Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. П. Исаев, Р. С. Юлмухаметов, Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 6, 69–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/im694>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:20:01

УДК 517.54

К. П. Исаев, Р. С. Юлмухаметов

**Об отсутствии безусловных базисов
из экспонент в пространствах Бергмана
на областях, не являющихся многоугольниками**

Доказано, что в пространстве Бергмана $B_2(D)$ нельзя построить безусловные базисы из экспонент в случае, когда D – ограниченная выпуклая область на плоскости, хотя бы в одной из точек границы которой кривизна существует и отлична от нуля.

Библиография: 9 наименований.

Введение

Пусть D – ограниченная выпуклая область на плоскости и $B_2(D)$ – пространство Бергмана. Пространство $B_2(D)$ состоит из функций, аналитических в D и интегрируемых с квадратом по плоской мере Лебега:

$$B_2(D) = \left\{ f \in H(D) : \int_D |f(z)|^2 dv(z) < \infty \right\}.$$

Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением [1]

$$(f, g) = \int_D f(z) \bar{g}(z) dv(z).$$

Семейство $\{h_k, k = 1, 2, \dots\}$ называется *безусловным базисом* в гильбертовом пространстве H , если:

- 1) семейство $\{h_k, k = 1, 2, \dots\}$ полно в пространстве H ;
- 2) существуют положительные постоянные m, M такие, что для любой конечной последовательности $a_k \in \mathbb{C}$ справедлива двусторонняя оценка

$$m \sum_k |a_k|^2 \|h_k\|^2 \leq \left\| \sum_k a_k h_k \right\|^2 \leq M \sum_k |a_k|^2 \|h_k\|^2. \quad (1)$$

Здесь мы придерживаемся определения, данного в работе [2].

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании безусловных базисов из экспонент $\{e^{\lambda_k z}, k = 1, 2, \dots\}$ в пространстве $B_2(D)$.

В работе [3] построены безусловные базисы из экспонент в пространстве Смирнова $E_2(D)$, когда D – выпуклый многоугольник. В работе [5] показано, что уже наличие всего лишь гладкой дуги на границе области D приводит

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00516-а).

к тому, что в пространстве Смирнова $E_2(D)$ безусловные базисы из экспонент не существуют. В работе [9] построены безусловные базисы из экспонент в пространстве Бергмана $B_2(D)$ в случае, когда D – выпуклый многоугольник.

В данной работе приведены условия для области D , при которых безусловные базисы из экспонент в $B_2(D)$ не существуют. В частности, если граница области в какой-либо точке имеет отличную от нуля кривизну, то безусловные базисы из экспонент в $B_2(D)$ построить нельзя.

§ 1. Необходимое условие базисности системы $\{e^{\lambda_k z}\}$

Система экспонент $\{e^{\lambda z}, \lambda \in \mathbb{C}\}$ полна в пространстве $B_2(D)$ (см. [1]). Это обстоятельство позволяет описать сопряженное пространство $B_2^*(D)$ в терминах преобразований Лапласа. Каждому функционалу $S \in B_2^*(D)$ поставим в соответствие функцию

$$\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

которая называется *преобразованием Лапласа функционала S* . В работе [6] показано, что отображение $L: S \mapsto \widehat{S}$ устанавливает изоморфизм пространства $B_2^*(D)$ и гильбертова пространства целых функций $\widehat{B}_2(D)$ с нормой

$$\|F\|^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})} d\Delta(\varphi) dr,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi) &= h'(\varphi) + \int_0^\varphi h(\theta) d\theta, \quad h(\varphi) = \max_{z \in \overline{D}} \operatorname{Re} z e^{i\varphi}, \\ K(\lambda) &= \|e^{\lambda z}\|_{B_2(D)}^2 = \int_D |e^{\lambda z}|^2 dv(z). \end{aligned} \quad (2)$$

ЛЕММА 1. *Если система $\{e^{\lambda_k z}\}$ является безусловным базисом в пространстве $B_2(D)$, то существуют целая функция L с простыми нулями в точках λ_k , $k = 1, 2, \dots$, и константа P , для которых выполняется соотношение*

$$\frac{1}{P} K(\lambda) \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{|L(\lambda)|^2 K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} \leq P K(\lambda). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система $\{e^{\lambda_k z}\}$ образует безусловный базис в пространстве $B_2(D)$. Через S_k обозначим линейный функционал в пространстве $B_2(D)$, который каждой функции $f \in B_2(D)$ ставит в соответствие коэффициент f_k в разложении $f(z) = \sum_{k=1}^\infty f_k e^{\lambda_k z}$, $z \in D$:

$$S_k(f) = f_k. \quad (4)$$

Через P обозначим $\max(M, \frac{1}{m})$, где M, m – постоянные из оценки (1). Учитывая определения (2) и (4), получим

$$\frac{1}{P} \sum_{k=1}^\infty |f_k|^2 K(\lambda_k) \leq \|f\|^2 \leq P \sum_{k=1}^\infty |f_k|^2 K(\lambda_k). \quad (5)$$

Из левого неравенства в (5) следует ограниченность функционала S_k . Таким образом, функции $\widehat{S}_k(\lambda)$ лежат в пространстве $\widehat{B}_2(D)$, и, кроме того,

$$\widehat{S}_k(\lambda_n) = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k, \end{cases} \quad (6)$$

где λ_n , $n \neq k$, являются простыми нулями функции $\widehat{S}_k(\lambda)$.

Пусть $L(\lambda) = \widehat{S}_1(\lambda)(\lambda - \lambda_1)$. Это целая функция с простыми нулями в точках λ_n , $n = 1, 2, \dots$. Тогда, очевидно, справедливо представление

$$\widehat{S}_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

При фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ функция $e^{\lambda z}$ лежит в пространстве $B_2(D)$ и, тем самым, разлагается в ряд по системе $\{e^{\lambda_k z}\}$:

$$e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda) e^{\lambda_k z}.$$

Применим функционал S_n к этому равенству. С учетом соотношений (6) получим

$$\widehat{S}_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda) \widehat{S}_n(\lambda_k) = c_n(\lambda).$$

Отсюда и из представления (7) имеем $c_n(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Условие (5) влечет соотношение

$$\frac{1}{P} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 K(\lambda_k) \leq K(\lambda) \leq P \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 K(\lambda_k),$$

которое доказывает лемму.

§ 2. Распределение показателей безусловного базиса $\{e^{\lambda_k z}\}$

Соотношение (3) позволяет выявить некоторые свойства распределения нулей функции $L(\lambda)$. Для формулировки этих свойств введем одну вспомогательную функцию.

Через $B(\lambda, r)$ обозначим круг радиуса r с центром в точке λ . Пусть $A(G)$ – множество функций, гармонических в области G и непрерывных в замыкании $\bar{G}$. Для заданной на всей плоскости непрерывной функции $u(\lambda)$, любой точки $\lambda \in \mathbb{C}$ и числа $a > 0$ величину $\rho = \rho(\lambda, a, u)$ определим из условия

$$\inf_{h \in A(B(\lambda, \rho))} \max_{z \in \bar{B}(\lambda, \rho)} |u(z) - h(z)| = a. \quad (8)$$

В работе [7] показано, что, когда $u(z)$ – субгармоническая функция, величина $\rho(\lambda, a, u)$ вполне определяется условием: если $h(z)$ – гармоническая мажоранта функции $u(z)$ в круге $B(\lambda, \rho)$, то

$$\max_{z \in \bar{B}(\lambda, \rho)} (h(z) - u(z)) = 2a. \quad (9)$$

Пусть $\rho(\lambda) = \rho(\lambda, \ln(5P), \ln K(z))$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L(\lambda)$ – целая функция с простыми нулями λ_k , $k = 1, 2, \dots$, при некотором P удовлетворяющая двусторонней оценке (3). Тогда:

1) в любом круге $B(\lambda, 2\rho(\lambda))$ содержится хотя бы один нуль λ_k функции $L(\lambda)$;

2) для любых n, k , $n \neq k$, выполняется неравенство

$$|\lambda_k - \lambda_n| \geq \frac{\max(\rho(\lambda_k), \rho(\lambda_n))}{10P^{3/2}};$$

3) для любого k в круге $B(\lambda_k, \frac{\rho(\lambda_k)}{20P^{3/2}})$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{5^6 P^8} K(\lambda) \leq \frac{K(\lambda_k) |L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} \leq PK(\lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Утверждение 1) докажем от противного: пусть для некоторого $z \in \mathbb{C}$ в круге $B = B(z, 2\rho(z))$ не существует ни одного нуля функции $L(\lambda)$. Возьмем точку $\lambda \in B(z, \rho(z))$. Тогда для любого k имеем $\rho(z) \leq |\lambda_k - z|/2$ и $|\lambda - z| < \rho(z) \leq |\lambda_k - z|/2$, значит,

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_k| &\geq |\lambda_k - z| - |\lambda - z| \geq \frac{1}{2} |z - \lambda_k|, \\ |\lambda - \lambda_k| &\leq |\lambda_k - z| + |\lambda - z| \leq \frac{3}{2} |z - \lambda_k|. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|\lambda - \lambda_k|}{|z - \lambda_k|} \leq \frac{3}{2} < 2.$$

Из этого соотношения вытекает двусторонняя оценка, верная для $\lambda \in B(z, \rho(z))$:

$$\frac{1}{4} C(z) |L(\lambda)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|L(\lambda)|^2 K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} \leq 4C(z) |L(\lambda)|^2,$$

где $C(z)$ – число:

$$C(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2 |z - \lambda_k|^2}.$$

В силу соотношения (3), которое по условию теоремы выполняется для функции $L(\lambda)$, получим

$$\frac{1}{4P} C(z) |L(\lambda)|^2 \leq K(\lambda) \leq 4PC(z) |L(\lambda)|^2.$$

Прологарифмируем это соотношение:

$$|\ln K(\lambda) - \ln(C(z) |L(\lambda)|^2)| \leq \ln(4P) < \ln(5P).$$

Поскольку в круге $B(z, 2\rho(z))$ по предположению нет нулей функции $L(\lambda)$, то функция $h(\lambda) = \ln(C(z) |L(\lambda)|^2)$ гармонична в круге $B(z, \rho(z))$ и непрерывна в его замыкании. Тогда последняя оценка противоречит определению величины $\rho(z) = \rho(z, \ln(5P), \ln K(\lambda))$.

2. Зафиксируем два различных номера k, n . По соотношению (3) функция

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{K(\lambda_n)}}{|L'(\lambda_n)|(\lambda_n - \lambda)} L(\lambda)$$

удовлетворяет оценке сверху $|F(\lambda)| \leq \sqrt{PK(\lambda)}$, а по определению величины $\rho(\lambda_k)$ в круге $B(\lambda_k, \rho(\lambda_k))$ существует гармоническая функция $h_k(\lambda)$, удовлетворяющая оценке

$$|\ln K(\lambda) - h_k(\lambda)| \leq \ln(5P), \quad (10)$$

в частности $\sqrt{K(\lambda)} \leq \sqrt{5P} e^{h_k(\lambda)/2}$. Пусть $g_k(\lambda)$ – функция, аналитическая в круге $B(\lambda_k, \rho(\lambda_k))$ и такая, что $\operatorname{Re} g_k(\lambda) = h_k(\lambda)/2$. Тогда функция

$$f(z) = F(\rho(\lambda_k)z + \lambda_k) e^{-g_k(\rho(\lambda_k)z + \lambda_k)}$$

аналитична в единичном круге $B(0, 1)$ и удовлетворяет оценке сверху $|f(z)| \leq \sqrt{5}P$, причем $f(0) = 0$. По лемме Шварца выполняется оценка $|f(z)| \leq \sqrt{5}P|z|$, значит, $|f'(0)| \leq \sqrt{5}P$. Вычислив $f'(0)$, получим

$$|F'(\lambda_k)| \leq \sqrt{5}P \frac{e^{h_k(\lambda_k)/2}}{\rho(\lambda_k)}.$$

Отсюда и из соотношения (10) вытекает неравенство

$$|F'(\lambda_k)| \leq 5P^{3/2} \frac{\sqrt{K(\lambda_k)}}{\rho(\lambda_k)}.$$

Вычислим по определению значение $F'(\lambda_k)$ и получим

$$\frac{|L'(\lambda_k)|\sqrt{K(\lambda_n)}}{|L'(\lambda_n)||\lambda_k - \lambda_n|} \leq 5P^{3/2} \frac{\sqrt{K(\lambda_k)}}{\rho(\lambda_k)}.$$

Индексы k, n произвольные, и мы можем поменять их местами:

$$\frac{|L'(\lambda_n)|\sqrt{K(\lambda_k)}}{|L'(\lambda_k)||\lambda_n - \lambda_k|} \leq 5P^{3/2} \frac{\sqrt{K(\lambda_n)}}{\rho(\lambda_n)}.$$

Перемножим последние две оценки и обратим числа в полученном неравенстве:

$$|\lambda_k - \lambda_n|^2 \geq \frac{\rho(\lambda_k)\rho(\lambda_n)}{25P^3}. \quad (11)$$

Пусть $\rho(\lambda_k) \geq \rho(\lambda_n)$; предположим, что неравенство из утверждения 2) не выполняется, т. е.

$$|\lambda_k - \lambda_n| < \frac{\rho(\lambda_k)}{10P^{3/2}}. \quad (12)$$

Круг

$$B' = \left\{ |\lambda - \lambda_n| \leq \frac{10P^{3/2} - 1}{10P^{3/2}} \rho(\lambda_k) \right\}$$

лежит в круге $B(\lambda_k, \rho(\lambda_k))$, в котором существует гармоническая функция $h_k(z)$, удовлетворяющая оценке $|\ln K(z) - h_k(z)| \leq \ln(5P)$. Тогда

$$\rho(\lambda_n) \geq \frac{10P^{3/2} - 1}{10P^{3/2}} \rho(\lambda_k).$$

Из этой оценки и оценки (11) следует неравенство

$$|\lambda_k - \lambda_n|^2 \geq \frac{1}{25P^3} \rho(\lambda_k) \rho(\lambda_n) \geq \frac{1}{25P^3} \frac{10P^{3/2} - 1}{10P^{3/2}} \rho^2(\lambda_k).$$

Поскольку $P > 1$, то

$$\frac{10P^{3/2} - 1}{10P^{3/2}} > \frac{9}{10} > \frac{1}{4}, \quad |\lambda_k - \lambda_n| > \frac{1}{10P^{3/2}} \rho(\lambda_k),$$

что противоречит предположению (12).

3. Зафиксируем некоторый номер k . Правое неравенство в утверждении 3) следует из условия теоремы. В круге $B(\lambda_k, \rho(\lambda_k))$ по определению величины $\rho(\lambda_k)$ существует гармоническая функция $h_k(\lambda)$ такая, что

$$-\ln(5P) \leq \ln K(\lambda) - h_k(\lambda) \leq \ln(5P). \quad (13)$$

По условию теоремы имеем

$$K(\lambda) \geq \frac{1}{P} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K(\lambda_n) |L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_n)|^2 |\lambda - \lambda_n|^2} \geq \frac{K(\lambda_k) |L(\lambda)|^2}{P |L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2}$$

или

$$\ln K(\lambda) \geq \ln \frac{K(\lambda_k) |L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} - \ln P.$$

Следовательно, для $\lambda \in B(\lambda_k, \rho(\lambda_k))$ имеем

$$\ln \frac{K(\lambda_k) |L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} - \ln P - h_k(\lambda) - \ln(5P) \leq 0,$$

то есть

$$h_k(\lambda) + 2 \ln P + \ln 5 - \ln \frac{K(\lambda_k) |L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} \geq 0.$$

По утверждению 2) в круге $B(\lambda_k, \frac{1}{10P^{3/2}} \rho(\lambda_k))$ не существует нулей функции $L(\lambda)$, кроме λ_k . Следовательно, функция

$$v_k(\lambda) = -\ln \frac{K(\lambda_k) |L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2}$$

гармонична в этом круге, а функция $h_k(\lambda) + v_k(\lambda) + \ln(5P^2)$ гармонична и неотрицательна в нем. По неравенству Харнака в круге $B(\lambda_k, \frac{\rho(\lambda_k)}{20P^{3/2}})$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} h_k(\lambda) + v_k(\lambda) + \ln(5P^2) &\leq 3(h_k(\lambda_k) + v_k(\lambda_k) + \ln(5P^2)) \\ &= 3(h_k(\lambda_k) - \ln K(\lambda_k) + \ln(5P^2)). \end{aligned}$$

Из левого неравенства в (13) имеем $h_k(\lambda_k) \leq \ln K(\lambda_k) + \ln(5P)$, поэтому

$$h_k(\lambda) + v_k(\lambda) \leq 3 \ln(5P) + 2 \ln(5P^2) = \ln(5^5 P^7).$$

Из правого неравенства в (13) имеем $h_k(\lambda) \geq \ln K(\lambda) - \ln(5P)$, значит,

$$-v_k(\lambda) \geq \ln K(\lambda) - \ln(5P) - \ln(5^5 P^7) = \ln K(\lambda) - \ln(5^6 P^8).$$

Таким образом,

$$\frac{K(\lambda_k) |L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} \geq \frac{1}{5^6 P^8} K(\lambda).$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, — нули целой функции $L(\lambda)$, удовлетворяющей условию (3). Тогда в любом ограниченном множестве B , содержащем хотя бы одну из точек $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, найдется точка λ_n такая, что $\lambda_n \in B$ и

$$\sum_{\lambda_k \in B, k \neq n} \frac{1}{|\lambda_k - \lambda_n|^2} \leq \frac{(5P)^{12}}{\rho^2(\lambda_n)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношения (3) для любого λ выполняется оценка

$$\sum_{\lambda_k \in B} \frac{K(\lambda_k) |L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} \leq PK(\lambda). \quad (14)$$

Существует такой номер n , что $\lambda_n \in B$ и

$$\frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2} = \min_{\lambda_k \in B} \left(\frac{K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2} \right).$$

По утверждению 3) теоремы 1 для точек λ , лежащих на границе круга $B(\lambda_n, \frac{1}{20P^{3/2}} \rho(\lambda_n))$, справедлива оценка

$$\frac{K(\lambda)}{|L(\lambda)|^2} \leq 4^2 5^8 P^{11} \frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2 \rho^2(\lambda_n)}.$$

Отсюда и из оценки (14) получим

$$4^2 5^8 P^{11} \frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2 \rho^2(\lambda_n)} \geq \frac{1}{P} \sum_{\lambda_k \in B} \frac{K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2}.$$

Учитывая выбор номера n , для точек λ на границе круга $B(\lambda_n, \frac{1}{20P^{3/2}} \rho(\lambda_n))$ имеем

$$4^2 5^8 P^{11} \frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2 \rho^2(\lambda_n)} \geq \frac{1}{P} \frac{K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2} \sum_{\lambda_k \in B} \frac{1}{|\lambda - \lambda_k|^2},$$

или

$$\sum_{\lambda_k \in B} \frac{1}{|\lambda - \lambda_k|^2} \leq \frac{4^2 5^8 P^{12}}{\rho^2(\lambda_n)}. \quad (15)$$

По утверждению 2) теоремы 1 для указанных точек λ при $k \neq n$ выполняется оценка

$$|\lambda - \lambda_k| \leq |\lambda - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda_k| \leq \frac{3}{2} |\lambda_n - \lambda_k|,$$

поэтому из (15) вытекает

$$\sum_{\lambda_k \in B, k \neq n} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_k|^2} \leq \frac{(5P)^{12}}{\rho^2(\lambda_n)}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, – нули целой функции $L(\lambda)$, удовлетворяющей соотношению (3). Тогда для любой последовательности комплексных чисел z_n и для любой неограниченно возрастающей последовательности вещественных неотрицательных чисел a_n выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup\{\rho(z), |z - z_n| \leq a_n \rho(z_n)\}}{\inf\{\rho(z), |z - z_n| \leq a_n \rho(z_n)\}} = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости круг $B(z_n, a_n \rho(z_n))$ обозначим через B_n , $n = 1, 2, \dots$. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдутся неограниченно возрастающая последовательность a_n , последовательность точек z_n и число $T > 0$ такие, что для всех n верно соотношение

$$\frac{\rho(z)}{\rho(w)} \leq T, \quad z, w \in B_n. \quad (16)$$

Зафиксируем номер m , введем обозначение $\rho = \sup_{w \in B_m} \rho(w)$ и рассмотрим семейство кругов $\{B(w, 2\rho), w \in B_m\}$. По лемме Хеймана о покрытиях найдется набор точек $w_k \in B_m, k = 1, 2, \dots, s$, такой, что система кругов $B(w_k, 2\rho), k = 1, 2, \dots, s$, покрывает по-прежнему весь круг B_m , но при этом каждая точка этого круга попадает не более чем в шесть кругов из $B(w_k, 2\rho), k = 1, 2, \dots, s$. Используя теорему 2 для круга B_m , найдем точку $\lambda_n \in B_m$, для которой выполняется оценка

$$\sum_{\lambda_k \in B_m, k \neq n} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_k|^2} \leq \frac{(5P)^{12}}{\rho^2(\lambda_n)}. \quad (17)$$

Далее будем рассматривать только те круги $B(w_k, 2\rho)$, которые не пересекаются с кругом $B(\lambda_n, \rho(\lambda_n))$ и полностью лежат в круге B_m . Эта система покрывает множество $B(z_m, a_m \rho(z_m) - 2\rho) \setminus B(\lambda_n, \rho(\lambda_n) + 2\rho)$:

$$\bigcup_k B(w_k, 2\rho) \supset B(z_m, a_m \rho(z_m) - 2\rho) \setminus B(\lambda_n, \rho(\lambda_n) + 2\rho). \quad (18)$$

Поскольку $\rho \geq \rho(w_k)$, то круг $B(w_k, 2\rho)$ по утверждению 1) теоремы 1 содержит некоторую точку $\lambda_{i(k)}$. Так как $B(w_k, 2\rho)$ не пересекается с кругом $B(\lambda_n, \rho(\lambda_n))$, то по условию (16) для любой точки $w \in B(w_k, 2\rho)$ имеем $|w - \lambda_n| > \rho(\lambda_n) \geq \frac{\rho}{T}$, или $\rho < T|w - \lambda_n|$. Следовательно, $|w - \lambda_{i(k)}| \leq 4\rho \leq 4T|w - \lambda_n|$. Поэтому для любой точки $w \in B(w_k, 2\rho)$ выполняется

$$|\lambda_{i(k)} - \lambda_n| \leq |w - \lambda_{i(k)}| + |w - \lambda_n| \leq (4T + 1)|w - \lambda_n|.$$

Отсюда, проинтегрировав неравенство

$$\frac{1}{(4T + 1)^2 |w - \lambda_n|^2} \leq \frac{1}{|\lambda_{i(k)} - \lambda_n|^2}$$

по кругу $B(w_k, 2\rho)$, получим

$$\frac{1}{|\lambda_{i(k)} - \lambda_n|^2} \geq \frac{1}{\pi(2\rho)^2(4T+1)^2} \int_{B(w_k, 2\rho)} \frac{dv(w)}{|w - \lambda_n|^2}. \quad (19)$$

Кроме того, по свойству покрытия круга $B(w_k, 2\rho)$ не могут совпадать между собой более чем в шести точках $\lambda_{i(k)}$. Таким образом, в силу (17) получаем

$$\sum_k \frac{1}{|\lambda_{i(k)} - \lambda_n|^2} \leq 6 \sum_{k, k \neq n} \frac{1}{|\lambda_k - \lambda_n|^2} \leq \frac{6(5P)^{12}}{\rho^2(\lambda_n)}. \quad (20)$$

В силу (18) имеем

$$\sum_k \int_{B(w_k, 2\rho)} \frac{dv(w)}{|w - \lambda_n|^2} \geq \int_{B(z_m, a_m \rho(z_m) - 2\rho) \setminus B(\lambda_n, \rho(\lambda_n) + 2\rho)} \frac{dv(w)}{|w - \lambda_n|^2}. \quad (21)$$

Просуммируем теперь неравенства (19) и воспользуемся оценками (20), (21):

$$\frac{6(5P)^{12}}{\rho^2(\lambda_n)} \geq \frac{1}{\pi(2\rho)^2(4T+1)^2} \int_{B(z_m, a_m \rho(z_m) - 2\rho) \setminus B(\lambda_n, \rho(\lambda_n) + 2\rho)} \frac{dv(w)}{|w - \lambda_n|^2}.$$

Из простых геометрических соображений вытекает, что существует сектор круга $B(\lambda_n, a_m \rho(z_m))$ с раствором $2\pi/3$, целиком лежащий в $B_m = B(z_m, a_m \rho(z_m))$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{B(z_m, a_m \rho(z_m) - 2\rho) \setminus B(\lambda_n, \rho(\lambda_n) + 2\rho)} \frac{dv(w)}{|w - \lambda_n|^2} \\ & \geq \frac{2\pi}{3} \int_{\rho(\lambda_n) + 2\rho}^{a_m \rho(z_m) - 2\rho} \frac{dt}{t} = \frac{2\pi}{3} \ln \frac{a_m \rho(z_m) - 2\rho}{\rho(\lambda_n) + 2\rho}. \end{aligned}$$

Последние два соотношения дают оценку

$$\frac{1}{\pi(2\rho)^2(4T+1)^2} \frac{2\pi}{3} \ln \frac{a_m \rho(z_m) - 2\rho}{\rho(\lambda_n) + 2\rho} \leq \frac{6(5P)^{12}}{\rho^2(\lambda_n)}.$$

Отсюда с учетом предположения (16) получим оценку

$$\ln \frac{a_m - 2T}{T(T+2)} \leq 36(5P)^{12} T^2 (4T+1)^2,$$

которая противоречит неограниченности последовательности a_m . Теорема доказана.

§ 3. Свойство функции Бергмана $K(\lambda)$

ТЕОРЕМА 4. Пусть D – ограниченная выпуклая область. Для $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $t > 0$ через $s(t, \varphi)$ обозначим площадь пересечения области D с полосой $\{z: h(\varphi) - t < \operatorname{Re} z e^{i\varphi} < h(\varphi)\}$. Тогда

$$e^{-2} e^{2h(\varphi)r} s\left(\frac{1}{r}, \varphi\right) \leq K(re^{i\varphi}) \leq 4e^{2h(\varphi)r} s\left(\frac{1}{r}, \varphi\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z(\varphi)$ – такая точка на границе области D , что $h(\varphi) = \operatorname{Re} z(\varphi)e^{i\varphi}$. С помощью отображения $z \rightarrow w = (z - z(\varphi))e^{i\varphi}$ преобразуем область D в область D' , расположенную в левой полуплоскости и касающуюся мнимой оси в начале координат. После замены переменных в интеграле функция $K(re^{i\varphi})$ представляется в виде

$$K(re^{i\varphi}) = e^{2h(\varphi)r} \int_{D'} e^{2r \operatorname{Re} w} dv(w).$$

Таким образом, требуется доказать соотношение

$$e^{-2s} s \left(\frac{1}{r} \right) \leq \int_{D'} e^{2r \operatorname{Re} w} dv(w) \leq 4s \left(\frac{1}{r} \right), \quad (22)$$

где $s(t)$ – площадь части области D' , лежащей в вертикальной полосе $-t < \operatorname{Re} w < 0$. Область D' может быть описана в виде

$$D' = \{w = x + iy: f_1(x) < y < f_2(x), -T < x < 0\},$$

где f_1 – выпуклая функция на интервале $(-T, 0)$, а f_2 – вогнутая функция на том же интервале, причем $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in (-T, 0)$. Пусть $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$. Тогда $f(x)$ – неотрицательная вогнутая функция на $(-T, 0)$ и

$$\int_{D'} e^{2r \operatorname{Re} w} dv(w) = \int_{-T}^0 e^{2rx} f(x) dx.$$

Оценка снизу в (22) получается немедленно:

$$\int_{D'} e^{2r \operatorname{Re} w} dv(w) \geq \int_{D', \operatorname{Re} w \geq -1/r} e^{2r \operatorname{Re} w} dv(w) \geq e^{-2s} s \left(\frac{1}{r} \right).$$

Для доказательства оценки сверху рассмотрим три случая.

1) Пусть $0 < r \leq \frac{1}{T}$. Для таких r , очевидно, $s(\frac{1}{r})$ равно площади всей области D' и $2rx \leq 0$, поэтому

$$\int_{D'} e^{2r \operatorname{Re} w} dv(w) \leq s \left(\frac{1}{r} \right).$$

2) Пусть $\frac{1}{T} < r \leq \frac{2}{T}$. Точки пересечения вертикали $\operatorname{Re} w = -1/r$ с границей области D' обозначим через A, B , точки пересечения прямых OA, OB (O – начало координат) с вертикалью $\operatorname{Re} w = -T$ обозначим соответственно через A', B' . Площадь части области D' , лежащей в полосе $-T < \operatorname{Re} w < -\frac{1}{r}$, меньше, чем площадь трапеции $A'ABB'$. Из подобия треугольников AOB и $A'OB'$, при котором коэффициент подобия меньше 2, следует, что площадь трапеции $A'ABB'$ меньше утроенной площади треугольника AOB , которая, в свою очередь, меньше $s(\frac{1}{r})$. Таким образом, для рассматриваемых r площадь всей области не превосходит $4s(\frac{1}{r})$, и поэтому

$$\int_{D'} e^{2r \operatorname{Re} w} dv(w) \leq 4s \left(\frac{1}{r} \right).$$

3) Пусть $r > \frac{2}{T}$. Функция $f(x)$ – вогнутая неотрицательная, поэтому при $x \leq -\frac{1}{r}$ выполняется соотношение

$$f(x) \leq -f\left(-\frac{1}{r}\right)xr.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{D', \operatorname{Re} w < -1/r} e^{2r \operatorname{Re} w} dv(w) &= \int_{-T}^{-1/r} e^{2rx} f(x) dx \leq -rf\left(-\frac{1}{r}\right) \int_{-\infty}^{-1/r} e^{2rx} x dx \\ &= \frac{3e^{-2}}{4} f\left(-\frac{1}{r}\right) \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Однако $\frac{1}{2}f\left(-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{r}$ равно площади треугольника AOB , которая меньше $s\left(\frac{1}{r}\right)$. Таким образом, имеем

$$\int_{D', \operatorname{Re} w < -1/r} e^{2r \operatorname{Re} w} dv(w) \leq \frac{3e^{-2}}{2} s\left(\frac{1}{r}\right).$$

Отсюда получаем

$$\int_{D'} e^{2r \operatorname{Re} w} dv(w) \leq \left(\frac{3e^{-2}}{2} + 1\right) s\left(\frac{1}{r}\right).$$

Сравнив результаты из пп. 1)–3), получим требуемую оценку сверху в соотношении (22). Теорема доказана.

§ 4. Отсутствие безусловного базиса из экспонент

ТЕОРЕМА 5. Если граница области D в окрестности точки $z = 0$ совпадает с графиком неотрицательной выпуклой функции $y = f(x)$ и

$$f(x) = ax^2 + \alpha(x)x^2, \quad |x| \leq \delta,$$

где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ и $a > 0$, то в пространстве $B_2(D)$ не может существовать безусловный базис из экспонент.

Предварительно докажем несколько лемм.

ЛЕММА 2. Для любой функции $\alpha(x)$, определенной в окрестности нуля $|x| \leq \delta$ и стремящейся к нулю при $x \rightarrow 0$, существует функция $\beta(y)$ на $(0, +\infty)$, которая монотонно возрастает до $+\infty$ при $y \rightarrow +\infty$, и выполняется $\alpha\left(\frac{\beta(y)}{\sqrt{y}}\right)\beta^2(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$, $\beta(y) \leq y^{1/4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\alpha_1(x) = \sup_{|t| \leq |x|} |\alpha(t)|, \quad |x| \leq \delta. \quad (23)$$

Очевидно, что неотрицательная, четная и монотонно неубывающая при $x > 0$ функция $\alpha_1(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow 0$ и $\alpha_1(x) \geq |\alpha(x)|$. Если мы построим функцию $\beta(y)$ с требуемыми свойствами для $\alpha_1(x)$, то эта функция будет обладать нужными свойствами и для функции $\alpha(x)$.

Если $\alpha_1(x) \equiv 0$ в некоторой окрестности нуля, то в качестве $\beta(y)$ можно взять любую бесконечно возрастающую функцию, не превосходящую $y^{1/4}$. Пусть $\alpha_1(x) > 0$ при $x \neq 0$. Положим

$$\beta(y) = (\alpha_1(y^{-1/4}) + y^{-1})^{-1/4}, \quad y \geq \delta^{-4}.$$

Для положительных $y \leq \delta^{-4}$ функция $\beta(y)$ равна $\delta\beta(\delta^{-4})y^{1/4}$. Функция $\beta(y)$ монотонно возрастает до $+\infty$ при $y \rightarrow +\infty$. Очевидно также, что

$$\begin{aligned} \beta(y) &\leq y^{1/4}, & y &\geq \delta^{-4}, \\ \beta(y) &\leq \alpha_1(y^{-1/4})^{-1/4}, & y &\geq \delta^{-4}. \end{aligned}$$

В силу монотонности функции $\alpha_1(x)$ имеем при $y \rightarrow +\infty$

$$0 < \alpha_1\left(\frac{\beta(y)}{\sqrt{y}}\right)\beta^2(y) \leq \alpha_1(y^{-1/4})\alpha_1(y^{-1/4})^{-1/2} = \alpha_1(y^{-1/4})^{1/2} \rightarrow 0.$$

Лемма доказана.

Пусть функция $\alpha_1(x)$ определена, как в (23), по функции $\alpha(x)$ из формулировки теоремы 5. По лемме 2 построим функцию $\beta(y)$ для $\alpha_1\left(\frac{8x}{a}\right)$, где a – число из формулировки теоремы 5. Таким образом, $\beta(y) \leq y^{1/4}$,

$$\alpha_1\left(\frac{8\beta(y)}{a\sqrt{y}}\right)\beta^2(y) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow +\infty. \quad (24)$$

Через D_0 обозначим выпуклую область, ограниченную параболой $y = ax^2$ и горизонтальной прямой $y = a\delta^2$, а через $h_0(\varphi)$ – опорную функцию области D_0 , т.е. $h_0(\varphi) = \max_{z \in \overline{D_0}} \operatorname{Re} ze^{i\varphi}$. Через $s_0(t, \varphi)$, $t > 0$, обозначим площадь части области D_0 , лежащей в полосе $h_0(\varphi) - t < \operatorname{Re} ze^{i\varphi} < h_0(\varphi)$. На основе свойства (24) функции $\beta(y)$ можно найти число y_0 такое, что для всех $y \geq y_0$ будут выполняться оценки

$$2^8 \alpha_1\left(\frac{8\beta(y)}{a\sqrt{y}}\right)\frac{\beta^2(y)}{a^2} \leq 1, \quad (25)$$

$$\beta^2(y) \geq 8a. \quad (25')$$

Поскольку $\beta(y) \leq y^{1/4}$, то, полагая $y_0 \geq 16^2$, можем считать, что для всех $\lambda = re^{i\varphi} \in B(iy, \beta(y)\sqrt{y})$, $y \geq y_0$, выполняется оценка

$$\sin\left|\frac{\pi}{2} - \varphi\right| \leq \frac{\beta(y)\sqrt{y}}{y - \beta(y)\sqrt{y}} \leq \frac{\beta(y)\sqrt{y}}{y - y^{3/4}} \leq \frac{\beta(y)\sqrt{y}}{\frac{1}{2}y} \leq 2y^{-1/4} \leq \frac{1}{2}.$$

Значит, $\left|\frac{\pi}{2} - \varphi\right| \leq \frac{\pi}{6}$ и, в частности,

$$|\operatorname{ctg} \varphi| \leq \frac{2\beta(y)}{\sqrt{y}}. \quad (26)$$

Рассмотрим область $G = \bigcup_{y > y_0} B(iy, \beta(y)\sqrt{y})$. Для точек $\lambda = re^{i\varphi} \in G$, таким образом, выполняются соотношения (25), (25'), (26).

ЛЕММА 3. Для всех $\lambda = re^{i\varphi} \in G$ выполняется оценка $|h(\varphi) - h_0(\varphi)| \leq \frac{1}{8r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $y > y_0$ и точку $\lambda = re^{i\varphi} \in B(iy, \beta(y)\sqrt{y})$. Не уменьшая общности рассуждений, будем рассматривать только $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Геометрически величина $h(\varphi)$ равна расстоянию до начала координат от касательной к графику функции $f(x)$ с углом наклона $\frac{\pi}{2} - \varphi$ к оси абсцисс. Для φ , близких к $\frac{\pi}{2}$, можем вычислить функцию $h_0(\varphi)$. Функцию ax^2 обозначим через $f_0(x)$. Из уравнения $f'_0(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi) \equiv \operatorname{ctg} \varphi$ определим точку $x_0(\varphi) = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2a}$. Очевидно, при $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ имеем $x_0(\varphi) \geq 0$ и

$$h_0(\varphi) = \operatorname{Re}(x_0(\varphi) + if_0(x_0(\varphi)))e^{i\varphi} = \frac{\cos^2 \varphi}{4a \sin \varphi}. \quad (27)$$

Оценим снизу функцию $h(\varphi)$. Точка $z_0(\varphi) = x_0(\varphi) + if(x_0(\varphi))$ лежит на границе области D , поэтому

$$\begin{aligned} h(\varphi) &\geq \operatorname{Re} z_0(\varphi)e^{i\varphi} = x_0(\varphi) \cos \varphi - ax_0^2(\varphi) \sin \varphi - \alpha(x_0(\varphi))x_0^2(\varphi) \sin \varphi \\ &\geq h_0(\varphi) - \alpha_1 \left(\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2a} \right) \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi}{4a^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из уравнения $f'(x) = \operatorname{ctg} \varphi$ определим точку $x(\varphi)$ и положим $z(\varphi) = x(\varphi) + if(x(\varphi))$, $z_1(\varphi) = x(\varphi) + if_0(x(\varphi))$. Заметим, что для $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ число $x(\varphi)$ неотрицательно и точка $z_1(\varphi)$ лежит на границе области D_0 , поэтому

$$\begin{aligned} h(\varphi) &= \operatorname{Re} z(\varphi)e^{i\varphi} = \operatorname{Re} z_1(\varphi)e^{i\varphi} - \alpha(x(\varphi))x^2(\varphi) \sin \varphi \\ &\leq h_0(\varphi) - \alpha(x(\varphi))x^2(\varphi) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (29)$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $|\alpha_1(x)| \leq \frac{a}{2}$ при всех $|x| \leq \delta$. Определим точку $x(\varphi) \geq 0$ из уравнения $f(x)/x = \operatorname{ctg} \varphi$. Оценим $x(\varphi)$ из соотношения

$$\frac{a}{2}x(\varphi) \leq ax'(\varphi) + \alpha(x(\varphi))x(\varphi) = \operatorname{ctg} \varphi.$$

Значит,

$$x(\varphi) \leq \frac{2 \operatorname{ctg} \varphi}{a}. \quad (30)$$

Отсюда в силу монотонности функции $\alpha_1(x)$ и из (29) получим

$$h(\varphi) - h_0(\varphi) \leq |\alpha(x(\varphi))|x^2(\varphi) \sin \varphi \leq \alpha_1(x(\varphi))x^2(\varphi) \leq \alpha_1 \left(\frac{2 \operatorname{ctg} \varphi}{a} \right) \frac{4 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{a^2},$$

а из (28) имеем

$$h_0(\varphi) - h(\varphi) \leq \alpha_1 \left(\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2a} \right) \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi}{4a^2}.$$

Из последних двух соотношений вытекает следующая оценка:

$$|h_0(\varphi) - h(\varphi)| \leq \alpha_1 \left(\frac{2 \operatorname{ctg} \varphi}{a} \right) \frac{4 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{a^2}.$$

Таким образом, учитывая (25), (26), получим

$$\begin{aligned} |h_0(\varphi) - h(\varphi)| &\leq \alpha_1 \left(\frac{4\beta(y)}{a\sqrt{y}} \right) \frac{16\beta^2(y)}{a^2y} < \frac{2^{-4}}{y} = \frac{2^{-3}}{2y} \\ &\leq \frac{2^{-3}}{y + y^{3/4}} \leq \frac{2^{-3}}{y + \beta(y)\sqrt{y}} \leq \frac{2^{-3}}{r}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Для любого $\lambda = re^{i\varphi} \in G$ выполняются соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{a}}r^{-3/2} \leq s_0\left(\frac{1}{r}, \varphi\right) \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{a}}r^{-3/2}, \quad \sqrt{\frac{1}{4a}}r^{-3/2} \leq s\left(\frac{1}{r}, \varphi\right) \leq \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{a}}r^{-3/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем точку $\lambda = re^{i\varphi} \in B(iy, \beta(y)\sqrt{y})$. Напомним, что точки $x(\varphi), x_0(\varphi)$ мы определили из уравнений

$$f'(x) = \operatorname{ctg} \varphi, \quad f'_0(x) = \operatorname{ctg} \varphi$$

соответственно. Мы рассматриваем $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$, поэтому $x(\varphi), x_0(\varphi) \geq 0$ и $x(\varphi), x_0(\varphi) \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Как уже отмечалось, прямые $\operatorname{Re} ze^{i\varphi} = h(\varphi)$ и $\operatorname{Re} ze^{i\varphi} = h_0(\varphi)$ совпадают с касательными к функциям $f(x), f_0(x)$ в точках $x(\varphi), x_0(\varphi)$ соответственно. По определению величина $s_0(\frac{1}{r}, \varphi)$ – это площадь части надграфика функции $f_0(x)$, отсекаемой прямой

$$y = f'_0(x_0(\varphi))(x - x_0(\varphi)) + f_0(x_0(\varphi)) + \frac{1}{r \sin \varphi}. \quad (31)$$

Определим точки $u_0(\varphi), v_0(\varphi), v_0(\varphi) > u_0(\varphi)$, из квадратного относительно x уравнения

$$f'_0(x_0(\varphi))(x - x_0(\varphi)) + f_0(x_0(\varphi)) + \frac{1}{r \sin \varphi} = ax^2. \quad (32)$$

Точки пересечения касательной

$$y = f'_0(x_0(\varphi))(x - x_0(\varphi)) + f_0(x_0(\varphi))$$

с вертикальными прямыми $x = u_0(\varphi), x = v_0(\varphi)$ обозначим через A, B , точку $(x_0(\varphi), f_0(x_0(\varphi)))$ – через C и точки $(u_0(\varphi), f_0(u_0(\varphi))), (v_0(\varphi), f_0(v_0(\varphi)))$ – через A', B' соответственно. Тогда часть надграфика функции $f_0(x)$, отсекаемая прямой (31), лежит в параллелограмме $AA'B'B'$ и содержит в себе треугольник $A'CB'$. Расстояние между прямыми AB и $A'B'$ по определению равно $\frac{1}{r}$. Поэтому получаем оценки

$$\frac{v_0(\varphi) - u_0(\varphi)}{2r \sin \varphi} \leq s_0\left(\frac{1}{r}, \varphi\right) \leq \frac{v_0(\varphi) - u_0(\varphi)}{r \sin \varphi}.$$

Поскольку u_0, v_0 – корни квадратного уравнения (32), то легко вычисляется разность корней:

$$v_0(\varphi) - u_0(\varphi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{4a}{r \sin \varphi}}.$$

Таким образом, получили оценки

$$\frac{1}{\sqrt{a}}(r \sin \varphi)^{-3/2} \leq s_0\left(\frac{1}{r}, \varphi\right) \leq \frac{2}{\sqrt{a}}(r \sin \varphi)^{-3/2}.$$

Так как для $\lambda = re^{i\varphi} \in G$ по условию $y_0 \geq 16$ имеет место оценка

$$\sin \left| \frac{\pi}{2} - \varphi \right| \leq \frac{\beta(y)}{\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2},$$

то $|\sin \varphi| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$, а значит,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} r^{-3/2} \leq s_0 \left(\frac{1}{r}, \varphi \right) \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{a}} r^{-3/2}.$$

Несколько сложнее оценить величину $s\left(\frac{1}{r}, \varphi\right)$. Так же, как в случае величины s_0 , получим соотношение

$$\frac{v(\varphi) - u(\varphi)}{2r \sin \varphi} \leq s\left(\frac{1}{r}, \varphi\right) \leq \frac{v(\varphi) - u(\varphi)}{r \sin \varphi}, \quad (33)$$

где $u, v, u < v$, – корни уравнения

$$f'(x(\varphi))(x - x(\varphi)) + f(x(\varphi)) + \frac{1}{r \sin \varphi} = f(x).$$

В отличие от (31), это уравнение не является квадратным.

1) Докажем оценку сверху для $s\left(\frac{1}{r}, \varphi\right)$. Для этого определим вспомогательные точки $u_1(\varphi), v_1(\varphi), u_1 < v_1$, из квадратного уравнения

$$f'(x(\varphi))(x - x(\varphi)) + f(x(\varphi)) + \frac{2}{r \sin \varphi} = ax^2.$$

Докажем, что корни u_1, v_1 существуют, и оценим сверху разность $v_1 - u_1$. Введем в рассмотрение линейную функцию

$$y(x) = f'(x(\varphi))(x - x(\varphi)) + f(x(\varphi)). \quad (34)$$

График этой функции есть касательная к графику $f(x)$ в точке $x(\varphi)$. Заметим, что по соотношению (30) выполнено

$$\begin{aligned} y(x(\varphi)) + \frac{2}{r \sin \varphi} &= f_0(x(\varphi)) + \frac{2}{r \sin \varphi} + \alpha(x(\varphi))x^2(\varphi) \\ &\geq f_0(x(\varphi)) + \frac{2}{r \sin \varphi} - \alpha_1 \left(\frac{2 \operatorname{ctg} \varphi}{a} \right) \frac{4 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{a^2}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся оценкой (26), условием (25) и получим

$$\begin{aligned} y(x(\varphi)) + \frac{2}{r \sin \varphi} &\geq f_0(x(\varphi)) + \frac{2}{r \sin \varphi} - \alpha_1 \left(\frac{4\beta(y)}{a\sqrt{y}} \right) \frac{16\beta^2(y)}{a^2 y} \\ &\geq f_0(x(\varphi)) + \frac{1}{r \sin \varphi} > f_0(x(\varphi)). \end{aligned}$$

Отсюда и из выпуклости функции $f_0(x)$ следует существование решений u_1, v_1 . Вычислим явно эти решения и оценим их. Имеем

$$v_1(\varphi) = \frac{1}{2a} \left(\operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varphi - 4a x(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi + 4a f(x(\varphi)) + \frac{8a}{r \sin \varphi}} \right).$$

Учитывая оценку (30) и предположение $|\alpha(x)| \leq \alpha_1(x) \leq \frac{a}{2}$, получим

$$v_1(\varphi) \leq \frac{1}{2a} \left(\operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{25 \operatorname{ctg}^2 \varphi + \frac{8a}{r \sin \varphi}} \right).$$

Тогда из (25'), (26) имеем

$$v_1(\varphi) \leq \frac{1}{2a} \left(\frac{2\beta(y)}{\sqrt{y}} + \sqrt{\frac{100\beta^2}{y} + \frac{2\beta^2(y)}{y}} \right) \leq \frac{7\beta(y)}{a\sqrt{y}}. \quad (35)$$

Аналогично оценивается $u_1(\varphi)$:

$$|u_1(\varphi)| \leq \frac{7\beta(y)}{a\sqrt{y}}.$$

Отсюда для $x \in [u_1(\varphi), v_1(\varphi)]$ вытекает оценка

$$|f(x) - f_0(x)| = |\alpha(x)|x^2 \leq \alpha_1(|x|)x^2 \leq \alpha_1(v_1(\varphi))v_1^2(\varphi) \leq \alpha_1\left(\frac{7\beta(y)}{a\sqrt{y}}\right)\frac{49\beta^2(y)}{a^2y}.$$

Из предположения (25) теперь следует, что

$$|f(x) - f_0(x)| \leq \frac{1}{2r \sin \varphi}, \quad (36)$$

поэтому, учитывая определение точки $v_1(\varphi)$, получим

$$\begin{aligned} f(v_1(\varphi)) &= f_0(v_1(\varphi)) + (f(v_1(\varphi)) - f_0(v_1(\varphi))) \geq y(v_1(\varphi)) + \frac{2}{r \sin \varphi} - \frac{1}{2r \sin \varphi} \\ &\geq y(v_1(\varphi)) + \frac{1}{r \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Аналогично получим неравенство

$$f(u_1(\varphi)) \geq y(u_1(\varphi)) + \frac{1}{r \sin \varphi}.$$

Из этих оценок и из выпуклости функции $f(x)$ по определению точек $u(\varphi)$, $v(\varphi)$ следует соотношение

$$u_1(\varphi) \leq u(\varphi) \leq v(\varphi) \leq v_1(\varphi).$$

Таким образом, оценку сверху для разности $v - u$ мы получим, если оценим сверху разность $v_1 - u_1$.

Наряду с линейной функцией $y(x)$, определенной в (34), рассмотрим функцию

$$y_0(x) = f'_0(x_0(\varphi))(x - x_0(\varphi)) + f_0(x_0(\varphi)).$$

Очевидно, по определению точек $x(\varphi)$, $x_0(\varphi)$ функции $y(x)$, $y_0(x)$ являются касательными к графикам функций $f(x)$, $f_0(x)$ в точках $x(\varphi)$, $x_0(\varphi)$ соответственно, причем угловые коэффициенты обеих функций равны $\operatorname{ctg} \varphi$. В силу оценки (36) имеем

$$|y_0(x_0(\varphi)) - f(x_0(\varphi))| = |f_0(x_0(\varphi)) - f(x_0(\varphi))| \leq \frac{1}{2r \sin \varphi}. \quad (37)$$

Положим

$$y_1(x) = y(x) + \frac{2}{r \sin \varphi}.$$

Из свойств касательных к выпуклым функциям вытекает, что $y(x) \leq f(x)$. Значит,

$$y_1(x_0(\varphi)) - f(x_0(\varphi)) \leq y_1(x_0(\varphi)) - y(x_0(\varphi)) = \frac{2}{r \sin \varphi}. \quad (38)$$

Отсюда с учетом (36) получим

$$f(x_0(\varphi)) - y_1(x_0(\varphi)) \leq f(x_0(\varphi)) - f_0(x_0(\varphi)) \leq \frac{1}{2r \sin \varphi}.$$

Поэтому

$$|y_1(x_0(\varphi)) - f(x_0(\varphi))| \leq \frac{2}{r \sin \varphi}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &< y_1(x_0(\varphi)) - y_0(x_0(\varphi)) \\ &\leq |y_1(x_0(\varphi)) - f(x_0(\varphi))| + |f(x_0(\varphi)) - f_0(x_0(\varphi))| < \frac{3}{r \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Это значит, что для некоторого числа $b \in (0, 3]$ имеет место представление

$$y_1(x) \equiv y_0(x) + \frac{b}{r \sin \varphi}$$

и точки u_1, v_1 – корни квадратного уравнения

$$y_0(x) + \frac{b}{r \sin \varphi} = ax^2.$$

Из явных формул для корней квадратного уравнения получим

$$v_1(\varphi) - u_1(\varphi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{4ba}{r \sin \varphi}} \leq 2\sqrt{\frac{6}{a}} r^{-1/2}.$$

Подставив оценку $v(\varphi) - u(\varphi) \leq 2\sqrt{\frac{6}{a}} r^{-1/2}$ в соотношение (33), получим

$$s\left(\frac{1}{r}, \varphi\right) \leq 4\sqrt{\frac{6}{a}} r^{-3/2}. \quad (39)$$

2) Оценим разность $v(\varphi) - u(\varphi)$ снизу. Для этого определим точки $u_2(\varphi), v_2(\varphi)$, $u_2 < v_2$, из квадратного уравнения

$$y(x) + \frac{1}{2r \sin \varphi} = ax^2.$$

Существование корней u_2, v_2 доказывается так же, как доказывалось существование корней u_1, v_1 на основе соотношений (24), (25). Из определений следует, что $[u_2, v_2] \subset [u_1, v_1]$.

Докажем, что на самом деле $[u_2, v_2] \subset [u, v]$. Из (35) следуют оценки

$$|u_2(\varphi)|, v_2(\varphi) \leq \frac{7\beta(y)}{a\sqrt{y}},$$

откуда по определению точек u_2, v_2 получим

$$f(v_2(\varphi)) = f_0(v_2(\varphi)) + \alpha(v_2(\varphi))v_2^2(\varphi) \leq y(v_2(\varphi)) + \frac{1}{2r \sin \varphi} + \alpha_1 \left(\frac{7\beta(y)}{a\sqrt{y}} \right) \frac{49\beta^2(y)}{a^2 y}.$$

Воспользуемся условием (25). Тогда

$$f(v_2(\varphi)) \leq y(v_2(\varphi)) + \frac{3}{4r \sin \varphi} < y(v_2(\varphi)) + \frac{1}{r \sin \varphi}.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$f(u_2(\varphi)) < y(u_2(\varphi)) + \frac{1}{r \sin \varphi}.$$

Из определения точек u, v и из выпуклости функции $f(x)$ следует соотношение

$$u(\varphi) \leq u_2(\varphi) \leq v_2(\varphi) \leq v(\varphi),$$

значит,

$$v(\varphi) - u(\varphi) \geq v_2(\varphi) - u_2(\varphi). \quad (40)$$

Для оценки разности $v_2(\varphi) - u_2(\varphi)$ снизу введем в рассмотрение линейную функцию

$$y_2(x) = y(x) + \frac{1}{2r \sin \varphi}.$$

В силу (36), учитывая, что графики функций $y(x)$, $y_0(x)$ касаются графиков функций $f(x)$, $f_0(x)$, имеем оценку

$$\begin{aligned} y_2(x(\varphi)) &= f(x(\varphi)) + \frac{1}{2r \sin \varphi} \\ &\geq f_0(x(\varphi)) + \frac{1}{2r \sin \varphi} - \frac{1}{5r \sin \varphi} > y_0(x(\varphi)) + \frac{1}{4r \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Поскольку $y = y_2(x)$, $y = y_0(x)$ – линейные функции с одинаковыми угловыми коэффициентами, равными $\operatorname{ctg} \varphi$, то

$$y_2(x) \equiv y_0(x) + \frac{c}{r \sin \varphi},$$

где $c > \frac{1}{4}$. Числа $u_2(\varphi)$, $v_2(\varphi)$ по определению оказываются корнями квадратного уравнения

$$y_0(x) + \frac{c}{r \sin \varphi} = ax^2.$$

Из явных формул для этих корней получим

$$v_2(\varphi) - u_2(\varphi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{4ac}{r \sin \varphi}}.$$

Значит,

$$v(\varphi) - u(\varphi) \geq v_2(\varphi) - u_2(\varphi) \geq \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a}{r}} = \sqrt{\frac{1}{a}} r^{-1/2}.$$

Подставив эту оценку в (33), получим соотношение

$$\sqrt{\frac{1}{2a}} r^{-3/2} \leq s\left(\frac{1}{r}, \varphi\right),$$

которое вместе с (39) заканчивает доказательство леммы.

ЛЕММА 5. Пусть

$$K_0(re^{i\varphi}) = e^{2rh_0(\varphi)} \frac{r^{-3/2}}{\sqrt{a}}.$$

Тогда для всех $\lambda = re^{i\varphi} \in G$ выполняется соотношение

$$e^{-4}K_0(\lambda) \leq K(\lambda) \leq e^4K_0(\lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 и лемме 3 имеем

$$e^{-2-1/4}e^{2rh_0(\varphi)}s\left(\frac{1}{r}, \varphi\right) \leq K(\lambda) \leq 4e^{1/4}e^{2rh_0(\varphi)}s\left(\frac{1}{r}, \varphi\right).$$

Далее воспользуемся леммой 4 и получим

$$(e^{2+1/4}2)^{-1}e^{2rh_0(\varphi)}\frac{r^{-3/2}}{\sqrt{a}} \leq K(\lambda) \leq 16e^{1/4}\sqrt{6}e^{2rh_0(\varphi)}\frac{r^{-3/2}}{\sqrt{a}}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости числовых неравенств $2e^{2+\frac{1}{4}}, 16e^{\frac{1}{4}}\sqrt{6} \leq e^4$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть V – угол $\{\lambda = re^{i\varphi} : |\varphi - \frac{\pi}{2}| < \frac{\pi}{6}\}$. Для любого $b > 0$ на множестве

$$V'(b) = \{\lambda = re^{i\varphi} : B(\lambda, 4\sqrt{ab}\sqrt{|\lambda|}) \subset V \cap \{|\lambda| \geq 16ab\}\}$$

функция $\rho_0(\lambda, b) = \rho(\lambda, b, \ln K_0(z))$ допускает двустороннюю оценку

$$\sqrt{2ab}\sqrt{|\lambda|} \leq \rho_0(\lambda, b) \leq 4\sqrt{ab}\sqrt{|\lambda|}.$$

Здесь a – число из формулировки теоремы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (27) для $\lambda = re^{i\varphi} = x + iy$ получим

$$2rh_0(\varphi) = \frac{x^2}{2ay}.$$

Отсюда, учитывая гармоничность функции $\ln|\lambda|$ при $\lambda \neq 0$, можем вычислить значение оператора Лапласа от функции $\ln K_0(\lambda)$:

$$\Delta \ln K_0(\lambda) = \frac{r^2}{ay^3} = \frac{1}{ar \sin^3 \varphi}.$$

Для $\lambda \in V$, очевидно, $\sin \varphi \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому

$$\frac{1}{ar} \leq \Delta \ln K_0(\lambda) \leq \frac{2}{ar}. \quad (41)$$

Пусть $g_R(w, z)$ – функция Грина круга $B(0, R)$, т.е.

$$g_R(w, z) = \ln \frac{|R^2 - \bar{w}z|}{R|w - z|}.$$

Тогда для любой точки u функция $g_R(w - u, z - u)$ является функцией Грина круга $B(u, R)$. Возьмем произвольную точку $\lambda \in V'(b)$ и числа R такие, что

$$0 < R \leq 4\sqrt{ab}\sqrt{|\lambda|}.$$

Если $h(z)$ – гармоническая мажоранта функции $\ln K_0(z)$ в круге $B(\lambda, R)$, то имеет место представление Грина

$$h(z) - \ln K_0(z) = \int_{B(\lambda, R)} g_R(w - \lambda, z - \lambda) \Delta \ln K_0(w) dm(w). \quad (42)$$

В силу выбора точки λ и числа R круг $B(\lambda, R)$ лежит в множестве $V \cap \{|\lambda| \geq 16ab\}$, в котором выполняется соотношение (40) и неравенство

$$\frac{1}{|\lambda| + R} \geq \frac{1}{2|\lambda|}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int g_R(w - \lambda, z - \lambda) \Delta \ln K_0(w) dm(w) &\geq \int \frac{g_R(w - \lambda, z - \lambda)}{a|w|} dm(w) \\ &\geq \frac{1}{2a|\lambda|} \int g_R(w - \lambda, z - \lambda) dm(w). \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta|w - \lambda|^2 \equiv 4$ и гармонической мажорантой функции $|w - \lambda|^2$ в круге $B(\lambda, R)$ является функция, тождественно равная R^2 , то имеет место представление Грина

$$4 \int g_R(w - \lambda, z - \lambda) dm(w) = R^2 - |z - \lambda|^2. \quad (43)$$

Таким образом, получаем оценку

$$h(\lambda) - \ln K_0(\lambda) \geq \frac{1}{8a|\lambda|} R^2,$$

а при $R = 4\sqrt{ab|\lambda|}$ получим $h(\lambda) - \ln K_0(\lambda) \geq 2b$. По определению функции $\rho_0(\lambda, b) = \rho(\lambda, b, \ln K_0(z))$ это значит, что

$$\rho_0(\lambda, b) \leq 4\sqrt{ab} \sqrt{|\lambda|}. \quad (44)$$

Точно так же из соотношений (42), (43) получим

$$\max_{z \in B(\lambda, R)} (h(z) - \ln K_0(z)) \leq 4 \frac{4}{a|\lambda|} \max_{z \in B(\lambda, R)} (R^2 - |z - \lambda|^2) = \frac{1}{a|\lambda|} R^2.$$

Следовательно, если $R < \sqrt{2ab|\lambda|}$, то

$$\max_{z \in B(\lambda, R)} (h(z) - \ln K(z)) < 2b.$$

Снова по определению функции $\rho_0(\lambda, b)$ отсюда следует оценка

$$\rho_0(\lambda, b) > \sqrt{2ab} \sqrt{|\lambda|}.$$

Вместе с (44) эта оценка дает утверждение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть число $b > 4$, угол V и множество G определены, как и выше. Через G' обозначим множество точек λ , для которых верно включение

$$B(\lambda, 4\sqrt{a(b+4)} \sqrt{|\lambda|}) \subset V \cap G \cap \{|\lambda| \geq 16a(b+4)\}.$$

Тогда на множестве G' функция $\rho(\lambda, b) = \rho(\lambda, b, \ln K(\lambda))$ допускает двустороннюю оценку

$$\sqrt{2a(b-4)} \sqrt{|\lambda|} \leq \rho(\lambda, b) \leq 4\sqrt{a(b+4)} \sqrt{|\lambda|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, имеет место включение $G' \subset V'(b+4)$, где V' определено, как в лемме 6. Следовательно, для $\lambda \in G'$ выполняется оценка

$$\rho_0(\lambda, b+4) \leq 4\sqrt{a(b+4)}\sqrt{|\lambda|},$$

и, тем самым, круг $B(\lambda, \rho_0(\lambda, b+4))$ лежит в G . По лемме 5 в этом круге выполняется оценка

$$|\ln K(\lambda) - \ln K_0(\lambda)| \leq 4. \quad (45)$$

По определению функции $\rho_0(\lambda, b+4) = \rho(\lambda, b+4, \ln K_0(z))$ для любой гармонической в круге $B(\lambda, \rho_0(\lambda, b+4))$ функции $h(z)$ найдется точка $z = z(h)$ в этом круге такая, что

$$|h(z) - \ln K_0(z)| \geq b+4.$$

Учитывая (45), получим оценку в точке $z = z(h)$:

$$|h(z) - \ln K(z)| \geq |h(z) - \ln K_0(z)| - |\ln K_0(z) - \ln K(z)| \geq b.$$

Таким образом, мы доказали оценку сверху:

$$\rho(\lambda, b) \leq \rho_0(\lambda, b+4),$$

из которой по лемме 6 получим оценку сверху в утверждении леммы 7:

$$\rho(\lambda, b) \leq 4\sqrt{a(b+4)}\sqrt{|\lambda|}. \quad (46)$$

С другой стороны, существует гармоническая в круге $B = B(\lambda, \rho_0(\lambda, b-4))$ функция $h(z)$, удовлетворяющая условию

$$\max_{z \in B} |h(z) - \ln K_0(z)| = b-4.$$

Тогда по лемме 5 имеем

$$\max_{z \in B} |h(z) - \ln K(z)| \leq \max_{z \in B} (|h(z) - \ln K_0(z)| + |\ln K_0(z) - \ln K(z)|) \leq b.$$

Поэтому $\rho(\lambda, b) \geq \rho_0(\lambda, b-4)$ и по лемме 6 имеем оценку

$$\rho(\lambda, b) \geq \sqrt{2a(b-4)}\sqrt{|\lambda|},$$

из которой в силу (46) получаем доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть граница выпуклой ограниченной области D имеет локальное представление из формулировки теоремы 5, но в пространстве Бергмана $B_2(D)$ существует безусловный базис из экспонент $e^{\lambda_k z}$. По лемме 1 существует целая функция $L(\lambda)$, удовлетворяющая соотношению (3).

Если вместо постоянной P взять большее число, то это соотношение останется в силе, поэтому будем считать, что $b = \ln(5P) > 4$. Исходя из свойства (24) функции $\beta(y)$ несложными арифметическими выкладками можем убедиться в существовании числа $R > 0$ такого, что множество $G'' = \bigcup_{y > R} B(iy, \frac{1}{3}\beta(y)\sqrt{y})$ лежит в множестве G' , определенном в лемме 7. Возьмем $z_n = in$, $a_n = \frac{\beta(n)}{12\sqrt{a(b+4)}}$. Эти последовательности удовлетворяют условиям теоремы 3. Поскольку при достаточно больших n по лемме 7 имеют место включения

$$B(z_n, a_n \rho(z_n, b)) \subset G'' \subset G',$$

то снова по лемме 7 для всех $z, w \in B(z_n, a_n \rho(z_n, b))$ выполняется соотношение

$$\frac{\rho(z, b)}{\rho(w, b)} \leq 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{b+4}{b-4}},$$

которое противоречит теореме 3. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если граница области D в некоторой своей точке имеет отличную от нуля кривизну, то в пространстве $B_2(D)$ не может существовать безусловный базис из экспонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, существование отличной от нуля кривизны в некоторой точке приводит к локальному представлению из формулировки теоремы 5 границы области в окрестности этой точки.

Список литературы

1. Д. Гайер, *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области*, Мир, М., 1986; англ. пер.: D. Gaier, *Lectures on complex approximation*, Birkhäuser, Boston, MA, 1987.
2. Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, С. В. Хрущев, *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер*. I, Препринт Р-8-80, ЛОМИ, Л., 1980.
3. Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский, “Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 657–702; англ. пер.: B. J. Levin, J. I. Ljubarskii, “Interpolation by means of special classes of entire functions and related expansions in series of exponentials”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:3 (1975), 621–662.
4. Ю. И. Любарский, “Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:3 (1988), 559–580; англ. пер.: Yu. I. Ljubarskii, “Exponential series in Smirnov spaces and interpolation by entire functions of special classes”, *Math. USSR-Izv.*, **32**:3 (1989), 563–586.
5. В. И. Луценко, *Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Ин-т математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, 1992.
6. К. П. Исаев, Р. С. Юлмухаметов, “Преобразование Лапласа функционалов на пространствах Бергмана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **68**:1 (2004), 5–42; англ. пер.: K. P. Isaev, R. S. Yulmukhametov, “Laplace transforms of functionals on Bergman spaces”, *Izv. Math.*, **68**:1 (2004), 3–41.
7. Р. С. Юлмухаметов, “Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций”, *Сиб. матем. журн.*, **26**:4 (1985), 159–175; англ. пер.: R. S. Yulmukhametov, “Asymptotic approximation of subharmonic functions”, *Siberian Math. J.*, **26**:4 (1985), 603–618.
8. Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.
9. К. П. Исаев, *Безусловные базисы из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых областях*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Ин-т математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, 2004.

К. П. ИСАЕВ (K. P. ISAEV)
Башкирский государственный университет

Поступило в редакцию
10.03.2005

Р. С. ЮЛМУХАМЕТОВ (R. S. YULMUKHAMETOV)
Башкирский государственный университет
E-mail: Yulmukhametov@bsu.bashedu.ru