Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Белошапка, В. В. Ежов, Г. Шмальц, Голоморфная классификация четырехмерных поверхностей в $\mathbb{C}^3$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 3, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:11:45

УДК 517.55+514.76

В. К. Белошапка, В. В. Ежов, Г. Шмальц

Голоморфная классификация четырёхмерных поверхностей в $\mathbb{C}^3$

Методом модельной поверхности изучаются четырёхмерные вещественные подмногообразия пространства $\mathbb{C}^3$. Доказано, что размерность группы голоморфных симметрий произвольного ростка четырёхмерного аналитического многообразия не превосходит пяти, если только она конечна (имеются лишь два исключительных случая бесконечной размерности). Вычислена оболочка голоморфности модельной поверхности. Построена нормальная форма уравнения произвольного ростка и на ее основе дана голоморфная классификация вполне невырожденных ростков. Показано, что вполне невырожденная CR-структура накладывает сильные ограничения на топологическое строение многообразия, в частности нельзя вполне невырожденно вложить четырёхмерную сферу S^4 в трёхмерное комплексное многообразие.

Библиография: 7 наименований.

§ 1. Введение

Основным объектом изучения в настоящей работе является четырёхмерное вещественное подмногообразие трёхмерного комплексного пространства. Росток такой поверхности, если он является порождающим, можно квалифицировать как росток типа $(1, 2)$: единица – это комплексная размерность комплексной касательной (CR-размерность), а двойка – вещественная коразмерность. В $\mathbb{C}^3$ имеются лишь два типа порождающих ростков с положительной CR-размерностью: $(1, 2)$ и $(2, 1)$. Росток типа $(2, 1)$, т. е. росток пятимерной поверхности, принадлежит классу гиперповерхностей, который изучен достаточно хорошо. В настоящей работе продолжается изучение четырёхмерных вещественных подмногообразий пространства $\mathbb{C}^3$, начатое в [1], где было показано, что четырёхмерная поверхность Q , заданная в пространстве с координатами (z, w_2, w_3) , $w_2 = u_2 + iv_2$, $w_3 = u_3 + iv_3$, двумя уравнениями

$$v_2 = |z|^2, \quad v_3 = 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z},$$

является “хорошей моделью” ростка типа $(1, 2)$, а “произвольную” поверхность этого типа следует рассматривать как “случайное возмущение” этой модельной поверхности. Сформулируем основные результаты работы [1].

Пусть в пространстве $\mathbb{C}^3$ с координатами (z, w_2, w_3) , $w_2 = u_2 + iv_2$, $w_3 = u_3 + iv_3$, имеется росток гладкой четырёхмерной порождающей поверхности M_ξ .

Работа выполнена при финансовой поддержке ARC Discovery Project (грант DP0450725) и РФФИ (гранты № 0015-96-008 и 02-01-01-291).

Его можно задать двумя вещественными уравнениями:

$$\begin{aligned}v_2 &= F_2(z, \bar{z}, u_2, u_3), \\v_3 &= F_3(z, \bar{z}, u_2, u_3).\end{aligned}$$

Теперь мы потребуем выполнения некоторого условия невырожденности. Это конкретизация для подмногообразий типа $(1, 2)$ условия *полной невырожденности ростка* [2]. Данное условие можно формулировать как в координатных терминах, так и в инвариантных.

Приведем сначала инвариантную формулировку. Росток типа $(1, 2)$ и любой его представитель имеют одномерную комплексную касательную, которая в полной касательной имеет вещественную коразмерность, равную двум. Пусть Z – росток векторного поля типа $(1, 0)$, которое в каждой точке принадлежит комплексификации комплексной касательной. Тогда условие полной невырожденности означает, что двукратные скобки полей Z и $\bar{Z}$ порождают в каждой точке всю комплексифицированную касательную. Это условие можно разделить на две части. Первая означает, что скобка $[Z, \bar{Z}]$ не содержится в комплексификации комплексной касательной. Это условие, как правило, называют *невырожденностью по Леви*. Вторая заключается в том, что значения второй скобки $[Z, [Z, \bar{Z}]]$ выходят за рамки пространства, порожденного Z , $\bar{Z}$ и $[Z, \bar{Z}]$. Получить всю касательную быстрее, чем на втором шаге, по числу скобок, мы не могли. Условие, тем самым, сводится к тому, что мы получили касательную максимально быстро.

Чтобы дать координатную формулировку условия полной невырожденности ростка, назовем координатам и их вещественным частям веса следующим образом: $[z] = 1$, $[w_2] = [u_2] = 2$, $[w_3] = [u_3] = 3$, а через $O(m)$ обозначим ряды, состоящие из мономов веса m и выше. Тогда полная невырожденность ростка M_ξ типа $(1, 2)$ означает, что после подходящей квадратично-треугольной замены уравнения имеют вид

$$\operatorname{Im} w_2 = |z|^2 + O(3), \quad \operatorname{Im} w_3 = 2 \operatorname{Re}(z^2 \bar{z}) + O(4). \quad (1)$$

При этом наличие в первом уравнении монома вида $|z|^2$ – это следствие условия невырожденности формы Леви, а наличие во втором уравнении $2 \operatorname{Re}(z^2 \bar{z})$ – это вторая часть условия полной невырожденности. Как известно, условие вырождения формы Леви на вещественно-аналитическом многообразии – это аналитическое условие. Чтобы убедиться в этом, необходимо ввести в рассмотрение еще два поля с аналитическими коэффициентами, дополняющими Z и $\bar{Z}$ в точке до четырехмерной комплексифицированной касательной. Тогда определена нормальная проекция и условие вырождения Леви – условие равенства нулю этой проекции (два скалярных аналитических соотношения), поэтому Md_1 – аналитическое подмножество множества M . Таким же образом можно убедиться в том, что вторая часть условия полной невырожденности на $M \setminus Md_1$ – тоже аналитическое условие (одно скалярное соотношение). Поэтому Md_2 – аналитическое подмножество множества $M \setminus Md_1$.

Поверхность $Q = \{v_2 = |z|^2, v_3 = 2 \operatorname{Re}(z^2 \bar{z})\}$ является хорошей модельной поверхностью вполне невырожденного ростка типа $(1, 2)$, что выражается в выполнении ряда утверждений.

1. Всякий вполне невырожденный росток может быть представлен в виде (1).
2. Группа автоморфизмов Q – это пятимерная группа Ли квадратично-треугольных преобразований, порожденная преобразованиями вида

$$\begin{aligned}
 (-3) \quad & z \mapsto z, \quad w_2 \mapsto w_2, \quad w_3 \mapsto w_3 + q_3, \quad q_3 \in \mathbb{R}, \\
 (-2) \quad & z \mapsto z, \quad w_2 \mapsto w_2 + q_2, \quad w_3 \mapsto w_3, \quad q_2 \in \mathbb{R}, \\
 (-1) \quad & z \mapsto z + p, \quad w_2 \mapsto w_2 + 2i\bar{p}z + i|p|^2, \\
 & w_3 \mapsto w_3 + 4(\operatorname{Re} p)w_2 + 2i(2|p|^2 + \bar{p}^2)z + 2i\bar{p}z^2 + 2i\operatorname{Re} p^2\bar{p}, \quad p \in \mathbb{C}, \\
 (0) \quad & z \mapsto \lambda z, \quad w_2 \mapsto \lambda^2 w_2, \quad w_3 \mapsto \lambda^3 w_3, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*,
 \end{aligned}$$

действующая на Q транзитивно. Соответствующая ей алгебра Ли векторных полей в естественной градуировке имеет структуру $\mathfrak{g}_{-3} + \mathfrak{g}_{-2} + \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0$ (нумерация автоморфизмов соответствует весам порождающих их полей).

3. Пятимерная алгебра Ли этой группы параметризует совокупность обратимых голоморфных отображений любого вполне невырожденного ростка типа $(1, 2)$ в другой фиксированный росток. В частности, группа автоморфизмов любого невырожденного ростка этого типа не может иметь размерность больше пяти.

В настоящей работе изучение модельной поверхности Q и четырехмерных поверхностей в $\mathbb{C}^3$ будет продолжено. А именно:

1) покажем, что поверхность Q обладает самой богатой группой симметрий не только в классе вполне невырожденных поверхностей типа $(1, 2)$, но и в классе всех вещественно-аналитических четырехмерных ростков в $\mathbb{C}^3$ с конечномерными группами автоморфизмов и в связи с этим приведем некую грубую классификацию всех таких ростков (теорема 1);

2) вычислим оболочку голоморфности модельной поверхности Q , которая, как оказывается, имеет вид прямого произведения шара в пространстве $\mathbb{C}^2$ на комплексную прямую $\mathbb{C}^1$ (теорема 3);

3) построим нормальную форму ростка вполне невырожденного четырехмерного многообразия типа $(1, 2)$ и на ее основе приведем голоморфную классификацию этих ростков (теорема 4);

4) покажем, что любое гладкое CR-многообразие типа $(1, 2)$, “сферическое конечного порядка” (см. определение 1), локально обладает CR-инвариантным репером касательного расслоения, т.е. данная CR-структура редуцируется к $\{e\}$ -структуре, а касательное расслоение тривиально (теорема 5).

§ 2. Доказательство гипотезы о размерности для многообразий типа $(1, 2)$

Как было показано в [1], поверхность Q имеет группу голоморфных автоморфизмов размерности 5, и это число оценивает размерность локальной группы любого вполне невырожденного ростка. Обсудим подробнее условие полной невырожденности.

Пусть M – гладкое вещественное подмногообразие типа $(1, 2)$ в $\mathbb{C}^3$, TM – его касательное расслоение, $T^{\mathbb{C}}M$ – расслоение его комплексных касательных,

$\mathbb{C}(TM)$ и $\mathbb{C}(T^{\mathbb{C}}M)$ – их комплексификации, ξ – точка в M . Тогда TM_{ξ} имеет вещественную размерность 4, $T^{\mathbb{C}}M_{\xi}$ – вещественную размерность 2, $\mathbb{C}(TM)_{\xi}$ и $\mathbb{C}(T^{\mathbb{C}}M_{\xi})$ – комплексные размерности 4 и 2 соответственно. Пусть X и $Y = JX$ – два гладких векторных поля, определенных в окрестности точки ξ и представляющих локальный репер $T^{\mathbb{C}}M$. Тогда поля $Z = X - iY$ и $\bar{Z} = X + iY$ являются полями типа $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно, причем Z и $\bar{Z}$ представляют локальный репер $\mathbb{C}(T^{\mathbb{C}}M)$. Если многообразие M вещественно-аналитическое, то локальные реперы можно выбирать среди полей с вещественно-аналитическими коэффициентами.

В этих терминах условие полной невырожденности означает, что четыре векторных поля Z , $\bar{Z}$, $[Z, \bar{Z}]$, $[Z, [Z, \bar{Z}]]$ образуют в окрестности точки ξ локальный репер $\mathbb{C}(TM)$ и индуцируют фильтрацию $D_1 \subset D_2 \subset D_3 = \mathbb{C}(TM)$, где $D_1 = \text{span}(Z, \bar{Z})$, $D_2 = \text{span}(Z, \bar{Z}, [Z, \bar{Z}])$, $D_3 = \text{span}(Z, \bar{Z}, [Z, \bar{Z}], [Z, [Z, \bar{Z}]])$ (здесь $[\cdot, \cdot]$ – скобка векторных полей).

Имеются два препятствия к выполнению этого условия. Во-первых, может оказаться, что в центре ростка вектор $[Z, \bar{Z}](\xi)$ содержится в $\text{span}(Z, \bar{Z})(\xi) = \mathbb{C}(T^{\mathbb{C}}M_{\xi})$. Тогда возникает альтернатива. Либо $[Z, \bar{Z}]$ содержится в $\text{span}(Z, \bar{Z})$ на открытом подмножестве M , содержащем ξ (а тем самым, в силу аналитичности – и на всем M), и тогда распределение комплексных касательных оказывается интегрируемым по Фробениусу, многообразие M в окрестности ξ эквивалентно прямому произведению $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}^2$, а группа автоморфизмов ростка имеет бесконечную размерность. Либо множество точек Md_1 , где произошло вырождение, – это собственное вещественно-аналитическое подмножество многообразия M . Во-вторых, то же самое могло произойти при взятии второй скобки, т. е. в центре ростка вектор $[Z, [Z, \bar{Z}]](\xi)$ содержится в линейной оболочке $\text{span}(Z, \bar{Z}, [Z, \bar{Z}])(\xi)$. Тогда возникает аналогичная альтернатива. Либо это имеет место на полномерной окрестности точки ξ , и тогда распределение $\text{span}(Z, \bar{Z}, [Z, \bar{Z}])$ оказывается интегрируемым по Фробениусу, все пространство $\mathbb{C}^3$ распадается на два прямых слагаемых $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^1$, так что многообразие M в окрестности точки ξ оказывается эквивалентным прямому произведению трехмерной гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ и вещественной прямой в $\mathbb{C}^1$, а группа автоморфизмов ростка также имеет бесконечную размерность. Либо множество Md_2 , где произошло такое вырождение, – это собственное вещественно-аналитическое подмножество множества $M \setminus Md_1$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого вещественно-аналитического ростка M_{ξ} четырехмерной поверхности в $\mathbb{C}^3$ и локальной группы голоморфных автоморфизмов этого ростка $\text{Aut } M_{\xi}$ имеет место следующая альтернатива:*

- i) *либо размерность этой группы не превосходит пяти;*
- ii) *либо она равна бесконечности и это может произойти в двух случаях:*
 - 1) *росток M_{ξ} эквивалентен произведению комплексной прямой и двумерного вещественного пространства;*
 - 2) *росток эквивалентен произведению трехмерной вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ и вещественной прямой в $\mathbb{C}^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вырождения произошли на полномерных множествах, то, как показано выше, мы имеем бесконечномерную группу и приведенную классификацию. Если оба множества Md_1 и Md_2 собственные, то рассмот-

рим в окрестности V точки ξ произвольные шесть векторных полей, порождающих голоморфные автоморфизмы. Рассмотрим эти поля в произвольной точке из $V \setminus (Md_1 \cup Md_2)$. В этой точке многообразие M вполне невырождено, а следовательно, эти поля связаны линейным соотношением с постоянными коэффициентами. Но эти поля имеют вещественно-аналитические коэффициенты, поэтому линейная зависимость имеет место во всей окрестности V , т. е. и в самой точке ξ . Теорема доказана.

§ 3. Построение голоморфной оболочки многообразия Q

Определим семейство плоских одномерных голоморфных дисков. Это семейство будет зависеть от трех вещественных параметров r, d_2, d_3 , где $r \geq 0$, а d_2 и d_3 – произвольные вещественные числа. Положим

$$\delta(r, d_2, d_3) = \{z = t, w_2 = d_2 + ir^2, w_3 = d_3 + 2ir^2t\}, \quad |t| \leq r,$$

$$B = \{(z, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3: v_2 \geq |z|^2\}.$$

Группа голоморфных автоморфизмов Q содержит следующее семейство “сдвигов”, параметризованных параметром $p \in \mathbb{C}$:

$$s_p = \{z' = z + p, w'_2 = w_2 + 2i\bar{p}z + i|p|^2,$$

$$w'_3 = w_3 + 4(\operatorname{Re} p)w_2 + 2i\bar{p}z^2 + 2i(2|p|^2 + \bar{p}^2)z + i \operatorname{Re} p^2\bar{p}\}.$$

Непосредственно проверяется следующая

ЛЕММА 1. 1) Граница диска $\delta(r, d_2, d_3)$, т. е. образ окружности $|t| = r$, содержится в Q .

2) Данное семейство дисков связно и содержит постоянные диски (отображение в точку Q).

3) Семейство дисков $\{\delta(r, d_2, d_3)\}$ – это часть гиперповерхности $\Gamma = \{v_3 = 2v_2 \operatorname{Re} z\}$, принадлежащая B .

4) Множество B является выпуклой, а следовательно, и голоморфно выпуклой областью.

5) Указанное семейство автоморфизмов переводит B в себя.

ТЕОРЕМА 2. Оболочкой голоморфности многообразия Q является внутренность области B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точку $\xi = (a, b, c) \in B$. Покажем, что найдется такое p , что соответствующий “сдвиг” переведет эту точку в точку, принадлежащую Γ . Для этого подставим формулы, определяющие “сдвиг”, в уравнение, задающее гиперповерхность Γ . Получим условие на параметр p . После приведения подобных членов оно принимает вид

$$2(\operatorname{Im} b - |a|^2)(\operatorname{Re} p) = 2(\operatorname{Im} b)(\operatorname{Re} a) - \operatorname{Im} c.$$

Выбирая в качестве p любое p_0 , являющееся решением этого уравнения, мы получаем необходимый “сдвиг” s_{p_0} . Подвергая исходное семейство дисков $\{\delta(r, d_2, d_3)\}$ обратному преобразованию s_{-p_0} , мы получаем семейство, прохо-

дящее через точку ξ . Оно стягивается в точку, принадлежащую Q , и это доказывает (принцип непрерывности [3]), что любая функция, голоморфная в окрестности Q , продолжается в ξ , т. е. в B , а в силу выпуклости B дальнейшее голоморфное расширение невозможно. Теорема доказана.

§ 4. Построение нормальной формы

Перед формулировкой основного результата приведем следующее определение. Число $\varepsilon > 0$ назовем *запасом аналитичности функции* или *отображения Φ в точке ξ* , если Φ имеет представление в виде суммы степенного ряда в полидиске радиуса ε с центром в ξ , а на замкнутом полидиске радиуса $\varepsilon/2$ не превосходит $1/\varepsilon$. *Запасом аналитичности поверхности M в точке ξ* будем называть запас аналитичности функции F такой, что $M = \{v - F(z, \bar{z}, u) = 0\}$ в окрестности точки ξ .

Итак, мы можем сформулировать теорему о приведении ростка к нормальной форме.

ТЕОРЕМА 3. *Любой вполне невырожденный росток вида (1) голоморфным преобразованием*

$$z^* = z^*(z, w), \quad w_2^* = w_2^*(z, w), \quad w_3^* = w_3^*(z, w),$$

сохраняющим начало координат и таким, что

$$\frac{\partial z^*}{\partial z}(0) = 1, \quad \frac{\partial w^*}{\partial z}(0) = 0, \quad \frac{\partial w^*}{\partial w}(0) = \text{id},$$

может быть приведен к нормальной форме:

$$\begin{aligned} v_2 &= |z|^2 + N^2(z, \bar{z}, u_2, u_3), \\ v_3 &= 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z} + N^3(z, \bar{z}, u_2, u_3), \end{aligned}$$

где степенные ряды $N^j(z, \bar{z}, u) = \sum_{k,l} N_{k,l}^j(u_2, u_3) z^k \bar{z}^l$, $j = 2, 3$, удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} N^j(z, 0, u) &= 0, \quad \text{т. е.} \quad N_{k,0}^j = 0, \quad k \geq 0, \quad j = 2, 3, \\ \frac{\partial N^3}{\partial \bar{z}}(z, 0, u) &= 0, \quad \text{т. е.} \quad N_{k,1}^3 = 0, \quad k \geq 1, \\ N_{11}^2 &= 0, \quad N_{21}^2 = 0, \quad N_{31}^2|_{u_2=0} = 0, \quad \operatorname{Im} N_{42}^2|_{u_2=0} = 0, \quad \operatorname{Im} N_{42}^3|_{u_2=0} = 0. \end{aligned}$$

При этом запас аналитичности как нормализующего преобразования, так и нормализованной поверхности оценивается снизу положительной константой, зависящей лишь от запаса аналитичности исходной поверхности.

Следующие диаграммы показывают, члены каких бистепеней отсутствуют в нормальной форме (пустой кружок), каких – присутствуют с условием (полупустой кружок) и каких – без условий (полный кружок):

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Построение нормальной формы вполне невырожденного ростка типа $(1, 2)$ является уточнением процесса вычисления компонент отображения, описанного в работе [1]. Основой этого процесса является, по существу, комбинация теоремы о неявной функции и теоремы Коши–Ковалевской, он использовался во многих работах (см., например, [4]).

Будем искать голоморфное нормализующее преобразование ростка в виде композиции двух преобразований: преобразования

$$\begin{aligned} z^* &= z + f_0(w_2, w_3), & w_2^* &= w_2 + g_0(w_2, w_3), & w_3^* &= w_3 + h_0(w_2, w_3), \\ f_0(0) &= h_0(0) = g_0(0) = dg_0(0) = dh_0(0) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

применяемого сначала и такого, что

$$\Gamma = \{(z, w) | z = f_0(u), w_2 = u_2 + g_0(u), w_3 = u_3 + h_0(u)\} \subset M,$$

и преобразования

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + z f_1(w_2, w_3) + z^2 f(z, w_2, w_3) = z + \sum_{k \geq 1} f_k(w_2, w_3) z^k, \\ w_2 &\mapsto w_2 + z g(z, w_2, w_3) = w_2 + \sum_{k \geq 1} g_k(w_2, w_3) z^k, \\ w_3 &\mapsto w_3 + z h(z, w_2, w_3) = w_3 + \sum_{k \geq 1} h_k(w_2, w_3) z^k. \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразование (2) распрямляет двумерную вещественную поверхность Γ , т. е. переводит Γ в плоскость $\{(z, w) | z = \text{Im } w_2 = \text{Im } w_3 = 0\}$. Запишем исходное уравнение для M в виде

$$\begin{aligned} -v_2 + |z|^2 + F^2(z, \bar{z}, u_2, u_3) &= 0, \\ -v_3 + 2 \text{Re } z^2 \bar{z} + F^3(z, \bar{z}, u_2, u_3) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $F^2 = O(3)$, $F^3 = O(4)$. Условие $\Gamma \subset M$ означает, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} g_0 &= |f_0|^2 + F^2(f_0, \bar{f}_0, \operatorname{Re} g_0, \operatorname{Re} h_0), \\ \operatorname{Im} h_0 &= 2|f_0|^2(\operatorname{Re} f_0) + F^3(f_0, \bar{f}_0, \operatorname{Re} g_0, \operatorname{Re} h_0).\end{aligned}$$

Эти уравнения однозначно определяют $\operatorname{Im} g_0$ и $\operatorname{Im} h_0$ через $X = (f_0, \bar{f}_0, \operatorname{Re} g_0, \operatorname{Re} h_0)$. Промежуточное уравнение, полученное после применения (2) в новых координатах, обозначения которых мы для простоты не меняем, принимает вид

$$-v_2 + |z|^2 + G^2(z, \bar{z}, u_2, u_3) = 0, \quad (5)$$

$$-v_3 + 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z} + G^3(z, \bar{z}, u_2, u_3) = 0, \quad (6)$$

где $G^2 = O(3)$, $G^3 = O(4)$ и обе эти функции не содержат свободных от $(z, \bar{z})$ членов, т. е. $G^j(0, 0, u) \equiv 0$ при $j = 2, 3$, что соответствует условию $\Gamma \subset M$. Мы будем использовать разложения степенных рядов от $(z, \bar{z}, u)$ в суммы мономов вида $z^k \bar{z}^l$ с коэффициентами, зависящими от u . Такое слагаемое мы будем называть *компонентой степени* (k, l) соответствующего ряда. Уравнения (5), (6), таким образом, можно разложить по бистепеням в виде

$$-v_2 + |z|^2 + \sum_{k,l} G_{kl}^2 z^k \bar{z}^l = 0,$$

$$-v_3 + 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z} + \sum_{k,l} G_{kl}^3 z^k \bar{z}^l = 0.$$

Учитывая, что уравнения (5), (6) получены после применения (2), мы получаем, что коэффициенты G_{kl}^j , $j = 2, 3$, аналитически зависят от u , X и частных производных X порядка, не превосходящего $k+l$. Это непосредственно следует из вида преобразования (2).

Неизвестные функции f_1 , f , g , h мы выразим из тождеств

$$\begin{aligned}-\operatorname{Im}(w_2 + zg) + |z + zf_1 + z^2 f|^2 \\ + G^2(z + zf_1 + z^2 f, \bar{z} + \bar{z}\bar{f}_1 + \bar{z}^2 \bar{f}, \operatorname{Re}(w_2 + zg), \operatorname{Re}(w_3 + zh))\big|_M = 0, \quad (7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\operatorname{Im}(w_3 + zh) + 2 \operatorname{Re}(z + zf_1 + z^2 f)|z + zf_1 + z^2 f|^2 \\ + G^3(z + zf_1 + z^2 f, \bar{z} + \bar{z}\bar{f}_1 + \bar{z}^2 \bar{f}, \operatorname{Re}(w_2 + zg), \operatorname{Re}(w_3 + zh))\big|_M = 0, \quad (8)\end{aligned}$$

полученных подстановкой (3) в (5).

Построение нормализующего отображения будет осуществляться в виде ряда последовательных уточнений параметров отображений (2) и (3).

Шаг 1 (определение g). Рассмотрим тождество (7) и положим в нем $\bar{z} = 0$. В результате имеем уравнение

$$\frac{1}{2i} zg = G^2\left(z + zf_1 + z^2 f, 0, u_2 + \frac{1}{2} zg, u_3 + \frac{1}{2} zh\right), \quad (9)$$

обе части которого делятся на z , поскольку z входит множителем в zf_1 , $z^2 f$, zg , zh , а не зависимой от z компоненты функция G^2 не содержит. Сокращая на z обе части уравнения (9), мы по теореме о неявной функции находим g как

аналитическую функцию от аргументов z, u, f, f_1, h . Подставляя полученное выражение для g при фиксированных f, f_1 и h в преобразование (3) и подставляя (3) в уравнение (5), мы добиваемся того, что $N^2(z, 0, u) \equiv 0$, т. е. уравнение для новой переменной v_2 в нормальной форме не содержит голоморфной по z компоненты.

Шаг 2 (определение h). Подставим полученное на предыдущем шаге выражение для g в тождество (8) и положим в этом тождестве $\bar{z} = 0$. В результате имеем уравнение

$$\frac{1}{2i}zh = G^3\left(z + zf_1 + z^2f, 0, u_2 + \frac{1}{2}zg, u_3 + \frac{1}{2}zh\right), \quad (10)$$

обе части которого делятся на z . Сократив (10) на z , по теореме о неявной функции определяем h как аналитическую функцию аргументов z, u, f, f_1 . Подставляя полученное выражение для $h(z, w)$ при фиксированных f, f_1 в преобразование (3), добиваемся того, что $N^3(z, 0, u) \equiv 0$.

Шаг 3 (определение f_1 и f). После подстановки в (5) выражений для g и h и применения (3) к этому равенству замечаем, что оба тождества (7) и (8) делятся как на z , так и на $\bar{z}$. Разделим оба уравнения на $\bar{z}$ и рассмотрим второе:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{z}}\left(-v_3 - \frac{1}{2i}(zh - \bar{z}\bar{h}) + 2\operatorname{Re}(z + zf_1 + z^2f)^2(\overline{z + zf_1})\right) \\ & + \frac{1}{\bar{z}}G^3\left(z + zf_1 + z^2f, \overline{z + zf_1}, u_2 + \frac{1}{2}zg, u_3 + \frac{1}{2}zh\right) \\ & = -\frac{1}{\bar{z}}v_3 + z^2 + \frac{1}{\bar{z}}N^3(z, \bar{z}, u_2, u_3). \end{aligned} \quad (11)$$

Положим $\bar{z} = 0$ в уравнении (11). Приравнявая компоненту второй степени по z единице и полагая $f_1(0) = 0$, находим $\operatorname{Re} f_1$ и $\operatorname{Im} f_1$ как функции от u при фиксированном f . Подставляя эти выражения в (11) и вычитая линейную по z компоненту, мы получим, что остающееся выражение делится на z^3 . Разделив его на z^3 , мы получаем выражение от z, u, f , производная которого по f в нуле равна двум. Приравнявая это выражение нулю и вычитая линейную по z компоненту, мы получим уравнение, определяющее (по теореме о неявной функции) f как функцию, аналитическую от z, u . Подставляя получившееся для f выражение в (8), добиваемся того, что $\frac{\partial(N^3 - N_{11}^3)}{\partial \bar{z}}(z, 0, u) \equiv 0$.

Шаг 4 (определение $\operatorname{Re} f_0, \operatorname{Im} f_0, \operatorname{Re} g_0, \operatorname{Re} h_0$). Для определения этих компонент нам понадобится повторить шаги 1–3 и более явно выразить компоненты младших степеней по z в (3). Учитывая, что уравнения в нормальной форме получаются применением композиции отображений (2) и (3) к исходному уравнению (4), мы можем выразить компоненты малых степеней по z в правой части (3) через параметры X и их производные из условий, что в окончательном уравнении в нормальной форме компоненты $N_{k0}^j, N_{k1}^3, j = 2, 3, 1 \leq k \leq 4$,

равны нулю. Запишем композицию (2) и (3) в виде

$$\begin{aligned}
 z &\mapsto z + f_0(w_2, w_3) + z\tilde{f}(z, w_2, w_3) \\
 &= z + f_0(w_2, w_3) + \sum_{k \geq 1} \tilde{f}_k(w_2, w_3)z^k, \\
 w_2 &\mapsto w_2 + g_0(w_2, w_3) + z\tilde{g}(z, w_2, w_3) \\
 &= w_2 + g_0(w_2, w_3) + \sum_{k \geq 1} \tilde{g}_k(w_2, w_3)z^k, \\
 w_3 &\mapsto w_3 + h_0(w_2, w_3) + z\tilde{h}(z, w_2, w_3) \\
 &= w_3 + h_0(w_2, w_3) + \sum_{k \geq 1} \tilde{h}_k(w_2, w_3)z^k.
 \end{aligned} \tag{12}$$

В частности, выделяя в нормальной форме обоих уравнений голоморфные компоненты по z , из системы уравнений, соответствующих условиям $N_{10}^2 = 0$, $N_{k0}^2 = 0$, $2 \leq k \leq 4$, $N_{10}^3 = 0$, $N_{20}^3 = 0$, $N_{k0}^3 = 0$, $3 \leq k \leq 4$, по теореме о неявной функции получаем

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_1(u_2, u_3) &= 2i\tilde{f}_0 + \theta(u; X, \tilde{f}_1(u), \bar{\tilde{f}}_1(u)), \\
 \tilde{g}_k(u_2, u_3) &= \theta(u; X, \tilde{f}_j(u), \bar{\tilde{f}}_j(u)), \quad j < k \leq 4, \\
 \tilde{h}_1 &= \theta(u; X, \tilde{f}_1, \bar{\tilde{f}}_1), \\
 \tilde{h}_2 &= 2i\tilde{f}_0 + \theta(u; X, \tilde{f}_1, \bar{\tilde{f}}_1, \tilde{f}_2, \bar{\tilde{f}}_2), \\
 \tilde{h}_k &= \theta(u; X, \tilde{f}_j(u), \bar{\tilde{f}}_j(u)), \quad j < k, \quad k = 3, 4,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где θ – аналитическая функция, равная нулю при нулевых значениях ее аргументов и такая, что ее производная по последним аргументам (стоящим после “;”) равна нулю при $X = 0$. Отметим также, что в правой части (13) отсутствуют производные X , поскольку каждый член, содержащий производную X , непременно содержит v_2 или v_3 в качестве множителя и потому делится на $|z|^2$ согласно условиям нормальной формы.

Для выражения компонент $\operatorname{Re} \tilde{f}_1$ и $\operatorname{Im} \tilde{f}_1$ мы воспользуемся условием $N_{21}^3 = 0$. Применяя к (4) сквозное отображение (12), получаем

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \tilde{f}_1 &= \frac{1}{3} \frac{\partial \operatorname{Re} h_0}{\partial u_3} + \theta(u, X; X'), \\
 \operatorname{Im} \tilde{f}_1 &= \theta(u, X; X').
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь и далее через X' , X'' обозначается полный набор первых и вторых производных по u_2 и u_3 функций, входящих в X .

Для выражения компонент $\operatorname{Re} \tilde{f}_2$ и $\operatorname{Im} \tilde{f}_2$ мы воспользуемся условием $N_{31}^3 = 0$. Применяя к (4) сквозное отображение (12), получаем

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \tilde{f}_2 &= \frac{\partial \operatorname{Im} f_0}{\partial u_2} + \theta(u, X; X'), \\
 \operatorname{Im} \tilde{f}_2 &= \frac{\partial \operatorname{Re} f_0}{\partial u_2} + \theta(u, X; X').
 \end{aligned} \tag{15}$$

Для выражения компонент $\operatorname{Re} \tilde{f}_3$ и $\operatorname{Im} \tilde{f}_3$ мы воспользуемся условием $N_{41}^3 = 0$. Применяя к (4) сквозное отображение (12), получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \tilde{f}_3 &= \frac{\partial \operatorname{Im} f_0}{\partial u_3} + \theta(u, X; X'), \\ \operatorname{Im} \tilde{f}_3 &= \frac{\partial \operatorname{Re} f_0}{\partial u_3} + \theta(u, X; X').\end{aligned}\tag{16}$$

Для выражения компоненты $\tilde{f}_4$ мы воспользуемся условием $N_{51}^3 = 0$. Применяя к (4) сквозное отображение (12), получаем

$$\tilde{f}_4 = \theta(u, X; X').\tag{17}$$

Рассмотрим компоненты N_{11}^3 , N_{11}^2 и N_{21}^2 , полученные сквозным отображением (12), примененным к (4). Используя равенства (13) и (14), получаем, что условие равенства нулю этих компонент равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{Re} h_0}{\partial u_2}(u_2, u_3) &= L(u, X; X'_{u_2}) + \theta(u, X), \\ \frac{\partial \operatorname{Re} g_0}{\partial u_2}(u_2, u_3) - \frac{2}{3} \frac{\partial \operatorname{Re} h_0}{\partial u_3}(u_2, u_3) &= L(u, X; X'_{u_2}) + \theta(X), \\ \frac{\partial f_0}{\partial u_2}(u_2, u_3) + i \frac{\partial \operatorname{Re} g_0}{\partial u_3}(u_2, u_3) &= L(u, X; X') + \theta(X),\end{aligned}\tag{18}$$

где функция L линейна по своему последнему аргументу и производная каждой правой части по переменным из набора X' равна нулю при $X = 0$. Разрешив (18) как линейную систему относительно $(\operatorname{Re} h_0)'_{u_2}$, $(\operatorname{Re} g_0)'_{u_2}$, $(\operatorname{Re} f_0)'_{u_2}$, $(\operatorname{Im} f_0)'_{u_2}$, мы получим эквивалентную, но уже явную систему

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{Re} h_0}{\partial u_2}(u_2, u_3) &= \theta(u, X), \\ \frac{\partial \operatorname{Re} g_0}{\partial u_2}(u_2, u_3) &= \frac{2}{3} \frac{\partial \operatorname{Re} h_0}{\partial u_3}(u_2, u_3) + \theta(u, X), \\ \frac{\partial f_0}{\partial u_2}(u_2, u_3) &= -i \frac{\partial \operatorname{Re} g_0}{\partial u_3}(u_2, u_3) + L(u, X; X'_{u_3}) + \theta(u, X),\end{aligned}\tag{19}$$

где в каждой из правых частей не содержатся производные по u_2 .

К системе (19) применима теорема Коши–Ковалевской [5, с. 14], согласно которой f_0 , $\operatorname{Re} g_0$, $\operatorname{Re} h_0$ являются аналитическими функциями от u , если только аналитичны функции $f_0(0, u_3)$, $\operatorname{Re} g_0(0, u_3)$, $\operatorname{Re} h_0(0, u_3)$, являющиеся начальными условиями системы (19).

Для определения этих начальных данных приравняем нулю величины $N_{31}^2(0, u_3)$, $\operatorname{Im} N_{42}^3(0, u_3)$ и $\operatorname{Im} N_{42}^2(0, u_3)$. Равенство нулю этих компонент при

$u_2 = 0$ с учетом подстановок (13)–(17) равносильно системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} f_0}{\partial u_3}(0, u_3) &= L(u, X; X') + \theta(u, X)|_{u_2=0}, \\ \frac{\partial^2 \operatorname{Re} h_0}{\partial u_3^2}(0, u_3) &= 6 \frac{\partial^2 \operatorname{Re} g_0}{\partial u_2 \partial u_3}(0, u_3) + L(u, X; X'') \\ &\quad + q(u, X; X') + L(u, X; X') + \theta(u, X)|_{u_2=0}, \\ \frac{\partial^2 \operatorname{Re} g_0}{\partial u_3^2}(0, u_3) &= L(u, X; X'') + q(u, X; X') + L(u, X; X') + \theta(u, X)|_{u_2=0}, \end{aligned} \quad (20)$$

где функция L линейна по своему последнему аргументу, функция q квадратична по последнему аргументу и все функции L , q , θ равны нулю при $X = 0$.

Дифференцируя первое уравнение в (20) по u_3 , выражая все стоящие в правой части производные по u_2 через производные по u_3 с помощью уравнений (19) и разрешая все три уравнения относительно $\frac{\partial^2 \operatorname{Re} f_0}{\partial u_3^2}(0, u_3)$, $\frac{\partial^2 \operatorname{Re} h_0}{\partial u_3^2}(0, u_3)$, $\frac{\partial^2 \operatorname{Re} g_0}{\partial u_3^2}(0, u_3)$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, решения которой аналитичны.

Тем самым, построенное приведение к нормальной форме голоморфно. Поэтому без ограничения общности можно предполагать, что исходное уравнение ростка (4) задано в нормальной форме. Это обеспечивает выполнение равенств $\frac{\partial f_0}{\partial u_2}(0) = \frac{\partial f_0}{\partial u_3}(0) = 0$, и поэтому преобразование одной нормальной формы в другую при условии $\frac{\partial z^*}{\partial z}(0) = 1$ имеет тождественную матрицу Якоби.

Проследивая все шаги изложенного построения, нетрудно убедиться в том, что, поскольку отображение получено в результате применения теорем о неявной функции и о существовании решения системы дифференциальных уравнений, запасы аналитичности построенной нормализации и нормализованного ростка зависят лишь от запаса аналитичности исходного ростка и одного вещественного параметра: $\frac{\partial \operatorname{Re} h_0}{\partial u_3}(0, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что если исходное уравнение (4) для M задано в нормальной форме, то всякое нормализующее M отображение единственным образом представимо в виде композиции нормализации с тождественной матрицей Якоби и растяжения вида

$$z \mapsto \lambda z, \quad w_2 \mapsto \lambda^2 w_2, \quad w_3 \mapsto \lambda^3 w_3, \quad \lambda \neq 0. \quad (21)$$

Действительно, (21) – единственное линейное преобразование, сохраняющее модельную поверхность Q . Как нетрудно проверить, оно также сохраняет и нормальную форму. А поскольку линейная часть всякого приведения к нормальной форме сохраняет модельную поверхность, то оно будет являться композицией (21) и преобразования с тождественной матрицей Якоби. Таким образом, если $(z \mapsto z^*, w \mapsto w^*)$ – обратимое голоморфное отображение одной нормальной формы в другую, то $z^* = \lambda z$, $w_2^* = \lambda^2 w_2$, $w_3^* = \lambda^3 w_3$.

Процесс построения нормальной формы ростка

$$\begin{aligned} v_2 &= |z|^2 + F_3^2 + \dots, \\ v_3 &= 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z} + F_4^3 + \dots \end{aligned}$$

можно рассматривать как рекуррентный процесс вычисления компонент отображения

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + f_2 + \dots, \\ w_2 &\mapsto w_2 + g_3 + \dots, \\ w_3 &\mapsto w_3 + h_4 + \dots, \end{aligned}$$

нормированного условием $(f_1, g_2, h_3) = (z, w_2, w_3)$, и компонент нормальной формы, где на m -м шаге, решая линейные уравнения, мы получаем (f_{m-1}, g_m, h_{m+1}) и $N_m = (N_m^2, N_{m+1}^3)$.

Сформулируем следующие вполне очевидные свойства этого рекуррентного процесса.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. 1) Коэффициенты весовой m -струи нормализованного уравнения $\mathcal{N}_m = (N_4, \dots, N_m)$ зависят лишь от весовой m -струи исходного уравнения $\mathcal{F}_m = (F_4, \dots, F_m)$, причем эта зависимость является вещественно-аналитической (а точнее, рациональной).

2) Если снять условие нормировки замены, т.е. считать, что $(f_1, g_2, h_3) = (\lambda z, \lambda^2 w_2, \lambda^3 w_3)$, то коэффициенты N_m будут вещественно-полиномиально зависеть от λ .

3) Если замена приводит уравнение ростка к виду $v_2 = |z|^2 + N_m^2 + O(m+1)$, $v_3 = 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z} + N_{m+1}^3 + O(m+2)$, где компоненты N_m^2 и N_{m+1}^3 имеют нормальную форму, то любая другая нормальная форма этого ростка имеет вид $v_2 = |z|^2 + \lambda^{m-2} N_m^2 + O(m+1)$, $v_3 = 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z} + \lambda^{m-2} N_{m+1}^3 + O(m+2)$.

§ 5. Построение специальной нормальной формы и инвариантного CR-репера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что росток вполне невырожденного многообразия M_ξ в точке ξ типа $(1, 2)$ *сферичен* (по аналогии с ситуацией $(1, 1)$) *порядка m* , если росток имеет уравнение вида $v_2 = |z|^2 + N_m^2 + O(m+1)$, $v_3 = 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z} + N_{m+1}^3 + O(m+2)$, где $N_m = (N_m^2, N_{m+1}^3) \neq 0$.

Условие сферичности порядка не меньше m в терминах компонент нормального уравнения имеет вид $N_4 = \dots = N_{m-1} = 0$. Если M – вещественно-аналитическое вполне невырожденное многообразие и M^m – его подмножество, состоящее из точек, в которых порядок сферичности не меньше m , то замечание 2 позволяет заключить, что M^m – аналитическое подмножество.

Если порядок сферичности ограничен на всем многообразии M , то такое многообразие мы будем называть *многообразием конечного порядка сферичности*. Максимальный порядок в таком случае называется *порядком многообразия*. Компактное несферическое вещественно-аналитическое многообразие имеет, очевидно, конечный порядок.

Если в некоторой точке порядок не больше m , то это означает, что m -струя весового разложения правой части нормализованного уравнения ростка $J_m N = \sum_{j=4}^m (N_j^2, N_{j+1}^3)$ не равна тождественно нулю. Для класса несферических ростков можно, воспользовавшись оставшейся степенью свободы в выборе нормальных координат, предложить дополнительное приведение вида $z \mapsto tz$,

$w_2 \mapsto t^2 w_2$, $w_3 \mapsto t^3 w_3$, так что эта специальная нормальная форма оказывается единственной с точностью до преобразования вида $z \mapsto -z$, $w_2 \mapsto w_2$, $w_3 \mapsto -w_3$.

Сформулируем правило построения дополнительной нормировки так, чтобы оно было корректно для всех несферических ростков, порядок сферичности которых не превосходит m . Рассмотрим совокупность коэффициентов m -струи правой части нормальных уравнений ростка $V(J_m N)$ как ненулевой вектор некоторого вещественного линейного пространства и выберем λ так, чтобы длина этого вектора стала равной единице. Это можно сделать, так как длина этого вектора – функция $|t|$, строго возрастающая от нуля при $t = 0$ до плюс бесконечности. Такую нормальную форму будем называть *специальной нормальной формой m -го порядка*. Переход от одной нормальной формы к другой возможен только при $t = \pm 1$. Заметим, что отображение при $t = -1$ меняет ориентацию многообразия.

Будем называть *m -мерой несферичности* вложенного ростка наибольшее число $\delta > 0$ такое, что $\delta \leq \|J_m N\| \leq \frac{1}{\delta}$, где $\|J_m N\|$ – норма m -струи нормальной формы ростка, полученной нормализацией при $\lambda = 1$.

Сказанное выше доказывает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. (а) Если M_ξ – несферический росток в нормальной форме, то отображением вида $(\lambda z, \lambda^2 w_2, \lambda^3 w_3)$ его можно привести к специальной нормальной форме, описанной выше.

(б) Два таких приведения могут отличаться лишь заменой вида $(\pm z, w_2, \pm w_3)$, т.е. два несферических ростка M_ξ и $\tilde{M}_{\tilde{\xi}}$, имеющие в специальных нормальных координатах правые части N и $\tilde{N}$ соответственно, голоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из двух соотношений: $N(z, \bar{z}, u_2, u_3) = \tilde{N}(z, \bar{z}, u_2, u_3)$ или $N(-z, -\bar{z}, u_2, -u_3) = \tilde{N}(z, \bar{z}, u_2, u_3)$.

(с) Если ε – запас аналитичности исходного ростка M_ξ (как в теореме 3), являющегося сферическим порядком не больше t и δ – m -мера несферичности, то запас аналитичности ростка отображения, приводящего M_ξ к специальной нормальной форме m -го порядка, зависит лишь от ε и δ .

Далее, имеет место

ТЕОРЕМА 5. На вполне невырожденном вещественно-аналитическом многообразии M конечного порядка сферичности имеется инвариантная пара реперов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим значения векторных полей $X_1, \dots, X_4$ в точке p . Для этого перейдем к уточненным специальным координатам $(z = x + iy, w_1, w_2)$ в точке p и зададим два репера. В качестве первого репера возьмем

$$X_1^0|_p = \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_0, \quad X_2^0|_p = \frac{\partial}{\partial y}\bigg|_0, \quad X_3^0|_p = [X_1^0, X_2^0]|_0, \quad X_4^0|_p = [X_1^0, X_3^0]|_0,$$

а в качестве второго –

$$X_1^1|_p = -\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_0, \quad X_2^1|_p = \frac{\partial}{\partial y}\bigg|_0, \quad X_3^1|_p = [X_1^1, X_2^1]|_0, \quad X_4^1|_p = [X_1^1, X_3^1]|_0.$$

Пусть m – порядок сферичности многообразия; тогда для построения указанных реперов достаточно использовать приведение уравнения поверхности к нормальной форме до m -го порядка. Коэффициенты полиномиальной замены, осуществляющей такую частичную нормализацию, аналитически зависят от коэффициентов m -струи (в нашей градуировке) роста. Это означает, что построенные поля зависят от точки аналитически. Если многообразие подверглось голоморфному отображению, то имеются лишь две возможности: каждый репер перешел в себя или они поменялись местами.

СЛЕДСТВИЕ 1. (а) *Если гладкое ориентируемое четырехмерное многообразие M допускает вложение в трехмерное комплексное многообразие в качестве вполне невырожденного подмногообразия конечного порядка, то касательное расслоение TM тривиально.*

(б) *Если многообразие ориентируемо и отображение сохраняет ориентацию, то данное отображение сохранит каждый из этих реперов.*

Тривиальность касательного расслоения не позволяет вполне невырожденно вложить в S^3 четырехмерную сферу. Однако из формул Лая [6], [7] следует, что не существует вложения этой сферы без RC-особых точек, т. е. любое вложение обязано иметь точки, где касательная является двумерной комплексной гиперплоскостью. В связи с этим интересно было бы построить пример компактного четырехмерного подмногообразия $\mathbb{R}^6$ без RC-особых точек и с нетривиальным касательным расслоением. В соответствии с формулами Лая такое многообразие должно иметь нулевую эйлерову характеристику и нулевую сигнатуру.

Минимальный возможный порядок сферичности, как это видно из теоремы 3, равен четырем. Росток общего положения, т. е. росток в точке $\xi \in M^4 \setminus M^5$, имеет следующий вид:

$$v_2 = |z|^2 + O(5),$$

$$v_3 = 2 \operatorname{Re} z^2 \bar{z} + 2B_1 \operatorname{Re} z^4 \bar{z} + 2B_2 \operatorname{Re} z^3 \bar{z}^2 + 2B_3 \operatorname{Im} z^3 \bar{z}^2 + O(6),$$

где $B_j \in \mathbb{R}$ не все равны нулю. Такой росток и точку естественно называть *неомбилическими*, таким образом, M^5 состоит из омбилических точек.

Можно сформулировать весьма правдоподобную гипотезу. Если окрестность некоторой точки $(1, 2)$ -многообразия состоит из омбилических точек, то многообразие сферично (локально эквивалентно Q). Если это так, то для несферического аналитического $(1, 2)$ -многообразия M имеет место соотношение $M = M^4$, при этом M^5 (множество омбилических точек) – его собственное аналитическое подмножество и $M \setminus M^5$ (множество неомбилических точек) – открытое плотное подмножество. Аналогичное утверждение для гиперповерхностей доказано в [4].

Н. Г. Кружилин, ознакомившись с первоначальным вариантом статьи, высказал ряд ценных замечаний, приведших к существенному улучшению настоящей работы, за что авторы ему весьма признательны.

Список литературы

1. V. K. Beloshapka, “CR-varieties of the type $(1, 2)$ as varieties of “super-high” codimension”, *Russian J. Math. Phys.*, **5:3** (1997), 399–404.

2. В. К. Белошапка, “Универсальная модель вещественного подмногообразия”, *Матем. заметки*, **75**:4 (2004), 507–522; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “Universal models for real submanifolds”, *Math. Notes*, **75**:3 (2004), 475–488.
3. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, ч. II, Наука, М., 1985; англ. пер.: B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis. Part II: Functions of several variables*, Translations of Mathematical Monographs, **110**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
4. S. S. Chern, J. K. Moser, “Real hypersurfaces in complex manifold”, *Acta Math.*, **133**:1 (1974), 219–271.
5. И. Г. Петровский, *Лекции об уравнениях с частными производными*, 3-е изд., ГИФМЛ, М., 1961.
6. Hon-Fei Lai, “Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **172** (1972), 1–33.
7. А. В. Домрин, “Описание в терминах RC-особенностей характеристических классов вещественных подмногообразий в комплексных многообразиях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:5 (1995), 19–40; англ. пер.: A. V. Domrin, “A description of characteristic classes of real submanifolds in complex manifolds via RC-singularities”, *Izv. Math.*, **59**:5 (1995), 899–918.

В. К. БЕЛОШАПКА (V. K. BELOSHAPKA)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
E-mail: vkb@strogino.ru

Поступило в редакцию
 30.04.2004
 02.03.2007

В. В. ЕЖОВ (V. V. EZHOV)
 University of Adelaide
E-mail: vezhov@maths.adelaide.edu.au

Г. ШМАЛЬЦ (G. SCHMALZ)
 University of New England
E-mail: gerd@turing.edu.au