Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Сандраков, Влияние вязкости на осцилляции
в некоторых линеаризованных задачах гидродинамики,
Изв. РАН. Сер. матем., 2007, том 71, выпуск 1, 101–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/im697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:58:52

УДК 517.95

Г. В. Сандраков

Влияние вязкости на осцилляции в некоторых линеаризованных задачах гидродинамики

Доказаны утверждения об асимптотическом поведении решений нестационарной линеаризованной системы уравнений гидродинамики с малым коэффициентом вязкости и быстроосциллирующими по пространственным переменным данными. Получены погранслойные слагаемые, осредненная (предельная) система уравнений и задачи на ячейках, решения которых определяют приближенные асимптотики решений рассматриваемой системы, и доказаны оценки точности таких приближений. Вид полученных асимптотик существенно зависит от взаимного асимптотического поведения коэффициента вязкости и параметра периодичности, характеризующего быстрые осцилляции данных. При очень малой вязкости такие асимптотики могут содержать быстроосциллирующие слагаемые, растущие линейно по временной переменной. Аналогичные утверждения доказаны для нестационарной системы уравнений Стокса и частично для нестационарной системы уравнений Навье–Стокса.

Библиография: 34 наименования.

§ 1. Введение

В работе рассматриваются начально-краевые задачи для нестационарной линеаризованной системы уравнений гидродинамики с периодическими, быстроосциллирующими по пространственным переменным данными и малой вязкостью. Период осцилляций данных определяется малым положительным параметром ε , удовлетворяющим неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для фиксированного положительного ε_0 . Предполагается, что коэффициент вязкости ν в рассматриваемой системе является положительным и удовлетворяет при $\varepsilon \rightarrow 0$ соотношению $\nu \rightarrow 0$ и одному из следующих трех условий:

$$\frac{\nu}{\varepsilon^2} \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

$$\frac{\nu}{\varepsilon^2} \rightarrow \vartheta, \quad (1.2)$$

$$\frac{\nu}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

где ϑ – заданная положительная постоянная. Таким образом, в этих условиях предполагается, что положительная величина $\nu = \nu(\varepsilon)$ является функцией от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Кроме того, эта функция ν является достаточно малой при малых ε (поскольку $\nu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$), а взаимная малость ν и ε контролируется одним из условий (1.1)–(1.3), выполняемым при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Будут приведены осредненная (предельная при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\nu \rightarrow 0$) система уравнений и периодические задачи на ячейках, решения которых определяют

приближенные (начальные слагаемые) асимптотики решений рассматриваемой системы, и доказаны оценки точности этих приближений. Такие оценки точности будут доказаны как при выполнении одного из условий (1.1)–(1.3), так и в предположении, что ε и ν являются независимыми малыми параметрами.

Приведенные приближения и доказанные оценки точности проясняют следующее интересное свойство решений рассматриваемой системы уравнений. Когда вязкость не слишком мала (выполнено условие (1.1)), эти приближения не содержат быстроосциллирующих слагаемых и рассматриваемая система “разглаживает” быстрые осцилляции данных – свойство асимптотической параболичности. В случае, когда вязкость является очень малой (выполнено условие (1.3)), приведенные приближения для вектора скорости могут содержать быстроосциллирующие слагаемые с нулевыми средними – свойство асимптотической гиперболичности, причем такие слагаемые не являются нулевыми и могут расти линейно по временной переменной, если быстрые осцилляции данных не являются потенциальными в среднем. Таким образом, рассматриваемая система уравнений при очень малой вязкости обладает свойством пространственно-временной “резонансности” по отношению к пространственным осцилляциям исходных данных. Аналогичным свойством “резонансности” обладает и нестационарная система уравнений Стокса, а свойство асимптотического “разглаживания” быстрых осцилляций (с нулевыми средними) сохраняется и для решений нестационарных уравнений Навье–Стокса при не слишком малой вязкости.

§ 2. Задача и результаты

Пусть для целого $n \geq 2$ заданы ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой (класса C^∞) границей, положительные числа η , γ и T , финитные в Ω , и гладкие вектор-функция $f \in C^\infty([0, T] \times \Omega)^n$ и функция $g \in C^\infty([0, T] \times \Omega)$, где $f \in C_0^\infty(\Omega)^n$ и $g \in C_0^\infty(\Omega)$ для каждого $t \in [0, T]$. Определим вектор-функцию u и функцию p как решение начально-краевой задачи для нестационарной линейаризованной системы уравнений гидродинамики:

$$\begin{aligned} u_t' - \nu \Delta u - \nu \eta \nabla \operatorname{div} u + \nabla p &= m_\varepsilon f \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \gamma p_t' + \operatorname{div} u &= k_\varepsilon g \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \quad p|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Зависящие от малого параметра ε матричнозначная функция m_ε и функция k_ε в задаче (2.1) являются ε -периодическими и определяются равенствами

$$m_\varepsilon = m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad k_\varepsilon = k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{2.2}$$

где компоненты матричнозначной функции $m(y)$ и функции $k(y)$ являются гладкими 1-периодическими (периодическими с периодом 1 по каждому из независимых переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$) функциями на $\mathbb{R}^n$, которые вполне определяются своими ограничениями на ячейку периодичности $Y = [0, 1]^n$. В дальнейшем такие ограничения будут рассматриваться так же, как функции на n -мерном торе T^n , получаемом после отождествления противоположных граней ячейки периодичности Y .

Проверяется, что для фиксированных ν и ε существует единственное решение (u, p) задачи (2.1) такое, что $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)$ и $p \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$. Здесь используются функциональные пространства, определенные, например, в [1]. Основные результаты работы составляют теоремы о предельном поведении решений задачи (2.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\nu \rightarrow 0$.

1. Определим вектор-функцию v и функцию q как решение начально-краевой задачи для осредненной системы уравнений:

$$\begin{aligned} v'_t + \nabla q &= Mf \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \gamma q'_t + \operatorname{div} v &= Kg \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ v|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \quad q|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ (v, N) &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где N – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$, (v, N) – нормальная компонента вектор-функции v на этой границе и матрица с постоянными компонентами M и постоянная K определяются равенствами

$$M = \langle m \rangle \equiv \int_Y m(y) dy, \quad K = \langle k \rangle. \quad (2.4)$$

Проверяется, что задача (2.3) может быть сведена к начально-краевой задаче с граничными условиями Неймана для волнового уравнения относительно q и поэтому имеет единственное (достаточно) гладкое решение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть (u, p) является решением задачи (2.1) и (v, q) – решение задачи (2.3). Тогда найдутся такие положительные ε_* , ν_* и ϑ_* , что для ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, $0 < \nu \leq \nu_*$ и $0 < \varepsilon^2/\nu \leq \vartheta_*$, выполняются оценки

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|p - q\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\varepsilon^2 + \nu), \quad (2.5)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C \left(\varepsilon^2 + \sqrt{\nu} + \left(\frac{\varepsilon^2}{\nu} \right)^2 \right),$$

в которых постоянная C не зависит от ε и ν (при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, $\nu \in (0, \nu_*]$ и $\varepsilon^2/\nu \in (0, \vartheta_*]$, где $\varepsilon_* \leq \varepsilon_0$).

Доказательства утверждений, сформулированных в настоящем параграфе, будут приведены в последующих параграфах.

Пусть вектор-функция $b = b(y)$ является 1-периодическим решением стационарной задачи, рассматриваемой на ячейке Y :

$$\Delta_y b = \operatorname{div}_y m \quad \text{в } Y, \quad \langle b \rangle = 0. \quad (2.6)$$

Известно [2], что (гладкое) решение этой задачи существует и определено однозначно. Определим матричнозначную функцию $A(t, y)$ и вектор-функцию $B(t, y)$ как 1-периодическое (относительно y) решение начально-краевой задачи для нестационарной системы уравнений Стокса на Y :

$$\begin{aligned} A'_t - \vartheta \Delta_y A + \nabla_y B &= 0 \quad \text{в } Y \times (0, T), \\ \operatorname{div}_y A &= 0 \quad \text{в } Y \times (0, T), \\ A|_{t=0} &= m - M - \nabla_y b \quad \text{в } Y, \quad \langle A \rangle = 0, \quad \langle B \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где ϑ определено в (1.2) и $b = b(y)$ является решением задачи (2.6). Известно также [1], [3], что (гладкое) решение задачи (2.7) существует и определено однозначно (для фиксированного ϑ).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть (u, p) – решение задачи (2.1) и (v, q) – решение задачи (2.3). Тогда найдутся такие положительные ε_* , ν_* и ϑ_* , что для ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, $0 < \nu \leq \nu_*$ и $|\vartheta - \nu/\varepsilon^2| \leq \vartheta_*$, выполняются оценки (2.5) и

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - A_\varepsilon * f\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C \left(\varepsilon^2 + \sqrt{\nu} + \vartheta^2 \left| \vartheta - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \right|^2 \right),$$

в которых постоянная C не зависит от ε , ν и ϑ . Здесь $A_\varepsilon = A(t, x/\varepsilon)$, матричнозначная функция $A(t, y)$ является решением задачи (2.7), постоянная ϑ определена в (1.2) и $*$ обозначает свертку по временной переменной:

$$[A_\varepsilon * f](t, x) = \int_0^t A\left(t - \tau, \frac{x}{\varepsilon}\right) f(\tau, x) d\tau. \quad (2.8)$$

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть (u, p) – решение задачи (2.1) и (v, q) – решение задачи (2.3). Тогда найдутся такие положительные ε_* , ν_* и ϑ_* , что для ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, $0 < \nu \leq \nu_*$ и $0 < \nu/\varepsilon^2 \leq \vartheta_*$, выполняются оценки (2.5) и

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - [m_\varepsilon - M - (\nabla_y b)_\varepsilon] f^{(-1)}\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C \left(\varepsilon^2 + \sqrt{\nu} + \left(\frac{\nu}{\varepsilon^2} \right)^2 \right),$$

в которых постоянная C не зависит от ε и ν . Здесь $(\nabla_y b)_\varepsilon = (\nabla_y b)(x/\varepsilon)$, вектор-функция $b(y)$ является решением задачи (2.6), матрица M определена в (2.4) и $f^{(-1)}$ обозначает первообразную по временной переменной:

$$f^{(-1)}(t, x) = \int_0^t f(\tau, x) d\tau. \quad (2.9)$$

Отметим, что для функции f , зависящей только от пространственной переменной x , вектор-функция $f^{(-1)}$ растет линейно по временной переменной, если $f \neq 0$. Кроме того, если $m - M = \nabla_y \varphi(y)$ для некоторой 1-периодической вектор-функции $\varphi(y)$ с нулевым средним, то $b = \varphi(y)$ и $[m_\varepsilon - M - (\nabla_y b)_\varepsilon] = 0$. Таким образом, быстроосциллирующие слагаемые в оценках теорем 2.2 и 2.3 являются нулевыми, только если матричнозначная функция $m(y)$ из (2.2) является потенциальной в среднем (с точностью до постоянной матрицы $M = \langle m \rangle$). Здесь следует отметить, что равенство $m = \nabla_y \varphi(y)$ (с гладкой 1-периодической функцией $\varphi(y)$) может выполняться, только если $\langle m \rangle = 0$, поскольку $\langle \nabla_y \varphi \rangle = 0$.

2. Оценки теоремы 2.3 являются равномерными по параметру вязкости ν при $\nu = 0$ в следующем смысле.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $\nu = 0$ в задаче (2.1), в которой однородные граничные условия Дирихле заменены граничным условием

$$(u, N) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0, T).$$

Тогда найдется такое положительное ε_* , что для всех ε , удовлетворяющих неравенству $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, выполняются оценки теоремы 2.3 с $\nu = 0$ и постоянной C , не зависящей от ε .

3. Оценки теоремы 2.2 являются равномерными по параметру ϑ в следующем смысле. Предположим теперь, что ε и ν являются независимыми малыми положительными параметрами в задаче (2.1), удовлетворяющими неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $0 < \nu \leq \nu_0$ для фиксированных положительных ε_0 и ν_0 . Обозначим $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$ и рассмотрим ϑ как параметр в задаче (2.7).

ТЕОРЕМА 2.5. *Предположим, что $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$ в задаче (2.7). Пусть (u, p) является решением задачи (2.1) и (v, q) – решением задачи (2.3). Тогда найдутся такие положительные ε_* и ν_* , что для всех ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ и $0 < \nu \leq \nu_*$, выполняются оценки (2.5) и*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - A_\varepsilon * f\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C(\varepsilon^2 + \sqrt{\nu}),$$

в которых постоянная C не зависит от ε и ν (при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и $\nu \in (0, \nu_*]$, где $\varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ и $\nu_* \leq \nu_0$).

В соответствии с теоремой 2.5 исследование задачи (2.1) с двумя малыми параметрами (асимптотически) сводится к рассмотрению задачи с постоянными коэффициентами (2.3) и задачи (2.7) с положительным параметром $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$. В соответствии с теоремами 2.1–2.3 исследование задачи (2.1) можно свести к рассмотрению задач с постоянными коэффициентами, но при выполнении одного из условий (1.1), (1.2) или (1.3). Асимптотическое сведение задачи с малыми параметрами к нескольким задачам, не зависящим от этих параметров, является классическим подходом, использующимся в теории возмущений, который вполне иллюстрируется теоремами 2.1–2.3. Однако в теореме 2.5 реализуется более “естественный” подход к задаче (2.1), что можно пояснить следующим простым примером.

Рассмотрим уравнение в действительных числах:

$$\varepsilon^2 z_\varepsilon^\nu = \nu, \quad (2.10)$$

где ε и ν являются малыми положительными параметрами. Тогда $z_\varepsilon^\nu = \nu/\varepsilon^2$ и для $\nu = \nu(\varepsilon)$, удовлетворяющему соотношению $\nu \rightarrow 0$ и одному из условий (1.1), (1.2) или (1.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$, можно утверждать, что решение z_ε^ν уравнения (2.10) достаточно “близко” к ∞ , ϑ или 0 при малых ε и ν , что является “классическим” ответом для задачи (2.10), очевидным, например, при $\nu = \varepsilon^\kappa$ с положительным κ . Однако более “естественно” считать, что z_ε^ν достаточно “близко” к ν/ε^2 при малых ε и ν без каких-либо дополнительных предположений.

Приведенный пример (2.10) является простейшим примером задачи с двумя малыми параметрами, который вполне иллюстрирует возможные подходы к рассмотрению таких задач и в более сложных случаях. Отметим также тот очевидный факт, что

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} z_\varepsilon^\nu \neq \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_\varepsilon^\nu = \infty.$$

Таким образом, даже для такого простейшего примера последовательные предельные переходы по малым параметрам не перестановочны и имеют, как правило, далекое отношение к полному и корректному ответу.

Это замечание кажется естественным и очевидным, однако имеются публикации по усреднению, в которых такие последовательные предельные переходы

вычисляются (достаточно свободно переставляются без проверки корректности) и интерпретируются в качестве ответа для задач с двумя малыми параметрами в существенно более сложных случаях.

Здесь следует также отметить, что имеется достаточно полная теория возмущений для матриц с одним малым параметром (подробности можно найти в [4]). Однако такая теория не построена в общем случае для матриц с двумя (и более) малыми параметрами, и одним из препятствий к построению такой теории является возможная зависимость ответов от отношений малых параметров (наличие в ответах “малых знаменателей”), что вполне иллюстрируется простейшим примером (2.10).

Оценки теоремы 2.5 являются равномерными по параметру ν/ε^2 , от которого неявно зависит матричнозначная функция $A_\varepsilon = A(t, x/\varepsilon)$, где $A(t, y)$ является решением задачи (2.7). Поэтому из оценок теоремы 2.5 несложно вывести оценки теорем 2.1 и 2.3, используя подходящие вспомогательные утверждения об асимптотическом поведении решений задачи (2.7) при малых и больших ϑ .

В случае, когда ϑ является малым параметром в задаче (2.7), выполняется следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. Пусть матричнозначная функция $A(t, y)$ – решение задачи (2.7), где ϑ рассматривается как параметр, и вектор-функция $b(y)$ – решение задачи (2.6). Тогда найдется такое положительное ϑ_* , что для всех ϑ , удовлетворяющих неравенствам $0 < \vartheta \leq \vartheta_*$, выполняется оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|R\|_{L^2(Y)^{n \times n}}^2 + \vartheta \|\nabla_y R\|_{L^2(0, T; L^2(Y)^{n \times n \times n})}^2 \leq CT^2 \vartheta^2,$$

где $R = A - (t - M - \nabla_y b)$ и постоянная C не зависит от ϑ и T . Здесь матричнозначная функция $t(y)$ и матрица M определены в (2.2) и (2.4).

Соответственно, в случае, когда $1/\vartheta$ является малым параметром в задаче (2.7), выполняется следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. Пусть матричнозначная функция $A(t, y)$ является решением задачи (2.7), где ϑ рассматривается как параметр, и матричнозначная функция $a(y)$ является 1-периодическим решением стационарной задачи на Y :

$$\Delta_y a = t - M - \nabla_y b \quad \text{в } Y, \quad \langle a \rangle = 0, \quad (2.11)$$

где матричнозначная функция $t(y)$ и матрица M определены в (2.2) и (2.4). Тогда найдется такое положительное ϑ_* , что для всех ϑ , удовлетворяющих неравенствам $0 < 1/\vartheta \leq \vartheta_*$, выполняется оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|A^{(-1)}\|_{L^2(Y)^{n \times n}}^2 + \vartheta \|\nabla_y R\|_{L^2(0, T; L^2(Y)^{n \times n \times n})}^2 \leq C \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^2,$$

где $R = A^{(-1)} - (1/\vartheta)a$ и постоянная C не зависит от ϑ и T . Здесь $A^{(-1)}$ обозначает первообразную по t от $A(t, y)$.

4. Оценки теорем 2.1–2.5 являются равномерными по параметру γ при $\gamma = 0$ в следующем смысле. Определим вектор-функцию u и функцию p как решение

начально-краевой задачи для нестационарной системы уравнений Стокса

$$\begin{aligned} u'_t - \nu \Delta u + \nabla p &= m_\varepsilon f \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned} \quad (2.12)$$

в предположениях и обозначениях для исходных данных из (2.1) и (2.2), где $g = 0$ (для простоты формулировок и из физических соображений). Пусть вектор-функция v и функция q являются решением начально-краевой задачи для осредненной системы уравнений

$$\begin{aligned} v'_t + \nabla q &= Mf \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} v &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ v|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ (v, N) &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned} \quad (2.13)$$

в обозначениях из (2.3) и (2.4). Известно [1], [3], что для фиксированных ν и ε существует единственное решение (u, p) задачи (2.12) такое, что $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)$ и $p \in L^2(0, T; L^2(\Omega)/\mathbb{R})$. Известно также [5], что (гладкое) решение задачи (2.13) существует и единственно, поскольку эта задача может быть сведена к (квазистационарному) уравнению Пуассона с граничными условиями Неймана для q .

ТЕОРЕМА 2.8. *Предположим, что $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$ в задаче (2.7). Пусть (u, p) – решение задачи (2.12) и (v, q) – решение задачи (2.13). Тогда найдутся такие положительные ε_* и ν_* , что для всех ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ и $0 < \nu \leq \nu_*$, выполняются оценки*

$$\|p - q\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)/\mathbb{R})}^2 \leq C(\varepsilon^{3/2} + \nu), \quad (2.14)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - A_\varepsilon * f\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C(\varepsilon^{3/2} + \sqrt{\nu}),$$

в которых постоянная C не зависит от ε и ν .

Для решений задачи (2.12) выполнены также оценки, аналогичные оценкам теорем 2.1–2.4. Кроме того, для решений этой задачи из оценки теоремы 2.8 и утверждений 2.6 и 2.7 несложно вывести оценки, аналогичные оценкам теорем 2.1 и 2.3. Отметим в качестве примера только следующее утверждение о “разглаживании” быстрых осцилляций.

ТЕОРЕМА 2.9. *Пусть (u, p) – решение задачи (2.12) и (v, q) – решение задачи (2.13). Тогда найдутся такие положительные ε_* , ν_* и ϑ_* , что для ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, $0 < \nu \leq \nu_*$ и $0 < \varepsilon^2/\nu \leq \vartheta_*$, выполняются оценки (2.14) и*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C\left(\varepsilon^{3/2} + \sqrt{\nu} + \left(\frac{\varepsilon^2}{\nu}\right)^2\right),$$

в которых постоянная C не зависит от ε и ν .

5. Из теорем 2.1–2.5 и теорем 2.8, 2.9 несложно вывести и некоторые оценки для решений задач (2.1) и (2.12) с неоднородными быстроосциллирующими начальными данными. Действительно, в задачах (2.1) и (2.12) с такими данными можно перейти к первообразным по временной переменной от решений. Тогда эти первообразные удовлетворяют задачам, аналогичным задачам (2.1) и (2.12) соответственно с однородными начальными данными. Для таких задач выполнены соответствующие оценки теорем 2.1–2.5 и теорем 2.8 и 2.9. Однако эти оценки для первообразных от решений эквивалентны оценкам для исходных решений, но в более слабых (чем в соответствующих теоремах) нормах, например в норме пространства $W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ (для компонент скорости и давления). То, что такой подход приводит к оценкам точности в более слабых нормах, является существенным. В общем случае в задачах (2.1) и (2.12) с быстроосциллирующими начальными данными возникают погранслоиные явления вблизи границы $t = 0$, а переход к первообразным “смягчает” влияние таких погранслоиных явлений на соответствующие оценки. Поэтому для получения таких оценок в более “сильных” нормах следует учитывать вклад входящих погранслоиных слагаемых.

6. Отметим, что при доказательстве теорем 2.1–2.3, 2.5, 2.8 и 2.9 используются погранслоиные слагаемые вблизи границы $\partial\Omega \times (0, T)$, компенсирующие различие граничных условий в задачах (2.1) и (2.3) (соответственно, в задачах (2.12) и (2.13)). Однако эти слагаемые не влияют на окончательный вид оценок этих теорем, поскольку имеют порядок $\sqrt{\nu}$ в соответствующих нормах. Такие погранслоиные слагаемые будут построены и оценены в следующем параграфе.

На самом деле при доказательстве теорем 2.1–2.5, 2.8 и 2.9, приведенных в § 5, будут доказаны оценки точности в “энергетических” нормах, более сильных, чем нормы из оценок этих теорем, но в таких “энергетических” оценках соответствующие погранслоиные слагаемые не являются асимптотически малыми, и поэтому такие слагаемые следует учитывать при выводе “энергетических” оценок точности. При доказательстве этих оценок используются только главные слагаемые (или слагаемые первого порядка) асимптотики решений рассматриваемых задач. Определяя дополнительные 1-периодические задачи (типа задач (2.6) и (2.7), которые принято называть *задачами на ячейках*) и начально-краевые задачи (типа задач (2.3) и (2.13), которые принято называть *осредненными задачами* соответствующего порядка), можно получить и дальнейшие слагаемые асимптотик. Учет таких слагаемых (более высокого порядка) в доказательствах оценок теорем 2.1–2.5, 2.8 и 2.9 приводит к улучшению этих оценок и увеличению показателей малых параметров в таких оценках, если в этих доказательствах учесть и погранслоиные слагаемые (вблизи границы $\partial\Omega \times (0, T)$) более высокого порядка. Однако соответствующие определения и точные утверждения, обосновывающие эти определения, достаточно громоздки и поэтому не будут приводиться здесь.

7. Предположения о гладкости исходных данных в задачах (2.1) и (2.12) можно существенно ослабить с сохранением оценок теорем 2.1–2.5, 2.8 и 2.9. Точные утверждения, предположения о гладкости в которых являются более общими, несложно установить, анализируя доказательства этих теорем, приведенные в § 5, однако такие утверждения также громоздки. Кроме того, соот-

ветствующие оценки выполнены и для исходных данных более общего вида

$$m_\varepsilon f = F\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad k_\varepsilon g = G\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где $F(t, x, y)$ и $G(t, x, y)$ являются 1-периодическими по y вектор-функцией и функцией, принадлежащими подходящим пространствам.

Рассмотрим в качестве примера только соответствующие оценки и утверждение о “разглаживании” быстрых осцилляций с нулевыми средними для решений нестационарной системы уравнений Навье–Стокса при не слишком малой вязкости и в размерности, меньшей или равной четырем.

Пусть для $n \leq 4$ вектор-функция u и функция p являются (некоторым) решением начально-краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} u'_t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= F_\varepsilon \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $F_\varepsilon = F(t, x, x/\varepsilon)$ и $F(t, x, y) \in L^2(0, T; L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R})^n)$. Здесь и далее индекс per означает 1-периодичность относительно $y \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, по определению $F(t, x, y)$ является 1-периодической по y вектор-функцией, имеющей нулевое среднее

$$\langle F \rangle \equiv \int_Y F(t, x, y) dy = 0, \quad (2.16)$$

для почти всех $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$, и ограничение $F(t, x, y)$ на Y принадлежит $L^2(0, T; L^2(\Omega; L^\infty(\mathbb{T}^n))^n)$.

Следуя, например, [1], определим решение задачи (2.15) как элемент $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n)$, удовлетворяющий для каждого $\varphi \in V$ и почти всех $t \in (0, T)$ интегральному тождеству

$$\int_\Omega (u'_t, \varphi) dx + \nu \int_\Omega (\nabla u, \nabla \varphi) dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla u, \varphi) dx = \int_\Omega (F_\varepsilon, \varphi) dx, \quad (2.17)$$

энергетическому неравенству

$$\int_\Omega \frac{u^2}{2} dx + \nu \int_0^t \int_\Omega (\nabla u)^2 dx d\tau \leq \int_0^t \int_\Omega (F_\varepsilon, u) dx d\tau \quad (2.18)$$

и начальному условию $u|_{t=0} = 0$ в $L^2(\Omega)$. Здесь $V = \{\varphi \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \varphi = 0\}$ – гильбертово пространство и $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение n -векторов или $(n \times n)$ -матриц.

Известно [1], [3], что для фиксированных ε и ν существует такое решение u задачи (2.17), которое удовлетворяет неравенству (2.18) и является слабо непрерывной функцией на $[0, T]$ со значениями в $L^2(\Omega)^n$.

ТЕОРЕМА 2.10. *Предположим, что $\nabla_x F \in L^1(0, T; L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R})^{n \times n})$. Пусть u – решение задачи (2.17), удовлетворяющее неравенству (2.18). Тогда найдутся такие положительные ε_* и ϑ_* , что для ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ и $0 < \varepsilon^2/\nu \leq \vartheta_*$, выполняется оценка*

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \leq C \left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{\nu} \right),$$

где постоянная C не зависит от ε и ν .

Это утверждение является обобщением оценки теоремы 2.9 для скорости, поскольку в частном случае $F_\varepsilon = m_\varepsilon f$ выполнено равенство $M = 0$ в соответствии с предположением (2.16), и поэтому $v = 0$ в этом случае (отметим, что в условиях теоремы 2.10 можно не предполагать, что $\nu \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$). Кроме того, если матричнозначная функция $m(y)$ из (2.2) является потенциальной, то $m_\varepsilon - (\nabla_y b)_\varepsilon = 0$ и $A_\varepsilon * f = 0$ в силу (2.6) и (2.7). Таким образом, следующее утверждение является некоторым обобщением оценки теоремы 2.8 для скорости в случае отсутствия микромасштабной “завихренности” в правой части системы уравнений из (2.15).

ТЕОРЕМА 2.11. *Предположим, что $G(t, x, y) \in L^1(0, T; L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R}))$, $\nabla_x G \in L^1(0, T; L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R})^n)$ и $F = \nabla_y G(t, x, y)$. Пусть u – решение задачи (2.17), удовлетворяющее неравенству (2.18). Тогда найдется такое положительное ε_* , что для всех ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, выполняется оценка*

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \leq C\varepsilon^2,$$

где постоянная C не зависит от ε и ν .

Это утверждение в определенном смысле является асимптотическим аналогом теоремы Лагранжа – микромасштабная потенциальность правой части системы уравнений из (2.15) приводит к потенциальности и даже асимптотической малости “слабых” решений при любой вязкости. Следуя [1], [6], можно определить такое $p \in W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)/\mathbb{R})$, что (u, p) удовлетворяет системе уравнений Навье–Стокса (2.15) в смысле распределений, где u удовлетворяет (2.17) и (2.18). Однако в условиях теорем 2.10 или 2.11 удается оценить соответствующую норму p только при дополнительных предположениях об асимптотическом поведении параметров ε и ν . Такие оценки приведены в § 5.

8. Вопросы осреднения задачи (2.1) для более общей системы, уравнения которой содержат периодические, быстроосциллирующие коэффициенты и в левых частях, рассматривались в работах [7]–[11]. Алгоритм построения начальных слагаемых (первого порядка) асимптотики решений такой задачи при $\nu = \varepsilon^2$ и утверждения о сходимости решений приведены в книге [8]. Случай произвольной малой вязкости исследован в [10], где были выделены условия (1.1)–(1.3) и доказаны соответствующие оценки точности, приведенные и в работе [11], а в случае нулевой вязкости такие оценки доказаны в [9]. Результаты работ [9]–[11] содержатся и в диссертации [12]. Близкие задачи с быстроосциллирующими коэффициентами и произвольной малой вязкостью (или малым коэффициентом сжимаемости) рассматривались также в работах [13]–[15].

Таким образом, теоремы 2.1–2.3 доказаны фактически в [10] и приведены здесь для пояснения одного из возможных подходов к задаче (2.1) с двумя малыми параметрами ν и ε , теорема 2.4 доказана в [9]. Следует только отметить, что в этих работах система уравнений из (2.1) записывалась в эквивалентном виде как гиперболическая система уравнений, получаемая исключением (с помощью дифференцирования по t) функции p из (2.1). Методы работ [9] и [10] с незначительными изменениями оказались применимыми и для доказательства утверждений, сформулированных в настоящем параграфе (доказательства приведены в § 5). В этих доказательствах существенно используется вид (главных слагаемых) асимптотик решений, построенных в [9] и [10].

Некоторые подробности о методе построения таких асимптотик можно найти и в работе [16], где рассматривались эллиптические уравнения произвольного порядка и использовался аналогичный подход. Основная часть утверждений настоящей работы была анонсирована в [17].

9. Задача (2.12) с одним малым параметром ν при $m_\varepsilon = E$ (где E обозначает единичную $(n \times n)$ -матрицу) исследовалась в работе [5], где доказаны утверждения о слабой сходимости решений этой задачи к решениям задачи (2.13) (в которой $M = E$ в соответствии с (2.4)). Задача (2.1) при $m_\varepsilon = E$ и $k_\varepsilon = 1$ рассматривалась в работе [18], где изучены спектральные свойства оператора, соответствующего стационарному варианту такой задачи. При фиксированном ν такой оператор является эллиптическим по Дугласу–Ниренбергу.

Уравнения задачи (2.12) (и задачи (2.1)) имеют малый параметр при старших производных, и поэтому граничные условия в задачах (2.12) и (2.13) (соответственно, в (2.1) и (2.3)) являются существенно различными, что приводит к необходимости построения погранслоевых слагаемых (которые принято называть *параболическим погранслоем*) в асимптотике решений для получения соответствующих оценок точности (даже в случае $m_\varepsilon = E$). Такие погранслоевые слагаемые (первого порядка) для задачи (2.12) при $m_\varepsilon = E$ приведены в работе [19], где отмечена естественность таких слагаемых с физической точки зрения. Однако соответствующие оценки точности не доказывались в этой работе, где использовались также разложения Тейлора вблизи границы, которые проблематично обосновать для задачи (2.12). Для задач осреднения такие погранслоевые слагаемые построены и обоснованы (в том смысле, что доказаны соответствующие оценки точности) в работе [10]. Некоторые подробности о построении таких погранслоевых слагаемых и доказательствах оценок точности можно найти и в работе [20], где рассматривались параболические уравнения с двумя малыми параметрами и использовались аналогичные методы.

Проблема исследования погранслоевых явлений для задачи (2.15) с одним малым параметром ν (например, при $F_\varepsilon = F(t, x)$) достаточно хорошо и давно известна в гидромеханике, где разработаны и соответствующие методы рассмотрения этой проблемы (теория пограничного слоя). Однако строгий математический подход к этой проблеме развит, по видимому, только для $n = 2$ и при дополнительных предположениях об асимптотическом поведении решений этой задачи (подробности можно найти в [21]). Эта проблема не возникает в условиях теорем 2.10 и 2.11, поскольку фактически $\nu = 0$ (в первом приближении).

Проблема возникновения осцилляции решений достаточно хорошо известна в вычислительной математике. При расчетах некоторых решений задачи (2.15) со все меньшей и меньшей вязкостью может наступить момент, когда такие решения становятся осциллирующими и не ясно, является ли это результатом накопления вычислительной погрешности и неустойчивости алгоритма или расчеты приводят к решениям, моделирующим турбулентность. Однако даже в линейном случае при очень малой вязкости микромасштабная “завихренность” погрешности вполне может приводить к развитию осцилляций решений (в соответствии с теоремой 2.3), а оценка теоремы 2.10 поясняет отсутствие осцилляции решений при не слишком малой вязкости, даже если правые части системы уравнений из (2.15) являются осциллирующими (с нулевым средним).

10. В литературе по физике можно встретить следующий метод рассмотрения задачи (2.1). При малых ε и ν достаточно положить $\nu = 0$ и вычислить среднее от m_ε и k_ε для получения предельной задачи. В этом случае

утверждается, что решение (u, p) задачи (2.1) и определенная этим решением “энергия”

$$E_\varepsilon^\nu(t) \equiv \int_\Omega \frac{u^2(t)}{2} dx + \gamma \int_\Omega \frac{p^2(t)}{2} dx + \nu \int_0^t \int_\Omega (\nabla u)^2 dx d\tau + \nu\eta \int_0^t \int_\Omega (\operatorname{div} u)^2 dx d\tau \quad (2.19)$$

достаточно “близки” к решению (v, q) задачи (2.3) и соответствующей предельной “энергии”, определяемой таким решением.

Этот метод дает хорошее приближение для p в силу оценки (2.5). Однако выбор $\nu = 0$ в задаче (2.1) приводит к неудовлетворительному приближению для u в соответствии с оценками теоремы 2.4. С другой стороны, в случае, когда вязкость не является слишком малой, такой метод дает хорошее приближение и для u в силу оценок теоремы 2.1. Этот вывод отчасти парадоксален: при не слишком малой вязкости можно положить $\nu = 0$ в задаче (2.1) и вычислить среднее от исходных данных для получения задачи для хорошего приближения, а при очень малой (и даже нулевой) вязкости такая процедура может приводить к неудовлетворительному приближению для вектор-функции скорости. Впрочем, такая парадоксальность объясняется сменой типа уравнений из (2.1) с параболического на гиперболический, а слагаемое $A_\varepsilon * f$ из оценки теоремы 2.5 в некотором смысле “разглаживает” такую смену типа уравнений.

Из теоремы 2.1 выводится и следующее утверждение о близости “энергий”.

СЛЕДСТВИЕ 2.12. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1. Пусть $E_\varepsilon^\nu(t)$ определено равенством (2.19) и*

$$E_0(t) \equiv \int_\Omega \frac{v^2(t)}{2} dx + \gamma \int_\Omega \frac{q^2(t)}{2} dx, \quad (2.20)$$

где (u, p) и (v, q) являются решениями задач (2.1) и (2.3). Тогда найдутся такие положительные ε_* , ν_* и ϑ_* , что для ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, $0 < \nu \leq \nu_*$ и $0 < \varepsilon^2/\nu \leq \vartheta_*$, выполняется оценка

$$|E_\varepsilon^\nu(t) - E_0(t)| \leq C \left(\varepsilon + \sqrt{\nu} + \frac{\varepsilon^2}{\nu} \right),$$

где постоянная C не зависит от ε , ν и $t \in [0, T]$.

В общем случае корректное приближение для u содержит дополнительное быстроосциллирующее слагаемое $A_\varepsilon * f$ (определенное равенством (2.8)) в соответствии с оценками теоремы 2.5 и такие осцилляции могут влиять на распределение предельной “энергии” в силу следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 2.13. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.5, $E_\varepsilon^\nu(t)$ и $E_0(t)$ определены равенствами (2.19) и (2.20), в которых (u, p) и (v, q) являются решениями задач (2.1) и (2.3) соответственно. Пусть*

$$S(t) = S(t, x, y) = \int_0^t A(t - \tau, y) f(\tau, x) d\tau, \quad (2.21)$$

$$E_\vartheta(t) \equiv \int_\Omega \int_Y \frac{S^2(t)}{2} dy dx + \vartheta \int_0^t \int_\Omega \int_Y (\nabla S)^2 dy dx d\tau, \quad (2.22)$$

где $A(t, y)$ является решением задачи (2.7) и $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$. Тогда найдутся такие положительные ε_* и ν_* , что для всех ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ и $0 < \nu \leq \nu_*$, выполняется оценка

$$|E_\varepsilon^\nu(t) - E_0(t) - E_\vartheta(t)| \leq C(\varepsilon + \sqrt{\nu}),$$

где постоянная C не зависит от ε , ν и $t \in [0, T]$.

Оценка следствия 2.13 является равномерной по параметру $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$. Тем не менее, в случае, когда этот параметр является малым, данная оценка допускает некоторое упрощение в соответствии со следующим утверждением.

СЛЕДСТВИЕ 2.14. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.3, $E_\varepsilon^\nu(t)$ и $E_0(t)$ определены равенствами (2.19) и (2.20), в которых (u, p) и (v, q) являются решениями задач (2.1) и (2.3) соответственно. Пусть*

$$E_0^0(t) \equiv \frac{1}{2} \int_\Omega \int_Y ((m - M - (\nabla_y b)) f^{(-1)}(t))^2 dy dx, \quad (2.23)$$

где $b(y)$ является решением задачи (2.6) и $f^{(-1)}(t, x)$ определено равенством (2.9). Тогда найдутся такие положительные ε_* , ν_* и ϑ_* , что для ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, $0 < \nu \leq \nu_*$ и $0 < \nu/\varepsilon^2 \leq \vartheta_*$, выполняется оценка

$$|E_\varepsilon^\nu(t) - E_0(t) - E_0^0(t)| \leq C\left(\varepsilon + \sqrt{\nu} + \frac{\nu}{\varepsilon^2}\right),$$

где постоянная C не зависит от ε , ν и $t \in [0, T]$.

Оценка следствия 2.14 является равномерной по параметру вязкости ν при $\nu = 0$, что следует непосредственно из теоремы 2.4. Кроме того, оценки следствий 2.12–2.14 являются равномерными по параметру γ при $\gamma = 0$, например, в соответствии со следующим утверждением.

СЛЕДСТВИЕ 2.15. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.8, $E_\varepsilon^\nu(t)$ и $E_0(t)$ определены равенствами (2.19) и (2.20), в которых $\gamma = 0$, $\eta = 0$, (u, p) и (v, q) являются решениями задач (2.12) и (2.13) соответственно. Пусть $E_\vartheta(t)$ определено равенством (2.22). Тогда найдутся такие положительные ε_* и ν_* , что для всех ε и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ и $0 < \nu \leq \nu_*$, выполняется оценка*

$$|E_\varepsilon^\nu(t) - E_0(t) - E_\vartheta(t)| \leq C(\varepsilon^{3/4} + \sqrt{\nu}),$$

где постоянная C не зависит от ε , ν и $t \in [0, T]$.

Оценка следствия 2.15 является равномерной по параметру $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$. Поэтому, используя утверждения 2.6 и 2.7, отсюда несложно вывести оценки, аналогичные оценкам следствий 2.12 и 2.14 при малых и больших значениях ϑ . Кроме того, из оценок теорем 2.10 или 2.11 фактически следует, что “энергия” решений задачи (2.17) является асимптотически малой при малых ε и ν в предположениях этих теорем.

Отметим также, что представленный “физический” метод рассмотрения задачи (2.1) является все же корректным, но в “слабом” смысле в соответствии со следующим утверждением.

СЛЕДСТВИЕ 2.16. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.5. Тогда*

$$u \rightharpoonup v \text{ слабо-* в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow 0,$$

где (u, p) и (v, q) – решения задач (2.1) и (2.3) соответственно.

Аналогичное утверждение выполнено и для задачи (2.12). На самом деле утверждения о сходимости выполнены при более общих предположениях о гладкости исходных данных в задачах (2.1) и (2.12), например в соответствии со следующим утверждением.

СЛЕДСТВИЕ 2.17. *Пусть выполнены условия теоремы 2.5, в которых вместо гладкости функций f и g предполагается только выполнение включений $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)$ и $g \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$. Тогда*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - A_\varepsilon * f\|_{L^1(\Omega)^n} + \max_{0 \leq t \leq T} \|p - q\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow 0,$$

где (u, p) и (v, q) – решения задач (2.1) и (2.3) соответственно.

Отметим в заключение, что появление быстроосциллирующих слагаемых в сильном пределе некоторой последовательности (например, решений задачи (2.1)) и исчезновение таких слагаемых в слабом пределе принято называть *осцилляционным эффектом*. Явному описанию таких эффектов для решений задач (2.1) и (2.12) фактически и посвящена данная работа. Исследование таких эффектов для решений задачи (2.15) представляет также несомненный интерес. Однако в этом направлении здесь приведены только условия, гарантирующие отсутствие таких эффектов в соответствии с оценками теорем 2.10 или 2.11.

Доказательства следствий 2.12–2.17, как и доказательства остальных теорем, приведенных в настоящем параграфе, даны в § 5. Некоторые вспомогательные утверждения, используемые в этих доказательствах, приведены и доказаны в § 3, 4.

§ 3. Построение погранслойных слагаемых

Далее C обозначает, возможно, различные положительные постоянные, не зависящие от параметров ε , ν и ϑ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, $\nu \in (0, \nu_*]$ и $\vartheta \in (0, \vartheta_*]$ для подходящих положительных ε_* , ν_* и ϑ_* , значения которых определяются явно или ясны из дальнейшего контекста (в данный момент можно считать, что $\varepsilon_* = \varepsilon_0 \leq 1$, $\nu_* = \nu_0 \leq 1$ и $\vartheta_* = 1$, где ε_0 определено перед формулировкой условий (1.1)–(1.3), а ν_0 – перед формулировкой теоремы 2.5).

Следуя, например, [1], [18], определим решение задачи (2.1) как элемент $(u, p) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^n) \times L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, удовлетворяющий для каждого $(\varphi, \psi) \in H_0^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega)$ и почти всех $t \in (0, T)$ интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u'_t, \varphi) dx + \gamma \int_{\Omega} p'_t \psi dx + \nu \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \varphi) dx + \nu \eta \int_{\Omega} \operatorname{div} u (\operatorname{div} \varphi) dx \\ - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi dx + \int_{\Omega} \psi \operatorname{div} u dx = \int_{\Omega} (m_\varepsilon f, \varphi) dx + \int_{\Omega} k_\varepsilon g \psi dx \end{aligned} \quad (3.1)$$

и начальному условию $(u, p)|_{t=0} = 0$ в $L^2(\Omega)^{n+1}$. Здесь и далее $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение n -векторов или $(n \times n)$ -матриц.

Существование и единственность (для фиксированных ν и ε) решения задачи (3.1) следует из результатов, приведенных в [18] (см. также [8, гл. X, § 2]). Кроме того, выполнение тождества (3.1) подразумевает, что уравнения из (2.1) выполнены в смысле распределений для почти всех $t \in (0, T)$, и поэтому $u'_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^n)$ и $p'_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Таким образом, имеем $(u, p) \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^{n+1})$ (см., например, [1, гл. 3, лемма 1.2]), и поэтому корректно определена “энергетическая” норма

$$\mathcal{E}(u, p) \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \gamma \max_{0 \leq t \leq T} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2. \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3.1. Для решения задачи (3.1) выполнено неравенство

$$\mathcal{E}(u, p) \leq C(\|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая $(\varphi, \psi) = (u, p)$ в тождестве (3.1), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{u^2}{2} \right)'_t dx + \gamma \int_{\Omega} \left(\frac{p^2}{2} \right)'_t dx + \nu \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla u) dx + \nu \eta \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} (m_\varepsilon f, u) dx + \int_{\Omega} k_\varepsilon g p dx. \end{aligned}$$

Интегрируя это равенство по t и используя (2.2), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u^2 dx + \gamma \int_{\Omega} p^2 dx + \nu \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx d\tau \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} (|(f, u)| + |gp|) dx d\tau \right) \\ & \leq C \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)} \|u\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)} + C \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} \|p\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где учтено неравенство Гёльдера. Обозначим последние два слагаемых в неравенстве (3.3) через I и для оценки этих слагаемых воспользуемся неравенством Юнга, записанным в виде $ab \leq (\delta/2)a^2 + b^2/(2\delta)$ для положительных a, b и произвольного положительного δ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} I & \leq C \left(\frac{\delta_1}{2} \|u\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)}^2 + \frac{1}{2\delta_1} \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma\delta_2}{2} \|p\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2\gamma\delta_2} \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Выберем положительные $\delta_1 = \delta_2 = 1/C$ в этом неравенстве, где C обозначает постоянную из неравенства (3.3). Тогда, вычисляя максимум по $t \in [0, T]$ в неравенстве (3.3) и учитывая равномерную непрерывность функций $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)^n}$ и $\|p(t)\|_{L^2(\Omega)}$ на отрезке $[0, T]$, получаем

$$\mathcal{E}(u, p) \leq \frac{\mathcal{E}(u, p)}{2} + C(\|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2),$$

что завершает доказательство леммы.

В приведенном доказательстве и в дальнейшем используется (простое, но полезное) равенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|p\|_{L^2(\Omega)} \right)^2,$$

непосредственно проверяемое для $p \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ (соответственно, для u). Кроме того, далее часто применяются неравенства

$$a^2 + b^2 \leq (a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2,$$

выполненные для положительных a и b .

При доказательстве леммы 3.1 использован известный метод получения априорных оценок (см., например, [1], [3]). Такой метод является полезным для выяснения зависимости соответствующих постоянных в энергетическом неравенстве от параметров ε и ν , что применяется в дальнейшем. Кроме того, используя такие оценки, несложно привести непосредственное доказательство (например, методом Фаддеева–Галёркина; см. [1]) утверждения о существовании единственного решения задачи (3.1). Для задачи (2.12) такая оценка доказана, например, в [1] и формулируется следующим образом.

ЛЕММА 3.2. *Для решения задачи (2.12) выполнено неравенство*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|p\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)/\mathbb{R})}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \leq C \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2.$$

Граничные условия в задачах (2.1) и (2.3) являются существенно различными, что приводит к необходимости исследования асимптотики для малых ν (при $\nu \in (0, \nu_*]$, где значение ν_* , возможно, будет уменьшено при формулировке соответствующих оценок) решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} U'_t - \nu \Delta U - \nu \eta \nabla \operatorname{div} U + \nabla P &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \gamma P'_t + \operatorname{div} U &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ U|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \quad P|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ U &= v \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T); \end{aligned} \tag{3.5}$$

здесь v обозначает решение задачи (2.3), которое является гладким в силу предположений для исходных данных в задаче (2.1).

Отметим, что решение задачи (3.5) существует и имеет конечную энергетическую норму $\mathcal{E}(U, P)$, определенную в (3.2). Действительно, учитывая (2.3) и (3.5), имеем для $W = U - v$ и $Q = P - q$ следующую задачу:

$$\begin{aligned} W'_t - \nu \Delta W - \nu \eta \nabla \operatorname{div} W + \nabla Q &= \nu \Delta v + \nu \eta \nabla \operatorname{div} v - Mf \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \gamma Q'_t + \operatorname{div} W &= -Kg \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ W|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \quad Q|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ W &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Как уже отмечалось, задача (3.6) однозначно разрешима, и поэтому разрешима и задача (3.5). Кроме того, из леммы 3.1 следует, что $\mathcal{E}(W, Q) \leq C$, поскольку исходные данные в задаче (3.6) являются гладкими. Тогда из неравенства треугольника и гладкости v, q заключаем, что $\mathcal{E}(U, P) \leq C$.

При построении асимптотики решения задачи (3.5) и доказательстве соответствующих оценок будем предполагать для краткости, что $n = 3$, и рассматривать $\partial\Omega$ как гладкое замкнутое многообразие. Отметим, что случай $n = 3$ является наиболее интересным с физической точки зрения.

Таким образом, найдется такое конечное разбиение единицы $\{\varphi^\kappa\}$ на $\partial\Omega$ (где $\sum_\kappa \varphi^\kappa = 1$ с конечной суммой по κ), что гиперповерхность

$$S^\kappa = \partial\Omega \cap \operatorname{supp} \varphi^\kappa$$

(для каждого κ) задается функциями $s_i = s_i^\kappa(z_1, z_2)$, $i = 1, 2, 3$, параметров z_1 и z_2 , выбранных так, что $z_1 = \text{const}$ и $z_2 = \text{const}$ являются линиями кривизны. Здесь следует также писать $z_1 = z_1^\kappa$ и $z_2 = z_2^\kappa$, но иногда для краткости индекс κ будет опускаться. Определим $z' = (z_1, z_2)$ и напомним, что $N = N(z')$ обозначает внешнюю нормаль для S^κ .

Следуя, например, [22], введем в окрестности S^κ координаты z' , z_3 , где z_3 является расстоянием от точки $x \in \Omega$ до S^κ . Тогда найдется такое положительное z_0 , что замена координат

$$x = s(z') - z_3 N(z') \quad (3.7)$$

определяет диффеоморфизм при $0 \leq z_3 \leq z_0$ и $z' \in \text{supp } \varphi^\kappa$ (где $\text{supp } \varphi^\kappa$ обозначает носитель функции φ^κ). Известно [22], что

$$\frac{\partial N}{\partial z_1} = k_1 \frac{\partial s}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial N}{\partial z_2} = k_2 \frac{\partial s}{\partial z_2},$$

где k_1 и k_2 обозначают главные нормальные кривизны для S^κ . Учитывая эти равенства, для коэффициентов Ламе замены координат (3.7) имеем

$$\begin{aligned} H_1 &= \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial z_1} \right)^2 \right)^{1/2} = H_1^0 (1 - z_3 k_1), \\ H_2 &= H_2^0 (1 - z_3 k_2), \quad H_3 = |N| = 1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $H_i^0 = ((\partial s_1 / \partial z_i)^2 + (\partial s_2 / \partial z_i)^2 + (\partial s_3 / \partial z_i)^2)^{1/2}$ – коэффициенты Ламе замены координат (3.7) на S^κ при $i = 1, 2$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} v^\kappa &= \varphi^\kappa v|_{\partial\Omega} = (\varphi^\kappa v_1|_{\partial\Omega}, \varphi^\kappa v_2|_{\partial\Omega}, \varphi^\kappa v_3|_{\partial\Omega}), \\ v_0^\kappa &= (v_1^\kappa, v_2^\kappa) = (\varphi^\kappa v_1|_{\partial\Omega}, \varphi^\kappa v_2|_{\partial\Omega}), \\ \sigma^2 &= 4\nu, \end{aligned} \quad (3.9)$$

напомним, что $v^\kappa = (v_1^\kappa, v_2^\kappa, 0)$ в координатах z' , z_3 в силу граничных условий из (2.3). Определим для $i = 1, 2$ функцию $w_i^\kappa = w_i^\kappa(t, z_3)$ как решение следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i^\kappa}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{4} \frac{\partial^2 w_i^\kappa}{\partial z_3^2} &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+ \times (0, T), \\ w_i^\kappa|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+, \quad w_i^\kappa = v_i^\kappa \quad \text{на } \mathbb{R}_0 \times (0, T), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где z' (от которого зависит v_i^κ) рассматривается как параметр, $\mathbb{R}_+ = \{z_3 \in \mathbb{R}: z_3 > 0\}$ и $\mathbb{R}_0 = \{z_3 \in \mathbb{R}: z_3 = 0\}$. Таким образом, функции w_i^κ , $i = 1, 2$, определены на $\mathbb{R}_+^3 \times (0, T)$, где $\mathbb{R}_+^3 = \{z', z_3 \in \mathbb{R}^3: z_3 > 0\}$. В соответствии с [23] функции w_i^κ , удовлетворяющие (3.10) при $i = 1, 2$, принято называть функциями параболического погранслоя.

Известно, что решение задачи (3.10) определяется равенством

$$w_i^\kappa = \frac{z_3}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v_i^\kappa(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{z_3^2}{\sigma^2(t-\tau)}\right\} d\tau \quad (3.11)$$

(см., например, [24, § 16]), где $v_i^\kappa(t) = v_i^\kappa(t, z')$ для $i = 1, 2$. Известно также, что равенство (3.11) определяет единственное (достаточно) гладкое (по t , z_3 и по z'

как параметру при $t > 0$) решение задачи (3.10). Кроме того, такое решение имеет конечную “энергетическую” норму

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|w_i^\kappa\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \nu \left\| \frac{\partial w_i^\kappa}{\partial z_3} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^3))}^2 \leq C. \quad (3.12)$$

Действительно, рассмотрим функции $\tilde{v}_i = \eta^\kappa \varphi^\kappa v_i$, $i = 1, 2$, где $\eta^\kappa = \eta^\kappa(z_3)$ обозначает гладкую срезающую функцию, удовлетворяющую равенствам $\eta^\kappa = 1$ при $z_3 \leq z_0/2$ и $\eta^\kappa = 0$ при $z_3 \geq z_0$. Тогда $v_i^\kappa = \tilde{v}_i|_{S^\kappa}$ и функция $\tilde{w}_i = w_i^\kappa - \tilde{v}_i$ для $i = 1, 2$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial z_3^2} &= \nu \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial z_3^2} - \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} \quad \text{в } \mathbb{R}_+ \times (0, T), \\ \tilde{w}_i|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+, \quad \tilde{w}_i = 0 \quad \text{на } \mathbb{R}_0 \times (0, T). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Таким образом, повторяя доказательство леммы 3.1 и интегрируя соответствующее неравенство (аналогичное (3.3)) по параметру z' , имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{w}_i\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 + \nu \left\| \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial z_3} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^3))}^2 \leq C,$$

поскольку исходные данные в задаче (3.13) являются гладкими и финитными по $z' \in \text{supp } \varphi^\kappa$, что доказывает неравенство (3.12). Аналогично проверяется, что неравенство (3.12) выполнено и для производных (произвольного порядка) от функции w_i^κ по параметру z' .

Для дальнейшего удобно преобразовать представление (3.11) следующим образом:

$$\begin{aligned} w_i^\kappa &= \frac{z_3}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^t \zeta^{-3/2} v_i^\kappa(t - \zeta, z') \exp\left\{-\frac{z_3^2}{\sigma^2\zeta}\right\} d\zeta \\ &= \frac{2z_3}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{1/\sqrt{t}}^\infty v_i^\kappa(t - \xi^{-2}, z') \exp\left\{-\frac{z_3^2\xi^2}{\sigma^2}\right\} d\xi \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z_3/(\sigma\sqrt{t})}^\infty v_i^\kappa\left(t - \left(\frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2 \frac{t}{\alpha^2}, z'\right) \exp\{-\alpha^2\} d\alpha, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где произведены замены координат $\zeta = t - \tau$, $\xi = \zeta^{-1/2}$ и $\alpha = z_3\xi/\sigma$. Учитывая представление (3.14), для $i = 1, 2$ введем обозначение

$$\widetilde{W}_i^\kappa(t, z', \beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\beta^\infty v_i^\kappa\left(t - \beta^2 \frac{t}{\alpha^2}, z'\right) \exp\{-\alpha^2\} d\alpha. \quad (3.15)$$

Тогда $w_i^\kappa = \widetilde{W}_i^\kappa(t, z', z_3/(\sigma\sqrt{t}))$ и непосредственно из (3.14) следует, что

$$|w_i^\kappa| \leq c(z') \operatorname{erfc}\left(\frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}}\right) \equiv c(z') \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z_3/(\sigma\sqrt{t})}^\infty \exp\{-\alpha^2\} d\alpha, \quad (3.16)$$

где $c(z')$ является ограниченной функцией с компактным носителем и $\operatorname{erfc}(\beta)$ обозначает специальную функцию, которую принято называть дополнительным (или кратным нулевого порядка) *интегралом вероятностей* (см., например, [25, гл. 7, § 7.2]). Известно [25], что $\operatorname{erfc}(0) = 1$. Отметим также, что оценка (3.16) является фактически следствием принципа максимума, поскольку

$\operatorname{erfc}(z_3/(\sigma\sqrt{t}))$ является решением задачи (3.10) в случае, когда $v_i^\kappa = 1$ для $i = 1, 2$ (см., например, [20, § 6]). Кроме того, оценка (3.16) выполнена и для производных (произвольного порядка) от функций w_i^κ , $i = 1, 2$, по параметру z' , поскольку функции v_i^κ , $i = 1, 2$, являются гладкими.

Учитывая (3.15), обозначим $\widetilde{W}_0^\kappa = (\widetilde{W}_1^\kappa(t, z', \beta), \widetilde{W}_2^\kappa(t, z', \beta))$ и определим

$$\operatorname{Div} \widetilde{W}_0^\kappa = \frac{1}{H_1^0 H_2^0} \left(\frac{\partial(\widetilde{W}_1^\kappa H_2^0)}{\partial z_1} + \frac{\partial(\widetilde{W}_2^\kappa H_1^0)}{\partial z_2} \right) \equiv D(t, z', \beta), \quad (3.17)$$

$$\widetilde{W}_3^\kappa(t, z', \beta) = \int_\beta^\infty D(t, z', \alpha) d\alpha. \quad (3.18)$$

Отметим, что при $\beta = 0$ равенство (3.17) задает дивергенцию на поверхности S^κ от (двумерной) вектор-функции $v_0^\kappa = (v_1^\kappa, v_2^\kappa)$ из (3.9) в координатах z' (см., например, [26]). Соответственно, $\widetilde{W}_3^\kappa(t, z', 0)$ задает дивергенцию на этой поверхности от (двумерной) вектор-функции $\widehat{W}_0^\kappa = (\widehat{W}_1^\kappa, \widehat{W}_2^\kappa)$ с компонентами

$$\widehat{W}_1^\kappa(t, z') = \int_0^\infty \widetilde{W}_1^\kappa(t, z', \alpha) d\alpha, \quad \widehat{W}_2^\kappa(t, z') = \int_0^\infty \widetilde{W}_2^\kappa(t, z', \alpha) d\alpha. \quad (3.19)$$

Кроме того, непосредственно из (3.15), (3.17) и (3.18) следует, что

$$\left| \widetilde{W}_3^\kappa \left(t, z', \frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right| \leq c(z') i^1 \operatorname{erfc} \left(\frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}} \right) \equiv c(z') \int_{z_3/(\sigma\sqrt{t})}^\infty \operatorname{erfc}(\alpha) d\alpha, \quad (3.20)$$

где $c(z')$ является ограниченной функцией с компактным носителем и $i^1 \operatorname{erfc}(\beta)$ обозначает специальную функцию, которую принято называть кратным (первого порядка) *интегралом вероятностей* (см., например, [25]). Известно [25], что $i^1 \operatorname{erfc}(0) = (2\Gamma(3/2))^{-1}$, где $\Gamma(\beta)$ обозначает гамма-функцию. Оценка (3.20) выполнена также и для производных (произвольного порядка) от функции $\widetilde{W}_3^\kappa(t, z', z_3/(\sigma\sqrt{t}))$ по параметру z' .

Далее, определим вектор-функцию W^κ с компонентами

$$\begin{aligned} W_1^\kappa &= \frac{H_2^0}{H_2} \widetilde{W}_1^\kappa \left(t, z', \frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}} \right), \\ W_2^\kappa &= \frac{H_1^0}{H_1} \widetilde{W}_2^\kappa \left(t, z', \frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}} \right), \\ W_3^\kappa &= \sigma\sqrt{t} \frac{H_1^0 H_2^0}{H_1 H_2} \widetilde{W}_3^\kappa \left(t, z', \frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

В соответствии с определениями вектор-функция W^κ является соленоидальной. Действительно, используя формулу для дивергенции в координатах z', z_3 (см., например, [26]), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} W^\kappa &= \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(W_1^\kappa H_2)}{\partial z_1} + \frac{\partial(W_2^\kappa H_1)}{\partial z_2} + \frac{\partial(W_3^\kappa H_1 H_2)}{\partial z_3} \right) \\ &= \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(\widetilde{W}_1^\kappa H_2^0)}{\partial z_1} + \frac{\partial(\widetilde{W}_2^\kappa H_1^0)}{\partial z_2} + \sigma\sqrt{t} \frac{\partial(\widetilde{W}_3^\kappa H_1^0 H_2^0)}{\partial z_3} \right) \\ &= \frac{H_1^0 H_2^0}{H_1 H_2} \left(D \left(t, z', \frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}} \right) + \sigma\sqrt{t} \frac{\partial(\widetilde{W}_3^\kappa)}{\partial z_3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где использовано определение (3.17) и равенство (3.18).

Функция $\text{Div } \widehat{W}_0^\kappa = \widetilde{W}_3^\kappa(t, z', 0)$ определена и финитна по $z' \in \text{supp } \varphi^\kappa$ в соответствии с (3.9) и (3.18). Доопределяя эту функцию нулем, можно считать, что она определена и является гладкой на $\partial\Omega \times (0, T)$.

Пусть вектор-функция $l^\kappa = l^\kappa(t, x)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \text{div } l^\kappa &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ l_\tau^\kappa &= 0, \quad (l^\kappa, N) = \text{Div } \widehat{W}_0^\kappa \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $t \in (0, T)$ рассматривается как параметр и l_τ обозначает касательные компоненты вектор-функции $l^\kappa(t, x)$ на $\partial\Omega \times (0, T)$ (см., например, [1], [26]). Фактически, граничные условия в (3.23) являются условиями Дирихле, которые можно записать в виде

$$l^\kappa(t, z', z_3) = (0, 0, \text{Div } \widehat{W}_0^\kappa) \quad \text{на } S^\kappa \times (0, T) \quad (3.24)$$

(в координатах z', z_3) и $l^\kappa(t, x) = 0$ на $(\partial\Omega \setminus S^\kappa) \times (0, T)$, поскольку z' -носитель $\widehat{W}_0^\kappa$ принадлежит S^κ . Однако, в отличие от представления граничных условий в (3.23), представление (3.24) может не быть инвариантным относительно замены координат.

Известно [3], [27], что задача (3.23) разрешима, поскольку

$$\int_{\partial\Omega} (l^\kappa, N) ds = \int_{S^\kappa} \text{Div } \widehat{W}_0^\kappa ds = 0$$

в силу формулы Стокса (см., например, [1]). Кроме того, гладкость функции $\text{Div } \widehat{W}_0^\kappa$ подразумевает гладкость вектор-функции l^κ (см. [27], [28]).

Таким образом, можно считать, что вектор-функция

$$V^\kappa = (\eta^\kappa W_1^\kappa - \sigma\sqrt{t}l_1^\kappa, \eta^\kappa W_2^\kappa - \sigma\sqrt{t}l_2^\kappa, \eta^\kappa W_3^\kappa - \sigma\sqrt{t}l_3^\kappa) \quad (3.25)$$

определена на $\Omega \times (0, T)$ и удовлетворяет граничным условиям

$$V^\kappa = (v_1^\kappa, v_2^\kappa, 0) = (\varphi^\kappa v_1|_{\partial\Omega}, \varphi^\kappa v_2|_{\partial\Omega}, 0) \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.26)$$

Напомним, что $\eta^\kappa = \eta^\kappa(z_3)$ обозначает гладкую срезающую функцию ($\eta^\kappa = 1$ при $z_3 \leq z_0/2$ и $\eta^\kappa = 0$ при $z_3 \geq z_0$).

Учитывая (3.22), (3.23) и формулу Лейбница, имеем

$$\text{div } V^\kappa = \eta^\kappa \text{div } W^\kappa + W^\kappa \nabla \eta^\kappa = W_3^\kappa \frac{\partial \eta^\kappa}{\partial z_3}. \quad (3.27)$$

Известно [25], что функции $\text{erfc}(\beta)$ и $i^1 \text{erfc}(\beta)$ являются монотонно убывающими на $[0, \infty)$ и допускают асимптотические разложения

$$\text{erfc}(\beta) = \frac{e^{-\beta^2}}{\beta\sqrt{\pi}}(1 + O(\beta^{-2})), \quad i^1 \text{erfc}(\beta) = \frac{e^{-\beta^2}}{2\beta^2\sqrt{\pi}}(1 + O(\beta^{-2})) \quad (3.28)$$

при $\beta \rightarrow \infty$. Следовательно, найдутся такие положительные постоянные C , ϱ и σ_0 , что

$$|\text{div } V^\kappa| \leq \sigma^2 C e^{-(\varrho z_0/\sigma)^2} \quad \text{при } 0 < \sigma \leq \sigma_0 \quad (3.29)$$

в соответствии с (3.20) и (3.27), поскольку носитель функции $\partial\eta^\kappa/\partial z_3$ принадлежит отрезку $[z_0/2, z_0]$ в силу определений. Отметим, что постоянные в оценке (3.29) не зависят от σ , но зависят от T .

Таким образом, функция $\operatorname{div} V^\kappa$ является экспоненциально (и даже субэкспоненциально) малой в равномерной норме при малых $\sigma = 2\sqrt{\nu}$. Проверяется также, что оценка (аналогичная оценке) (3.29) выполнена и для производных по z' (произвольного порядка) и по z_n (по крайней мере, первого порядка в силу (3.18)) от функции $\operatorname{div} V^\kappa$. Кроме того, из (3.16), (3.20) и (3.21) следует, что компоненты вектор-функции W^κ также являются экспоненциально малыми (вместе с соответствующими производными) в равномерной норме при $z_3 \geq z_0/2$ и $\sigma \in (0, \sigma_0]$. Фактически, здесь можно фиксировать $\nu_* = \min(\nu_0, \sigma_0^2/4)$, используемое в этом параграфе и определяемое в соответствии с (3.9) и (3.29).

ЛЕММА 3.3. Пусть (U, P) является решением задачи (3.5) и $V = \sum V^\kappa$, где V^κ определено в (3.25). Тогда для всех $\nu \in (0, \nu_*]$ выполняется оценка

$$\mathcal{E}(U - V, P) \leq C\nu,$$

где постоянная C не зависит от ν и использовано обозначение (3.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $R = U - V$. Тогда (R, P) является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} R'_t - \nu\Delta R - \nu\eta\nabla\operatorname{div} R + \nabla P &= \mathcal{F} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \gamma P'_t + \operatorname{div} R &= \mathcal{G} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ R|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \quad P|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ R &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \tag{3.30}$$

где учтены равенства из (3.10), (3.24) и (3.26) и введены обозначения

$$\mathcal{F} = \nu\Delta V + \nu\eta\nabla\operatorname{div} V - V'_t \tag{3.31}$$

и $\mathcal{G} = -\operatorname{div} V$. Поэтому в соответствии с доказательством леммы 3.1 для завершения доказательства леммы достаточно проверить, что

$$\|\mathcal{F}\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)}^2 \leq C\nu \tag{3.32}$$

и $\|\mathcal{G}\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C\nu$. Последнее неравенство, очевидно, выполнено в силу оценки (3.29). Из оценки (3.29) (и соответствующих оценок для производных) также следует, что слагаемое из определения (3.31), содержащее $\operatorname{div} V$, является экспоненциально малым при малых σ и не существенным при доказательстве неравенства (3.32). Таким образом, при доказательстве неравенства (3.32) можно считать, что это слагаемое равно нулю.

По определению $V = \sum V^\kappa$ (с конечной суммой по κ). Следовательно, при доказательстве неравенства (3.32) можно считать, что $V = V^\kappa$ (для фиксированного κ) в определении (3.31). Более того, при доказательстве этого неравенства можно считать, что $V = \eta^\kappa W^\kappa$ в (3.31), поскольку вектор-функция l^κ является гладкой и входит с множителем $\sigma = 2\sqrt{\nu}$ в определение (3.25). Здесь следует отметить, что вектор-функция

$$(\sigma\sqrt{t}l^\kappa)'_t = (\sigma\sqrt{t})(l^\kappa)'_t + \frac{\sigma}{2\sqrt{t}}l^\kappa, \tag{3.33}$$

входящая слагаемым в $\mathcal{F}$, имеет интегрируемую на $(0, T)$ особенность.

Вектор-функция $\eta^\kappa W^\kappa$ определена при $0 \leq z_3 \leq z_0$ и $z' \in \text{supp } \varphi^\kappa$. Поэтому можно использовать координаты z', z_3 в определении (3.31). В соответствии с [22] в координатах z', z_3 имеем $\Delta = \Delta' + \partial^2 / \partial z_3^2$, где Δ' обозначает дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами (не зависящими от ν) второго порядка по z' и первого по z_3 . Таким образом, с точностью до несущественных слагаемых равенство (3.31) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \nu \eta^\kappa (\Delta W^\kappa) - \eta^\kappa (W^\kappa)'_t + \nu [\Delta, \eta^\kappa] W^\kappa \\ &= \eta^\kappa \left(\nu \frac{\partial^2 W^\kappa}{\partial z_3^2} - \frac{\partial W^\kappa}{\partial t} \right) + \nu \eta^\kappa (\Delta' W^\kappa) + \nu [\Delta, \eta^\kappa] W^\kappa, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $[\Delta, \eta^\kappa]$ обозначает коммутатор дифференциального оператора Δ и оператора умножения на срезающую функцию $\eta^\kappa = \eta^\kappa(z_3)$. Непосредственно проверяется, что этот коммутатор является дифференциальным оператором с гладкими коэффициентами первого порядка по z_3 .

Последние два слагаемых в (3.34) являются не существенными при доказательстве неравенства (3.32). Действительно, рассмотрим, например, последнее слагаемое. Ясно, что норма $\|[\Delta, \eta^\kappa] W^\kappa\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^3)}$ мажорируется нормой $\|[\Delta, \eta^\kappa] W^\kappa\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}_+^3)^3)}$, поскольку функция $\eta^\kappa = \eta^\kappa(z_3)$ равна нулю при $z_3 \geq z_0$ и замена координат (3.7) определяет диффеоморфизм. Подходящие оценки норм $\|[\Delta, \eta^\kappa] W_i^\kappa\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}_+^3)^3)}$ при $i = 1, 2$ следуют непосредственно из неравенства (3.12) для $w_i^\kappa = \widetilde{W}_i^\kappa(t, z', z_3/(\sigma\sqrt{t}))$ (и соответствующих неравенств для производных). Кроме того, учитывая (3.18), (3.21) и формулу Лейбница, имеем

$$\frac{\partial \widetilde{W}_3^\kappa}{\partial z_3} = \frac{H_1^0 H_2^0}{H_1 H_2} D\left(t, z', \frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \sigma\sqrt{t} \frac{\partial(H_1^0 H_2^0 / H_1 H_2)}{\partial z_3} \widetilde{W}_3^\kappa\left(t, z', \frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad (3.35)$$

где подходящая оценка нормы предпоследнего слагаемого также следует из неравенства (3.12), а для оценки нормы последнего слагаемого следует учесть финитность $\widetilde{W}_3^\kappa$ по z' , оценку (3.20) и неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^\infty i^1 \operatorname{erfc}\left(\frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2 dz_3 &\leq i^1 \operatorname{erfc}(0) \int_0^\infty i^1 \operatorname{erfc}\left(\frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}}\right) dz_3 \\ &= \sigma\sqrt{t} \left(2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^{-1} \int_0^\infty i^1 \operatorname{erfc}(\alpha) d\alpha = \sigma\sqrt{t} \left(2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^{-1} (4\Gamma(2))^{-1} \end{aligned} \quad (3.36)$$

(см. [25, гл. 7]), где учтено, что функция $i^1 \operatorname{erfc}(\beta)$ является положительной и монотонно убывающей, и поэтому $i^1 \operatorname{erfc}(\beta) \leq i^1 \operatorname{erfc}(0)$ для $\beta \in [0, \infty)$.

Отметим, что на самом деле последнее слагаемое из (3.34) является экспоненциально малым в равномерной норме в соответствии с (3.16), (3.20) и (3.28), поскольку функция $\partial \eta^\kappa / \partial z_3$ или $\partial^2 \eta^\kappa / \partial z_3^2$ является множителем при слагаемых из $[\Delta, \eta^\kappa] W_3^\kappa$ и имеет носитель, принадлежащий отрезку $[z_0/2, z_0]$. Однако из (3.16), (3.36) и аналогичного неравенства

$$\int_0^\infty \operatorname{erfc}\left(\frac{z_3}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2 dz_3 \leq \sigma\sqrt{t} \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\alpha) d\alpha = \sigma\sqrt{t} \left(2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^{-1} \quad (3.37)$$

следует подходящая оценка нормы предпоследнего слагаемого из (3.34).

Таким образом, с точностью до несущественных слагаемых первую компоненту вектор-функции $\mathcal{F}$ из (3.34) можно представить в виде

$$\mathcal{F}_1 = \eta^\kappa \frac{H_2^0}{H_2} \left(\nu \frac{\partial^2 \widetilde{W}_1^\kappa}{\partial z_3^2} - \frac{\partial \widetilde{W}_1^\kappa}{\partial t} \right) + \nu \eta^\kappa \left[\partial_3^2, \frac{H_2^0}{H_2} \right] \widetilde{W}_1^\kappa, \quad (3.38)$$

где $[\partial_3^2, H_2^0/H_2]$ обозначает коммутатор дифференциального оператора $\partial^2/\partial z_3^2$ и оператора умножения на гладкую функцию H_2^0/H_2 . Ясно, что этот коммутатор является дифференциальным оператором с гладкими коэффициентами первого порядка по z_3 . Поэтому последнее слагаемое из (3.38) является не существенным при доказательстве неравенства (3.32) в силу оценки (3.12), а предпоследнее слагаемое из (3.38) равно нулю, поскольку $w_1^\kappa = \widetilde{W}_1^\kappa(t, z', z_3/(\sigma\sqrt{t}))$ определяет решение задачи (3.10) и $\nu = \sigma^2/4$ по определению.

Аналогично оценивается вторая компонента вектор-функции $\mathcal{F}$ из (3.34). Для оценки третьей компоненты вектор-функции $\mathcal{F}$ из (3.34) также можно использовать представление, аналогичное (3.38), где соответствующее слагаемое с коммутатором является не существенным при доказательстве неравенства (3.32). Кроме того, в таком представлении является не существенным слагаемое, содержащее $\partial^2 \widetilde{W}_3^\kappa / \partial z_3^2$. Действительно, дифференцируя равенство (3.35) по z_3 , можно непосредственно оценить слагаемые из $\partial^2 \widetilde{W}_3^\kappa / \partial z_3^2$, используя неравенства (3.12), (3.16), (3.20), (3.36) и (3.37). Таким образом, для завершения доказательства неравенства (3.32) остается проверить, что

$$\|(W_3^\kappa)'_t\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}_+^3))}^2 \leq C\nu. \quad (3.39)$$

При доказательстве этого неравенства без ограничения общности можно считать, что $H_1 = H_2 = H_1^0 = H_2^0 = 1$, поскольку эти функции являются гладкими и не зависят от ν . Тогда, дифференцируя по t последнее равенство из (3.21) и учитывая (3.18), имеем

$$\begin{aligned} (W_3^\kappa)'_t &= \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} \widetilde{W}_3^\kappa(t, z', \beta) + \sigma\sqrt{t} \widetilde{W}_3^\kappa(t, z', \beta)'_\beta (\beta)'_t + \sigma\sqrt{t} \widetilde{W}_3^\kappa(t, z', \beta)'_t \\ &= \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} \widetilde{W}_3^\kappa(t, z', \beta) + \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} D(t, z', \beta)\beta + \sigma\sqrt{t} \widetilde{W}_3^\kappa(t, z', \beta)'_t \end{aligned} \quad (3.40)$$

при $\beta = z_3/(\sigma\sqrt{t})$. Подходящая оценка (первого справа) слагаемого из соотношения (3.40), содержащего $\widetilde{W}_3^\kappa(t, z', z_3/(\sigma\sqrt{t}))$, следует непосредственно из (3.20) и (3.36).

Обозначим через J предпоследнее слагаемое из (3.40). Тогда, используя (3.15), (3.17) и (3.18), получаем

$$\begin{aligned} \|J\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}_+^3))}^2 &= \int_0^T \frac{\sigma^3}{4\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty D(t, z', \beta)^2 \beta^2 d\beta dz' dt \\ &\leq \sigma^3 C \int_0^\infty \left(\int_\beta^\infty \exp\{-\alpha^2\} d\alpha \right)^2 \beta^2 d\beta \leq \sigma^3 C \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\beta) \beta^2 d\beta, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где последний интеграл сходится, поскольку функция $\operatorname{erfc}(\beta)$ является экспоненциально малой при больших β в соответствии с (3.28).

Таким образом, остается оценить последнее слагаемое из (3.40). В соответствии с (3.15), (3.17) и (3.18) это слагаемое является конечной суммой интегралов следующего вида:

$$\begin{aligned} & \sigma\sqrt{t} \int_{\beta}^{\infty} \int_{\alpha}^{\infty} \left(\hat{v} \left(t - \alpha^2 \frac{t}{\tau^2}, z' \right) \right)'_t \exp\{-\tau^2\} d\tau d\alpha \\ &= \sigma\sqrt{t} \int_{\beta}^{\infty} \int_{\alpha}^{\infty} \hat{v}'_t \left(t - \alpha^2 \frac{t}{\tau^2}, z' \right) \exp\{-\tau^2\} d\tau d\alpha \\ &+ \sigma\sqrt{t} \int_{\beta}^{\infty} \int_{\alpha}^{\infty} \hat{v}'_t \left(t - \alpha^2 \frac{t}{\tau^2}, z' \right) \left(-\frac{\alpha^2}{\tau^2} \right) \exp\{-\tau^2\} d\tau d\alpha \end{aligned} \quad (3.42)$$

при $\beta = z_3/(\sigma\sqrt{t})$, где $\hat{v}(t, z')$ является гладкой и финитной по z' функцией. Подходящая оценка предпоследнего слагаемого из (3.42) следует непосредственно из (3.36) и неравенства, аналогичного (3.20).

Обозначим через I последнее слагаемое из (3.42) и преобразуем это слагаемое следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \sigma\sqrt{t} \int_{\beta}^{\infty} \alpha \int_{\alpha}^{\infty} \hat{v}'_t \left(t - \alpha^2 \frac{t}{\tau^2}, z' \right) \left(-\frac{\alpha^2}{\tau^2} \right) \exp\{-\tau^2\} d\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) d\alpha \\ &= \sigma\sqrt{t} \int_{\beta}^{\infty} \alpha \int_1^{\infty} \hat{v}'_t(t - t\zeta^{-2}, z') \exp\{-\alpha^2\zeta^2\} d(\zeta^{-1}) d\alpha \\ &= \sigma\sqrt{t} \int_{\beta}^{\infty} \alpha \int_1^0 \hat{v}'_t(t - t\xi^2, z') \exp\{-\alpha^2/\xi^2\} d\xi d\alpha, \end{aligned}$$

где произведены замены координат $\zeta = \tau/\alpha$ и $\xi = \zeta^{-1}$. Следовательно, используя неравенство $\exp\{-\alpha^2/\xi^2\} \leq \exp\{-\alpha^2\}$, выполненное для $\xi \in (0, 1]$ и $\alpha \in [0, \infty)$, имеем при $\beta = z_3/(\sigma\sqrt{t})$ оценку

$$|I| \leq \sigma\sqrt{t} c(z') \int_{\beta}^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha = \sigma\sqrt{t} \frac{c(z')}{2} e^{-\beta^2}, \quad (3.43)$$

где $c(z')$ является ограниченной функцией с компактным носителем. Из оценки (3.43) и соответствующей оценки для предпоследнего слагаемого из (3.42) следует корректность дифференцирования под знаком интеграла в (3.42). Интегрируя оценку (3.43), возведенную в квадрат, получаем

$$\|I\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^3))}^2 \leq C\sigma^3, \quad (3.44)$$

что завершает доказательства неравенства (3.39) и леммы 3.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Из (3.29) и определений следует, что функция $\operatorname{div} V = \sum \operatorname{div} V^{\kappa}$ является экспоненциально малой в равномерной норме при малых σ . В частности, для каждого неотрицательного l найдется такая положительная постоянная C , что

$$|\operatorname{div} V| \leq C\sigma^{2+l} \quad \text{при} \quad 0 < \sigma \leq \sigma_0 \quad (3.45)$$

равномерно на $\bar{\Omega} \times [0, T]$. Для функции

$$\operatorname{div} V'_t = \sum \operatorname{div}(V^{\kappa})'_t = \sum (W_3^{\kappa})'_t \frac{\partial \eta^{\kappa}}{\partial z_3}$$

(см. (3.27)) такая оценка может не выполняться, поскольку предпоследнее слагаемое J из (3.40) имеет особенность $t^{-1/2}$, тогда как остальные слагаемые (справа в (3.40)) являются экспоненциально малыми (на носителе функции $\partial\eta^\kappa/\partial z_3$) в равномерной норме при малых σ , что следует непосредственно из определений, неравенств (3.20), (3.43) и разложений (3.28). Однако для каждого положительного l найдется такая положительная постоянная C , что

$$\|\operatorname{div} V_t'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C\sigma^{3+l} \quad \text{при } 0 < \sigma \leq \sigma_0. \quad (3.46)$$

Действительно, в силу определений можно считать, что $V = V^\kappa$ в (3.46), и достаточно оценить только вклад $J(\partial\eta^\kappa/\partial z_3)$ в (3.46) (в соответствии с (3.20), (3.28) и (3.43)). Обозначим через $\chi_0(t)$ и $\chi_T(t)$ характеристические функции отрезков $[0, \sigma^{2l}]$ и $[\sigma^{2l}, T]$ соответственно. Тогда

$$\left\| \chi_0 J \frac{\partial\eta^\kappa}{\partial z_3} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C \|\chi_0 J\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}_+^3))}^2 \leq C\sigma^{3+l}$$

в силу (3.41), где следует заменить T на σ^{2l} . С другой стороны, имеем

$$\left| \chi_T J \frac{\partial\eta^\kappa}{\partial z_3} \right| \leq \frac{\sigma^{1-l}}{2} |D(t, z', \beta)| \beta \left| \frac{\partial\eta^\kappa}{\partial z_3} \right|$$

при $\beta = z_3/(\sigma\sqrt{t})$ (см. (3.40)), и функция $D(t, z', \beta)$ является конечной суммой (с гладкими и финитными по z' коэффициентами) функций, которые удовлетворяют неравенству (3.16). Следовательно, функция $\chi_T J(\partial\eta^\kappa/\partial z_3)$ является экспоненциально малой при малых σ в силу разложений (3.28), что завершает доказательство (3.46).

Из неравенств (3.16), (3.20), (3.36) и (3.37) следует, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|W^\kappa\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)}^2 \leq C\sqrt{\nu}, \quad (3.47)$$

где постоянная C не зависит от ν . Оценка (3.47) является точной, например, при $v_i = 1$ для $i = 1, 2$ в соответствии с [20, §6], где доказана аналогичная оценка. Поэтому вектор-функция V действительно определяет асимптотику решения задачи (3.5). Таким образом, непосредственно из (3.21), (3.25), (3.47) и леммы 3.3 вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 3.5. Пусть (U, P) является решением задачи (3.5) и $V = \sum V^\kappa$, где V^κ определено в (3.25). Тогда для всех $\nu \in (0, \nu_*]$ выполняется оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|U\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|V\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \leq C\sqrt{\nu},$$

где постоянная C не зависит от ν (при $0 < \nu \leq \nu_*$).

Кроме того, используя приведенные построения, можно определить (начальные слагаемые) асимптотики решений задачи (2.1) в случае, когда $m_\varepsilon = E$ и $k_\varepsilon = 1$, в соответствии со следующим утверждением.

ЛЕММА 3.6. Пусть (u, p) – решение задачи (2.1), в которой $m_\varepsilon = E$ и $k_\varepsilon = 1$, (v, q) – решение задачи (2.3) и $V = \sum V^\kappa$, где V^κ определено в (3.25). Тогда для всех $\nu \in (0, \nu_*]$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u - v + V, p - q) &\leq C\nu, \\ \max_{0 \leq t \leq T} \|u - v\|_{L^2(\Omega)^3}^2 &\leq C\sqrt{\nu}, \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ν и использовано обозначение (3.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $R = u - v + V$ и $r = p - q$. Тогда (R, r) является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} R'_t - \nu \Delta R - \nu \eta \nabla \operatorname{div} R + \nabla r &= \nu \Delta v + \nu \eta \nabla \operatorname{div} v - \mathcal{F} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \gamma r'_t + \operatorname{div} R &= -\mathcal{G} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ R|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \quad r|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ R &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

в соответствии с (2.1), (2.3), (3.6), (3.30) и (3.31).

Таким образом, доказательство первой оценки леммы повторяет доказательство леммы 3.3, поскольку вектор-функция v является гладкой и не зависит от ν . Соответственно, вторая оценка следует из первой и леммы 3.5, что завершает доказательство леммы.

В приведенных доказательствах существенно использовалась гладкость решения задачи (2.3). Как уже отмечалось, эта задача может быть сведена к волновому уравнению с гладкими исходными данными, гладкость решений которого следует из известных утверждений. Но при использовании таких утверждений следует проверить условия согласования начальных и граничных данных в задаче (2.3). Впрочем, для полноты изложения удобнее привести непосредственное доказательство утверждения о гладкости решений задачи (2.3).

Умножая уравнения из (2.3) на (v, p) и интегрируя полученные соотношения по Ω (или, что эквивалентно, выбирая подходящие тестовые функции в соответствующем интегральном тождестве), имеем

$$\int_{\Omega} \left(\frac{v^2}{2} \right)'_t dx + \gamma \int_{\Omega} \left(\frac{q^2}{2} \right)'_t dx = \int_{\Omega} (Mf, v) dx + \int_{\Omega} Kgq dx. \quad (3.48)$$

Таким образом, в соответствии с доказательством леммы 3.1 выполнено “энергетическое” неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|v\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \gamma \max_{0 \leq t \leq T} \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^3)}^2 + \|g\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2),$$

из которого следует единственность соответствующего решения.

Используя уравнения из (2.3), получаем, что $v'_t|_{t=0} = Mf|_{t=0}$ и $q'_t|_{t=0} = Kg|_{t=0}$ являются гладкими (и финитными) функциями от $x \in \Omega$ в силу предположений. Поэтому, дифференцируя по t уравнения из (2.3), имеем для (v'_t, q'_t) начально-краевую задачу, аналогичную (2.3), и “энергетическое” неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|v'_t\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \gamma \max_{0 \leq t \leq T} \|q'_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C. \quad (3.49)$$

Точнее, здесь следует выбрать в соответствующем интегральном тождестве тестовые функции, продифференцированные по t . Из такого интегрального тождества следует, что $v'_t|_{t=0} = Mf|_{t=0}$, $q'_t|_{t=0} = Kg|_{t=0}$ и выполнено неравенство (3.49) (см., например, [3, гл. 4, § 2], где приведено аналогичное доказательство для задачи (2.12)).

Таким образом, по индукции можно заключить, что $v_t^{(h)}|_{t=0}$ и $q_t^{(h)}|_{t=0}$ являются гладкими функциями и $(v_t^{(h)}, q_t^{(h)}) \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^4)$ для $h = 1, 2, \dots$ в силу подходящих “энергетических” неравенств. Кроме того, $q_t^{(h)} \in C^0([0, T]; H^1(\Omega))$, поскольку $\nabla q_t^{(h)} = Mf_t^{(h)} - v_t^{(h+1)}$ в силу уравнений задачи (2.3), и поэтому $\nabla q_t^{(h)} \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^3)$ для $h = 1, 2, \dots$.

Применяя оператор ротора (в смысле распределений) к первым уравнениям из (2.3), получаем, что $\operatorname{rot} v'_t = \operatorname{rot} Mf$ является гладкой вектор-функцией в силу предположений. Следовательно, учитывая неравенство

$$\|w\|_{H^s(\Omega)^3} \leq C(\|w\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\operatorname{rot} w\|_{H^{s-1}(\Omega)^3} + \|\operatorname{div} w\|_{H^{s-1}(\Omega)}), \quad (3.50)$$

выполненное для $s = 1, 2, \dots$ (если правая часть (3.50) определена и $(w, N) = 0$ на $\partial\Omega$; см., например, [1, приложение 1, предложение 1.4]) с постоянной C , не зависящей от w , имеем $v_t^{(h)} \in C^0([0, T]; H^2(\Omega)^3)$, поскольку $\operatorname{div} v_t^{(h)} = Kg_t^{(h)} - q_t^{(h+1)}$ в силу уравнений задачи (2.3), и поэтому $\operatorname{div} v_t^{(h)} \in C^0([0, T]; H^1(\Omega)^3)$ для $h = 1, 2, \dots$.

Таким образом, можно проверить по индукции регулярность решения задачи (2.3) в пространствах Соболева и использовать теоремы вложения для доказательства классической гладкости такого решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Приведенное доказательство гладкости решения сохраняется и для задачи (2.13). Более того, это доказательство упрощается, поскольку $\operatorname{rot} v'_t = \operatorname{rot} Mf$ и $\operatorname{div} v = 0$ в силу уравнений задачи (2.13), и непосредственно из (3.50) следует гладкость вектор-функции v из (2.13). Тогда гладкой является и вектор-функции ∇q из (2.13) и остается воспользоваться неравенством Пуанкаре для завершения доказательства гладкости решения задачи (2.13). Отметим также, что существование и единственность решения $v \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)$, $q \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)/\mathbb{R})$ задачи (2.13) доказаны фактически в [5].

Используя приведенные построения, можно также определить (начальные слагаемые) асимптотики решений задачи (2.12) в случае, когда $m_\varepsilon = E$. Однако для упрощения дальнейших доказательств полезно сначала привести подходящее доказательство леммы 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Умножая уравнения из (2.12) на u и интегрируя полученные соотношения по Ω , а затем по частям (или, что эквивалентно, выбирая тестовую функцию $\varphi = u$ в соответствующем интегральном тождестве, аналогичном (2.17)), получаем

$$\int_{\Omega} \left(\frac{u^2}{2} \right)'_t dx + \nu \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla u) dx = \int_{\Omega} (m_\varepsilon f, u) dx. \quad (3.51)$$

Напомним, что существование $u \in C^0(0, T; L^2(\Omega)^n)$ известно. Поэтому, как при доказательстве леммы 3.1, имеем “энергетическое” неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \leq C \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2. \quad (3.52)$$

Вектор-функция f из (2.12) является гладкой в силу предположений. Поэтому, дифференцируя по t уравнения из (2.12), получаем для u'_t начально-краевую задачу, аналогичную задаче (2.12) (с неоднородными начальными условиями), и подходящее “энергетическое” неравенство, аналогичное неравенству (3.52) (см., например, [3, гл. 4, § 2]). В частности, $\sqrt{\nu} \nabla u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^{n \times n})$ (см., например, [1, гл. 3, лемма 1.2]), и в подходящем смысле выполняются равенства $\operatorname{div} u'_t = 0$ в $\Omega \times (0, T)$ и $u'_t = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$.

Поэтому, выбирая $\varphi = u'_t$ в соответствующем интегральном тождестве, аналогичном (2.17), имеем

$$\int_{\Omega} (u'_t)^2 dx + \nu \int_{\Omega} \left(\frac{(\nabla u)^2}{2} \right)'_t dx = \int_{\Omega} (m_{\varepsilon} f, u'_t) dx. \quad (3.53)$$

Интегрируя (3.53) по t , как и при доказательстве леммы 3.1, получаем

$$\|u'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \leq C \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)}^2. \quad (3.54)$$

Кроме того, найдется такое $p \in C^0([0,T];L^2(\Omega)/\mathbb{R})$, что первые три уравнения из (2.12) выполняются в смысле $H^{-1}(\Omega)^n$ для почти всех $t \in (0,T)$ (см., например, [1, гл. 3, предложение 1.1]), и поэтому

$$\begin{aligned} \|\nabla p\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)} &= \|m_{\varepsilon} f + \nu \Delta u - u'_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)} \\ &\leq \|m_{\varepsilon} f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)} + \nu \|\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})} \\ &\quad + \|u'_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)} \leq C \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)} \end{aligned}$$

в соответствии с (3.52) и (3.54), поскольку $\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)^n} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}$ и $H^{-1}(\Omega)$ -норма мажорируется $L^2(\Omega)$ -нормой. Таким образом, оценка

$$\|p\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})} \leq C \|\nabla p\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)} \leq C \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)} \quad (3.55)$$

следует из неравенства Нечаса (см., например, [1, гл. 1, предложение 1.2]), что завершает доказательства леммы 3.2.

ЛЕММА 3.8. Пусть (u, p) – решение задачи (2.12), в которой $m_{\varepsilon} = E$, (v, q) – решение задачи (2.13) и $V = \sum V^{\kappa}$, где V^{κ} определено в (3.25) с использованием такого v в (3.9). Тогда для всех $\nu \in (0, \nu_*)$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u - v + V\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \nu \|\nabla(u - v + V)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{3 \times 3})}^2 &\leq C\nu, \\ \|(u - v + V)'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}^2 + \|p - q\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})}^2 &\leq C\nu, \\ \max_{0 \leq t \leq T} \|u - v\|_{L^2(\Omega)^3}^2 &\leq C\sqrt{\nu}, \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ν (при $\nu \in (0, \nu_*)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $R = u - v + V$ и $r = p - q$. Тогда (R, r) удовлетворяет следующим равенствам:

$$\begin{aligned} R'_t - \nu \Delta R + \nabla r &= \nu \Delta v - \mathcal{F} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} R &= -\mathcal{G} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ R|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \quad R = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned} \quad (3.56)$$

в соответствии с (2.12), (2.13), (3.30) и (3.31), где выбрано $\eta = 0$.

Первые три уравнения из (2.12) выполняются в смысле $H^{-1}(\Omega)^3$ для почти всех $t \in (0, T)$ в соответствии с [1]. Следовательно, в таком смысле выполнены и первые три равенства из (3.56), поскольку v , V и q достаточно регулярны. Умножая эти равенства на R и интегрируя полученные соотношения по Ω ,

а затем по частям, получаем для R соотношение, аналогичное (3.51), но с дополнительным слагаемым $-\int_{\Omega} r\mathcal{G} dx$. Интегрируя это соотношение по t , как и при доказательстве леммы 3.1, имеем неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|R\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \nu \|\nabla R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{3 \times 3})}^2 \leq C\nu + \int_0^T \int_{\Omega} |r\mathcal{G}| dx dt, \quad (3.57)$$

где учтены неравенство (3.32) и гладкость v . Используя оценку (3.45) (при $l = 0$), неравенство Гёльдера, (3.55) и гладкость q , последнее слагаемое из (3.57) также можно оценить величиной $C\nu$, что завершает доказательство первого неравенства леммы.

Для доказательства второго неравенства проверим сначала, что $R'_t = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$. В соответствии с доказательством леммы 3.2 для выполнения этого равенства достаточно, чтобы $v'_t = V'_t$ на $\partial\Omega \times (0, T)$. Соответственно, используя разбиение единицы $\{\varphi^\kappa\}$, выполнение этого равенства достаточно проверить только на $S^\kappa \times (0, T)$, где введены координаты z', t .

Вектор-функция v является гладкой. Поэтому для третьей компоненты этой вектор-функции выполняется равенство $(v_3)'_t = 0$ на $S^\kappa \times (0, T)$ (для каждого κ) в силу граничных условий из (2.13). Кроме того, из (3.18), (3.19), (3.21) и (3.40) следует, что

$$(W_3^\kappa)'_t|_{S^\kappa} = \sigma\sqrt{t} \operatorname{Div}(\widehat{W}_0^\kappa)'_t + \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} \operatorname{Div} \widehat{W}_0^\kappa,$$

поскольку $\beta|_{S^\kappa} = (z_3/(\sigma\sqrt{t}))|_{S^\kappa} = 0$ для $t \in (0, T)$ и $H_1^0 H_2^0 / (H_1 H_2)|_{S^\kappa} = 1$ в силу (3.8). Таким образом, учитывая гладкость l^κ , (3.25) и (3.33), получаем $(v_3 - V_3)'_t = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$.

Дифференцируя по t равенство (3.15) при $\beta = z_3/(\sigma\sqrt{t})$, имеем

$$(\widetilde{W}_i^\kappa)'_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_i^\kappa(0, z') e^{-\beta^2} (\beta)'_t + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta}^{\infty} (v_i^\kappa)'_t \left(t - \beta^2 \frac{t}{\alpha^2}, z' \right) e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

где $i = 1, 2$ и корректность дифференцирования под знаком интеграла следует из неравенств, аналогичных (3.36), (3.37) и (3.43). Последнее слагаемое этого равенства определяет решение задачи (3.10) с граничным условием $w_i^\kappa = (v_i^\kappa)'_t$ на $\mathbb{R}_0 \times (0, T)$ для $i = 1, 2$ в соответствии с (3.14), а предпоследнее слагаемое равно нулю. Таким образом, учитывая (3.24) и (3.25), заключаем, что первые две компоненты вектор-функции $v'_t - V'_t$ также равны нулю на $\partial\Omega \times (0, T)$, и поэтому $R'_t = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$, что и утверждалось.

Непосредственно из определений и равенства $v|_{t=0} = 0$ следует, что $l^\kappa|_{t=0} = 0$ (для каждого κ). Таким образом, особенность вектор-функции $(\sigma\sqrt{t} l^\kappa)'_t$ из (3.33) является устранимой и $(\sigma\sqrt{t} l^\kappa)'_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$. Теперь можно заметить, что при доказательстве неравенства (3.32) на самом деле было доказано несколько более точное неравенство

$$\|\mathcal{F}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}^2 \leq C\nu, \quad (3.58)$$

например, в соответствии с (3.12), (3.36), (3.37), (3.41) и (3.44).

Умножая первые три равенства из (3.56) на R'_t и интегрируя полученные соотношения по Ω , а затем по частям, получаем для R'_t соотношение, аналогичное (3.53), но с дополнительным слагаемым $-\int_{\Omega} r\mathcal{G}'_t dx$. Интегрируя это соотношение по t , как и при доказательстве леммы 3.1, имеем неравенство

$$\|R'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)}^2 + \nu \|\nabla R\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^{3 \times 3})}^2 \leq C\nu + \int_0^T \int_{\Omega} |r\mathcal{G}'_t| dx dt, \quad (3.59)$$

где учтена оценка (3.58). Используя оценку (3.46) (при $l = 1$), неравенство Гёльдера, (3.55) и гладкость q , последнее слагаемое из (3.59) также можно оценить величиной $C\nu$, что вместе с неравенством (аналогичным) (3.55) завершает доказательство второго неравенства леммы. Соответственно, третья оценка следует из первой и леммы 3.5, что завершает доказательство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Координаты (3.7), используемые при построении пограничных слагаемых, введены в [22] при $n \geq 2$. Кроме того, утверждение о разрешимости задачи (3.23) доказаны, например, в [27], [28] также для произвольного $n \geq 2$. Следовательно, и в этом случае можно построить вектор-функции V , удовлетворяющие оценкам лемм 3.3 и 3.8, используя подходящую формулу для оператора дивергенции в координатах (3.7) (см. (3.17) и (3.22)). Эту формулу несложно вывести, например, рассматривая этот оператор как подходящий дифференциал на соответствующих дифференциальных формах (см., например, [29]). Такая формула является более громоздкой, но приведенные построения практически не изменяются и в случае $n \geq 2$. Отметим также, что неравенство (3.50) при $s = 1$ и $n \geq 2$ доказано фактически в [29] и непосредственно обобщается на положительные целые s по индукции (см. [1, приложение 1]). Кроме того, доказательство леммы 3.2 приведено фактически при $n \geq 2$. Поэтому далее доказанные в этом параграфе леммы будут использоваться и для произвольного $n \geq 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Можно построить и дальнейшие пограничные слагаемые в асимптотике решений задачи (2.1) (при $m_\varepsilon = E$ и $k_\varepsilon = 1$) и задачи (2.12) (при $m_\varepsilon = E$), используя основные идеи метода Вишика–Люстерника [23]. Однако при обосновании таких асимптотик необходимо оценивать достаточно сложные интегралы, зависящие сингулярно от t в общем случае, и такие оценки являются достаточно громоздкими, что существенно отличает методы обоснования погранслоя для стационарных задач (подробно рассмотренных в [23]) от методов обоснования погранслоя для нестационарных задач, рассматриваемых здесь.

§ 4. Леммы

При доказательстве теорем, сформулированных в § 2, кроме лемм, доказанных в предыдущем параграфе, будут использоваться и некоторые другие вспомогательные утверждения, приведенные и доказанные в настоящем параграфе.

Для заданной 1-периодической по y функции $b(x, y)$, рассматриваемой только на $\Omega \times Y$ (или, эквивалентно, на $\Omega \times \mathbb{T}^n$), через $b_\varepsilon = b(x, x/\varepsilon)$ в дальнейшем обозначается ε -периодическое продолжение этой функции на Ω . Более точно, $b(x, y)$ продолжается как 1-периодическая по y функция на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ и выбирается ограничение полученной функции при $y = x/\varepsilon$ на Ω , которое и обозначается b_ε .

Функция $b_\varepsilon(x) = b(x, x/\varepsilon)$ корректно определена, например, если $b(x, y) \in C^0(\bar{\Omega}; C_{\text{пер}}^0(Y))$ (или, эквивалентно, $b(x, y) \in C^0(\bar{\Omega}; C^0(\mathbb{T}^n))$). Однако необходима некоторая точность при определении $b_\varepsilon(x)$ в случае, когда $b(x, y)$ задана только почти всюду на $\Omega \times Y$. Действительно, функция $b(x, x/\varepsilon)$ является фактически “следом” функции $b(x, y)$ на плоскости $x = x$, $y = x/\varepsilon$, и необходима некоторая регулярность этой функции для корректного определения такого следа.

В рамках теории пространств Соболева можно проверить, что выполнено включение $b_\varepsilon(x) \in H^{h-n/2}(\Omega)$, если положительное $h > n/2$ и $b(x, y) \in$

$H^h(\Omega \times \mathbb{T}^n)$. Однако такое условие является достаточно ограничительным для приложений. Поэтому удобнее предполагать некоторую “частичную” непрерывность $b(x, y)$ при корректном определении $b_\varepsilon(x)$. В этом направлении известно [30], что функция $b_\varepsilon(x)$ определена и $b_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ (равномерно по ε) в случае, когда $b(x, y) \in L^2_{\text{per}}(Y; C^0(\overline{\Omega}))$ или $b(x, y) \in L^2(\Omega; C^0_{\text{per}}(Y))$.

Кроме того, в соответствии с [31] для $b(x, y) \in L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y))$ найдется такой представитель (класса эквивалентности) $b(x, y)$, что функция $b_\varepsilon(x)$ определена (почти всюду на Ω) и

$$\|b_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|b\|_{L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y))} \equiv \|b\|_{L^2(\Omega; L^\infty(\mathbb{T}^n))}. \quad (4.1)$$

Отметим также, что проблема определения $b_\varepsilon(x)$ упрощается в случае, когда $b = w(x)b_1(y)$ является функцией с разделенными переменными. Например, хорошо известно и непосредственно проверяется, что функция $b_\varepsilon = b_1(x/\varepsilon)$ определена и (с постоянной C , зависящей только от Ω)

$$\|b_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|b_1\|_{L^2_{\text{per}}(Y)} \equiv C\|b_1\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}, \quad (4.2)$$

если $b = b_1(y)$ зависит только от y и $b_1 \in L^2_{\text{per}}(Y)$.

Следующий известный вариант формулы дифференцирования быстроосциллирующих функций и различные его вариации в обозначениях часто используются в дальнейшем:

$$\nabla \left(b \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = (\varepsilon^{-1} \nabla_y b(x, y) + \nabla_x b(x, y)) \quad \text{при} \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (4.3)$$

Учитывая введенные выше обозначения, эту формулу можно записать в виде

$$\nabla(b_\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(\nabla_y b)_\varepsilon + (\nabla_x b)_\varepsilon. \quad (4.4)$$

Эта формула выполнена для гладких функций $b(x, y)$. Однако, как и выше, необходима определенная точность при использовании этой формулы для функций, определенных почти всюду.

Различные варианты следующего утверждения доказаны в [32], [9] и [10].

ЛЕММА 4.1. Пусть $\rho \in L^2_{\text{per}}(Y)$. Тогда найдется такое $\psi \in H^1_{\text{per}}(Y)^n$, что

$$\text{div}_y \psi = \rho - \langle \rho \rangle. \quad (4.5)$$

Кроме того, $\psi \in C^{1-\delta}_{\text{per}}(Y)^n$, если $\rho \in L^\infty_{\text{per}}(Y)$ и $0 < \delta < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что здесь используется обозначение из (2.4) для среднего по ячейке периодичности Y . Определим функцию $\varphi(y)$ как 1-периодическое решение задачи на Y :

$$\text{div}_y(\nabla_y \varphi) = \rho - \langle \rho \rangle \quad \text{в} \quad Y, \quad \langle \varphi \rangle = 0. \quad (4.6)$$

Известно [2], что решение этой задачи существует, определено однозначно и $\varphi \in H^2(\mathbb{T}^n)/\mathbb{R}$ в соответствии с принятым соглашением, что ограничения 1-периодических функций на Y рассматриваются как функции на n -мерном торе $\mathbb{T}^n$. Тогда $\psi = \nabla_y \varphi$ удовлетворяет (4.5) и $\psi \in H^1(\mathbb{T}^n)^n \equiv H^1_{\text{per}}(Y)^n$.

Задача (4.6) эквивалентна уравнению с оператором Лапласа на торе $\mathbb{T}^n$, который является многообразием без края. Следовательно, используя утверж-

дение о локальной регулярности для таких уравнений (см., например, [33, гл. 3, § 15]), имеем $\varphi \in W_{\sigma}^2(\mathbb{T}^n)/\mathbb{R}$, если $\rho \in L^{\sigma}(\mathbb{T}^n)$ и положительное $\sigma > n$. Кроме того [33], $\varphi \in C^{2-\delta}(\mathbb{T}^n)$ для $\delta = n/\sigma$ и

$$\|\varphi\|_{C^{2-\delta}(\mathbb{T}^n)} \leq C\|\rho\|_{L^{\sigma}(\mathbb{T}^n)} \leq C\|\rho\|_{L^{\infty}(\mathbb{T}^n)}, \quad (4.7)$$

где постоянная C зависит только от n . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Известно, что решение задачи (4.6) принадлежит $C^{\infty}(\mathbb{T}^n)$, если $\rho \in C^{\infty}(\mathbb{T}^n)$. Это утверждение проверяется, например, с помощью дифференцирования по y уравнения (4.6) (рассматриваемого на $\mathbb{T}^n$) и использования оценки (4.7) для соответствующих производных. Аналогично проверяется, что $\varphi(t, y) \in C^{\infty}([0, T] \times \mathbb{T}^n)$, если $t \in [0, T]$ рассматривается как параметр в задаче (4.6) и $\rho(t, y) \in C^{\infty}([0, T] \times \mathbb{T}^n)$.

Непосредственным следствием леммы 4.1 является следующее утверждение, приведенное, например, в [10].

ЛЕММА 4.3. Пусть $\rho(y) \in L_{\text{per}}^2(Y)$ и $w(x) \in H_0^1(\Omega)$. Тогда

$$\left| \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon}(x)w(x) dx - \int_{\Omega} \int_Y \rho(y)w(x) dy dx \right| \leq \varepsilon C \|\rho\|_{L_{\text{per}}^2(Y)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^n},$$

где постоянная C зависит только от Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(y)$ является 1-периодическим решением задачи (4.6) и $\psi = \nabla_y \varphi$ удовлетворяет (4.5). Тогда, учитывая (4.4), имеем

$$\rho_{\varepsilon} - \langle \rho \rangle = (\text{div}_y \psi)_{\varepsilon} = \varepsilon \text{div}(\psi_{\varepsilon}).$$

Следовательно, интегрируя по частям, получаем

$$\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} w dx - \int_{\Omega} \int_Y \rho w dy dx = \varepsilon \int_{\Omega} \text{div}(\psi_{\varepsilon}) w dx = -\varepsilon \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} \nabla w dx.$$

Таким образом, требуемая оценка следует из неравенства Гёльдера, (4.2) и хорошо известного (и непосредственно проверяемого) неравенства

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{T}^n)^n} = \|\nabla_y \varphi\|_{L^2(\mathbb{T}^n)^n} \leq 2\|\rho\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}$$

для решения задачи (4.6), что завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 4.4. Пусть $\rho \in L^2(\Omega; L_{\text{per}}^{\infty}(Y)/\mathbb{R})$, $\nabla_x \rho \in L^2(\Omega; L_{\text{per}}^{\infty}(Y)/\mathbb{R})^n$ и фиксировано положительное δ , меньшее единицы. Тогда найдутся $\psi \in L^2(\Omega; C_{\text{per}}^{1-\delta}(Y)^n)$ и $\phi \in L^2(\Omega; C_{\text{per}}^{1-\delta}(Y))$ такие, что

$$\rho_{\varepsilon} = \varepsilon \text{div}(\psi_{\varepsilon}) + \varepsilon \phi_{\varepsilon}, \quad (4.8)$$

где $\|\psi_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)^n} \leq C\|\rho\|_{L^2(\Omega; L_{\text{per}}^{\infty}(Y)/\mathbb{R})}$, $\|\phi_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla_x \rho\|_{L^2(\Omega; L_{\text{per}}^{\infty}(Y)/\mathbb{R})^n}$ и постоянная C зависит только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предположений $\rho \in L_{\text{per}}^{\infty}(Y)/\mathbb{R}$, и поэтому $\langle \rho \rangle = 0$ для почти всех $x \in \Omega$. Определим $\varphi(x, y)$ как решение уравнения (4.6) на торе, где x рассматривается как параметр. Тогда для почти всех $x \in \Omega$ такое решение однозначно определено и для $\psi = \nabla_y \varphi$ имеем

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega; C^{1-\delta}(\mathbb{T}^n)^n)} \leq C\|\rho\|_{L^2(\Omega; L^{\infty}(\mathbb{T}^n)/\mathbb{R})}$$

в силу неравенства (4.7). Поэтому, используя неравенство (4.1), получаем

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} \leq C\|\rho\|_{L^2(\Omega; L^\infty(\mathbb{T}^n)/\mathbb{R})} \equiv C\|\rho\|_{L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R})},$$

где постоянная C зависит только от n . Кроме того, учитывая условия леммы и дифференцируя уравнение (4.6) по x , заключаем, что

$$\|\nabla_x \psi\|_{L^2(\Omega; C^{1-\delta}(\mathbb{T}^n)^{n \times n})} \leq C\|\nabla_x \rho\|_{L^2(\Omega; L^\infty(\mathbb{T}^n)/\mathbb{R})^n}$$

в силу неравенства (4.7). В частности, $\operatorname{div}_x \psi = L^2(\Omega; C^{1-\delta}(\mathbb{T}^n))$ и

$$\|(\operatorname{div}_x \psi)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} \leq C\|\nabla_x \rho\|_{L^2(\Omega; L^\infty(\mathbb{T}^n)/\mathbb{R})^n} \equiv C\|\nabla_x \rho\|_{L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R})^n}$$

в соответствии с (4.1), где постоянная C зависит только от n .

Следовательно, используя формулу дифференцирования (4.4), имеем

$$\operatorname{div}(\psi_\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(\operatorname{div}_y \psi)_\varepsilon + (\operatorname{div}_x \psi)_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon + (\operatorname{div}_x \psi)_\varepsilon, \quad (4.9)$$

где правая часть определена как элемент $L^2(\Omega)$ в силу неравенства (4.1), и поэтому $\varepsilon \operatorname{div}(\psi_\varepsilon) \in L^2(\Omega)$ (равномерно по ε). Таким образом, для получения представления (4.8) достаточно умножить равенство (4.9) на ε и определить $\phi = -\operatorname{div}_x \psi(x, y)$, что завершает доказательство леммы.

Следующее утверждение, обобщающее лемму 4.3, является непосредственным следствием леммы 4.4.

ЛЕММА 4.5. Пусть $\rho \in L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y))$, $\nabla_x \rho \in L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y))^n$, $w \in H_0^1(\Omega)$ и $\nabla_x \langle \rho \rangle = \langle \nabla_x \rho \rangle$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega \rho_\varepsilon(x) w(x) dx - \int_\Omega \int_Y \rho(x, y) w(x) dy dx \right| \\ & \leq \varepsilon C \|\nabla_x \rho\|_{L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y))^n} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon C \|\rho\|_{L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y))} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^n}, \end{aligned}$$

где постоянная C зависит только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предположений для $\hat{\rho} = \rho - \langle \rho \rangle$ выполнены условия леммы 4.4 и представление (4.8). Используя (4.8), имеем

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon w dx - \int_\Omega \int_Y \rho w dy dx = \varepsilon \int_\Omega \phi_\varepsilon w dx - \varepsilon \int_\Omega \psi_\varepsilon \nabla w dx.$$

Таким образом, требуемая оценка следует из неравенства Гёльдера, (4.1) и оценки (4.7) (в которой постоянная C зависит только от n), что завершает доказательство леммы.

Далее напомним, что свертка по t от гладких функций $P(t, x)$ и $v(t, x)$ определяется (эквивалентными) равенствами

$$(P * v)(t, x) = \int_0^t P(t - \tau, x) v(\tau, x) d\tau = \int_0^t P(\tau, x) v(t - \tau, x) d\tau \quad (4.10)$$

и выполняются формулы дифференцирования

$$(P * v)'_t = (P|_{t=0})v + (P'_t) * v = P(v|_{t=0}) + P * (v'_t). \quad (4.11)$$

Это определение можно обобщить достаточно стандартным образом на более общие классы функций и распределений (см., например, [24]).

Доказательство следующего утверждения можно найти в [20].

ЛЕММА 4.6. Пусть $P \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ и $v \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$. Тогда свертка $P * v$ этих функций принадлежит $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ и

$$\|P * v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq \|P\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \|v\|_{L^2(0, T; L^\infty(\Omega))}.$$

Кроме того, $P * v \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, если $v'_t \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$.

Непосредственно из этой леммы и (4.2) имеем следующую оценку:

$$\|A_\varepsilon * f\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)} \leq C \|A\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n})} \leq C \quad (4.12)$$

для $A_\varepsilon * f$ из (2.8), поскольку компоненты A и f являются гладкими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2.6. В соответствии с принятым соглашением задача (2.7) рассматривается фактически на $\mathbb{T}^n \times (0, T)$. При такой интерпретации граничные условия 1-периодичности в этой задаче выполняются автоматически, и поэтому выполнены и условия согласования (произвольного порядка) для этой задачи. Следовательно, гладкость решения этой задачи (при фиксированном ϑ) проверяется достаточно стандартно, например с помощью дифференцирования соответствующих уравнений по (t, y) и использования подходящей априорной оценки. Такая априорная оценка проверяется, как и при доказательстве леммы 3.1, и формулируется следующим образом:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|A\|_{L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n}}^2 + \vartheta \|\nabla_y A\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n \times n})}^2 \leq \|A^0\|_{L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n}}^2, \quad (4.13)$$

где введено обозначение $A^0 = m - M - \nabla_y b$.

Отметим также, что специфика задачи (2.7) такова, что $B = 0$. Действительно, применяя оператор дивергенции к первым уравнениям из (2.7), имеем $\Delta_y B = 0$. Гармонические функции на торе являются постоянными, и поэтому $B = 0$ в силу условия $\langle B \rangle = 0$ из (2.7).

Определим $R = A - A^0$, где $A^0 = m - M - \nabla_y b$ в обозначениях из (2.7). Тогда, учитывая уравнения из (2.7), получаем для R равенства

$$\begin{aligned} R'_t - \vartheta \Delta_y R &= \vartheta \Delta_y A^0 \quad \text{в } \mathbb{T}^n \times (0, T), \\ R|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \mathbb{T}^n, \quad \langle R \rangle = 0. \end{aligned}$$

Умножая первые из этих равенств на R и интегрируя полученные соотношения по $\mathbb{T}^n \times (0, t)$, как и при доказательстве леммы 3.2 (см. (3.52)), имеем неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|R\|_{L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n}}^2 + \vartheta \|\nabla_y R\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n \times n})}^2 \leq \|\vartheta \Delta_y A^0\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n})}^2.$$

Из этого неравенства следует требуемая оценка, поскольку компоненты A^0 являются гладкими и не зависят от t . Утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2.7. Определим $R = A^{(-1)} - \omega a$ и $A^0 = m - M - \nabla_y b$ в обозначениях из (2.7) и (2.10), где $\omega = 1/\vartheta$. Тогда, интегрируя по t первые уравнения из (2.7), получаем

$$-\Delta_y A^{(-1)} = \omega A^0 - \omega A \quad \text{в } \mathbb{T}^n \times (0, T). \quad (4.14)$$

Следовательно, учитывая (2.11), имеем

$$-\Delta_y R = -\omega A \quad \text{в } \mathbb{T}^n \times (0, T). \quad (4.15)$$

Умножая уравнения (4.14) на $A^{(-1)}$ и интегрируя полученные соотношения по T^n , а затем по частям, получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla_y A^{(-1)}\|_{L^2(T^n)^{n \times n \times n}}^2 &\leq \|\omega(A^0 - A)\|_{L^2(T^n)^{n \times n}} \|A^{(-1)}\|_{L^2(T^n)^{n \times n}} \\ &\leq C \|\omega A^0\|_{L^2(T^n)^{n \times n}} \|\nabla_y A^{(-1)}\|_{L^2(T^n)^{n \times n \times n}} \\ &\leq C\omega^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_y A^{(-1)}\|_{L^2(T^n)^{n \times n \times n}}^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где учтены оценка (4.13) и неравенства Гёльдера и Пуанкаре. Напомним, что $\langle A \rangle = 0$ и $\langle a \rangle = 0$ в соответствии с (2.7) и (2.11). Вновь используя неравенство Пуанкаре, из (4.16) заключаем, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|A^{(-1)}\|_{L^2(T^n)^{n \times n}}^2 \leq C \max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla_y A^{(-1)}\|_{L^2(T^n)^{n \times n \times n}}^2 \leq C\omega^2,$$

где C зависит только от A^0 и n (поскольку константа в неравенстве Пуанкаре зависит только от n).

Аналогично, умножая уравнения (4.15) на R и интегрируя полученные соотношения по T^n , а затем по частям, имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla_y R\|_{L^2(T^n)^{n \times n \times n}}^2 &\leq \|\omega A\|_{L^2(T^n)^{n \times n}} \|R\|_{L^2(T^n)^{n \times n}} \\ &\leq C \|\omega \nabla_y A\|_{L^2(T^n)^{n \times n \times n}} \|\nabla_y R\|_{L^2(T^n)^{n \times n \times n}} \\ &\leq C \|\omega \nabla_y A\|_{L^2(T^n)^{n \times n \times n}}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_y R\|_{L^2(T^n)^{n \times n \times n}}^2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где учтены неравенства Гёльдера и Пуанкаре. Вновь используя неравенство Пуанкаре, из (4.17) заключаем, что

$$\|R\|_{L^2(T^n)^{n \times n}}^2 \leq C \|\nabla_y R\|_{L^2(T^n)^{n \times n \times n}}^2 \leq C \|\omega \nabla_y A\|_{L^2(T^n)^{n \times n \times n}}^2,$$

где C зависит только от A^0 и n . Таким образом, интегрируя по t эти неравенства и учитывая оценку (4.13), получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla_y R\|_{L^2(0,T;L^2(T^n)^{n \times n \times n})}^2 &\leq C\omega^2 \|\nabla_y A\|_{L^2(0,T;L^2(T^n)^{n \times n \times n})}^2 \leq C\omega^3, \\ \|R\|_{L^2(0,T;L^2(T^n)^{n \times n})}^2 &\leq C\omega^3, \end{aligned} \quad (4.18)$$

что завершает доказательство утверждения.

ЛЕММА 4.7. *Предположим, что θ является положительным параметром. Пусть $A^\theta(t, y)$ определено (в обозначениях из (2.7)) как 1-периодическое (относительно y) решение следующей начально-краевой задачи:*

$$\begin{aligned} (A^\theta)'_t - \theta \Delta_y A^\theta &= 0 \quad \text{в } Y \times (0, T), \\ \operatorname{div}_y A^\theta &= 0 \quad \text{в } Y \times (0, T), \\ A^\theta|_{t=0} &= m - M - \nabla_y b \quad \text{в } Y, \quad \langle A^\theta \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

и $A(t, y)$ – 1-периодическое решение задачи (2.7). Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|R\|_{L^2(Y)^{n \times n}}^2 + \vartheta \|\nabla_y R\|_{L^2(0,T;L^2(Y)^{n \times n \times n})}^2 \leq C\theta^{-1}\vartheta^{-1}(\theta - \vartheta)^2,$$

где $R = A - A^\theta$ и постоянная C не зависит от θ , ϑ и T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с (2.7) и (4.19) вектор-функция R является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} R'_t - \vartheta \Delta_y R &= (\vartheta - \theta) \Delta_y A^\theta \quad \text{в } T^n \times (0, T), \\ \operatorname{div}_y R &= 0 \quad \text{в } T^n \times (0, T), \\ R|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } T^n, \quad \langle R \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Умножая первые из этих равенств на R и интегрируя полученные соотношения по $T^n \times (0, t)$, а затем по частям, как и при доказательстве леммы 3.1, имеем неравенства

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|R\|_{L^2(T^n) \times n}^2 + \vartheta \|\nabla_y R\|_{L^2(0, T; L^2(T^n) \times n \times n)}^2 \\ \leq \int_0^T \int_{T^n} |(\vartheta^{-1/2}(\theta - \vartheta) \nabla_y A^\theta, \vartheta^{1/2} \nabla_y R)| dy dt \\ \leq \vartheta^{-1}(\theta - \vartheta)^2 \|\nabla_y A^\theta\|_{L^2(0, T; L^2(T^n) \times n \times n)}^2 + \frac{\vartheta}{2} \|\nabla_y R\|_{L^2(0, T; L^2(T^n) \times n \times n)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, требуемая оценка следует из неравенства (4.13) для решения задачи (4.20), поскольку в соответствии с этим неравенством

$$\|\nabla_y A^\theta\|_{L^2(0, T; L^2(T^n) \times n \times n)}^2 \leq C\theta^{-1},$$

что завершает доказательство леммы.

§ 5. Доказательства

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5. Для доказательства теорем 2.1–2.5 будут использованы начальные слагаемые асимптотического разложения решения задачи (2.1), построенные в работах [9], [10]. В рассматриваемом случае такое разложение определяется равенствами

$$u_a = v + A_\varepsilon * f + \varepsilon u_1 - V, \quad p_a = q + \varepsilon b_\varepsilon f, \quad (5.1)$$

где (v, q) является решением задачи (2.3), $A_\varepsilon * f$ определено в (2.8), $b = b(y)$ является решением задачи (2.6) и погранслойные слагаемые $V = \sum V^\kappa$ определены в (3.25). Напомним также, что ε_* фиксировано в начале § 3, а ν_* – перед формулировкой леммы 3.3, $b_\varepsilon = b(x/\varepsilon)$ и матричнозначная функция $A = A(t, y)$ является решением задачи (2.7), в которой $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$ в соответствии с предположениями теоремы 2.5. Кроме того, в (5.1) введено обозначение

$$u_1 = -(\nabla_y \varphi_a)_\varepsilon * \nabla_x f - (\nabla_y \varphi_k)_\varepsilon g, \quad (5.2)$$

где $\varphi_a = \varphi_a(t, y)$ и $\varphi_k = \varphi_k(y)$ являются 1-периодическими решениями следующих задач на Y :

$$\begin{aligned} \Delta_y \varphi_a &= A \quad \text{в } Y, \quad \langle \varphi_a \rangle = 0 \quad (t \text{ параметр}), \\ \Delta_y \varphi_k &= K - k \quad \text{в } Y, \quad \langle \varphi_k \rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В соответствии с замечанием 4.2 решения задач (5.3) однозначно определены и являются гладкими (на $T^n \times [0, T]$ и T^n соответственно). Отметим также,

что слагаемые со свертками в (5.1) и (5.2) корректно определены, например, в соответствии с леммой 4.6 и неравенством (4.12).

Определим $R = u - u_a$ и $r = p - p_a$. Тогда (R, r) является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} R'_t - \nu \Delta R - \nu \eta \nabla \operatorname{div} R + \nabla r &= \mathcal{F}_1 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \gamma r'_t + \operatorname{div} R &= \mathcal{G}_1 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ R|_{t=0} &= \varepsilon u_1|_{t=0} \quad \text{в } \Omega, \quad r|_{t=0} = \varepsilon b_\varepsilon f|_{t=0} \quad \text{в } \Omega, \\ R &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где учтены финитность f и g в Ω , начальные и граничные условия из (2.3) и (3.10), равенство $(A_\varepsilon * f)|_{t=0} = 0$ (следующее из (2.8)) и равенство $v - V = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$, для выполнения которого и приводились построения из § 3. Кроме того, в (5.4) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= m_\varepsilon f + \nu \Delta u_a + \nu \eta \nabla \operatorname{div} u_a - (u_a)'_t - \nabla p_a, \\ \mathcal{G}_1 &= k_\varepsilon g - \gamma (p_a)'_t - \operatorname{div} u_a. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Из неравенства Гёльдера, соотношения (4.2) и леммы 4.6 (см. (4.12)) следует, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_1\|_{L^2(\Omega)^n} + \max_{0 \leq t \leq T} \|b_\varepsilon f\|_{L^2(\Omega)^n} \leq C. \quad (5.6)$$

Таким образом, учитывая обозначение (3.2), лемму 3.5 и неравенство треугольника, для доказательства теоремы достаточно проверить неравенство

$$\mathcal{E}(R, r) \leq \frac{\mathcal{E}(R, r)}{2} + C(\varepsilon^2 + \nu). \quad (5.7)$$

Используя формулу дифференцирования (4.4), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u_a &= \operatorname{div} v + \varepsilon^{-1}(\operatorname{div}_y A)_\varepsilon * f + A_\varepsilon * \nabla_x f + \varepsilon \operatorname{div} u_1 - \operatorname{div} V \\ &= \operatorname{div} v + A_\varepsilon * \nabla_x f - (\Delta_y \varphi_a)_\varepsilon * \nabla_x f - \varepsilon(\nabla_y \varphi_a)_\varepsilon * \nabla_x^2 f \\ &\quad - (\Delta_y \varphi_k)_\varepsilon g - \varepsilon(\nabla_y \varphi_a)_\varepsilon \nabla_x g + \mathcal{G} \\ &= \operatorname{div} v + k_\varepsilon g - K g - \varepsilon(\nabla_y \varphi_a)_\varepsilon * \nabla_x^2 f - \varepsilon(\nabla_y \varphi_a)_\varepsilon \nabla_x g + \mathcal{G}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где учтены также обозначение $\mathcal{G}$ из (3.30) и равенства из (2.7) и (5.3). Следовательно, учитывая также равенства из (2.3) и (5.1), последнее равенство из (5.5) можно переписать в виде

$$\mathcal{G}_1 = \varepsilon(\nabla_y \varphi_a)_\varepsilon * \nabla_x^2 f + \varepsilon(\nabla_y \varphi_a)_\varepsilon \nabla_x g - \varepsilon \gamma b_\varepsilon f'_t - \mathcal{G}. \quad (5.9)$$

Из формулы дифференцирования свертки (4.11) следует, что

$$(A_\varepsilon * f)'_t = (A'_t)_\varepsilon * f + (m - M - \nabla_y b)_\varepsilon f, \quad (5.10)$$

где учтены начальные условия из (2.7). Кроме того, вновь используя формулу дифференцирования (4.4), имеем

$$\begin{aligned} \Delta(A_\varepsilon * f) &= \operatorname{div}(\varepsilon^{-1}(\nabla_y A)_\varepsilon * f + A_\varepsilon * \nabla_x f) \\ &= \varepsilon^{-2}(\Delta_y A)_\varepsilon * f + \varepsilon^{-1}(\nabla_y A)_\varepsilon * \nabla_x f + A_\varepsilon * \Delta_x f. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Следовательно, учитывая (2.3), (2.7), (4.4), (5.10), (5.11) и обозначение для $\mathcal{F}$ из (3.31), первое равенство из (5.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= m_\varepsilon f + \vartheta(\Delta_y A)_\varepsilon * f + \nu \varepsilon^{-1} (\nabla_y A)_\varepsilon * \nabla_x f + \nu A_\varepsilon * \Delta_x f \\ &\quad + \nu \varepsilon \Delta u_1 + \nu \eta \nabla \operatorname{div} u_a - v'_t - (A'_t)_\varepsilon * f - (m - M - \nabla_y b)_\varepsilon f \\ &\quad - \varepsilon (u_1)'_t - \nabla_x q - (\nabla_y b)_\varepsilon f - \varepsilon b_\varepsilon \nabla_x f - \mathcal{F} \\ &= \sqrt{\nu} (\sqrt{\vartheta} \nabla_y A)_\varepsilon * \nabla_x f + \nu A_\varepsilon * \Delta_x f - \varepsilon (u_1)'_t - \varepsilon b_\varepsilon \nabla_x f - \mathcal{F} \\ &\quad + \nu \varepsilon \Delta u_1 + \nu \eta \nabla \operatorname{div} u_a.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Выберем $(\varphi, \psi) = (R, r)$ в интегральном тождестве (см. (3.1)) для задачи (5.4) (эквивалентно, умножим уравнения из (5.4) на (R, r) и проинтегрируем результат по Ω , а затем по частям). Тогда, интегрируя полученное соотношение по t , как и при доказательстве леммы 3.1, имеем

$$\begin{aligned}&\int_\Omega R(t)^2 dx + \gamma \int_\Omega r(t)^2 dx + \nu \int_0^t \int_\Omega (\nabla R)^2 dx d\tau \\ &\leq C \left| \int_0^t \int_\Omega (\mathcal{F}_1, R) dx d\tau \right| + C \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{G}_1 r| dx d\tau \\ &\quad + \varepsilon^2 C \int_\Omega (u_1|_{t=0})^2 dx + \varepsilon^2 \gamma C \int_\Omega (b_\varepsilon f|_{t=0})^2 dx,\end{aligned}\tag{5.13}$$

где учтено, что начальные условия из (5.4) являются неоднородными. Из неравенства Гёльдера, соотношения (4.2) и гладкости f и g следует, что последние два слагаемых из (5.13) оцениваются величиной $\varepsilon^2 C$.

В соответствии с доказательством леммы 3.1 для слагаемого из (5.13), содержащего $\mathcal{G}_1$, получаем следующее неравенство:

$$C \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{G}_1 r| dx d\tau \leq \delta_1 \gamma \max_{0 \leq t \leq T} \|r\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\mathcal{G}_1\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2,\tag{5.14}$$

где δ_1 обозначает некоторую положительную постоянную, конкретное значение которой будет уточнено позднее. Из представления (5.9), леммы 4.6, неравенства Гёльдера, соотношения (4.2) и оценки $\|\mathcal{G}\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C\nu$ следует, что последнее слагаемое из (5.14) оценивается величиной $(\varepsilon^2 + \nu)C$.

Введем обозначение

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 - \nu \varepsilon \Delta u_1 - \nu \eta \nabla \operatorname{div} u_a.$$

Используя это равенство, оценку (5.14) и интегрируя по частям в соответствующих интегралах, неравенство (5.13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&\int_\Omega R^2 dx + \gamma \int_\Omega r^2 dx + \nu \int_0^t \int_\Omega (\nabla R)^2 dx d\tau \\ &\leq C(\varepsilon^2 + \nu) + \delta_1 \mathcal{E}(R, r) + C \int_0^T \int_\Omega |(\mathcal{F}_2, R)| dx d\tau \\ &\quad + \nu C \int_0^T \int_\Omega |(\nabla(\varepsilon u_1), \nabla R)| dx d\tau + \nu C \int_0^T \int_\Omega |(\operatorname{div} u_a) \operatorname{div} R| dx d\tau.\end{aligned}\tag{5.15}$$

В соответствии с доказательством леммы 3.1 для последних двух слагаемых из (5.15) получаем следующее неравенство:

$$C \int_0^T \int_{\Omega} |(\sqrt{\nu} \nabla(\varepsilon u_1), \sqrt{\nu} \nabla R)| dx d\tau + C \int_0^T \int_{\Omega} |\sqrt{\nu} (\operatorname{div} u_a) \sqrt{\nu} \operatorname{div} R| dx d\tau \leq \delta_2 \nu \|\nabla R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 + C\nu, \quad (5.16)$$

где δ_2 обозначает положительную постоянную и учтено представление (5.8) (из которого следует, что $\|\sqrt{\nu} \operatorname{div} u_a\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C\nu$) и равенство

$$\nabla(\varepsilon u_1) = -(\nabla_y^2 \varphi_a)_\varepsilon * \nabla_x f - (\nabla_y^2 \varphi_k)_\varepsilon g - \varepsilon (\nabla_y \varphi_a)_\varepsilon * \nabla_x^2 f - \varepsilon (\nabla_y \varphi_k)_\varepsilon \nabla_x g,$$

из которого следует, что $\|\sqrt{\nu} \nabla(\varepsilon u_1)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \leq C\nu$. Здесь использованы также определение (5.2), формула (4.4), лемма 4.6, неравенство Гёльдера, соотношение (4.2) и гладкость f , g , φ_a и φ_k .

Из представления (5.12) и определений заключаем, что

$$\mathcal{F}_2 = \nu A_\varepsilon * \Delta_x f - \varepsilon (u_1)_t' - \varepsilon b_\varepsilon \nabla_x f - \mathcal{F} + \sqrt{\nu} (\sqrt{\vartheta} \nabla_y A)_\varepsilon * \nabla_x f.$$

Таким образом, в соответствии с доказательством леммы 3.1 для слагаемого из (5.15), содержащего $\mathcal{F}_2$, имеем следующее неравенство:

$$C \int_0^T \int_{\Omega} |(\mathcal{F}_2, R)| dx d\tau \leq \delta_3 \max_{0 \leq t \leq T} \|R\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + C(\varepsilon^2 + \nu) + \nu C \int_0^T \int_{\Omega} ((\sqrt{\vartheta} \nabla_y A)_\varepsilon * \nabla_x f)^2 dx d\tau, \quad (5.17)$$

где δ_3 обозначает положительную постоянную и учтены лемма 4.6, неравенство Гёльдера, соотношение (4.2) и оценка (3.32). Из леммы 4.6, неравенств (4.2) и (4.13) также следует, что последнее слагаемое из (5.17) оценивается величиной νC , поскольку $\|\sqrt{\vartheta} \nabla_y A\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma^n)^{n \times n \times n})}^2 \leq C$. Поэтому, учитывая (5.16) и (5.17), неравенство (5.15) можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} R^2 dx + \gamma \int_{\Omega} r^2 dx + \nu \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla R)^2 dx d\tau \leq C(\varepsilon^2 + \nu) + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \mathcal{E}(R, r). \quad (5.18)$$

Таким образом, выбирая $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1/6$ и вычисляя максимум по $t \in [0, T]$ в (5.18), получаем неравенство (5.7). В частности, имеем оценки

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - A_\varepsilon * f - \varepsilon u_1 + V\|_{L^2(\Omega)^n}^2 &\leq C(\varepsilon^2 + \nu), \\ \max_{0 \leq t \leq T} \|p - q - \varepsilon b_\varepsilon f\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C(\varepsilon^2 + \nu), \end{aligned} \quad (5.19)$$

что (вместе с (5.6) и леммой 3.5) завершает доказательство теоремы 2.5.

Отметим, что оценка (2.5) следует непосредственно из (5.6) и (5.19) вне зависимости (при рассмотрении начальных приближений) от выполнения условий (1.1)–(1.3), как это и утверждается в теоремах 2.1–2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Оценки (5.7) и (5.19) выполнены при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ и $0 < \nu \leq \nu_*$ и являются равномерными по параметру $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$. В частности, эти оценки выполнены при $0 < 1/\vartheta \leq \vartheta_*$. Из формулы дифференцирования (4.11) следует, что

$$A_\varepsilon * f = (A_\varepsilon^{(-1)} * f)'_t = A_\varepsilon^{(-1)} * (f)'_t + A_\varepsilon^{(-1)}(f|_{t=0}). \quad (5.20)$$

Используя неравенство (4.2), лемму 4.6, утверждение 2.7 и гладкость f , имеем

$$\|A_\varepsilon * f\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^n)} \leq C\|A^{(-1)}\|_{C^0([0,T];L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n})} \leq C\left(\frac{1}{\vartheta}\right).$$

Таким образом, учитывая это неравенство и (5.6) в (5.19), получаем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v + V\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C\left(\varepsilon^2 + \nu + \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^2\right), \quad (5.21)$$

что (вместе с леммой 3.5 и (5.19)) завершает доказательство теоремы.

Отметим, что непосредственно из (4.18) и (5.19) также следует, что

$$\left\|u - v - \frac{1}{\vartheta} a_\varepsilon f + V\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)}^2 \leq C\left(\varepsilon^2 + \nu + \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^3\right), \quad (5.22)$$

поскольку $a_\varepsilon f = a_\varepsilon * (f)'_t + a_\varepsilon(f|_{t=0})$ (см. (4.10), (5.20)), и поэтому

$$\left\|A_\varepsilon * f - \frac{1}{\vartheta} a_\varepsilon f\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)}^2 \leq C\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^3,$$

где $a = a(y)$ является 1-периодическим решением задачи (2.11). Кроме того, используя неравенство (5.7) и утверждение 2.7, заключаем, что

$$\mathcal{E}\left(u - v - \frac{1}{\vartheta} a_\varepsilon f + V, p - q\right) \leq C\left(\varepsilon^2 + \nu + \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^2\right). \quad (5.23)$$

Действительно, учитывая (4.4), имеем

$$\nabla\left(A_\varepsilon * f - \frac{1}{\vartheta} a_\varepsilon f\right) = \varepsilon^{-1}(\nabla_y A)_\varepsilon * f - \varepsilon^{-1}\frac{1}{\vartheta}(\nabla_y a)_\varepsilon f + A_\varepsilon * \nabla_x f - \frac{1}{\vartheta} a_\varepsilon \nabla_x f,$$

и поэтому (в силу (4.2) и леммы 4.6) выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \nu \left\| \nabla \left(A_\varepsilon * f - \frac{1}{\vartheta} a_\varepsilon f \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \\ & \leq \vartheta C \left\| \nabla_y A^{(-1)} - \frac{1}{\vartheta} \nabla_y a \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n \times n})}^2 \\ & \quad + \nu C \left\| A^{(-1)} - \frac{1}{\vartheta} a \right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n})}^2 \leq C \left(\left(\frac{1}{\vartheta} \right)^2 + \nu \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^3 \right), \end{aligned} \quad (5.24)$$

которые и следует учесть в (5.7) для получения (5.23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Оценки (5.7) и (5.19) выполнены при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ и $0 < \nu \leq \nu_*$ и являются равномерными по параметру $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$. В частности, эти оценки выполнены при $0 < \vartheta \leq \vartheta_*$. Определим $A^0 = m - M - \nabla_y b$ в обозначениях из (2.6). Тогда $A_\varepsilon^0 f^{(-1)} = A_\varepsilon^0 * f$ в силу (2.9) и (4.10). Поэтому, используя неравенство (4.2), лемму 4.6, утверждение 2.6 и гладкость f , получаем

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon * f - A_\varepsilon^0 * f\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^n)} &\leq C\|A_\varepsilon - A_\varepsilon^0\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})} \\ &\leq C\|A - A^0\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n})} \leq C\vartheta. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая это неравенство и (5.6) в (5.19), имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - A_\varepsilon^0 f^{(-1)} + V\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C(\varepsilon^2 + \nu + \vartheta^2), \quad (5.25)$$

что (вместе с леммой 3.5 и (5.19)) завершает доказательство теоремы.

Отметим, что из (5.7) и утверждения 2.6 также следует, что

$$\mathcal{E}(u - v - A_\varepsilon^0 f^{(-1)} + V, p - q) \leq C(\varepsilon^2 + \nu + \vartheta^2), \quad (5.26)$$

поскольку для $\nabla(A_\varepsilon * f - A_\varepsilon^0 f^{(-1)})$ выполнена оценка, аналогичная (5.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Обозначим через θ положительную постоянную из условия (1.2). Оценки (5.7) и (5.19) выполнены при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ и $0 < \nu \leq \nu_*$ и являются равномерными по параметру $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$. В частности, эти оценки выполнены при $|\theta - \vartheta| \leq \vartheta_*$. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что

$$C \leq \frac{\nu}{\varepsilon^2} \theta^{-1} \leq C^{-1} \quad (5.27)$$

при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, $0 < \nu \leq \nu_*$ и $|\theta - \nu/\varepsilon^2| \leq \vartheta_*$.

Пусть $A^\theta(t, y)$ определено как 1-периодическое решение задачи (4.19). Тогда, используя неравенство (4.2), леммы 4.6 и 4.7, неравенство (5.27) и гладкость f , получаем

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon * f - A_\varepsilon^\theta * f\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^n)} &\leq C\|A - A^\theta\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^n)^{n \times n})} \\ &\leq C\vartheta^{-1/2}\theta^{-1/2}|\theta - \vartheta| \leq C\theta^{-1}|\theta - \vartheta|. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая это неравенство и (5.6) в (5.19), имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - A_\varepsilon^\theta * f + V\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C(\varepsilon^2 + \nu + \theta^{-2}|\theta - \vartheta|^2), \quad (5.28)$$

что (вместе с леммой 3.5 и (5.19)) завершает доказательство теоремы.

Отметим, что из (5.7) и леммы 4.7 также следует, что

$$\mathcal{E}(u - v - A_\varepsilon^\theta * f + V, p - q) \leq C(\varepsilon^2 + \nu + \theta^{-2}|\theta - \vartheta|^2), \quad (5.29)$$

поскольку для $\nabla(A_\varepsilon * f - A_\varepsilon^\theta * f)$ выполнена оценка, аналогичная (5.24).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Оценки (5.19), (5.21), (5.22), (5.25) и (5.28), как и соответствующие оценки (5.7), (5.23), (5.26), (5.29) для “энергетических” норм, являются уточнениями оценок соответствующих теорем из § 2. Эти уточнения достигаются с помощью учета в этих оценках погранслошных слагаемых, построенных в § 3. Учет дополнительных погранслошных слагаемых в этих оценках

приводит к дальнейшему уточнению таких оценок. Однако, как уже отмечалось в замечании 3.9, строгое обоснование таких уточнений является достаточно громоздким. Отметим также, что постоянные в доказанных здесь оценках зависят только от фиксированных (в силу предположений) $n, \eta, \gamma, T, \Omega$ и соответствующих норм функций $m(y), k(y), f(t, x), g(t, x)$ и норм производных $f(t, x)$ и $g(t, x)$ (фактически, не более чем второго порядка).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Решение (u, p) задачи (2.1) при $\nu = 0$ с граничным условием $(u, N) = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$ можно определить также с помощью интегрального тождества (3.1), в котором $\nu = 0$ и

$$\varphi \in H_0(\Omega) \equiv \{\phi \in L^2(\Omega)^n : \operatorname{div} \phi \in L^2(\Omega) \text{ и } (\phi, N) = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Отметим, что в соответствии с [1] пространство $H_0(\Omega)$ корректно определено и является гильбертовым. Можно также свести рассматриваемую задачу к начально-краевой задаче с граничными условиями Неймана для волнового уравнения и доказать известными методами существование и единственность соответствующего решения. Кроме того, как и при доказательстве леммы 3.1, для решения такой задачи проверяется “энергетическое” неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \gamma \max_{0 \leq t \leq T} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 + \|g\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2). \quad (5.30)$$

Определим $A^0 = m - M - \nabla_y b$ в обозначениях из (2.6) и

$$u_1^0 = -(\nabla_y a)_\varepsilon \nabla_x f^{(-1)} - (\nabla_y \varphi_k)_\varepsilon g, \quad (5.31)$$

где $a(y)$ – решение задачи (2.11) и $\varphi_k(y)$ – решение задачи (5.3).

В рассматриваемом случае начальные слагаемые асимптотического разложения решения задачи (2.1) при $\nu = 0$ определяются равенствами

$$u_a^0 = v + A_\varepsilon^0 f^{(-1)} + \varepsilon u_1^0, \quad p_a = q + \varepsilon b_\varepsilon f, \quad (5.32)$$

где (v, q) является решением задачи (2.3). Отметим, что здесь нет необходимости вводить погранслойные слагаемые, поскольку в рассматриваемом случае решения исходной задачи (2.1) при $\nu = 0$ и осредненной задачи (2.3) удовлетворяют одинаковым граничным условиям.

Пусть $R = u - u_a^0$ и $r = p - p_a$. Тогда (R, r) является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} R'_t + \nabla r &= \mathcal{F}_3 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \gamma r'_t + \operatorname{div} R &= \mathcal{G}_3 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ R|_{t=0} &= \varepsilon u_1^0|_{t=0} \quad \text{в } \Omega, \quad r|_{t=0} = \varepsilon b_\varepsilon f|_{t=0} \quad \text{в } \Omega, \\ (R, N) &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (5.33)$$

где введены обозначения

$$\mathcal{F}_3 = m_\varepsilon f - (u_a^0)'_t - \nabla p_a, \quad \mathcal{G}_3 = k_\varepsilon g - \gamma(p_a)'_t - \operatorname{div} u_a^0.$$

Для таких $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{G}_3$, как и при доказательстве теоремы 2.5, имеем

$$\mathcal{G}_3 = \varepsilon(\nabla_y a)_\varepsilon \nabla_x^2 f^{(-1)} + \varepsilon(\nabla_y \varphi_a)_\varepsilon \nabla_x g - \varepsilon \gamma b_\varepsilon f'_t, \quad (5.34)$$

поскольку $\operatorname{div}_y A^0 = 0$ в соответствии с (2.6), и

$$\mathcal{F}_3 = m_\varepsilon f - v'_t - A_\varepsilon^0 f - \varepsilon(u_1^0)'_t - \nabla_x q - (\nabla_y b)_\varepsilon f - \varepsilon b_\varepsilon \nabla_x f = -\varepsilon(u_1^0)'_t - \varepsilon b_\varepsilon \nabla_x f, \quad (5.35)$$

где учтены равенства из (2.3) и (5.32).

Таким образом, из “энергетического” неравенства (аналогичного (5.30)) для задачи (5.33) следует, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - A_\varepsilon^0 f^{(-1)} - \varepsilon u_1^0\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \gamma \max_{0 \leq t \leq T} \|p - q - \varepsilon b_\varepsilon f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\varepsilon^2$$

при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, поскольку соответствующие нормы $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{G}_3$ из (5.35) и (5.34) оцениваются, как и при доказательстве теоремы 2.5. Следовательно, учитывая неравенство (аналогичное (5.6)) для u_1^0 из (5.31), получаем требуемые оценки, что завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.8. В рассматриваемом случае начальные слагаемые разложения решения задачи (2.12) также определяются равенствами (5.1). Однако теперь в (5.1) выбирается (v, q) как решение задачи (2.13), погранслойные слагаемые $V = \sum V^\kappa$ определяются в (3.25) с использованием такого v в (3.9) и $g = 0$ в (5.2).

Определим $R = u - u_a$ и $r = p - p_a$. Тогда (R, r) удовлетворяет следующим равенствам:

$$\begin{aligned} R'_t - \nu \Delta R + \nabla r &= \mathcal{F}_1 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} R &= \mathcal{G}_1 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ R|_{t=0} &= \varepsilon u_1|_{t=0} \quad \text{в } \Omega, \quad R = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (5.36)$$

где $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{G}_1$ заданы равенствами (5.5), в которых $\eta = 0$, $\gamma = 0$ и $g = 0$.

В силу (5.8)–(5.12) для таких $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{G}_1$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \nu \varepsilon^{-1} (\nabla_y A)_\varepsilon * \nabla_x f + \nu A_\varepsilon * \Delta_x f + \nu \varepsilon \Delta u_1 - \varepsilon(u_1^0)'_t - \varepsilon b_\varepsilon \nabla_x f - \mathcal{F}, \\ \mathcal{G}_1 &= \varepsilon(\nabla_y \varphi_a)_\varepsilon * \nabla_x^2 f - \mathcal{G}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где учтены обозначения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ из (3.30) и (3.31).

В соответствии с [1] (см. доказательство леммы 3.2) равенства из (5.36) выполняются, например, в смысле $H^{-1}(\Omega)^3$ для почти всех $t \in (0, T)$. Умножая эти равенства на R и интегрируя полученные соотношения по Ω , а затем по частям, имеем

$$\int_\Omega \left(\frac{R^2}{2} \right)'_t dx + \nu \int_\Omega (\nabla R)^2 dx = \int_\Omega (\mathcal{F}_1, R) dx + \int_\Omega r \mathcal{G}_1 dx.$$

Следовательно, интегрируя это равенство по t , как и при доказательстве теоремы 2.5, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_\Omega R^2 dx + \nu \int_0^t \int_\Omega (\nabla R)^2 dx d\tau &\leq \delta_2 \nu \|\nabla R\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \\ &+ \delta_3 \max_{0 \leq t \leq T} \|R\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + C(\varepsilon^2 + \nu) + C \int_0^T \int_\Omega |r \mathcal{G}_1| dx d\tau \end{aligned} \quad (5.38)$$

в соответствии с (5.13), где учтены неравенства (5.16) и (5.17).

Из неравенства (3.55) следует, что $\|r\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$, поскольку q , f и b являются гладкими (см. (5.1)). Поэтому, используя неравенство Гёльдера, соотношения (5.37) и оценку (3.45) (при $l = 0$), имеем

$$C \int_0^T \int_{\Omega} |r \mathcal{G}_1| dx d\tau \leq C(\varepsilon + \nu) \quad (5.39)$$

при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ и $0 < \nu \leq \nu_*$, где ε_* и ν_* определены в доказательстве теоремы 2.5. Таким образом, выбирая $\delta_2 = \delta_3 = 1/2$ и вычисляя максимум по $t \in [0, T]$ в (5.38), заключаем, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|R\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \nu \|\nabla R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \leq C(\varepsilon + \nu). \quad (5.40)$$

Умножим теперь первые равенства из (5.36) на R'_t и проинтегрируем полученные соотношения по Ω , а затем по частям. Тогда

$$\int_{\Omega} (R'_t)^2 dx + \nu \int_{\Omega} \left(\frac{(\nabla R)^2}{2} \right)'_t dx = \int_{\Omega} (\mathcal{F}_1, R'_t) dx + \int_{\Omega} r(\mathcal{G}_1)'_t dx. \quad (5.41)$$

Введем обозначение $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 - \nu \varepsilon \Delta u_1$. Используя это равенство и интегрируя (5.41) по t , как и при доказательстве теоремы 2.5, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} (R'_t)^2 dx d\tau + \nu \int_{\Omega} (\nabla R(t))^2 dx &\leq C(\varepsilon^2 + \nu) \\ &+ \delta_4 \|R'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)}^2 + C(\varepsilon + \nu) + \nu C \left| \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla(\varepsilon u_1), \nabla R'_t) dx d\tau \right|, \end{aligned} \quad (5.42)$$

где δ_4 обозначает положительную постоянную и учтены неравенства, аналогичные (5.17) и (5.39) (см. (3.46) при $l = 1$).

Интегрируя по частям в последнем интеграле из (3.41), имеем

$$\begin{aligned} \nu C \left| \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla(\varepsilon u_1), \nabla R'_t) dx d\tau \right| &\leq \nu C \int_{\Omega} (\nabla(\varepsilon u_1)|_{t=0})^2 dx \\ &+ \nu C \left| \int_{\Omega} (\nabla(\varepsilon u_1(t)), \nabla R(t)) dx \right| + \nu C \left| \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla(\varepsilon u_1)'_t, \nabla R) dx d\tau \right| \\ &\leq C\nu + \delta_5 \max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla R\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 + \nu C \|\nabla R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \\ &\leq C(\varepsilon + \nu) + \delta_5 \max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla R\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2, \end{aligned} \quad (5.43)$$

где δ_5 обозначает положительную постоянную и учтены оценка (5.40) и неравенство (аналогичное) (5.16).

Таким образом, выбирая $\delta_4 = \delta_5 = 1/2$ в (5.42), (5.43) и вычисляя максимум по $t \in [0, T]$ в (5.42), заключаем, что

$$\|R'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)}^2 + \nu \|\nabla R\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \leq C(\varepsilon + \nu).$$

Поэтому, используя неравенство (аналогичное) (3.55) и (5.40), получаем

$$\|r\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})}^2 \leq C(\varepsilon + \nu). \quad (5.44)$$

Из этой оценки и неравенства Гёльдера следует, что в неравенстве (5.39) можно заменить ε на $\varepsilon^{3/2}$. Таким образом, в соответствии с (5.38) имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|R\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \nu \|\nabla R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \leq C(\varepsilon^{3/2} + \nu). \quad (5.45)$$

Отметим, что в неравенстве (5.39) можно увеличить и показатель степени ν в соответствии с (3.46), однако такое уточнение этой оценки не улучшает оценки (5.45), например, в силу (3.32).

Из оценок (5.44) и (5.45) также следует, что в неравенствах (5.42) и (5.43) можно заменить ε на $\varepsilon^{3/2}$, и поэтому

$$\|R'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)}^2 + \nu \|\nabla R\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 + \|r\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})}^2 \leq C(\varepsilon^{3/2} + \nu), \quad (5.46)$$

что (вместе с (5.6) и леммой 3.5) завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.9. В соответствии с доказательством теоремы 2.1 (см. (5.20) и (5.21)) требуемые оценки следуют из (5.6), (5.45), (5.46), утверждения 2.7 и леммы 3.5. Теорема доказана.

Отметим, что из (5.6), (5.45) и утверждения 2.7 также следует, что

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u - v + V\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \nu \left\| \nabla \left(u - v - \frac{1}{\vartheta} a_\varepsilon f + V \right) \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \\ \leq C \left(\varepsilon^{3/2} + \nu + \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

поскольку для $\nabla(A_\varepsilon * f - (1/\vartheta)a_\varepsilon f)$ выполнена оценка (5.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.10. Из неравенства (4.1) и предположений теоремы следует, что $F_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)$. Поэтому, например, в соответствии с [1], [3] для фиксированных ε и ν существует $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n)$, удовлетворяющее (2.17) и (2.18). Напомним, что рассматривается случай $2 \leq n \leq 4$. В общем случае (при $n \geq 3$) не известно, является ли такое решение единственным и выполнено ли включение $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)$. Таким образом, рассмотрим каждое решение u , удовлетворяющее (2.17) и (2.18), и несколько изменим схему доказательства леммы 3.1 для вывода требуемой оценки.

Из предположений теоремы следует, что $F(t, x, y) \in L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R})^n$ и $\nabla_x F(t, x, y) \in L^2(\Omega; L^\infty_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R})^{n \times n}$ для почти всех $t \in (0, T)$. Фиксируем положительное δ , меньшее единицы. Тогда в соответствии с леммой 4.4 найдутся такие $\phi \in L^2(\Omega; C^{1-\delta}_{\text{per}}(Y)^n)$ и $\psi \in L^2(\Omega; C^{1-\delta}_{\text{per}}(Y)^{n \times n})$, что

$$F_\varepsilon = \varepsilon \phi_\varepsilon + \varepsilon \operatorname{div}(\psi_\varepsilon) \quad (5.47)$$

для почти всех $t \in (0, T)$ и (с постоянной C , зависящей только от n)

$$\begin{aligned} \|\phi_\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^n)} &\leq C \|\nabla_x F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega;L^\infty_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R})^{n \times n})} \equiv I_1, \\ \|\psi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})} &\leq C \|F\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega;L^\infty_{\text{per}}(Y)/\mathbb{R})^n)} \equiv I_2. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Таким образом, в соответствии с доказательствами лемм 3.1 и 4.5 из (5.47), неравенства Гёльдера и (2.18) следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(t)}{\sqrt{2}} \right\|_{L^2(\Omega)^n}^2 &\leq \varepsilon I_1 \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\nu}} I_2 \|\sqrt{\nu} \nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}, \\ \|\sqrt{\nu} \nabla u\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 &\leq \varepsilon I_1 \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\nu}} I_2 \|\sqrt{\nu} \nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})} \end{aligned} \quad (5.49)$$

для почти всех $t \in (0, T)$, где использованы обозначения из (5.48).

Добавим к правым частям неравенств из (5.49) неотрицательные величины $\varepsilon I_1 \|\sqrt{\nu} \nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}$ и $(\varepsilon/\sqrt{\nu}) I_2 \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)}$ и извлечем корень квадратный из полученных неравенств (следуя, например, [3]). Тогда, умножая первое из этих неравенств на $\sqrt{2}$, суммируя полученные неравенства и вычисляя существенный супремум, имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)} + \|\sqrt{\nu} \nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})} &\leq (1 + \sqrt{2}) \left(\varepsilon I_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\nu}} I_2 \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)} + \|\sqrt{\nu} \nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

В этом неравенстве без ограничения общности можно считать, что величина $\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)} + \|\sqrt{\nu} \nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}$ является положительной, поскольку в обратном случае оценка теоремы 2.10 выполняется непосредственно при $C = 0$. Таким образом, разделив (5.50) на эту величину и возводя полученное неравенство в четвертую степень, получаем

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)}^2 + \|\sqrt{\nu} \nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \leq 2(1 + \sqrt{2})^4 \left(\varepsilon^2 I_1^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\nu}} \right)^2 I_2^2 \right), \quad (5.51)$$

что завершает доказательство теоремы.

Отметим, что постоянные I_1 и I_2 в (5.51) зависят только от n и F (см. (5.48)). Кроме того, в этом доказательстве не используется, что $\nu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.11. Из формулы дифференцирования быстросциллирующих функций (4.4) следует, что

$$F_\varepsilon = (\nabla_y G) \left(t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \varepsilon \nabla \left(G \left(t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) - \varepsilon (\nabla_x G) \left(t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right). \quad (5.52)$$

Поэтому, учитывая, что $\operatorname{div} u = 0$ и $u \in H_0^1(\Omega)$ для почти всех t , имеем

$$\int_\Omega (F_\varepsilon, u) dx = -\varepsilon \int_\Omega \left((\nabla_x G) \left(t, x, \frac{x}{\varepsilon} \right), u(t, x) \right) dx.$$

Таким образом, повторяя доказательство оценки теоремы 2.10, получаем

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)}^2 + \|\sqrt{\nu} \nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \\ \leq \varepsilon^2 (1 + \sqrt{2})^4 \|\nabla_x G\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega;L_{\text{per}}^\infty(Y)^n))}^2, \end{aligned} \quad (5.53)$$

что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В предположениях теорем 2.10 или 2.11 решения системы (2.15) имеют асимптотически малую “энергию”. Однако с помощью известных методов не удастся доказать единственность даже таких решений при $n \geq 3$. Некорректное утверждение о единственности решений (имеющих асимптотически малую энергию) нестационарной системы Навье–Стокса приведено в одной из последних строк работы [34], где рассматривались вопросы осреднения нестационарных и стационарных систем Стокса (при любой вязкости) и Навье–Стокса (при не слишком малой вязкости), рассматриваемых в перфорированных областях с периодом ε . Впрочем, утверждение о единственности решений нестационарной системы Навье–Стокса не используется ни в настоящей работе, ни в работе [34], где доказаны утверждения о сходимости решений соответствующих систем уравнений к решениям осредненных задач и решения таких осредненных задач определены однозначно. Соответственно, здесь только утверждается, что для каждого решения u , удовлетворяющего (2.17) и (2.18), выполнены неравенства (5.51) или (5.52). В частности, такие решения имеют (однозначно определенный) нулевой предел в “энергетической” норме при $\varepsilon \rightarrow 0$ в предположениях теорем 2.10 или 2.11. Поэтому (в качестве гипотезы) кажется естественным, что утверждение о единственности при достаточно малых и фиксированных ε (и малых ε^2/ν в предположениях теоремы 2.10) выполняется для таких решений, имеющих асимптотически малую энергию.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Пусть выполнены предположения теоремы 2.11 и $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n)$ удовлетворяет (2.17), (2.18) и поэтому (5.53). Определим для почти всех $t \in (0, T)$ вектор-функции

$$\begin{aligned} u^{(-1)} &= \int_0^t u \, d\tau, & F_\varepsilon^{(-1)} &= \int_0^t F_\varepsilon \, d\tau, & B &= \int_0^t u \cdot \nabla u \, d\tau, \\ w &= F_\varepsilon^{(-1)} - u + \nu \Delta u^{(-1)} - B. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Выберем такое $\varphi \in H_0^1(\Omega)^n$, что $\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} = 1$. Тогда

$$\left| \int_\Omega (u \cdot (\nabla u), \varphi) \, dx \right| = \left| \int_\Omega (u \cdot (\nabla \varphi), u) \, dx \right| \leq \|u\|_{L^4(\Omega)^n}^2 \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} \quad (5.55)$$

(см., например, [1, гл. 2, лемма 1.3]). Супремум по φ от левой части (5.55) определяет норму в $H^{-1}(\Omega)^n$. Следовательно, используя известное мультипликативное неравенство для L^4 -нормы (см., например, [33, гл. 2, теорема 2.1]) и определение (5.54), получаем

$$\begin{aligned} \|B\|_{H^{-1}(\Omega)^n} &\leq \int_0^T \|u \cdot \nabla u\|_{H^{-1}(\Omega)^n} \, dt \leq \int_0^T \|u\|_{L^4(\Omega)^n}^2 \, dt \\ &\leq C \int_0^T \|u\|_{L^2(\Omega)^n}^{(4-n)/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^{n/2} \, dt \\ &\leq C \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)}^{(4-n)/2} \|\nabla u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})}^{n/2} \\ &\leq C \varepsilon^{(4-n)/2} \varepsilon^{n/2} (\nu^{-1/2})^{n/2} = C \varepsilon^2 \nu^{-n/4} \end{aligned} \quad (5.56)$$

в соответствии с (5.53) и (5.55). Здесь также учтено неравенство Гёльдера с показателями $p = 4/(4 - n)$ и $q = 4/n$ при $n \leq 3$. Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \|\nu \Delta u^{(-1)}\|_{H^{-1}(\Omega)^n} &= \|\nu \nabla u^{(-1)}\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} \leq \int_0^T \|\nu \nabla u\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} dt \\ &\leq \nu C \|\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n \times n})} \leq C\varepsilon \nu^{1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому, используя (5.53), (5.56) и неравенство треугольника, получаем

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)} \leq C(\varepsilon + \varepsilon^2 \nu^{-n/4}), \quad (5.57)$$

поскольку $\|F_\varepsilon^{(-1)}\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)^n)} \leq C\varepsilon$ в силу представления (5.52) и предположений теоремы 2.11.

Следуя, например, [6] (см. также [1, гл. 3, (3.127)], где $C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ полезно заменить на $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$), можно определить такую функцию $p \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)/\mathbb{R})$, что $\nabla p^{(-1)} = w$ (см. (5.54)), уравнения Навье–Стокса (2.15) выполняются в смысле распределений и

$$\begin{aligned} \|p\|_{W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})} &= \|(p^{(-1)})'_t\|_{W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})} \\ &\leq \|p^{(-1)}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})} \leq C(\varepsilon + \varepsilon^2 \nu^{-n/4}) \end{aligned} \quad (5.58)$$

в силу (5.57) и неравенства Нечаса. Здесь $W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)/\mathbb{R})$ является пространством, сопряженным $W_0^{1,1}(0, T; L_0^2(\Omega))$, где пространство $L_0^2(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega): \int_\Omega \varphi dx = 0\}$ является сопряженным и изоморфным $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ (дальнейшие подробности можно найти в [1], [6]). Отметим, что в настоящей работе эти изоморфные пространства фактически отождествляются.

Таким образом, функция p (точнее, распределение, соответствующее давлению) является асимптотически малой, если $\varepsilon^2 \nu^{-n/4} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Например, для $n = 4$ это условие означает выполнение предположения (1.1), что существенно отличает нелинейный случай от линейного, в котором оценка (2.14) выполняется без дополнительных предположений об асимптотическом поведении отношения параметров ε и ν .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Пусть выполнены предположения теоремы 2.10 и $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n)$ удовлетворяет (2.17), (2.18) и поэтому (5.51). Тогда, повторяя доказательство (5.58), где учтено (5.51) вместо (5.53), можно определить такое $p \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)/\mathbb{R})$, что уравнения Навье–Стокса (2.15) выполняются в смысле распределений и

$$\|p\|_{W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R})} \leq C\left(\varepsilon + \left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{\nu}\right)\nu^{-n/4}\right) \leq C(\varepsilon + \varepsilon^2 \nu^{-1-n/4}). \quad (5.59)$$

Приведенная схема доказательства оценок (5.58) и (5.59) использовалась ранее в работе [34] при оценке соответствующих норм p для задач гидродинамики, рассматриваемых в перфорированных областях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.12. Здесь предполагается, что выполнены условия теоремы 2.1. В частности, при доказательстве теоремы 2.1 определены положительные ε_* , ν_* и ϑ_* , которые используются в доказательстве этого

следствия. В соответствии с доказательством леммы 3.1 и (3.48) имеем

$$\begin{aligned} E_\varepsilon^\nu(t) &= \int_0^t \int_\Omega (m_\varepsilon f, u) dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega k_\varepsilon g p dx d\tau, \\ E_0(t) &= \int_0^t \int_\Omega (M f, v) dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega K g q dx d\tau. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Следовательно, используя (5.6), (5.19) и (5.21), получаем

$$E_\varepsilon^\nu(t) = \int_0^t \int_\Omega (m_\varepsilon f, v - V) dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega k_\varepsilon g q dx d\tau + O\left(\varepsilon + \sqrt{\nu} + \frac{\varepsilon^2}{\nu}\right). \quad (5.61)$$

В соответствии с построениями, проведенными в § 3, носитель вектор-функции $V(t, x)$ сосредоточен в приграничной полосе $\Omega_\varrho \subset \Omega$ шириной ϱ (не зависящей от $t \in [0, T]$), где положительное ϱ определяется положительным z_0 , для которого замена координат (3.7) является диффеоморфизмом. При этом, уменьшая z_0 , можно уменьшить (если необходимо) до нужного значения и ϱ , поскольку граница $\partial\Omega$ является гладкой в силу предположений. С другой стороны, носитель вектор-функции $f(t, x)$ расположен на положительном расстоянии (не зависящем от $t \in [0, T]$) от границы $\partial\Omega$, поскольку f финитна в силу предположений.

Таким образом, уменьшая, если необходимо, ν_* (при котором выполнены леммы 3.3, 3.6, используемые в доказательстве теоремы 2.1), можно считать, что $\int_\Omega (m_\varepsilon f, V) dx = 0$. Поэтому, учитывая лемму 4.3, (5.60) и (5.61), имеем

$$E_\varepsilon^\nu(t) = E_0(t) + O\left(\varepsilon + \sqrt{\nu} + \frac{\varepsilon^2}{\nu}\right), \quad (5.62)$$

что приводит к требуемой оценке следствия.

Более подробно, можно воспользоваться представлением

$$\begin{aligned} E_\varepsilon^\nu(t) - E_0(t) &= \int_0^t \int_\Omega (m_\varepsilon f, u - v) dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega ((m_\varepsilon - M)f, v) dx d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_\Omega k_\varepsilon g(p - q) dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega (k_\varepsilon - K)gq dx d\tau \end{aligned}$$

и оценить по модулю интегралы из этого равенства (справа) с помощью неравенства Гёльдера, леммы 4.3, соотношений (5.6), (5.19) и (5.21). Фактически, выполнение таких оценок и подразумевается в соотношениях (5.61) и (5.62), что завершает доказательство следствия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.13. Учитывая (5.6), (5.19) и (5.60), как и при доказательстве следствия 2.12, получаем

$$\begin{aligned} E_\varepsilon^\nu(t) &= \int_0^t \int_\Omega (m_\varepsilon f, v) dx d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_\Omega (m_\varepsilon f, A_\varepsilon * f) dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega k_\varepsilon g q dx d\tau + O(\varepsilon + \sqrt{\nu}). \end{aligned}$$

Поэтому, используя лемму 4.5, (2.8) и (2.21), имеем соотношение

$$E_\varepsilon^\nu(t) = E_0(t) + \int_0^t \int_\Omega \int_Y (m f, S) dy dx d\tau + O(\varepsilon + \sqrt{\nu}). \quad (5.63)$$

Из определения (2.21) (и равенств из (2.7)) также следует, что

$$\begin{aligned} S'_t - \vartheta \Delta_y S &= \int_0^t (A'_t(t - \tau, y) - \vartheta \Delta_y A(t - \tau, y)) f(\tau, x) d\tau \\ &+ (m - M - \nabla_y b) f = (m - M - \nabla_y b) f, \end{aligned} \quad (5.64)$$

где учтена формула дифференцирования свертки, аналогичная (4.11), и дифференцирование под знаком интеграла корректно, поскольку компоненты A и f являются гладкими.

Умножая (5.64) на S и интегрируя результат по Y , получаем

$$\begin{aligned} \langle S^2/2 \rangle'_t + \vartheta \langle \nabla_y S, \nabla_y S \rangle &= \langle (m - M - \nabla_y b) f, S \rangle \\ &= \langle m f, S \rangle - \langle M f, S \rangle - \langle \nabla_y b f, S \rangle = \langle m f, S \rangle, \end{aligned} \quad (5.65)$$

поскольку $\langle S \rangle = 0$ и $\operatorname{div}_y S = 0$ в соответствии с (2.7). Напомним, что здесь используется обозначение из (2.4) для среднего по Y .

Интегрируя равенство (5.65) по $(0, t) \times \Omega$ и учитывая полученное соотношение в (5.63), имеем

$$E_\varepsilon^\nu(t) = E_0(t) + E_\vartheta(t) + O(\varepsilon + \sqrt{\nu})$$

в соответствии с (2.22). Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.14. Учитывая (5.6), (5.19) и (5.25), как и при доказательстве следствия 2.12, получаем

$$\begin{aligned} E_\varepsilon^\nu(t) &= \int_0^t \int_\Omega (m_\varepsilon f, v) dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega (m_\varepsilon f, A_\varepsilon^0 f^{(-1)}) dx d\tau \\ &+ \int_0^t \int_\Omega k_\varepsilon g q dx d\tau + O\left(\varepsilon + \sqrt{\nu} + \frac{\nu}{\varepsilon^2}\right), \end{aligned}$$

где $A^0 = m - M - \nabla_y b$ в обозначениях из (2.6). Поэтому, используя лемму 4.5, имеем соотношение

$$E_\varepsilon^\nu(t) = E_0(t) + \int_0^t \int_\Omega \int_Y (m f, A^0 f^{(-1)}) dy dx d\tau + O\left(\varepsilon + \sqrt{\nu} + \frac{\nu}{\varepsilon^2}\right). \quad (5.66)$$

Используя формулу Лейбница и определение (2.9), получаем

$$\begin{aligned} \langle (A^0 f^{(-1)})^2/2 \rangle'_t &= \langle A^0 f, A^0 f^{(-1)} \rangle = \langle m f, A^0 f^{(-1)} \rangle \\ &- \langle M f, A^0 f^{(-1)} \rangle - \langle \nabla_y b f, A^0 f^{(-1)} \rangle = \langle m f, A^0 f^{(-1)} \rangle, \end{aligned} \quad (5.67)$$

поскольку $\langle A^0 \rangle = 0$ и $\operatorname{div}_y A^0 = 0$ в силу (2.4) и (2.6). Интегрируя равенство (5.67) по $(0, t) \times \Omega$ и учитывая результат в (5.66), имеем

$$E_\varepsilon^\nu(t) = E_0(t) + E_0^0(t) + O\left(\varepsilon + \sqrt{\nu} + \frac{\nu}{\varepsilon^2}\right)$$

в соответствии с (2.23). Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.15. Для доказательства этого следствия достаточно повторить доказательство следствия 2.13, в котором оценка (5.19) заменена оценкой (5.45). Следствие доказано.

Доказательство следствия 2.16. В соответствии с определениями следует проверить, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\nu \rightarrow 0$ выполняется соотношение

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u, \varphi) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} (v, \varphi) dx dt, \quad \varphi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^n). \quad (5.68)$$

Из леммы 3.1 следует, что $\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n)} \leq C$. Поэтому (5.68) достаточно доказать только для φ из плотного множества в $L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)$. Известно и непосредственно проверяется, что в качестве такого плотного множества можно выбрать $C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^n$. Таким образом, фиксируя некоторое $\varphi \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^n$ и учитывая лемму 4.5 и оценки (5.19), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (u, \varphi) dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} (v, \varphi) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (A_\varepsilon * f, \varphi) dx dt \\ &\quad + O(\varepsilon + \sqrt{\nu}) = \int_0^T \int_{\Omega} (v, \varphi) dx dt + O(\varepsilon + \sqrt{\nu}), \end{aligned}$$

поскольку $\langle A \rangle = 0$, что завершает доказательство соотношения (5.68) и следствия.

Доказательство следствия 2.17. В соответствии с утверждением о плотности (см. доказательство следствия 2.16) найдутся такие последовательности $\{f^i\} \subset C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^n$ и $\{g^i\} \subset C_0^\infty((0, T) \times \Omega)$, что

$$\|f - f^i\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)} = \delta_i, \quad \|g - g^i\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} = \delta_i.$$

Здесь и далее (возможно, различные) $\delta_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ равномерно относительно ε и ν . Для каждого $i = 1, 2, \dots$ обозначим через (u^i, p^i) и (v^i, q^i) решения задач (2.1) и (2.3), в которых f и g заменены на f^i и g^i соответственно. Тогда, используя лемму 3.1 и аналогичное утверждение для решений задачи (2.3) (см. (3.48) и далее), имеем

$$\begin{aligned} \|u - u^i\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)} + \|v - v^i\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)} \\ + \|p - p^i\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))} + \|q - q^i\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega))} = \delta_i. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Кроме того, из неравенства, приведенного в [20, § 6], следует, что

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon * (f - f^i)\|_{C^0([0, T]; L^1(\Omega)^n)} &\leq \|A_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})} \|f - f^i\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)} \\ &\leq C \|A\|_{L^\infty(0, T; L^2(Y)^{n \times n})} \|f - f^i\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^n)} = \delta_i, \end{aligned} \quad (5.70)$$

поскольку компоненты A являются регулярными в соответствии с (4.13). Фактически, в (5.70) учтено утверждение, аналогичное лемме 4.6. Однако следует отметить, что появление пространства $L^1(\Omega)$ здесь не случайно и связано с использованием поточечного произведения в определении свертки (2.8). Такое произведение определено как элемент $L^1(\Omega)$ (для почти всех $t, \tau \in (0, T)$), но может быть не определено как элемент пространства $L^2(\Omega)$, если соответствующие множители являются элементами $L^2(\Omega)$. Именно с этим связано появление пространства $L^\infty(\Omega)$ в формулировке леммы 4.6. На самом деле, компоненты A являются гладкими в рассматриваемых условиях, однако оценки соответствующих норм A могут зависеть от $\vartheta = \nu/\varepsilon^2$. Поэтому соотношение (5.70) может

не выполняться равномерно относительно ε и ν , если в этом соотношении заменить $L^1(\Omega)$ на $L^2(\Omega)$. Отметим, что приведенные замечания не являются существенными для гладких f и g , но в формулировке следствия 2.17 рассматриваются достаточно общие f и g .

Таким образом, используя неравенство треугольника, (5.69) и (5.70), получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \|u - v - A_\varepsilon * f\|_{C^0([0,T];L^1(\Omega)^n)} + \|p - q\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \\ & \leq \|u^i - v^i - A_\varepsilon * f^i\|_{C^0([0,T];L^1(\Omega)^n)} + \|p^i - q^i\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \\ & \quad + \|u - u^i\| + \|v - v^i\| + \|A_\varepsilon * (f - f^i)\| + \|p - p^i\| \\ & \quad + \|q - q^i\| \leq C(\varepsilon + \sqrt[4]{\nu}) + \delta_i, \end{aligned} \quad (5.71)$$

в силу оценок теоремы 2.5, в которых постоянная C не зависит от ε и ν , но может зависеть от i . Здесь также учтено, что норма $L^1(\Omega)$ мажорируется нормой $L^2(\Omega)$ в силу ограниченности области Ω .

Для каждого положительного δ можно выбрать (и фиксировать) такое i , что $\delta_i < \delta/2$ в (5.71). Кроме того, можно определить такие достаточно малые ε_{**} и ν_{**} , что $C(\varepsilon + \sqrt[4]{\nu}) < \delta/2$ при $\varepsilon \leq \varepsilon_{**}$ и $\nu \leq \nu_{**}$ в (5.71). Таким образом, при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{**}$ и $0 < \nu \leq \nu_{**}$ выполняется неравенство

$$\|u - v - A_\varepsilon * f\|_{C^0([0,T];L^1(\Omega)^n)} + \|p - q\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} < \delta,$$

что завершает доказательство следствия.

Отметим в заключение, что приведенное доказательство сохраняется без существенных изменений, если в формулировке этого утверждения о сходимости заменить максимум на существенный супремум и предполагать только, что $m(y) \in L^\infty_{\text{рег}}(Y)^{n \times n}$ и $k(y) \in L^\infty_{\text{рег}}(Y)$. Аналогичные утверждения о сходимости несложно вывести с помощью аппроксимаций из оценок теорем 2.1–2.4, 2.8 и 2.9 при достаточно общих предположениях о регулярности исходных данных. Более подробно такая схема вывода утверждений о сходимости из оценок точности представлена в работе [20], где рассматривались начально-краевые задачи для общих параболических уравнений, зависящих от двух малых параметров.

Список литературы

1. Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland, Amsterdam, 1977.
2. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*, Наука, М., 1984; англ. пер.: N. Bakhvalov, G. Panasenko, *Homogenisation: Averaging processes in periodic media. Mathematical problems in the mechanics of composite materials*, Mathematics and its Applications (Sov. Ser.), **36**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
3. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970; англ. пер. 1-го изд.: O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach Sci. Publ., New York, 1963.
4. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, New York, 1966.

5. О. А. Ладыженская, “Об уравнениях с малым параметром при старших производных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными”, *Вестн. ЛГУ. Сер. математика, механика и астрономия* (2), **12**:7 (1957), 104–120.
6. J. Simon, “On the existence of the pressure for solution of the variational Navier–Stokes equations”, *J. Math. Fluid Mech.*, **1**:3 (1999), 225–234.
7. Н. С. Бахвалов, “К вопросу о скорости звука в смесях”, *Докл. АН СССР*, **245**:6 (1979), 1345–1348.
8. Э. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: È. Sánchez-Palencia, *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Phys., **127**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
9. Г. В. Сандраков, “О скорости звука в неоднородной периодической среде”, *Методы вычислительной и прикладной математики*, Отделение вычисл. математики АН СССР, М., 1985, 122–135.
10. Г. В. Сандраков, *Осреднение линеаризованной системы гидродинамики с малой вязкостью и скорость звука в смесях*, Препринт № 178, Отделение вычисл. математики АН СССР, М., 1987.
11. Г. В. Сандраков, “Осреднение линеаризованной системы гидродинамики и скорость звука в смесях”, *Численный анализ, математическое моделирование и их применение в механике*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988, 67–72.
12. Г. В. Сандраков, *Численно-асимптотическое исследование линеаризованной системы гидродинамики для периодической среды*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1990.
13. Н. С. Бахвалов, М. Э. Эглит, “О скорости распространения возмущений в микронееднородных упругих средах с малой сдвиговой упругостью”, *Докл. РАН*, **325**:1 (1992), 9–15; англ. пер.: N. S. Bakhvalov, M. È. Èglit, “Propagation of small perturbations in weakly thermoconducting and weakly viscous micrononhomogeneous media”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **46**:1 (1993), 1–7.
14. Н. С. Бахвалов, М. Э. Эглит, “Оценка погрешности осреднения динамики малых возмущений сильнонеоднородных смесей”, *ЖВМ и МФ*, **34**:3 (1994), 395–414; англ. пер.: N. S. Bakhvalov, M. È. Èglit, “An error estimate for the averaging of the dynamics of small disturbances of strongly nonhomogeneous mixtures”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **34**:3 (1994), 333–349.
15. Н. С. Бахвалов, Г. В. Сандраков, М. Э. Эглит, “Математическое исследование процесса распространения волн в смесях”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика*, 1996, № 6, 19–21; англ. пер.: N. S. Bakhvalov, G. V. Sandrakov, M. È. Èglit, “Mathematical study of sound waves propagation progress in mixtures”, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, **51**:6 (1996), 5–7.
16. Г. В. Сандраков, “Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами”, *Матем. сб.*, **180**:12 (1989), 1634–1679; англ. пер.: G. V. Sandrakov, “Averaging principles for equations with rapidly oscillating coefficients”, *Math. USSR-Sb.*, **68**:2 (1991), 503–553.
17. Г. В. Сандраков, “Влияние вязкости на осцилляционные явления в линеаризованной гидродинамике”, *Докл. РАН*, **386**:5 (2002), 593–596.
18. G. Geymonat, È. Sánchez-Palencia, “On the vanishing viscosity limit for acoustic phenomena in a bounded region”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **75**:3 (1980/81), 257–268.
19. Ф. Л. Черноушко, “Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость”, *Математические методы в динамике космических аппаратов*, **7**, ВЦ АН СССР, М., 1968.
20. Г. В. Сандраков, “Осреднение параболических уравнений с контрастными коэффициентами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:5 (1999), 179–224; англ. пер.: G. V. Sandrakov, “Homogenization of parabolic equations with contrasting coefficients”, *Izv. Math.*, **63**:5 (1999), 1015–1061.

21. R. Temam, X. Wang, "On the behavior of the solutions of the Navier–Stokes equations at vanishing viscosity", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **25**:3–4 (1997), 807–828.
22. А. Н. Кожевников, "Об операторе линеаризованной стационарной задачи Навье–Стокса", *Матем. сб.*, **125(167)**:1(9) (1984), 3–18; англ. пер.: A. N. Kozhevnikov, "On the operator of the linearized steady-state Navier–Stokes problem", *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 1–16.
23. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, "Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром", *УМН*, **12**:5 (1957), 3–122.
24. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1988; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Pure Appl. Math., **3**, Marcel Dekker, New York, 1971.
25. М. Абрамовиц, И. А. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: M. Abramowitz, I. A. Stegun (eds.), *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, John Wiley & Sons, New York, 1972.
26. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика*, ч. II, ГИФМЛ, М., 1963; англ. пер.: N. E. Kochin, I. A. Kibel', N. V. Roze, *Theoretical hydromechanics*, ред. J. R. M. Radok, Interscience Publishers, New York, 1964.
27. М. Е. Боговский, "Решение первой краевой задачи для уравнения неразрывности несжимаемой среды", *Докл. АН СССР*, **248**:5 (1979), 1037–1040; англ. пер.: M. E. Bogovskii, "Solution of the first boundary value problem for the equation of continuity of an incompressible medium", *Sov. Math. Dokl.*, **20** (1979), 1094–1098.
28. М. Е. Боговский, "Решение некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad ", *Тр. сем. С. Л. Соболева*, 1980, № 1, 5–40.
29. К. О. Friedrichs, "Differential forms on Riemannian manifolds", *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 551–590.
30. G. Allaire, "Homogenization and two-scale convergence", *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:6 (1992), 1482–1518.
31. А. А. Амосов, "О слабой сходимости одного класса быстроосциллирующих функций", *Матем. заметки*, **62**:1 (1997), 145–150; англ. пер.: A. A. Amosov, "Weak convergence for a class of rapidly oscillating functions", *Math. Notes*, **62**:1 (1997), 122–126.
32. Н. С. Бахвалов, "Осреднение уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами", *Современные проблемы математической физики и вычислительной математики*, Наука, М., 1982, 38–47.
33. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973; англ. пер. 1-го изд.: O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear equations of elliptic type*, Mathematics in Science and Engineering, **46**, Academic Press, New York, 1968.
34. Г. В. Сандраков, "Осреднение нестационарной системы Стокса с вязкостью в перфорированной области", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:1 (1997), 113–140; англ. пер.: G. V. Sandrakov, "Homogenization of non-stationary Stokes equations with viscosity in a perforated domain", *Izv. Math.*, **61**:1 (1997), 113–141.

Г. В. САНДРАКОВ (G. V. SANDRAKOV)

Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко

E-mail: sandrako@i.com.ua

Поступило в редакцию

01.04.2005