, \dots, r(\Gamma) + 1\}, \quad (6.2)$$

каждая из которых имеет одну из следующих форм:

$$\{\overline{D}_i(\cdot, \cdot, \cdot), \widetilde{D}_i(q_1, q_2, \cdot), i = 1, 2; \overline{H}(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot), \widetilde{H}(q_1, q_2; \cdot, \cdot), \varphi(\cdot, \cdot)\}, \quad (6.3)$$

где вместо точек (свободных переменных) должны стоять внутренние переменные $r_j, j = -1, 0, 1, \dots, n(\Gamma)$.

Преобразуем теперь интеграл в (6.1) подобно тому, как мы преобразовали интеграл в (4.2). Введем для каждого ребра $e \in E_\Gamma$ число $\tau_e \geq 0$ такое, что

$$\sum_{e \in E_\Gamma} \tau_e = t, \quad (6.4)$$

и запишем интеграл из (6.1) в виде

$$\begin{aligned} & \int_{l_+} \dots \int_{l_+} \prod_{e \in E_\Gamma} e^{-i\tau_e x_e} \delta(x_e - x) dx \\ & \times \prod_{e \in E_\Gamma} dx_e \int \dots \int \frac{\widetilde{W}_\Gamma(q_1, q_2; \{r_j\}_{j=-1}^{n(\Gamma)}) \prod_{j=-1}^{n(\Gamma)} dr_j}{\prod_{e=(y_1, y_2) \in E_\Gamma} (\omega(y_1) + \omega(y_2) - x - i0)}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Рассуждая далее так же, как и при выводе оценки для $J_{1,1}$ (см. (4.3), (4.4)), и применяя формулу (4.7), мы получим следующее выражение для интеграла (6.5):

$$2\pi \int_{\sum_j T_j = \sum_e \tau_e = t} \mathcal{K}_\Gamma(q_1, q_2; \{T_j\}_{j=-1}^{n(\Gamma)}) \prod d\tau_e, \quad (6.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\Gamma(q_1, q_2; \{T_j\}_{j=-1}^{n(\Gamma)}) &= (2\pi i)^{|E_\Gamma|} e^{-iT\omega(q_2)} \\ &\times \int \prod_j e^{-iT_j \omega(r_j)} \theta(T_j) \widetilde{W}_\Gamma(q_1, q_2; \{r_j\}_{j=-1}^{n(\Gamma)}) \prod_j dr_j, \end{aligned} \quad (6.7)$$

а $T_j = \frac{1}{2} \sum_{e: r_j \in e} \tau_e, T = \frac{1}{2} \sum_{e: q_2 \in e} \tau_e$.

Пусть

$$b = \max_{q_1, q_2} \max_u \{ \mathcal{L}_{h_u}(g_u) \},$$

где g_u совпадает с какой-нибудь из функций вида (6.3), а h_u – число свободных переменных каждой из функций g_u ; $\mathcal{L}_h(g)$ – введенный выше (см. (4.21)) функционал на пространстве Шварца функций от h переменных.

Применяя теперь неравенства (4.10) и (4.12), получим

$$|\mathcal{K}_\Gamma(q_1, q_2; \{T_j\}_{j=-1}^{n(\Gamma)})| \leq (2\pi)^{|E_\Gamma|} C^{n(\Gamma)+3} b^{r(\Gamma)+1} \prod_{j=-1}^{n(\Gamma)} \nu(\varkappa_j) \prod_j \frac{1}{(T_j + 1)^{d/2}}, \quad (6.8)$$

где $\nu(\varkappa) = \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2} d^2 + 2\varkappa d + 2$, а число $\varkappa_j$ для каждого j означает число функций из набора (6.2), у которых среди аргументов находится r_j .

Заметим, что для достаточно малых значений $\mu > 0$ последовательность $\mu^n \nu(n)$, $n = 1, 2, \dots$, монотонно убывает, и поэтому

$$\mu^\varkappa \nu(\varkappa) < c_0 \mu,$$

где $c_0 = c_0(d) = \nu(1)$. Отсюда имеем

$$\prod_j \nu(\varkappa_j) < \mu^{-\sum_j \varkappa_j} (c_0 \mu)^{n(\Gamma)+2},$$

где $\mu = \mu(\delta)$ будет указано ниже. Обозначим через $r_h(\Gamma)$ число множителей в $\widehat{W}_\Gamma$, которые зависят от h внутренних переменных из S_Γ , где $h = 1, 2, 3, 4$. Очевидно, что

$$\sum_j \varkappa_j = \sum_{h=1,2,3,4} h r_h(\Gamma) < 4r(\Gamma) + 2.$$

Выбрав $\mu = (b\delta)^{1/4}$, получим

$$\prod_j \nu(\varkappa_j) < \left(\frac{1}{b\delta} \right)^{r(\Gamma)} (c_0 (b\delta)^{1/4})^{n(\Gamma)} c_0^2,$$

следовательно, для функции $I_\Gamma(q_1, q_2; t)$ получаем оценку

$$|I_\Gamma(q_1, q_2; t)| < \frac{B(\tilde{c}(b\delta)^{1/4})^{n(\Gamma)} (2\pi)^{|E_\Gamma|}}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)]^d} \int_{\sum_j T_j = \sum_e \tau_e = t} \prod_j \frac{\theta(T_j)}{(T_j + 1)^{d/2}} \prod_{e \in E_\Gamma} d\tau_e, \quad (6.9)$$

где $B > 0$, $\tilde{c} > 0$ – константы.

Осталось оценить интеграл в (6.9). Напомним, что связные компоненты $G_1, \dots, G_m$ графа E_Γ являются деревьями, причем вершина q_2 содержится среди вершин одного из этих деревьев, а вершина q_1 изолирована. При этом

$$\prod_j \frac{\theta(T_j)}{(T_j + 1)^{d/2}} = \prod_{s=1}^m \prod_{j \in V(G_s)} \frac{\theta(T_j)}{(T_j + 1)^{d/2}}, \quad (6.10)$$

где $V(G_s)$ – множество вершин дерева G_s .

В каждом из деревьев $G_1, \dots, G_m$ введем следующую субординацию вершин. Вершинами *первого ранга* назовем концевые вершины; при стирании концевых ребер в некотором дереве $G = G_s$ возникнет снова дерево. Его концевые вершины по определению образуют вершины *второго ранга* исходного дерева G и т. д. В конце концов останется единственная вершина *последнего ранга* (строго говоря, могут остаться две вершины, соединенные ребром, но мы произвольно одну из них объявим последней, а другую – предпоследней). Для любого дерева G_s , кроме содержащего вершину q_2 , из каждой его вершины i , кроме последней, выходит единственное ребро в сторону последней вершины. Обозначим это ребро (i, j_0) , где j_0 – вторая вершина этого ребра. Для дерева, содержащего вершину q_2 , из каждой его вершины i , кроме q_2 , выходит единственное ребро в сторону вершины q_2 ; обозначим его также через (i, j_0) . Очевидно, что все ребра каждого из деревьев $G = G_s$ исчерпываются ребрами (i, j_0) , т. е.

$$\{\tau_{ij_0}, i \in V'(G)\} = \{\tau_{ij}, (i, j) \in E(G)\},$$

где $V'(G)$ – множество вершин G без последней вершины (соответственно, без вершины q_2 в случае, если G – то дерево, которое ее содержит), $E(G)$ – множество ребер G . Для переменных $\{\tau_{ij}, (i, j) \in E(G)\}$, занумерованных ребрами дерева G , в силу положительности всех $\tau_{ij} \geq 0$ имеем

$$T_i \geq \frac{1}{2} \tau_{ij_0} \quad \forall i \in V'(G).$$

Отсюда, пользуясь тем, что $\frac{1}{(T+1)^{d/2}} \leq 1$ при $T \geq 0$, получаем (для каждой связной компоненты $G = G_s$, $s = 1, \dots, m$, диаграммы Γ)

$$\prod_{j \in V(G)} \frac{1}{(T_j + 1)^{d/2}} \leq \prod_{i \in V'(G)} \frac{1}{(\frac{\tau_{ij_0}}{2} + 1)^{d/2}} = \prod_{(i,j) \in E(G)} \frac{1}{(\frac{\tau_{ij}}{2} + 1)^{d/2}}. \quad (6.11)$$

Отсюда, из (6.9) и (6.10) находим, что

$$|I_\Gamma(q_1, q_2; t)| \leq \frac{\tilde{B}(\tilde{C}\delta^{1/4})^{n(\Gamma)}(2\pi)^{|E_\Gamma|}}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)]^d} \int_{\sum \tau_e = t} \prod_{e \in E_\Gamma} \frac{\theta(\tau_e)}{(\frac{\tau_e}{2} + 1)^{d/2}} \prod d\tau_e, \quad (6.12)$$

где $\tilde{B} > 0$ и $\tilde{C} > 0$ – константы, не зависящие от δ и Γ .

Из (6.12) уже легко выводится оценка (2.15). Лемма доказана.

Согласно (6.12) и тому факту, что число ребер каждого дерева на единицу меньше числа его вершин и, следовательно,

$$|E_\Gamma| = n(\Gamma) - m(\Gamma), \quad (6.13)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|I_\Gamma(\cdot, \cdot; t)\| dt &\leq \tilde{B}(\tilde{C}\delta^{1/4})^{n(\Gamma)} \left(\int_0^\infty \frac{4\pi d\tau}{(\frac{\tau}{2} + 1)^{d/2}} \right)^{n(\Gamma)} \int \frac{dq}{(|q|^2 + 1)^{2d}} \\ &\quad \times \begin{cases} 1, & d = 3, 4, 5, 6, \\ \left(\frac{4}{d-2} \right)^{-k}, & d > 6. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Здесь мы воспользовались (6.13), равенством

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{(\frac{\tau}{2} + 1)^{d/2}} = \frac{4}{d-2},$$

а также неравенством $m(\Gamma) < k(\Gamma) + 2$, которое вытекает из того, что каждая из элементарных диаграмм имеет не более двух связных компонент и, следовательно, на каждом этаже диаграммы Γ имеется не более одного “разрыва связности”.

Далее, воспользовавшись оценкой (5.23) и тем, что $k(\Gamma) \leq \frac{n(\Gamma)}{2}$ (см. (5.21)), находим, что

$$\sum_{\Gamma: n(\Gamma)=\bar{n}} \int_0^\infty \|I_\Gamma(\cdot, \cdot; t)\| dt \leq \widehat{B}(\widehat{C}\delta^{1/4})^{\bar{n}} \times \begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^{\bar{n}/2}, & d = 3, 4, 5, 6, \\ \left(\frac{5}{2} \frac{d-2}{4}\right)^{\bar{n}/2}, & d > 6, \end{cases} \quad (6.15)$$

где $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ – некоторые константы. Отсюда получаем, что при достаточно малом δ

$$\int_0^\infty \|J_{1,0}(\cdot, \cdot; t)\| dt \leq \sum_\Gamma \int_0^\infty \|I_\Gamma(\cdot, \cdot; t)\| dt < \infty,$$

где суммирование идет по всем N -кластерным диаграммам. Таким образом, доказана оценка (2.7) для случая $i = 1, j = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Для того чтобы оценить функцию $\widetilde{M}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; z)$ при всех $z \in \mathcal{E}$, достаточно оценить ее граничные значения $\widetilde{M}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; x \pm i0)$ на прямых $l_\pm$. Для этого нам будет удобно оценить их преобразования Фурье (по переменной $x \in \mathbb{R}^1$)

$$Y_\pm^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; t) = \int_{l_\pm} e^{-itx} dx \widetilde{M}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; x \pm i0). \quad (6.16)$$

Здесь $Y_+^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; t) = 0$ при $t < 0$ и $Y_-^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; t) = 0$ при $t > 0$. Обе функции $Y_\pm^{(k)}$ оцениваются одинаково, и мы рассмотрим оценку лишь для $Y_+^{(k)}$.

Переходя к представлению $\widetilde{M}^{(k)}$ в виде суммы по вкладам от $\widetilde{\Psi}$ -кластерных k -этажных диаграмм (см. (5.18)), мы придем к представлению $Y_+^{(k)}$ при $t > 0$ в виде следующей суммы:

$$Y_+^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; t) = \frac{1}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)(|p_1|^2 + 1)(|p_2|^2 + 1)]^d} \times \sum_\Gamma \delta^{r(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-itx} dx \int \frac{\widetilde{W}_\Gamma(q_1, q_2; \{r_j\}; p_1, p_2)}{\prod_{e=(y_1, y_2) \in E_\Gamma} (\omega(y_1) + \omega(y_2) - x - i0)} \prod dr_j, \quad (6.17)$$

где суммирование проводится по всем k -этажным $\widetilde{\Psi}$ -кластерным диаграммам. В (6.17) совершены замены (1.2) и (5.29), а вес $\widetilde{W}_\Gamma$ является произведением функций $g_u, u = 1, \dots, r(\Gamma)$, образцы которых представлены, кроме функций (6.3) (без φ), функциями

$$\{\overline{H}(\cdot, \cdot; p_1, p_2), \overline{H}(\cdot, \cdot; \cdot, p_2), \overline{H}(\cdot, \cdot; p_1, \cdot), D_i(\cdot, \cdot; p_i), i = 1, 2\}.$$

Оценка интеграла, стоящего под знаком суммы в (6.17) (обозначим его $Y_{+, \Gamma}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; t)$) проводится так же, как и оценка аналогичного интеграла (6.1) из леммы 2.3, и приводит к неравенству

$$\int_0^\infty |Y_{+, \Gamma}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; t)| dt \leq \frac{\widehat{B}(\widehat{C}\delta^{1/4})^{n(\Gamma)}}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)(|p_1|^2 + 1)(|p_2|^2 + 1)]^d} \left(2\pi \int_0^\infty \frac{\theta(\tau) d\tau}{(\frac{\tau}{2} + 1)^{d/2}} \right)^{|E_\Gamma|}, \quad (6.18)$$

где $\widehat{B} > 0$, $\widehat{C} > 0$ – некоторые константы.

Из оценки (6.18), проводя те же рассуждения, что и после доказательства леммы 2.3, и учитывая, что $n(\Gamma) \geq 2k(\Gamma)$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |Y_{+, \Gamma}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; t)| dt &\leq \sum_{\Gamma: k(\Gamma)=k} \int_0^\infty |Y_{+, \Gamma}^{(k)}(q_1, q_2; p_1, p_2; t)| dt \\ &\leq \frac{B'(C'\delta^{1/4})^{2k}}{[(|q_1|^2 + 1)(|q_2|^2 + 1)(|p_1|^2 + 1)(|p_2|^2 + 1)]^d}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

где суммирование проводится по всем k -этажным Ψ -кластерным диаграммам. Из оценки (6.19) после перехода к обратному преобразованию Фурье получим для функции $\widetilde{M}^{(k)}$ неравенство (3.25). Лемма доказана.

§ 7. Приложение

Здесь мы приводим перечень элементарных диаграмм и их весов.

Этот перечень открывают две вспомогательные диаграммы, вклад которых равен функциям $L_1^{(n)}$ и $L_2^{(n)}$ соответственно (рис. 1).

Рис. 1

Веса этих диаграмм

$$\begin{aligned} W_{L_1^{(n)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1) &= D_1(q_1, q_2; \sigma_1) \prod_{i=1}^{n-1} D_1(\sigma_i, q_2; \sigma_{i+1}) D_1(\sigma_n, q_2; p_1), \\ W_{L_2^{(n)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_2) &= D_2(q_1, q_2; \sigma_1) \prod_{i=1}^{n-1} D_2(q_1, \sigma_i; \sigma_{i+1}) D_2(q_1, \sigma_n; p_2) \end{aligned}$$

V_0^*	$V_{((12),n)}^*$	$V_{((21),n)}^*$
$q_1 \bullet \quad \bullet q_2$ $p_1 \text{ — } p_2$	$\bullet q_1$ 	$q_2 \bullet$
$V_{((01),n)}^*$	$V_{((02),n)}^*$	
$q_1 \bullet \quad \bullet q_2$ 	$q_1 \bullet \quad \bullet q_2$ 	

Рис. 2

не зависят соответственно от переменной p_2 и переменной p_1 , однако это не мешает использовать их как настоящие диаграммы.

Диаграммы V_a^* имеют вид, представленный на рис. 2.

Их веса имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 W_{V_0^*}(q_1, q_2; p_1, p_2) &= H(q_1, q_2; p_1, p_2), \\
 W_{V_{((12),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2) &= D_1(q_1, q_2; p_1) W_{L_2^{(n)}}(p_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2), \\
 W_{V_{((21),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2) &= D_2(q_1, q_2; p_2) W_{L_1^{(n)}}(q_1, p_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2), \\
 W_{V_{((01),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2) &= H(q_1, q_2; \bar{s}_1, p_2) W_{L_1^{(n)}}(\bar{s}_1, p_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2), \\
 W_{V_{((02),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2) &= H(q_1, q_2; p_1, \bar{s}_1) W_{L_2^{(n)}}(p_1, \bar{s}_1; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2).
 \end{aligned}$$

Элементарные диаграммы $\tilde{V}_a^*$ имеют те же веса, что и V_a^* , а в их графах $E(\tilde{V}_a^*)$ стерто ребро (p_1, p_2) .

Диаграммы Ψ_b^* приведены на рис. 3. Соответствующие веса таковы:

$$\begin{aligned}
 W_{\Psi_{(1,0)}^*}(q_1, q_2; p_1, p_2) &= W_{V_0^*}(q_1, q_2; p_1, p_2) = H(q_1, q_2; p_1, p_2), \\
 W_{\Psi_{(1,(12),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2) &= W_{V_{((12),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2), \\
 W_{\Psi_{(1,(21),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2) &= W_{V_{((21),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2), \\
 W_{\Psi_{(1,(01),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2) &= W_{V_{((01),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2), \\
 W_{\Psi_{(1,(02),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2) &= W_{V_{((02),n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2), \\
 W_{\Psi_{(2,0,n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2) &= W_{L_1^{(n)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1) H(\bar{s}_1, q_2; p_1, p_2), \\
 W_{\Psi_{(2,(12),n_1,n_2)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
 &= W_{L_1^{(n_1)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1) W_{V_{((12),n_2)}^*}(\bar{s}_1, q_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
 W_{\Psi_{(2,(21),n_1,n_2)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
 &= W_{L_1^{(n_1)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1) W_{V_{((21),n_2)}^*}(\bar{s}_1, q_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2),
 \end{aligned}$$

$\Psi_{(1,0)}^*$	$\Psi_{(1,(12),n)}^*$	$\Psi_{(1,(21),n)}^*$
$q_1 \text{ — } q_2$ $p_1 \text{ — } p_2$		
$\Psi_{(1,(01),n)}^*$	$\Psi_{(1,(02),n)}^*$	$\Psi_{(2,0,n)}^*$
$q_1 \text{ — } q_2$ 		
$\Psi_{(2,(12),n_1,n_2)}^*$	$\Psi_{(2,(21),n_1,n_2)}^*$	$\Psi_{(2,(01),n_1,n_2)}^*$
$\Psi_{(2,(02),n_1,n_2)}^*$	$\Psi_{(3,0,n)}^*$	$\Psi_{(3,(12),n_1,n_2)}^*$
$\Psi_{(3,(21),n_1,n_2)}^*$	$\Psi_{(3,(01),n_1,n_2)}^*$	$\Psi_{(3,(02),n_1,n_2)}^*$

Рис. 3

$$\begin{aligned}
W_{\Psi_{(2,(01),n_1,n_2)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = W_{L_1^{(n_1)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1) W_{V_{((01),n_2)}^*}(\bar{s}_1, q_2; \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
W_{\Psi_{(2,(02),n_1,n_2)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = W_{L_1^{(n_1)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1) W_{V_{((02),n_2)}^*}(\bar{s}_1, q_2; \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
W_{\Psi_{(3,0,n)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2) = W_{L_2^{(n)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1) W_{V_0^*}(q_1, \bar{s}_1; p_1, p_2), \\
W_{\Psi_{(3,(12),n_1,n_2)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = W_{L_2^{(n_1)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1) W_{V_{((12),n_2)}^*}(q_1, \bar{s}_1; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
W_{\Psi_{(3,(21),n_1,n_2)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = W_{L_2^{(n_1)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1) W_{V_{((21),n_2)}^*}(q_1, \bar{s}_1; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
W_{\Psi_{(3,(01),n_1,n_2)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = W_{L_2^{(n_1)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_2) W_{V_{((01),n_2)}^*}(q_1, \bar{s}_2; \bar{s}_1; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
W_{\Psi_{(3,(02),n_1,n_2)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_2, \bar{s}_1; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = W_{L_2^{(n_1)}}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_2) W_{V_{((02),n_2)}^*}(q_1, \bar{s}_2; \bar{s}_1; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2).
\end{aligned}$$

Элементарные диаграммы $\tilde{\Psi}_b^*$, а также $\tilde{\tilde{\Psi}}_b^*$ имеют те же веса, что и Ψ_b^* , а в их графах стерто ребро (q_1, q_2) и, дополнительно, ребро (p_1, p_2) в случае $\tilde{\tilde{\Psi}}_b^*$.

Диаграммы N_b^* представлены на рис. 4.

Соответствующие веса имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
W_{N_{(1,0)}^*} & (q_1, q_2; \bar{s}_1; p_1, p_2) = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_1) W_{\Psi_{(1,0)}^*}(\bar{s}_1, q_2; p_1, p_2), \\
W_{N_{(1,(12),n)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2) = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_1) W_{V_{((12),n)}^*}(\bar{s}_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2), \\
W_{N_{(1,(21),n)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2) = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_1) W_{V_{((21),n)}^*}(\bar{s}_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; p_1, p_2), \\
W_{N_{(1,(01),n)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1, \bar{s}_2; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_2) W_{\Psi_{(1,(01),n)}^*}(\bar{s}_2, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2), \\
W_{N_{(1,(02),n)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1, \bar{s}_2; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_1) W_{\Psi_{(1,(02),n)}^*}(\bar{s}_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_2; p_1, p_2), \\
W_{N_{(2,0,n)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1, \bar{s}_2; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_2) W_{\Psi_{(2,0,n)}^*}(\bar{s}_2, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1; p_1, p_2), \\
W_{N_{(2,(12),n_1,n_2)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_2) W_{\Psi_{(2,(12),n_1,n_2)}^*}(\bar{s}_2, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
W_{N_{(2,(21),n_1,n_2)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_2) W_{\Psi_{(2,(21),n_1,n_2)}^*}(\bar{s}_2, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
W_{N_{(2,(01),n_1,n_2)}^*} & (q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_3) W_{\Psi_{(2,(01),n_1,n_2)}^*}(\bar{s}_3, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2),
\end{aligned}$$

$N_{(1,0)}^*$	$N_{(1,(12),n)}^*$	$N_{(1,(21),n)}^*$
$\bullet q_1$ $\bar{s}_1 \text{ — } q_2$ $p_1 \text{ — } p_2$	$\bullet q_1$ $\bar{s}_1$ q_2 p_1 p_2 $\vdots \{\sigma_i\}_1^n$	$q_1 \bullet$ q_2 $\bar{s}_1$ $\{\sigma_i\}_1^n$ p_2 p_1
$N_{(1,(01),n)}^*$	$N_{(1,(02),n)}^*$	$N_{(2,0,n)}^*$
$\bullet q_1$ $\bar{s}_2 \text{ — } q_2$ $\bar{s}_1$ p_2 p_1 $\vdots \{\sigma_i\}_1^n$	$\bullet q_1$ $\bar{s}_2 \text{ — } q_2$ $\{\sigma_i\}_1^n$ p_1 $\bar{s}_1$ p_2	$\bullet q_1$ $\bar{s}_1$ q_2 $\bar{s}_2$ $\vdots \{\sigma_i\}_1^n$ $p_1 \text{ — } p_2$
$N_{(2,(12),n_1,n_2)}^*$	$N_{(2,(21),n_1,n_2)}^*$	$N_{(2,(01),n_1,n_2)}^*$
$\bullet q_1$ $\bar{s}_1$ q_2 $\bar{s}_2$ $\vdots \{\sigma_i\}_1^{n_1}$ $\{\sigma'_j\}_1^{n_2}$ p_1 p_2	$\bullet q_1$ $\bar{s}_1$ q_2 $\bar{s}_2$ $\vdots \{\sigma_i\}_1^{n_1}$ p_2 p_1 $\vdots \{\sigma'_j\}_1^{n_2}$	$\bullet q_1$ $\bar{s}_1$ q_2 $\bar{s}_3$ $\vdots \{\sigma_i\}_1^{n_1}$ p_2 $\bar{s}_2$ $\{\sigma'_j\}_1^{n_2}$ p_1
$N_{(2,(02),n_1,n_2)}^*$	$N_{(3,0,n)}^*$	$N_{(3,(12),n_1,n_2)}^*$
$\bullet q_1$ $\{\sigma_i\}_1^{n_1}$ q_2 $\bar{s}_1$ $\bar{s}_3$ $\bar{s}_2$ p_1 p_2 $\vdots \{\sigma'_j\}_1^{n_2}$	$\bullet q_1$ q_2 $\bar{s}_1$ $\bar{s}_2$ $\vdots \{\sigma_i\}_1^n$ $p_1 \text{ — } p_2$	$\bullet q_1$ q_2 $\bar{s}_1$ $\bar{s}_2$ $\vdots \{\sigma_i\}_1^{n_1}$ $\{\sigma'_j\}_1^{n_2}$ p_1 p_2
$N_{(3,(21),n_1,n_2)}^*$	$N_{(3,(01),n_1,n_2)}^*$	$N_{(3,(02),n_1,n_2)}^*$
$\bullet q_1$ $\{\sigma_i\}_1^{n_1}$ $\bar{s}_1$ q_2 $\bar{s}_2$ p_2 p_1 $\vdots \{\sigma'_j\}_1^{n_2}$	$\bullet q_1$ q_2 $\bar{s}_3$ $\bar{s}_2$ $\vdots \{\sigma_i\}_1^{n_1}$ $\{\sigma'_j\}_1^{n_2}$ p_2 $\bar{s}_1$ p_1	$\bullet q_1$ $\{\sigma_i\}_1^{n_1}$ $\bar{s}_3$ q_2 $\bar{s}_1$ $\bar{s}_2$ p_1 p_2 $\vdots \{\sigma'_j\}_1^{n_2}$

Рис. 4

$$\begin{aligned}
& W_{N_{(2,(02),n_1,n_2)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_3) W_{\Psi_{(2,(02),n_1,n_2)}^*}(\bar{s}_3, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
& W_{N_{(3,0,n)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_1, \bar{s}_2; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_1) W_{\Psi_{(3,0,n)}^*}(\bar{s}_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^n; \bar{s}_2; p_1, p_2), \\
& W_{N_{(3,(12),n_1,n_2)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_1) W_{\Psi_{(3,(12),n_1,n_2)}^*}(\bar{s}_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
& W_{N_{(3,(21),n_1,n_2)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_1) W_{\Psi_{(3,(21),n_1,n_2)}^*}(\bar{s}_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
& W_{N_{(3,(01),n_1,n_2)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_3) W_{\Psi_{(3,(01),n_1,n_2)}^*}(\bar{s}_3, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2), \\
& W_{N_{(3,(02),n_1,n_2)}^*}(q_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2) \\
& = D_1(q_1, q_2; \bar{s}_1) W_{\Psi_{(3,(02),n_1,n_2)}^*}(\bar{s}_1, q_2; \{\sigma_i\}_1^{n_1}; \bar{s}_2, \bar{s}_3; \{\sigma'_j\}_1^{n_2}; p_1, p_2).
\end{aligned}$$

Список литературы

1. N. Anghel, R. A. Minlos, V. A. Zagrebnov, “Lower spectral branches of a particle coupled to a Bose field”, *Rev. Math. Phys.*, **17**:10 (2005), 1111–1142.
2. В. А. Малышев, Р. А. Минлос, *Линейные операторы в бесконечночастичных системах*, Наука, М., 1994; англ. пер.: V. A. Malyshev, R. A. Minlos, *Linear infinite-particle operators*, Transl. Math. Monogr., **143**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
3. Ю. В. Жуков, “Теорема Ёорио–О’Кэррола для N -частичного решетчатого гамильтониана”, *ТМФ*, **107**:1 (1996), 75–85; англ. пер.: Y. V. Zhukov, “The Iorio–O’Carroll theorem for an N -particle lattice Hamiltonian”, *Theoret. and Math. Phys.*, **107**:1 (1996), 478–486.
4. S. Albeverio, Sh. Alimov, “On some integral equations in Hilbert space with an application to the theory of elasticity”, *Integral Equations Operator Theory*, **55**:2 (2006), 153–168.
5. J. Appell, A. S. Kalitvin, M. Z. Nashed, “On some partial integral equations arising in the mechanics of solids”, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **79**:10 (1999), 703–713.
6. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции*, т. 1: *Обобщенные функции и действия над ними*, ГИФМЛ, М., 1958; нем. пер.: I. M. Gelfand, G. E. Schilow, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*. I: *Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen*, VEB, Berlin, 1960.
7. Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния. Общая теория*, Изд-во ЛГУ, Л., 1994; англ. пер.: D. R. Yafaev, *Mathematical scattering theory. General theory*, Transl. Math. Monogr., **105**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
8. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. III, Мир, М., 1982; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, v. III: *Scattering theory*, Academic Press, New York–London, 1979.
9. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. IV: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern*

- mathematical physics*, v. IV: *Analysis of operators*, Academic Press, New York–London, 1978.
10. Э.Р. Акчурин, “О спектральных свойствах обобщенной модели Фридрихса”, *ТМФ*, **163**:1 (2010), 17–33; англ. пер.: E.R. Akchurin, “Spectral properties of the generalized Friedrichs model”, *Theoret. and Math. Phys.*, **163**:1 (2010), 414–428.
 11. М.В. Федорук, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
 12. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979; пер. с фр.: F. Riesz, B. Szőkefalvi-Nagy, *Leçons d’analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.
 13. И.И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
 14. Н.И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, М., 1968; англ. пер.: N.I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972.
 15. Ю.В. Прохоров, Ю.А. Розанов, *Теория вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы*, Наука, М., 1967; англ. пер.: Yu. V. Prohorov, Yu. A. Rozanov, *Probability theory: Basic concepts, limit theorems, random processes*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1969.

Э.Р. Акчурин (E. R. AKCHURIN)
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: ekachurin@gmail.com.

Поступило в редакцию
04.02.2011
23.03.2012

Р.А. Минлос (R. A. MINLOS)
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: minl@iitp.ru