Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Кудрявцев, Приближение и восстановление производных для функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гёльдера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 5, 37–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/im699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 10:10:29

УДК 517.5

С. Н. Кудрявцев

Приближение и восстановление производных для функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гёльдера

Получены верхние и нижние оценки наилучшей точности приближения в задаче С. Б. Стечкина для оператора дифференцирования и в задаче восстановления производной по значениям функций в заданном числе точек для классов Никольского и Бесова функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гёльдера. Эти оценки дают порядок упомянутых величин почти на всем множестве значений параметров, определяющих рассматриваемые объекты.

Библиография: 15 наименований.

Введение

В работе при соответствующих условиях, налагаемых на $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$, установлена слабая асимптотика, т. е. найден порядок величины наилучшей точности восстановления в пространстве $L_q(I^d)$ производной $\mathcal{D}^\lambda f$ по значениям в n точках функций f из классов Никольского $\mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ и Бесова $\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, кроме того, получена слабая асимптотика поведения в зависимости от ρ наилучшей точности приближения в $L_q(I^d)$ оператора $\mathcal{D}^\lambda$ на классах $\mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ и $\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ операторами, действующими из $L_s(I^d)$ в $L_q(I^d)$, норма которых не превосходит ρ .

Настоящая работа продолжает исследования, проводившиеся автором в работах [1]–[5] для упомянутых задач в отношении других классов функций конечной гладкости. Проблематика, к которой относятся рассматриваемые ниже задачи, занимает значительное место в теории приближений, и обзор результатов по ней в рамках этой статьи невозможен. Некоторое представление о постановке задач и результатах исследований в этой области можно составить, обратившись к работам [1]–[10] и цитируемой в этих работах литературе.

Отметим, что средства, использовавшиеся в [1]–[5] для получения как верхних, так и нижних оценок указанных выше величин для рассматривавшихся в этих работах классов функций, неприменимы в отношении классов, изучаемых в настоящей статье. Помимо этого, схемы, применявшиеся в [1]–[5] для вывода верхних оценок точности приближений производных функций из исследуемых ранее классов, оказались непригодными для изучаемых в настоящей работе классов. Предложенные в работе средства и схемы вывода оценок позволили найти при определенных условиях слабую асимптотику отмеченных

выше величин для классов Никольского и Бесова функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гёльдера.

Работа состоит из введения и трех параграфов, в первом из которых рассматриваются средства приближения, во втором – задача приближения оператора дифференцирования, в третьем – задача восстановления.

В заключение в качестве иллюстрации приведем результат, касающийся класса $\mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$, состоящего из функций $f \in L_p(I^d)$, у которых для каждого непустого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ L_p -норма смешанной разности порядка l_j с шагом h_j по j -й переменной при $j \in J$ не превосходит $\prod_{j \in J} |h_j|^{\alpha_j}$, где $l_j = \min\{m \in \mathbb{N}: \alpha_j < m\}$, $j = 1, \dots, d$. В §3, в частности, изучается поведение в зависимости от n величины σ_n наилучшей точности восстановления в $L_q(I^d)$ производной $\mathcal{D}^\lambda f$ по значениям в n точках функций $f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$, определяемой равенством

$$\sigma_n(\mathcal{D}^\lambda, \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d), L_q(I^d)) = \inf_{A, \varphi} \sup_{f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)} \|\mathcal{D}^\lambda f - A \circ \varphi(f)\|_{L_q(I^d)},$$

где $\inf$ берется по всем отображениям $A: \mathbb{R}^n \mapsto L_q(I^d)$ и отображениям $\varphi: C(I^d) \mapsto \mathbb{R}^n$ вида $\varphi(f) = (f(x^1), \dots, f(x^n))$, $x^j \in I^d$, $j = 1, \dots, n$. Для $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ установлено, что при $\alpha_j - p^{-1} > 0$, $\alpha_j - \lambda_j - (p^{-1} - q^{-1})_+ > 0$, $j = 1, \dots, d$, справедливо соотношение

$$c_1 n^{-\mathfrak{m}} \leq \sigma_n(\mathcal{D}^\lambda, \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d), L_q(I^d)) \leq c_2 n^{-\mathfrak{m}} (\log n)^{(\mathfrak{m}+1)(\mathfrak{c}-1)},$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \min\{\alpha_j - \lambda_j - (p^{-1} - q^{-1})_+ : j = 1, \dots, d\}, \\ \mathfrak{c} &= \text{card}\{j = 1, \dots, d : \alpha_j - \lambda_j - (p^{-1} - q^{-1})_+ = \mathfrak{m}\}, \end{aligned}$$

c_1, c_2 – положительные константы, не зависящие от n . Отсюда видно, что при $\mathfrak{c} = 1$ величина $\sigma_n(\mathcal{D}^\lambda, \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d), L_q(I^d))$ слабо эквивалентна $n^{-\mathfrak{m}}$. Отметим, что приведенный результат анонсирован в [11].

§ 1. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

1.1. В этом пункте вводятся обозначения, относящиеся к функциональным классам и пространствам, рассматриваемым в настоящей работе, а также приводятся некоторые факты, необходимые в дальнейшем.

Для $d \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{Z}_+^d$ обозначим множество

$$\mathbb{Z}_+^d = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{Z}^d : \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, d\}.$$

Введем также при $d \in \mathbb{N}$ для $l \in \mathbb{Z}_+^d$ множество

$$\mathbb{Z}_+^d(l) = \{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d : \lambda_j \leq l_j, j = 1, \dots, d\}.$$

Для $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathcal{P}^{d,l}$ будем обозначать пространство вещественных полиномов, состоящее из всех функций $f: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ вида

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)} a_\lambda x^\lambda, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

где $a_\lambda \in \mathbb{R}$, $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_d^{\lambda_d}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$.

При $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ для области $D \subset \mathbb{R}^d$ через $\mathcal{P}^{d,l}(D)$ обозначим пространство функций f , определенных в D , для каждой из которых существует полином $g \in \mathcal{P}^{d,l}$ такой, что $g|_D = f$.

Для топологического пространства T через $C(T)$ обозначим пространство непрерывных вещественных функций, заданных на T . Если T – компактное топологическое пространство, то в $C(T)$ фиксируем норму, определяемую равенством

$$\|f\|_{C(T)} = \max_{x \in T} |f(x)| = \sup_{x \in T} |f(x)|, \quad f \in C(T).$$

Для измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$ через $L_p(D)$, как обычно, обозначается пространство всех вещественных измеримых на D функций f , для которых определена норма

$$\|f\|_{L_p(D)} = \begin{cases} \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{x \in D} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Введем еще следующие обозначения.

Для $x, y \in \mathbb{R}^d$ положим $xy = (x_1 y_1, \dots, x_d y_d)$, а для $x \in \mathbb{R}^d$ и $A \subset \mathbb{R}^d$ определим

$$xA = \{xy : y \in A\}.$$

Для $x \in \mathbb{R}^d$ такого, что $x_j \neq 0$ при $j = 1, \dots, d$, положим $x^{-1} = (x_1^{-1}, \dots, x_d^{-1})$.

Обозначим через $\mathbb{R}_+^d$ множество векторов $x \in \mathbb{R}^d$, для которых $x_j > 0$ при $j = 1, \dots, d$, и для $a \in \mathbb{R}_+^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ положим $a^x = a_1^{x_1} \cdots a_d^{x_d}$.

При $d \in \mathbb{N}$ определим множества

$$\begin{aligned} I^d &= \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < x_j < 1, j = 1, \dots, d\}, \\ \bar{I}^d &= \{x \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, d\}, \\ B^d &= \{x \in \mathbb{R}^d : -1 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, d\}. \end{aligned}$$

Теперь приведем некоторые факты, относящиеся к полиномам, которыми мы будем пользоваться ниже.

Можно показать, что имеет место

ЛЕММА 1.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ и $f \in L_1(I^d)$. Тогда если почти для всех $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) \in I^{d-1}$, $j = 1, \dots, d$, справедливо включение $f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) \in \mathcal{P}^{1,l_j}(I)$, то $f \in \mathcal{P}^{d,l}(I^d)$.

Через ϵ будем обозначать вектор в $\mathbb{R}^d$, задаваемый равенством $\epsilon = (1, \dots, 1)$.

При $d \in \mathbb{N}$ для $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathcal{D}^\lambda$ будем обозначать оператор дифференцирования $\mathcal{D}^\lambda = \frac{\mathcal{D}^{|\lambda|}}{\mathcal{D}x_1^{\lambda_1} \cdots \mathcal{D}x_d^{\lambda_d}}$, где $|\lambda| = \sum_{j=1}^d \lambda_j$.

В работе [5] содержится

ЛЕММА 1.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\rho, \sigma \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда существует константа $c_1(d, l, \lambda, \rho, \sigma) > 0$ такая, что для любых измеримых по Лебегу множеств $D, Q \subset \mathbb{R}^d$, для которых можно найти $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ и $x^0 \in \mathbb{R}^d$

такие, что $D \subset (x^0 + \rho \delta B^d)$ и $(x^0 + \sigma \delta I^d) \subset Q$, для любого полинома $f \in \mathcal{P}^{d,l}$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(D)} \leq c_1 \delta^{-\lambda-p^{-1}\epsilon+q^{-1}\epsilon} \|f\|_{L_p(Q)}. \quad (1.1)$$

Далее, напомним, что для области $D \subset \mathbb{R}^d$ и вектора $h \in \mathbb{R}^d$ через D_h обозначается множество

$$D_h = \{x \in D: x + th \in D \forall t \in \bar{I}\}.$$

Для функции f , заданной в области $D \subset \mathbb{R}^d$, и вектора $h \in \mathbb{R}^d$ определим в D_h разность $\Delta_h f$ с шагом h , полагая

$$(\Delta_h f)(x) = f(x + h) - f(x), \quad x \in D_h,$$

а для $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$, в D_{lh} определим l -ю разность $\Delta_h^l f$ функции f с шагом h равенством

$$(\Delta_h^l f)(x) = (\Delta_h(\Delta_h^{l-1} f))(x), \quad x \in D_{lh},$$

и положим также $\Delta_h^0 f = f$.

Как известно, справедливо равенство

$$(\Delta_h^l f)(\cdot) = \sum_{k=0}^l C_l^k (-1)^{l-k} f(\cdot + kh), \quad C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}.$$

При $d \in \mathbb{N}$ для $j = 1, \dots, d$ через e_j будем обозначать вектор $e_j = (0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0)$.

Как показано в [5], справедлива

ЛЕММА 1.3. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда существуют константы $c_2(d, l) > 0$ и $c_3(d, l) > 0$ такие, что для любых $\delta \in \mathbb{R}_+^d$, $x^0 \in \mathbb{R}^d$ и для $Q = x^0 + \delta I^d$ можно построить систему линейных операторов $P_{\delta, x^0}^{d, l, \lambda}: L_1(Q) \mapsto \mathcal{P}^{d, l}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$, обладающих следующими свойствами:

1) при $1 \leq p \leq \infty$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ для $f \in L_p(Q)$ справедливо неравенство

$$\|P_{\delta, x^0}^{d, l, \lambda} f\|_{L_p(Q)} \leq c_2 \|f\|_{L_p(Q)}; \quad (1.2)$$

2) для $f \in \mathcal{P}^{d, l}$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ имеет место равенство

$$P_{\delta, x^0}^{d, l, \lambda}(f|_Q) = f; \quad (1.3)$$

3) если при $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ для функции $f \in L_1(Q)$ ее (обобщенная) производная $\mathcal{D}^\lambda f$ принадлежит $L_1(Q)$, то имеет место равенство

$$\mathcal{D}^\lambda P_{\delta, x^0}^{d, l, \lambda} f = P_{\delta, x^0}^{d, l-\lambda, 0} \mathcal{D}^\lambda f; \quad (1.4)$$

4) при $1 \leq p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ для $f \in L_p(Q)$ выполняется неравенство

$$\|f - P_{\delta, x^0}^{d, l, \lambda} f\|_{L_p(Q)} \leq c_3 \sum_{j=1}^d \delta_j^{-1/p} \left(\int_{\delta_j B^1} \int_{Q_{(l_j+1)\xi_{e_j}}} |\Delta_{\xi_{e_j}}^{l_j+1} f(x)|^p dx d\xi \right)^{1/p}. \quad (1.5)$$

Теперь определим классы функций, изучаемые в настоящей работе (см. [12], [13]), но прежде введем некоторые обозначения.

При $d \in \mathbb{N}$ для $x \in \mathbb{R}^d$ через $f(x)$ обозначим множество $f(x) = \{j = 1, \dots, \dots, d: x_j \neq 0\}$, а для множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ через χ_J обозначим вектор из $\mathbb{R}^d$ с компонентами

$$(\chi_J)_j = \begin{cases} 1 & \text{для } j \in J, \\ 0 & \text{для } j \in \{1, \dots, d\} \setminus J. \end{cases}$$

При $d \in \mathbb{N}$ для $x \in \mathbb{R}^d$ и $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, d\}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, через x^J обозначим вектор $(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \in \mathbb{R}^k$, а для множества $A \subset \mathbb{R}^d$ положим $A^J = \{x^J: x \in A\}$.

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ и векторов $h \in \mathbb{R}^d$ и $l \in \mathbb{Z}_+^d$ через D_h^l обозначим множество

$$\begin{aligned} D_h^l &= (\dots (D_{l_d h_d e_d})_{l_{d-1} h_{d-1} e_{d-1}} \dots)_{l_1 h_1 e_1} = \{x \in D: x + t l h \in D \quad \forall t \in \bar{I}^d\} \\ &= \left\{ x \in D: \left(x + \sum_{j \in f(l)} t_j l_j h_j e_j \right) \in D \quad \forall t^{f(l)} \in (\bar{I}^d)^{f(l)} \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $d \in \mathbb{N}$, D – область в $\mathbb{R}^d$ и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда для $f \in L_p(D)$, $h \in \mathbb{R}^d$ и $l \in \mathbb{Z}_+^d$ определим в D_h^l смешанную разность функции f порядка l , соответствующую вектору h , равенством

$$\begin{aligned} (\Delta_h^l f)(x) &= \left(\left(\prod_{j=1}^d \Delta_{h_j e_j}^{l_j} \right) f \right)(x) = \left(\left(\prod_{j \in f(l)} \Delta_{h_j e_j}^{l_j} \right) f \right)(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d(l)} (-\mathbf{e})^{l-k} C_l^k f(x + k h), \quad x \in D_h^l, \end{aligned}$$

где $C_l^k = \prod_{j=1}^d C_{l_j}^{k_j}$.

Учитывая, что для $f \in L_p(D)$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ и векторов $h, h' \in \mathbb{R}^d$ таких, что $h^{f(l)} = (h')^{f(l)}$, соблюдается соотношение

$$\|\Delta_h^l f\|_{L_p(D_h^l)} = \|\Delta_{h'}^l f\|_{L_p(D_{h'}^l)},$$

определим для функции f смешанный модуль непрерывности в $L_p(D)$ порядка l равенством

$$\Omega^l(f, t^{f(l)})_{L_p(D)} = \sup_{\{h \in \mathbb{R}^d: h^{f(l)} \in t^{f(l)}(B^d)^{f(l)}\}} \|\Delta_h^l f\|_{L_p(D_h^l)}, \quad t^{f(l)} \in (\mathbb{R}_+^d)^{f(l)}.$$

Пусть теперь $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p \leq \infty$ и D – область в $\mathbb{R}^d$. Тогда зададим вектор $l = l(\alpha) \in \mathbb{N}^d$, полагая $l_j = \min\{m \in \mathbb{N}: \alpha_j < m\}$, $j = 1, \dots, d$, и обозначим через $S_p^\alpha H(D)$ ($S_p^\alpha \mathcal{H}(D)$) множество всех функций $f \in L_p(D)$, обладающих тем свойством, что для любого непустого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} &\sup_{t^J \in (\mathbb{R}_+^d)^J} (t^J)^{-\alpha^J} \Omega^{l \chi_J}(f, t^J)_{L_p(D)} \\ &= \sup_{t^J \in (\mathbb{R}_+^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-\alpha_j} \right) \Omega^{l \chi_J}(f, t^{f(l \chi_J)})_{L_p(D)} < \infty (\leq 1). \end{aligned}$$

Пусть α , p , D и $l = l(\alpha)$ – те же, что и выше, и $\theta \in \mathbb{R}$, $1 \leq \theta < \infty$. Тогда обозначим через $S_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(D)$ ($\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(D)$) множество всех функций $f \in L_p(D)$, которые для любого непустого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} & \left(\int_{(\mathbb{R}_+^d)^J} (t^J)^{-\epsilon^J - \theta \alpha^J} (\Omega^{l\chi_J}(f, t^J)_{L_p(D)})^\theta dt^J \right)^{1/\theta} \\ &= \left(\int_{(\mathbb{R}_+^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-1 - \theta \alpha_j} \right) (\Omega^{l\chi_J}(f, t^{f(l\chi_J)})_{L_p(D)})^\theta \prod_{j \in J} dt_j \right)^{1/\theta} < \infty \quad (\leq 1). \end{aligned}$$

Учитывая, что для $t^J \in (\mathbb{R}_+^d)^J$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & (t^J)^{-\alpha^J} \Omega^{l\chi_J}(f, t^J)_{L_p(D)} \\ &= \left(\int_{\{\tau^J \in (\mathbb{R}_+^d)^J : t_j < \tau_j < 2t_j, j \in J\}} (t^J)^{-\epsilon^J - \theta \alpha^J} (\Omega^{l\chi_J}(f, t^J)_{L_p(D)})^\theta d\tau^J \right)^{1/\theta} \\ &\leq \left(\int_{\{\tau^J \in (\mathbb{R}_+^d)^J : t_j < \tau_j < 2t_j, j \in J\}} \left(\prod_{j \in J} 2^{1 + \theta \alpha_j} \right) \right. \\ &\quad \times (\tau^J)^{-\epsilon^J - \theta \alpha^J} (\Omega^{l\chi_J}(f, \tau^J)_{L_p(D)})^\theta d\tau^J \Big)^{1/\theta} \\ &\leq \left(\prod_{j \in J} 2^{\alpha_j + 1/\theta} \right) \left(\int_{(\mathbb{R}_+^d)^J} (\tau^J)^{-\epsilon^J - \theta \alpha^J} (\Omega^{l\chi_J}(f, \tau^J)_{L_p(D)})^\theta d\tau^J \right)^{1/\theta}, \end{aligned}$$

закключаем, что

$$\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(D) \subset c_4(\alpha) \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(D), \quad (1.6)$$

где $c_4(\alpha) = \prod_{j=1}^d 2^{1 + \alpha_j}$.

Обозначим через $C^\infty(D)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций в области $D \subset \mathbb{R}^d$, а через $C_0^\infty(D)$ – пространство функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, у которых $\text{supp } f \subset D$.

В заключение этого пункта введем еще несколько обозначений.

Для банахова пространства X (над $\mathbb{R}$) обозначим $B(X) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$. Для банаховых пространств X, Y через $\mathcal{B}(X, Y)$ обозначим банахово пространство, состоящее из непрерывных линейных операторов $T: X \mapsto Y$, с нормой

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \sup_{x \in B(X)} \|Tx\|_Y.$$

Отметим, что если $X = Y$, то $\mathcal{B}(X, Y)$ является банаховой алгеброй.

1.2. В этом пункте приведем некоторые вспомогательные утверждения, которые используются в следующем пункте.

Уточнением соответствующего утверждения из [5] является

ЛЕММА 1.4. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Тогда:

1) при $j = 1, \dots, d$ для любого непрерывного линейного оператора $T: L_p(I) \mapsto L_p(I)$ существует единственный непрерывный линейный оператор

$T^j: L_p(I^d) \mapsto L_p(I^d)$ такой, что для любой функции $f \in L_p(I^d)$ почти при всех $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) \in I^{d-1}$ в $L_p(I)$ выполняется равенство

$$(T^j f)(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) = (T(f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d)))(\cdot); \quad (1.7)$$

2) при этом для каждого $j = 1, \dots, d$ отображение $V_j^{L_p}$, которое каждому оператору $T \in \mathcal{B}(L_p(I), L_p(I))$ ставит в соответствие оператор $V_j^{L_p}(T) = T^j \in \mathcal{B}(L_p(I^d), L_p(I^d))$, удовлетворяющий (1.7), является непрерывным гомоморфизмом банаховой алгебры $\mathcal{B}(L_p(I), L_p(I))$ в банахову алгебру $\mathcal{B}(L_p(I^d), L_p(I^d))$;

3) причем для любых операторов $S, T \in \mathcal{B}(L_p(I), L_p(I))$ при любых $i, j = 1, \dots, d$, $i \neq j$, соблюдается равенство

$$(V_i^{L_p}(S)V_j^{L_p}(T))f = (V_j^{L_p}(T)V_i^{L_p}(S))f, \quad f \in L_p(I^d). \quad (1.8)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для операторов в пространствах непрерывных функций.

ЛЕММА 1.5. Пусть $d \in \mathbb{N}$. Тогда:

1) для любого непрерывного линейного оператора $T: C(\bar{I}) \mapsto C(\bar{I})$ при $j = 1, \dots, d$ существует единственный непрерывный линейный оператор $T^j: C(\bar{I}^d) \mapsto C(\bar{I}^d)$, обладающий тем свойством, что для любой функции $f \in C(\bar{I}^d)$ при всех $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) \in \bar{I}^{d-1}$ и любом $x_j \in \bar{I}$ имеет место равенство

$$(T^j f)(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_d) = (T(f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d)))(x_j); \quad (1.9)$$

2) при этом для каждого $j = 1, \dots, d$ отображение V_j^C , которое каждому оператору $T \in \mathcal{B}(C(\bar{I}), C(\bar{I}))$ ставит в соответствие оператор $V_j^C(T) = T^j \in \mathcal{B}(C(\bar{I}^d), C(\bar{I}^d))$, удовлетворяющий (1.9), является непрерывным гомоморфизмом банаховой алгебры $\mathcal{B}(C(\bar{I}), C(\bar{I}))$ в $\mathcal{B}(C(\bar{I}^d), C(\bar{I}^d))$;

3) причем для любых операторов $S, T \in \mathcal{B}(C(\bar{I}), C(\bar{I}))$ при любых $i, j = 1, \dots, d$, $i \neq j$, справедливо равенство

$$V_i^C(S)V_j^C(T) = V_j^C(T)V_i^C(S). \quad (1.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если при $d \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq q < \infty$ мы имеем $T \in \mathcal{B}(L_p(I), L_p(I)) \cap \mathcal{B}(L_q(I), L_q(I))$ ($T \in \mathcal{B}(L_p(I), L_p(I)) \cap \mathcal{B}(C(\bar{I}), C(\bar{I}))$), то при $j = 1, \dots, d$ для $f \in L_q(I^d)$ ($f \in C(\bar{I}^d)$) справедливо равенство

$$(V_j^{L_p} T)f = (V_j^{L_q} T)f \quad ((V_j^{L_p} T)f = (V_j^C T)f).$$

Поэтому символы L_p, L_q, C в качестве индексов у V_j можно не использовать.

ЛЕММА 1.6. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^d$, $1 \leq p < \infty$. Тогда существует константа $c_5(d, l) > 0$ такая, что для любых $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ таких, что $Q = (x^0 + \delta I^d) \subset I^d$, для любой функции $f \in L_p(I^d)$, любого $\xi \in \mathbb{R}^d$ и любых

множеств $J, J' \subset \{1, \dots, d\}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta_{\xi}^{l_{X_J}} \left(\left(\prod_{j \in J'} V_j (E - P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j - 1, 0}) \right) f \right) \right\|_{L_p(Q_{\xi}^{l_{X_J}})} \\ & \leq c_5 \left(\prod_{j \in J' \setminus J} \delta_j^{-1/p} \right) \left(\int_{(\delta B^d)^{J' \setminus J}} \int_{Q_{\xi}^{l_{X_{J \cup J'}}}} |(\Delta_{\xi}^{l_{X_{J \cup J'}}} f)(x)|^p dx d\xi^{J' \setminus J} \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где E – тождественный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала убедимся в справедливости (1.11) в случае, когда множества J и J' не пересекаются. А именно, покажем, что если выполнены условия леммы и $J \cap J' = \emptyset$, то

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta_{\xi}^{l_{X_J}} \left(\left(\prod_{j \in J'} V_j (E - P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j - 1, 0}) \right) f \right) \right\|_{L_p(Q_{\xi}^{l_{X_J}})} \\ & \leq c_6^k \left(\prod_{j \in J'} \delta_j^{-1/p} \right) \left(\int_{(\delta B^d)^{J'}} \int_{Q_{\xi}^{l_{X_{J \cup J'}}}} |(\Delta_{\xi}^{l_{X_{J \cup J'}}} f)(x)|^p dx d\xi^{J'} \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $k = \text{card } J'$, а $c_6(d, l) = \max_{j=1, \dots, d} c_3(1, l_j - 1)$ (см. (1.5)).

Доказательство (1.12) проведем по индукции относительно k . При $k = 1$, а следовательно, $J' = \{j\}$, $j \in \{1, \dots, d\} \setminus J$, используя теорему Фубини и соотношения (1.7), (1.5), имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta_{\xi}^{l_{X_J}} (V_j (E - P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j - 1, 0}) f) \right\|_{L_p(Q_{\xi}^{l_{X_J}})}^p = \int_{\prod_{i=1, \dots, d: i \neq j} (x_i^0 + \delta_i I)_{l_i(x_J)_i \xi_i}} \\ & \times \int_{x_j^0 + \delta_j I} \left| \left((E - P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j - 1, 0}) \right. \right. \\ & \times \left. \left. (\Delta_{\xi}^{l_{X_J}} f)(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) \right)(x_j) \right|^p dx_j dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\ & \leq c_6^p \delta_j^{-1} \int_{\delta_j B^1} \int_{Q_{\xi}^{l_{X_{J \cup J'}}}} |(\Delta_{\xi}^{l_{X_{J \cup J'}}} f)(x)|^p dx d\xi_j. \end{aligned}$$

Отсюда следует (1.12) в случае, когда $J' = \{j\}$, а $j \in \{1, \dots, d\} \setminus J$.

Предположим, что при $k \in \mathbb{N}$ неравенство (1.12) имеет место при соблюдении условий леммы для $J, J' \subset \{1, \dots, d\}$, $J \cap J' = \emptyset$, и $\text{card } J' \leq k$. Покажем, что тогда оно справедливо в условиях леммы в ситуации, когда $J, J' \subset \{1, \dots, d\}$, $J \cap J' = \emptyset$, и $\text{card } J' = k + 1$.

Фиксируя для таких множеств J, J' элемент $j \in J'$ и применяя (1.12) сначала с множествами J и $\{j\}$ (см. (1.8)), а затем с множествами $J \cup \{j\}$ и $J' \setminus \{j\}$, получаем (1.12) в рассматриваемой ситуации, что и завершает доказательство (1.12) в общей ситуации.

Для вывода (1.11) заметим, что для d, l, p, f, δ, x^0 , удовлетворяющих условиям леммы, при $j = 1, \dots, d$ и $\xi_j \in \mathbb{R}$ ввиду утверждения 2) леммы 1.4 в $(I^d)_{l_j \xi_j e_j}$ справедливо равенство

$$\Delta_{\xi_j e_j}^{l_j} (V_j (E - P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j - 1, 0}) f) = \Delta_{\xi_j e_j}^{l_j} f - \Delta_{\xi_j e_j}^{l_j} (V_j (P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j - 1, 0}) f). \quad (1.13)$$

При этом в силу (1.7) почти для всех $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) \in I^{d-1}$ при почти всех $x_j \in I_{l_j \xi_j}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} & (\Delta_{\xi_j e_j}^{l_j} (V_j(P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j-1, 0})f))(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_d) \\ &= (\Delta_{\xi_j}^{l_j} (P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j-1, 0} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d)))(x_j) = 0. \end{aligned}$$

Сопоставляя сказанное с (1.13), приходим к выводу, что почти для всех $x \in (I^d)_{l_j \xi_j e_j}$ имеет место равенство

$$(\Delta_{\xi_j e_j}^{l_j} (V_j(E - P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j-1, 0})f))(x) = (\Delta_{\xi_j e_j}^{l_j} f)(x).$$

Покажем, что при $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^d$, $1 \leq p < \infty$ для $f \in L_p(I^d)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ и $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, d\}$ и почти для всех $x \in (I^d)_{\xi}^{l_{\mathcal{J}}}$ выполняется равенство

$$\left(\left(\prod_{j \in \mathcal{J}} \Delta_{\xi_j e_j}^{l_j} \right) \left(\left(\prod_{j \in \mathcal{J}} V_j(E - P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j-1, 0}) \right) f \right) \right)(x) = \left(\left(\prod_{j \in \mathcal{J}} \Delta_{\xi_j e_j}^{l_j} \right) f \right)(x). \quad (1.14)$$

Равенство (1.14) установим по индукции относительно $\text{card } \mathcal{J}$.

Как показано выше, в случае, когда $\text{card } \mathcal{J} = 1$, равенство (1.14) справедливо. Предположим, что при $k \in \mathbb{N}$ оно верно в случае, когда $\text{card } \mathcal{J} \leq k$. Проверим, что тогда оно соблюдается и в ситуации, когда $\text{card } \mathcal{J} = k + 1$.

Фиксируя $j \in \mathcal{J}$ и применяя (1.14) сначала с множеством $\{j\}$, а затем с множеством $\mathcal{J} \setminus \{j\}$, с учетом (1.8) получаем (1.14) в случае, когда $\text{card } \mathcal{J} = k + 1$, что и завершает вывод (1.14) в общем случае.

Теперь при $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^d$, $1 \leq p < \infty$ для $f \in L_p(I^d)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ и любых множеств $J, J' \subset \{1, \dots, d\}$, используя (1.8) и (1.14), имеем

$$\begin{aligned} & \left(\Delta_{\xi}^{l_{\mathcal{J}}} \left(\left(\prod_{j \in J'} V_j(E - P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j-1, 0}) \right) f \right) \right)(x) \\ &= \left(\Delta_{\xi}^{l_{\mathcal{J}}} \left(\left(\prod_{j \in J' \setminus J} V_j(E - P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j-1, 0}) \right) f \right) \right)(x), \quad x \in (I^d)_{\xi}^{l_{\mathcal{J}}}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Объединяя (1.15) с (1.12), получаем (1.11).

ЛЕММА 1.7. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 \leq p < \infty$ и $\delta \in \mathbb{R}_+^d$, $x^0 \in \mathbb{R}^d$ таковы, что для $Q = x^0 + \delta I^d$ соблюдается включение $Q \subset I^d$. Тогда:

1) для любой функции $f \in L_p(I^d)$ имеет место включение

$$\left(\prod_{j=1}^d V_j(P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j, 0}) \right) f \in \mathcal{P}^{d, l}(I^d); \quad (1.16)$$

2) для $f \in \mathcal{P}^{d, l}(I^d)$ выполняется равенство

$$\left(\prod_{j=1}^d V_j(P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j, 0}) \right) f = f; \quad (1.17)$$

3) существует константа $c_7(d, l) > 0$ такая, что для любого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ и любой функции $f \in L_p(I^d)$ справедливо неравенство

$$\left\| \left(\prod_{j \in J} V_j(P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j, 0}) \right) f \right\|_{L_p(Q)} \leq c_7 \|f\|_{L_p(Q)}. \quad (1.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу (1.8) и (1.7) для $f \in L_p(I^d)$ при $j = 1, \dots, d$ почти для всех $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) \in I^{d-1}$ имеет место включение

$$\left(\left(\prod_{i=1}^d V_i(P_{\delta_i, x_i^0}^{1, l_i, 0}) \right) f \right) (x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) \in \mathcal{P}^{1, l_j}(I).$$

Отсюда на основании леммы 1.1 получаем (1.16).

Нетрудно видеть, что для доказательства (1.17) достаточно проверить, что при любом $j = 1, \dots, d$ для $f \in \mathcal{P}^{d, l}(I^d)$ верно равенство

$$V_j(P_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j, 0})f = f,$$

которое несложно проверить, опираясь на (1.7) и (1.3).

Доказательство неравенства (1.18) по существу содержится в доказательстве следующей леммы.

ЛЕММА 1.8. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 \leq p < \infty$ и $\rho, \sigma \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда существует константа $c_8(d, l, \rho, \sigma) > 0$ такая, что для любых $x^0, y^0 \in \mathbb{R}^d$ и $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ таких, что $(x^0 + \sigma \delta I^d) \subset (y^0 + \rho \delta I^d) \subset I^d$, для любого множества $J \subset \{1, \dots, d\}$ и $f \in L_p(I^d)$ имеет место неравенство

$$\left\| \left(\prod_{j \in J} V_j(E - P_{\sigma_j \delta_j, x_j^0}^{1, l_j, 0}) \right) f \right\|_{L_p(D)} \leq c_8 \|f\|_{L_p(D)}, \quad (1.19)$$

где $D = y^0 + \rho \delta I^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что (1.19) достаточно доказать в случае, когда $J = \{j\}$, $j \in \{1, \dots, d\}$. Переходя к выводу (1.19) в этом случае, заметим, что в условиях леммы имеет место включение $(y_j^0 + \rho_j \delta_j I) \subset (x_j^0 + \rho_j \delta_j B^1)$.

Далее, ввиду утверждения 2) леммы 1.4 имеем

$$\|V_j(E - P_{\sigma_j \delta_j, x_j^0}^{1, l_j, 0})f\|_{L_p(D)} \leq \|f\|_{L_p(D)} + \|V_j(P_{\sigma_j \delta_j, x_j^0}^{1, l_j, 0})f\|_{L_p(D)}. \quad (1.20)$$

Оценивая второе слагаемое в правой части (1.20), с помощью теоремы Фубини и соотношений (1.7), (1.1) (см. замечание 1.1) и (1.2), находим, что

$$\begin{aligned} \|V_j(P_{\sigma_j \delta_j, x_j^0}^{1, l_j, 0})f\|_{L_p(D)}^p &\leq \int_{\prod_{i=1, \dots, d: i \neq j} (y_i^0 + \rho_i \delta_i I)} c_1(1, l_j, 0, \rho_j, \sigma_j)^p \\ &\quad \times \int_{x_j^0 + \sigma_j \delta_j I} |(P_{\sigma_j \delta_j, x_j^0}^{1, l_j, 0} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d))(x_j)|^p \\ &\quad \times dx_j dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\ &\leq c_9^p \|f\|_{L_p(D)}^p. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Объединяя (1.20) с (1.21), приходим к (1.19) в ситуации, когда $J = \{j\}$, $j \in \{1, \dots, d\}$.

1.3. В этом пункте будут построены средства приближения для функций из рассматриваемых нами классов. Но сначала приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть X – банахово пространство (над $\mathbb{R}$), $d \in \mathbb{N}$ и $\{x_\kappa \in X : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ – семейство векторов. Тогда под суммой ряда $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} x_\kappa$ будем понимать вектор $x \in X$, для которого выполняется равенство $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+n}^d} x_\kappa$, где $\mathbb{Z}_{+n}^d = \{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : |\kappa| = \sum_{j=1}^d \kappa_j \leq n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Для формулировки следующей леммы введем обозначение. Для $d \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathbf{m}(x) = \min_{j=1, \dots, d} x_j$$

и для вектора $x \in X$ и семейства $\{x_\kappa \in X, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ будем записывать $x = \lim_{\mathbf{m}(\kappa) \rightarrow \infty} x_\kappa$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, для которого $\mathbf{m}(\kappa) > n_0$, справедливо неравенство $\|x - x_\kappa\|_X < \varepsilon$.

При $d \in \mathbb{N}$ будем рассматривать множество

$$\Upsilon^d = \{\varepsilon \in \mathbb{Z}^d : \varepsilon_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, d\}.$$

ЛЕММА 1.9. Пусть X – банахово пространство, а вектор $x \in X$ и семейство $\{x_\kappa \in X : \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$ таковы, что $x = \lim_{\mathbf{m}(\kappa) \rightarrow \infty} x_\kappa$, и для семейства $\{\mathcal{X}_\kappa \in X, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d\}$, определяемого равенством

$$\mathcal{X}_\kappa = \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d : f(\varepsilon) \subset f(\kappa)} (-\mathbf{e})^\varepsilon x_{\kappa - \varepsilon}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}_+^d,$$

ряд $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{X}_\kappa\|_X$ сходится, т. е. существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+n}^d} \|\mathcal{X}_\kappa\|_X$. Тогда имеет место равенство

$$x = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{X}_\kappa.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что

$$\sum_{\kappa' \in \mathbb{Z}_+^d(n\mathbf{e})} \mathcal{X}_{\kappa'} = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(n\mathbf{e})} \left(\sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d : \kappa + \varepsilon \in \mathbb{Z}_+^d(n\mathbf{e})} (-\mathbf{e})^\varepsilon \right) x_\kappa = x_{n\mathbf{e}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Далее, с учетом этого замечания, в силу условий леммы имеем

$$\left\| x - \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+n}^d} \mathcal{X}_\kappa \right\|_X \leq \|x - x_{[n/d]\mathbf{e}}\|_X + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+n}^d \setminus \mathbb{Z}_{+[n/d]}^d} \|\mathcal{X}_\kappa\|_X \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

При $d \in \mathbb{N}$ для $x, y \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать

$$(x, y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В условиях леммы 1.9 для любого $\beta \in \mathbb{R}_+^d$ справедливо равенство

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq n} \mathcal{X}_\kappa.$$

Введем в рассмотрение систему разбиений единицы на кубе I^d , используемую для построения средств приближения. Для этого обозначим через $\psi^{1,0}$ характеристическую функцию интервала I , т.е. функцию, определяемую равенством

$$\psi^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in I, \\ 0 & \text{для } x \in \mathbb{R} \setminus I. \end{cases}$$

При $m \in \mathbb{N}$ положим (см. [14])

$$\psi^{1,m}(x) = \int_I \psi^{1,m-1}(x-y) dy,$$

а для $d \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$ определим

$$\psi^{d,m}(x) = \prod_{j=1}^d \psi^{1,m_j}(x_j), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Для $d \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ будем записывать $x \leq y$ ($x < y$), если для каждого $j = 1, \dots, d$ выполняется неравенство $x_j \leq y_j$ ($x_j < y_j$).

Для $d \in \mathbb{N}$, $m, n \in \mathbb{Z}^d$, $m \leq n$, обозначим

$$\mathcal{N}_{m,n}^d = \{\nu \in \mathbb{Z}^d : m \leq \nu \leq n\} = \prod_{j=1}^d \mathcal{N}_{m_j, n_j}^1.$$

Опираясь на определения и используя индукцию, нетрудно проверить следующие свойства функций $\psi^{d,m}$, $d \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$:

1) при $d \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\text{sign } \psi^{d,m}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in (m + \mathbf{e})I^d, \\ 0 & \text{для } x \in \mathbb{R}^d \setminus ((m + \mathbf{e})I^d); \end{cases}$$

2) при $d \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$ для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(m)$ (обобщенная) производная $\mathcal{D}^\lambda \psi^{d,m}$ принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}^d)$;

3) при $d \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$ почти для всех $x \in \mathbb{R}^d$ справедливо равенство

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} \psi^{d,m}(x - \nu) = 1;$$

4) при $m \in \mathbb{Z}_+$ почти для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\psi^{1,m}(x) = \sum_{\mu \in \mathcal{N}_{0,m+1}^1} a_\mu^m \psi^{1,m}(2x - \mu), \quad (1.22)$$

где $a_\mu^m = 2^{-m} C_{m+1}^\mu$;

5) при $m \in \mathbb{Z}_+$ система функций $\{\psi^{1,m}(x - \nu), \nu \in \mathcal{N}_{-m,0}^1\}$ линейно независима на I .

При $d \in \mathbb{N}$ для $t \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать вектор $2^t = (2^{t_1}, \dots, 2^{t_d})$.

Для $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathbb{Z}^d$ обозначим

$$g_{\kappa,\nu}^{d,m}(x) = \psi^{d,m}(2^\kappa x - \nu) = \prod_{j=1}^d \psi^{1,m_j}(2^{\kappa_j} x_j - \nu_j), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$Q_{\kappa,\nu}^{d,m} = 2^{-\kappa} \nu + 2^{-\kappa}(m + \epsilon)I^d.$$

Из свойства 1) функций $\psi^{d,m}$ следует, что при $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathbb{Z}^d$ выполнено $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} = \overline{Q}_{\kappa,\nu}^{d,m}$, где $\overline{Q}_{\kappa,\nu}^{d,m} = 2^{-\kappa} \nu + 2^{-\kappa}(m + \epsilon)\bar{I}^d$.

Отметим некоторые полезные для нас свойства носителей функций $g_{\kappa,\nu}^{d,m}$. При $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ справедливо следующее:

$$\{\nu \in \mathbb{Z}^d : \text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap I^d \neq \emptyset\} = \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d, \quad (1.23)$$

и для каждого $\nu' \in \mathbb{Z}^d$ имеет место равенство

$$\{\nu \in \mathbb{Z}^d : Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \cap \text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \neq \emptyset\} = \nu' + \mathcal{N}_{-m,0}^d. \quad (1.24)$$

Из свойства 3) функций $\psi^{d,m}$ и равенства (1.23) вытекает, что при $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ почти для всех $x \in I^d$ соблюдается равенство

$$\sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d} g_{\kappa,\nu}^{d,m}(x) = 1. \quad (1.25)$$

Опираясь на (1.25), (1.22) и свойство 5) функций $\psi^{1,m}$, можно показать, что при $\kappa \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ для каждого $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-1}^1$ имеет место равенство

$$\sum_{\mu \in \mathcal{N}_{0,m+1}^1 : (\nu-\mu)/2 \in \mathcal{N}_{-m,2^{\kappa-1}-1}^1} a_\mu^m = \sum_{\rho \in \mathcal{N}_{-m,2^{\kappa-1}-1}^1 : (\nu-2\rho) \in \mathcal{N}_{0,m+1}^1} a_{\nu-2\rho}^m = 1. \quad (1.26)$$

Учитывая свойство 2) функций $\psi^{d,m}$, отметим, что при $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(m)$ выполняется равенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda g_{\kappa,\nu}^{d,m}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = 2^{(\kappa,\lambda)} \|\mathcal{D}^\lambda \psi^{d,m}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = c_{10}(d, m, \lambda) 2^{(\kappa,\lambda)}. \quad (1.27)$$

Для формулировки следующей леммы введем обозначения. При $d \in \mathbb{N}$ для $x \in \mathbb{R}^d$ положим

$$x_+ = ((x_1)_+, \dots, (x_d)_+),$$

где $t_+ = \frac{1}{2}(t + |t|)$, $t \in \mathbb{R}$. При $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$ положим

$$x_{\kappa,\nu}^{d,m} = 2^{-\kappa}(\nu - m)_+,$$

а для каждого $j = 1, \dots, d$ зададим j -ю координату вектора $\delta_{\kappa,\nu}^{d,m}$ равенством

$$(\delta_{\kappa,\nu}^{d,m})_j = \min(2^{\kappa_j}, m_j + 1) 2^{-\kappa_j}$$

и обозначим $D_{\kappa,\nu}^{d,m} = x_{\kappa,\nu}^{d,m} + \delta_{\kappa,\nu}^{d,m} I^d$, а через $\chi_{\kappa,\nu}^{d,m}$ – характеристическую функцию множества $D_{\kappa,\nu}^{d,m}$.

Заметим, что при $d \in \mathbb{N}$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$ верно равенство $D_{\kappa,\nu}^{d,0} = Q_{\kappa,\nu}^{d,0}$, а при $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$ имеет место включение

$$D_{\kappa,\nu}^{d,m} \subset I^d. \quad (1.28)$$

Для $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$ определим непрерывный линейный оператор $S_{\kappa,\nu}^{d,l,m}: L_1(I^d) \mapsto \mathcal{P}^{d,l}(I^d) \cap L_\infty(I^d)$, полагая для $f \in L_1(I^d)$ значение

$$S_{\kappa,\nu}^{d,l,m} f = P_{\delta, x^0}^{d,l,0} (f|_{(x^0 + \delta I^d)})$$

при $\delta = \delta_{\kappa,\nu}^{d,m}$, $x^0 = x_{\kappa,\nu}^{d,m}$ (см. лемму 1.3).

Далее, при $d \in \mathbb{N}$, $l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$ обозначим

$$S_{\kappa,\nu}^{d,l} = \prod_{j=1}^d V_j(S_{\kappa_j, \nu_j}^{1, l_j, 0})$$

и определим при $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ линейный оператор $E_\kappa^{d,l,m}: L_1(I^d) \mapsto L_\infty(I^d)$ равенством

$$E_\kappa^{d,l,m} f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa-\epsilon}^d} (S_{\kappa, \nu}^{d,l} f) g_{\kappa, \nu}^{d,m}, \quad f \in L_1(I^d).$$

ЛЕММА 1.10. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^d$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 \leq p < \infty$. Тогда существуют константы $c_{11}(d, l, m) > 0$ и $c_{12}(d, m) > 0$ такие, что для любой функции $f \in L_p(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ справедливо неравенство

$$\|f - E_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_p(I^d)} \leq c_{11} \sum_{j=1}^d 2^{\kappa_j/p} \left(\int_{c_{12} 2^{-\kappa_j} B^1} \int_{(I^d)_{l_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f(x)|^p dx d\xi \right)^{1/p}. \quad (1.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала отметим свойства множеств $D_{\kappa,\nu}^{d,m}$, которые понадобятся для доказательства леммы.

При $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$ справедливо включение

$$D_{\kappa,\nu}^{d,0} \subset D_{\kappa,\nu}^{d,m}. \quad (1.30)$$

Нетрудно видеть, что при $d \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$ существует константа $c_{13}(d, m) > 0$ такая, что при любом $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ для каждого $x \in I^d$ имеем

$$\text{card}\{\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d: x \in D_{\kappa,\nu}^{d,m}\} \leq c_{13}. \quad (1.31)$$

С помощью (1.24) несложно установить, что если при $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa-\epsilon}^d$ и $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$ имеем $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$, то

$$D_{\kappa,\nu_+}^{d,0} \subset D_{\kappa,\nu'}^{d,m}. \quad (1.32)$$

Из (1.24) также вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{card}\{\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \epsilon}^d : \text{supp } g_{\kappa, \nu}^{d, m} \cap Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0} \neq \emptyset\} &\leq c_{14}(d, m), \\ d \in \mathbb{N}, \quad m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, \quad \nu' \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Пусть $f \in L_p(I^d)$ и $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда ввиду (1.25) имеем

$$\begin{aligned} &\|f - E_\kappa^{d, l-\epsilon, m} f\|_{L_p(I^d)}^p \\ &\leq \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d} \left(\sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \epsilon}^d : \text{supp } g_{\kappa, \nu}^{d, m} \cap Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0} \neq \emptyset} \|f - \mathcal{S}_{\kappa, \nu_+}^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0})} \right)^p. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Далее, для $f \in L_p(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ и для $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \epsilon}^d$, $\nu' \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa, \nu}^{d, m} \cap Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0} \neq \emptyset$, выводим

$$\begin{aligned} &\|(f - \mathcal{S}_{\kappa, \nu_+}^{d, l-\epsilon} f) g_{\kappa, \nu}^{d, m}\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0})} \\ &\leq \|f - \mathcal{S}_{\kappa, \nu'}^{d, l-\epsilon, m} f\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0})} + \|\mathcal{S}_{\kappa, \nu'}^{d, l-\epsilon, m} f - \mathcal{S}_{\kappa, \nu_+}^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0})}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Учитывая (1.28), (1.30), на основании (1.5) для $f \in L_p(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\nu' \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d$ получаем

$$\begin{aligned} &\|f - \mathcal{S}_{\kappa, \nu'}^{d, l-\epsilon, m} f\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0})} \\ &\leq c_3 \sum_{j=1}^d 2^{\kappa_j/p} \left(\int_{c_{12} 2^{-\kappa_j} B^1} \int_{(D_{\kappa, \nu'}^{d, m})_{l_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f(x)|^p dx d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Учитывая соотношения (1.30), (1.32), (1.16), (1.1), (1.17), (1.18) и снова (1.32), а также (1.36), для $f \in L_p(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ и для $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \epsilon}^d$, $\nu' \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa, \nu}^{d, m} \cap Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0} \neq \emptyset$, находим

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{S}_{\kappa, \nu'}^{d, l-\epsilon, m} f - \mathcal{S}_{\kappa, \nu_+}^{d, l-\epsilon} f\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0})} \leq c_1 \|\mathcal{S}_{\kappa, \nu_+}^{d, l-\epsilon} (\mathcal{S}_{\kappa, \nu'}^{d, l-\epsilon, m} f - f)\|_{L_p(D_{\kappa, \nu_+}^{d, 0})} \\ &\leq c_{15} \sum_{j=1}^d 2^{\kappa_j/p} \left(\int_{c_{12} 2^{-\kappa_j} B^1} \int_{(D_{\kappa, \nu'}^{d, m})_{l_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f(x)|^p dx d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Объединяя (1.35)–(1.37), для $f \in L_p(I^d)$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \epsilon}^d$, $\nu' \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa, \nu}^{d, m} \cap Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0} \neq \emptyset$, получаем

$$\begin{aligned} &\|(f - \mathcal{S}_{\kappa, \nu_+}^{d, l-\epsilon} f) g_{\kappa, \nu}^{d, m}\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0})} \\ &\leq c_{16} \sum_{j=1}^d 2^{\kappa_j/p} \left(\int_{c_{12} 2^{-\kappa_j} B^1} \int_{(D_{\kappa, \nu'}^{d, m})_{l_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f(x)|^p dx d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (1.34) и применяя (1.33) и неравенство Гёльдера, а затем используя (1.31) и неравенство Гёльдера, для $f \in L_p(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ выводим

$$\begin{aligned} & \|f - E_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_p(I^d)}^p \\ & \leq c_{17}^p \sum_{j=1}^d 2^{\kappa_j} \int_{c_{12} 2^{-\kappa_j} B^1} \int_{(I^d)_{l_j \xi e_j}} \left(\sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d} \chi_{\kappa,\nu}^{d,m}(x) \right) |\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f(x)|^p dx d\xi \\ & \leq \left(c_{11} \sum_{j=1}^d 2^{\kappa_j/p} \left(\int_{c_{12} 2^{-\kappa_j} B^1} \int_{(I^d)_{l_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f(x)|^p dx d\xi \right)^{1/p} \right)^p, \end{aligned}$$

из которого вытекает (1.29).

Как известно, имеет место

ЛЕММА 1.11. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$, D – область в $\mathbb{R}^d$ и $f \in C^\infty(D)$, а $g \in L_1(D)$, причем для каждого $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ обобщенная производная $\mathcal{D}^\mu g$ принадлежит $L_1(D)$. Тогда в пространстве обобщенных функций в области D имеет место равенство

$$\mathcal{D}^\lambda(fg) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\mu \mathcal{D}^{\lambda-\mu} f \mathcal{D}^\mu g. \quad (1.38)$$

Для формулировки следующего утверждения введем обозначение.

При $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ определим линейный оператор $\mathcal{E}_\kappa^{d,l,m}: L_1(I^d) \mapsto L_\infty(I^d)$, полагая

$$\mathcal{E}_\kappa^{d,l,m} = \sum_{\epsilon \in \Upsilon^d: f(\epsilon) \subset f(\kappa)} (-\epsilon)^\epsilon E_{\kappa-\epsilon}^{d,l,m}.$$

Преобразуем выражение, задающее оператор $\mathcal{E}_\kappa^{d,l,m}$, к виду, подходящему для получения интересующих нас оценок. Для этого при $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ для $f \in L_1(I^d)$ при почти всех $x \in I^d$ имеем

$$(\mathcal{E}_\kappa^{d,l,m} f)(x) = \sum_{\epsilon \in \Upsilon^d: f(\epsilon) \subset f(\kappa)} (-\epsilon)^\epsilon \sum_{\rho \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa-\epsilon-\epsilon}^d} (\mathcal{S}_{\kappa-\epsilon, \rho}^{d,l} f)(x) g_{\kappa-\epsilon, \rho}^{d,m}(x). \quad (1.39)$$

Используя (1.22), при $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\epsilon \in \Upsilon^d$ таких, что $f(\epsilon) \subset f(\kappa)$, и $\rho \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa-\epsilon-\epsilon}^d$ почти для всех $x \in I^d$ получаем

$$\begin{aligned} g_{\kappa-\epsilon, \rho}^{d,m}(x) &= \sum_{\mu^{f(\epsilon)} \in (\mathcal{N}_{0, m+\epsilon}^d)^{f(\epsilon)}} \left(\prod_{j \in f(\epsilon)} a_{\mu_j}^{m_j} \right) \\ &\times \left(\prod_{j \in \mathcal{N}_{1,d}^1 \setminus f(\epsilon)} \psi^{1,m_j}(2^{\kappa_j} x_j - \rho_j) \right) \left(\prod_{j \in f(\epsilon)} \psi^{1,m_j}(2^{\kappa_j} x_j - 2\rho_j - \mu_j) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (1.23), при $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\varepsilon \in \Upsilon^d$ таких, что $f(\varepsilon) \subset f(\kappa)$, почти для всех $x \in I^d$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\rho \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \varepsilon - \mathfrak{e}}^d} (\mathcal{S}_{\kappa - \varepsilon, \rho_+}^{d, l} f)(x) g_{\kappa - \varepsilon, \rho}^{d, m}(x) \\ &= \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \mathfrak{e}}^d} g_{\kappa, \nu}^{d, m}(x) \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon}^{d, m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) (\mathcal{S}_{\kappa - \varepsilon, \rho_+}^{d, l} f)(x), \end{aligned} \quad (1.40)$$

где

$$\mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon}^{d, m} = \{ \rho \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \varepsilon - \mathfrak{e}}^d : \rho_j = \nu_j, j \in \mathcal{N}_{1, d}^1 \setminus f(\varepsilon), (\nu_j - 2\rho_j) \in \mathcal{N}_{0, m_j + 1}^1, j \in f(\varepsilon) \}.$$

Подставляя (1.40) в (1.39), выводим равенство

$$\mathcal{E}_\kappa^{d, l, m} f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \mathfrak{e}}^d} (U_{\kappa, \nu}^{d, l, m} f) g_{\kappa, \nu}^{d, m} \quad (1.41)$$

для $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $f \in L_1(I^d)$, где $U_{\kappa, \nu}^{d, l, m} : L_1(I^d) \mapsto \mathcal{P}^{d, l}(I^d)$ — линейный оператор, определяемый при $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \mathfrak{e}}^d$ для $f \in L_1(I^d)$ равенством

$$U_{\kappa, \nu}^{d, l, m} f = \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d : f(\varepsilon) \subset f(\kappa)} (-\mathfrak{e})^\varepsilon \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon}^{d, m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) (\mathcal{S}_{\kappa - \varepsilon, \rho_+}^{d, l} f) \quad (1.42)$$

(см. (1.16)).

Ввиду утверждения 2) леммы 1.4 при $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \mathfrak{e}}^d$, $\varepsilon \in \Upsilon^d$ таких, что $f(\varepsilon) \subset f(\kappa)$, для $\rho \in \mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon}^{d, m}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\kappa - \varepsilon, \rho_+}^{d, l} &= \prod_{j=1}^d (E - V_j(E - S_{\kappa_j - \varepsilon_j, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0})) \\ &= \sum_{\gamma \in \Upsilon^d} (-\mathfrak{e})^\gamma \prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - S_{\kappa_j - \varepsilon_j, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Подставляя (1.43) в (1.42), находим, что при $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^\kappa - \mathfrak{e}}^d$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} U_{\kappa, \nu}^{d, l, m} &= \sum_{\gamma \in \Upsilon^d : f(\kappa) \setminus f(\gamma) = \emptyset} (-\mathfrak{e})^\gamma \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d : f(\varepsilon) \subset f(\kappa)} (-\mathfrak{e})^\varepsilon \\ &\quad \times \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon}^{d, m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - S_{\kappa_j - \varepsilon_j, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}) \right) \\ &\quad + \sum_{\gamma \in \Upsilon^d : f(\kappa) \setminus f(\gamma) \neq \emptyset} (-\mathfrak{e})^\gamma \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d : f(\varepsilon) \subset f(\kappa)} (-\mathfrak{e})^\varepsilon \\ &\quad \times \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon}^{d, m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - S_{\kappa_j - \varepsilon_j, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}) \right). \end{aligned} \quad (1.44)$$

При $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2\kappa - \epsilon}^d$ для $\gamma \in \Upsilon^d$ такого, что $f(\kappa) \setminus f(\gamma) \neq \emptyset$, соблюдается равенство

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d: f(\varepsilon) \subset f(\kappa)} (-\epsilon)^\varepsilon \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon}^{d, m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - S_{\kappa_j - \varepsilon_j, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}) \right) \\
 &= \sum_{\substack{\varepsilon \in \Upsilon^d: \\ f(\varepsilon) \subset (f(\kappa) \cap f(\gamma))}} (-\epsilon)^\varepsilon \sum_{\substack{\varepsilon' \in \Upsilon^d: \\ f(\varepsilon') \subset (f(\kappa) \setminus f(\gamma))}} (-\epsilon)^{\varepsilon'} \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon + \varepsilon'}^{d, m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) \\
 & \quad \times \left(\prod_{j \in f(\varepsilon')} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - S_{\kappa_j - \varepsilon_j, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}) \right). \tag{1.45}
 \end{aligned}$$

Далее, при $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2\kappa - \epsilon}^d$ для $\gamma \in \Upsilon^d$ таких, что $f(\kappa) \setminus f(\gamma) \neq \emptyset$, $\varepsilon \in \Upsilon^d$ такого, что $f(\varepsilon) \subset (f(\kappa) \cap f(\gamma))$, и $\varepsilon' \in \Upsilon^d$ такого, что $f(\varepsilon') \subset (f(\kappa) \setminus f(\gamma))$, обозначая для $j \in \mathcal{N}_{1, d}^1$ и $\rho_j \in (\mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon + \varepsilon'}^{d, m})^{\{j\}}$ через $A_{\rho_j}^j$ оператор

$$A_{\rho_j}^j = \begin{cases} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} V_j(E - S_{\kappa_j - 1, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}), & j \in f(\varepsilon), \\ V_j(E - S_{\kappa_j, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}), & j \in f(\gamma) \setminus f(\varepsilon), \\ a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} E, & j \in f(\varepsilon'), \\ E, & j \in (\mathcal{N}_{1, d}^1 \setminus f(\gamma)) \setminus f(\varepsilon'), \end{cases}$$

и учитывая (1.8), (1.26), выводим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon + \varepsilon'}^{d, m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) \left(\prod_{j \in f(\varepsilon')} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - S_{\kappa_j - \varepsilon_j, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}) \right) \\
 &= \sum_{\substack{\rho \in \mathbb{Z}^d: \rho_j \in (\mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon + \varepsilon'}^{d, m})^{\{j\}} \\ j=1, \dots, d}} \left(\prod_{j=1}^d A_{\rho_j}^j \right) = \prod_{j \in \mathcal{N}_{1, d}^1} \left(\sum_{\rho_j \in (\mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon + \varepsilon'}^{d, m})^{\{j\}}} A_{\rho_j}^j \right) \\
 &= \left(\prod_{j \in f(\gamma) \setminus f(\varepsilon)} V_j(E - S_{\kappa_j, \nu_{+j}}^{1, l_j, 0}) \right) \\
 & \quad \times \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} \left(\sum_{\substack{\rho_j \in \mathcal{N}_{-m_j, 2\kappa_j - 1 - 1}^1: \\ (\nu_j - 2\rho_j) \in \mathcal{N}_{0, m_j + 1}^1}} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} V_j(E - S_{\kappa_j - 1, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}) \right) \right). \tag{1.46}
 \end{aligned}$$

Подставляя (1.46) в (1.45), приходим к равенству

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d: f(\varepsilon) \subset f(\kappa)} (-\mathfrak{e})^\varepsilon \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon}^{d, m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - S_{\kappa_j - \varepsilon_j, \rho+j}^{1, l_j, 0}) \right) \\
 &= \sum_{\substack{\varepsilon \in \Upsilon^d: \\ f(\varepsilon) \subset (f(\kappa) \cap f(\gamma))}} (-\mathfrak{e})^\varepsilon \sum_{\substack{\varepsilon' \in \Upsilon^d: \\ f(\varepsilon') \subset (f(\kappa) \setminus f(\gamma))}} (-\mathfrak{e})^{\varepsilon'} \left(\prod_{j \in f(\gamma) \setminus f(\varepsilon)} V_j(E - S_{\kappa_j, \nu+j}^{1, l_j, 0}) \right) \\
 & \quad \times \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} \left(\sum_{\substack{\rho_j \in \mathcal{N}_{-m_j, 2\kappa_j-1-1}^1: \\ (\nu_j - 2\rho_j) \in \mathcal{N}_{0, m_j+1}^1}} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} V_j(E - S_{\kappa_j - 1, \rho+j}^{1, l_j, 0}) \right) \right) = 0 \quad (1.47)
 \end{aligned}$$

при $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2\kappa - \mathfrak{e}}^d$, $\gamma \in \Upsilon^d$ таких, что $f(\kappa) \setminus f(\gamma) \neq \emptyset$, ибо в этом случае

$$\sum_{\varepsilon' \in \Upsilon^d: f(\varepsilon') \subset (f(\kappa) \setminus f(\gamma))} (-\mathfrak{e})^{\varepsilon'} = 0.$$

Объединяя (1.47) с (1.44), заключаем, что при $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2\kappa - \mathfrak{e}}^d$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
 U_{\kappa, \nu}^{d, l, m} &= \sum_{\gamma \in \Upsilon^d: f(\kappa) \subset f(\gamma)} (-\mathfrak{e})^\gamma \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d: f(\varepsilon) \subset f(\kappa)} (-\mathfrak{e})^\varepsilon \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa, \nu, \varepsilon}^{d, m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) \\
 & \quad \times \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - S_{\kappa_j - \varepsilon_j, \rho+j}^{1, l_j, 0}) \right). \quad (1.48)
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 1.12. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^d$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(m)$. Тогда существуют константы $c_{18}(d, l, m, p, q, \lambda) > 0$ и $c_{19}(d, m) > 0$ такие, что для любой функции $f \in L_p(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
 & \|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d, l - \mathfrak{e}, m} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{18} \left(\prod_{j \in f(\kappa)} 2^{\kappa_j(\lambda_j + p^{-1} + (p^{-1} - q^{-1})_+)} \right) \\
 & \quad \times \left(\int_{(c_{19} 2^{-\kappa} B^d)^{f(\kappa)}} \int_{(I^d)_\xi^{l_{\chi f(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l_{\chi f(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa)} \right)^{1/p}. \quad (1.49)
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала построим некоторые вспомогательные объекты, которые нам понадобятся при доказательстве.

При $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0, 2\kappa - \mathfrak{e}}^d$ зададим точку $(x')_{\kappa, \nu}^{d, m}$ и вектор $(\delta')_{\kappa, \nu}^{d, m}$, полагая

$$\begin{aligned}
 ((x')_{\kappa, \nu}^{d, m})_j &= 2^{-\kappa_j} \min((\nu_j - 2m_j - 1)_+, (2^{\kappa_j} - 2m_j - 3)_+), \\
 ((\delta')_{\kappa, \nu}^{d, m})_j &= 2^{-\kappa_j} \min(2^{\kappa_j}, 2m_j + 3), \quad j = 1, \dots, d,
 \end{aligned}$$

и определим клетку $(D')_{\kappa, \nu}^{d, m}$ равенством $(D')_{\kappa, \nu}^{d, m} = (x')_{\kappa, \nu}^{d, m} + (\delta')_{\kappa, \nu}^{d, m} I^d$.

Из определения следует, что при $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$ имеет место включение

$$(D')_{\kappa,\nu}^{d,m} \subset I^d, \quad (1.50)$$

а также

$$Q_{\kappa,\nu}^{d,0} = D_{\kappa,\nu}^{d,0} \subset (D')_{\kappa,\nu}^{d,m}. \quad (1.51)$$

С помощью (1.51) легко проверить, что при $d \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$ существует константа $c_{20}(d, m) > 0$ такая, что для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ и $x \in I^d$ верно неравенство

$$\text{card}\{\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d : x \in (D')_{\kappa,\nu}^{d,m}\} \leq c_{20}. \quad (1.52)$$

Пользуясь тем, что для $t \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}_+$ справедливы соотношения $(at)_+ = at_+$ и $t_+ \leq (t+a)_+ \leq t_+ + a$, а также используя (1.24), несложно показать, что при $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \cap \text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \neq \emptyset$, $\varepsilon \in \Upsilon^d$ такого, что $f(\varepsilon) \subset f(\kappa)$, и $\rho \in P_{\kappa,\nu,\varepsilon}^{d,m}$ имеет место включение

$$D_{\kappa-\varepsilon,\rho_+}^{d,0} \subset (D')_{\kappa,\nu'}^{d,m}. \quad (1.53)$$

Отметим также, что

$$\text{card } P_{\kappa,\nu,\varepsilon}^{d,m} \leq c_{21}(d, m), \quad (1.54)$$

где $d \in \mathbb{N}$, $m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\varepsilon \in \Upsilon^d$ такие, что $f(\varepsilon) \subset f(\kappa)$.

Определим при $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-1}^d$ непрерывный линейный оператор $(S')_{\kappa,\nu}^{l,m} : L_1(I) \mapsto \mathcal{P}^{1,l}(I) \cap L_\infty(I)$, полагая для $f \in L_1(I)$

$$(S')_{\kappa,\nu}^{l,m} f = P_{\delta,x^0}^{1,l,0}(f|_{(x^0+\delta I)})$$

при $\delta = 2^{-\kappa} \min(2^\kappa, 2m+3)$, $x^0 = 2^{-\kappa} \min((\nu-2m-1)_+, (2^\kappa-2m-3)_+)$.

Теперь перейдем к выводу оценки (1.49). В условиях леммы ввиду (1.41), (1.38) имеем

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)} \\ & \leq \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d} C_\lambda^\mu \left\| \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d} \mathcal{D}^\mu (U_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m} \right\|_{L_q(I^d)}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Оценивая правую часть (1.55), при $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ находим, что

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d} \mathcal{D}^\mu (U_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m} \right\|_{L_q(I^d)}^q \\ & \leq \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d} \left(\sum_{\substack{\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d : \\ \text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset}} \left\| \mathcal{D}^\mu (U_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m} \right\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu'}^{d,0})} \right)^q. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Используя (1.27), (1.1) и (1.51), выводим

$$\left\| \mathcal{D}^\mu (U_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m} \right\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu'}^{d,0})} \leq c_{22} 2^{(\kappa,\lambda+p^{-1}\epsilon-q^{-1}\epsilon)} \left\| U_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f \right\|_{L_p((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} \quad (1.57)$$

при $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$.

Из (1.48) для $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$, имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|U_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_p((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} &\leq \sum_{\gamma \in \Upsilon^d: f(\kappa) \subset f(\gamma)} \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d: f(\varepsilon) \subset f(\kappa)} \sum_{\rho \in \mathbb{P}_{\kappa,\nu,\varepsilon}^{d,m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j-2\rho_j}^{m_j} \right) \\ &\times \left\| \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - S_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1,0}) \right) f \right\|_{L_p((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Далее, для $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$, $\gamma \in \Upsilon^d$ такого, что $f(\kappa) \subset f(\gamma)$, $\varepsilon \in \Upsilon^d$ такого, что $f(\varepsilon) \subset f(\kappa)$, и $\rho \in \mathbb{P}_{\kappa,\nu,\varepsilon}^{d,m}$, используя (1.8), а затем с учетом (1.53), (1.50) применяя (1.19), получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - S_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1,0}) \right) f \right\|_{L_p((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} \\ &\leq c_8 \left\| \left(\prod_{j \in f(\kappa)} V_j(E - S_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1,0}) \right) f \right\|_{L_p((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

и, пользуясь тем, что при $j = 1, \dots, d$ ввиду (1.3) выполнено равенство

$$(E - S_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1,0}) = (E - S_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1,0})(E - (S')_{\kappa_j, \nu'_j}^{l_j-1, m_j}),$$

согласно утверждению 2) леммы 1.4 и (1.8), а также в силу (1.53), (1.50), (1.19) выводим

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\prod_{j \in f(\kappa)} V_j(E - S_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1,0}) \right) f \right\|_{L_p((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} \\ &\leq c_8 \left\| \left(\prod_{j \in f(\kappa)} V_j(E - (S')_{\kappa_j, \nu'_j}^{l_j-1, m_j}) \right) f \right\|_{L_p((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Объединяя (1.58)–(1.60) и учитывая (1.54), на основании (1.11) (при $J = \emptyset$, $J' = f(\kappa)$) находим, что для $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|U_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_p((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} &\leq c_{23} \left(\prod_{j \in f(\kappa)} 2^{\kappa_j/p} \right) \\ &\times \left(\int_{(c_{19}2^{-\kappa}B^d)^{f(\kappa)}} \int_{((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})_\xi^{l_{\chi f(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l_{\chi f(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa)} \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Из (1.57) и (1.61) следует, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\mu(U_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m}\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu'}^{d,0})} &\leq c_{24} 2^{(\kappa, \lambda+p^{-1}\epsilon-q^{-1}\epsilon)} \left(\prod_{j \in f(\kappa)} 2^{\kappa_j/p} \right) \\ &\times \left(\int_{(c_{19}2^{-\kappa}B^d)^{f(\kappa)}} \int_{((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})_\xi^{l_{\chi f(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l_{\chi f(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa)} \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (1.62)$$

при $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$, $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$. Подставляя (1.62) в (1.56) и учитывая (1.24), а затем применяя неравенство Гёльдера с показателем $p/q \leq 1$ и используя (1.52), получаем, что при $p \leq q$ и $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d} \mathcal{D}^\mu (U_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m} \right\|_{L_q(I^d)}^q \leq (c_{25} 2^{(\kappa,\lambda+2p^{-1}\epsilon-q^{-1}\epsilon)})^q \\ & \quad \times \left(\sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d} \int_{(c_{19}2^{-\kappa}B^d)^{f(\kappa)}} \int_{(D')_{\kappa,\nu'}^{d,m} \cap (I^d)_\xi^{l_{Xf(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l_{Xf(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa)} \right)^{q/p} \\ & \leq \left(c_{26} 2^{(\kappa,\lambda+2p^{-1}\epsilon-q^{-1}\epsilon)} \right. \\ & \quad \times \left. \left(\int_{(c_{19}2^{-\kappa}B^d)^{f(\kappa)}} \int_{(I^d)_\xi^{l_{Xf(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l_{Xf(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa)} \right)^{1/p} \right)^q. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Объединяя (1.63) с (1.55), приходим к (1.49) при $p \leq q$. Для получения неравенства (1.49) при $q < p$ достаточно заметить, что в этом случае

$$\|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)} \leq \|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_p(I^d)},$$

и применить (1.49) при $q = p$.

ЛЕММА 1.13. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^d$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(m)$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Тогда существует константа $c_{27}(d, l, m, \lambda, p, q) > 0$ такая, что для любой функции $f \in L_p(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{27} 2^{(\kappa,\lambda+(p^{-1}-q^{-1})_+ \epsilon)} \|f\|_{L_p(I^d)}. \quad (1.64)$$

Неравенство (1.64) при $p < \infty$ вытекает из (1.49), а при $p = \infty$ его можно вывести, придерживаясь схемы вывода (1.49).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(m)$. Тогда существует константа $c_{28}(d, \alpha, p, q, m, \lambda) > 0$ такая, что для любой функции $f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ при $l = l(\alpha)$ и $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}$ соблюдается неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{28} 2^{-(\kappa,\alpha-\lambda-(p^{-1}-q^{-1})_+ \epsilon)}. \quad (1.65)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, для $f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ при $l = l(\alpha)$ и $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}$ в силу (1.49) имеем

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{18} \left(\prod_{j \in f(\kappa)} 2^{\kappa_j(\lambda_j+p^{-1}+(p^{-1}-q^{-1})_+)} \right) \\ & \quad \times \left(\int_{(c_{19}2^{-\kappa}B^d)^{f(\kappa)}} (\Omega^{l_{Xf(\kappa)}}(f, (c_{19}2^{-\kappa})^{f(\kappa)}))_{L_p(I^d)}^p d\xi^{f(\kappa)} \right)^{1/p} \\ & \leq c_{28} 2^{-(\kappa,\alpha-\lambda-(p^{-1}-q^{-1})_+ \epsilon)}, \end{aligned}$$

что совпадает с (1.65).

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(m)$. Тогда существует константа $c_{29}(d, l, p, q, m, \lambda) > 0$ такая, что если для функции $f \in L_p(I^d)$ и любого непустого множества $J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1$ выполнено

$$\left(\prod_{j \in J} t_j^{-\lambda_j - p^{-1} - (p^{-1} - q^{-1})_+ - 1} \right) \times \left(\int_{(c_{19}tB^d)^J} \int_{(I^d)_{\xi}^{l_{\chi,J}}} |\Delta_{\xi}^{l_{\chi,J}} f(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} \in L_1((I^d)^J), \quad (1.66)$$

то в $L_q(I^d)$ имеют место равенство

$$\mathcal{D}^{\lambda} f = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{D}^{\lambda} \mathcal{E}_{\kappa}^{d, l-\epsilon, m} f \quad (1.67)$$

и неравенство

$$\|\mathcal{D}^{\lambda} f - \mathcal{D}^{\lambda} \mathcal{E}_0^{d, l-\epsilon, m} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{29} \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1: J \neq \emptyset} \int_{(I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-\lambda_j - p^{-1} - (p^{-1} - q^{-1})_+ - 1} \right) \times \left(\int_{(c_{19}tB^d)^J} \int_{(I^d)_{\xi}^{l_{\chi,J}}} |\Delta_{\xi}^{l_{\chi,J}} f(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} dt^J. \quad (1.68)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы прежде всего заметим, что в силу (1.29) справедливо соотношение

$$\|f - E_{\kappa}^{d, l-\epsilon, m} f\|_{L_p(I^d)} \leq c_{30} \sum_{j=1}^d \Omega^{l_{e_j}}(f, c_{11}2^{-\kappa_j})_{L_p(I^d)} \rightarrow 0, \quad m(\kappa) \rightarrow \infty.$$

Далее, для каждого непустого множества $J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1$ рассмотрим ряд

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: f(\kappa)=J} \|\mathcal{E}_{\kappa}^{d, l-\epsilon, m} f\|_{L_p(I^d)}. \quad (1.69)$$

Для $J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1$, $J \neq \emptyset$, и $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ таких, что $f(\kappa) = J$, ввиду (1.49) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_{\kappa}^{d, l-\epsilon, m} f\|_{L_p(I^d)} &\leq c_{18} \left(\prod_{j \in J} 2^{\kappa_j/p} \right) \left(\int_{(c_{19}2^{-\kappa}B^d)^J} \int_{(I^d)_{\xi}^{l_{\chi,J}}} |\Delta_{\xi}^{l_{\chi,J}} f(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} \\ &\leq c_{18} \left(\prod_{j \in J} 2^{\kappa_j(\lambda_j + p^{-1} + (p^{-1} - q^{-1})_+)} \right) \left(\int_{(c_{19}2^{-\kappa}B^d)^J} \int_{(I^d)_{\xi}^{l_{\chi,J}}} |\Delta_{\xi}^{l_{\chi,J}} f(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} \\ &\leq c_{31} \int_{(2^{-\kappa} + 2^{-\kappa}I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-\lambda_j - p^{-1} - (p^{-1} - q^{-1})_+ - 1} \right) \\ &\quad \times \left(\int_{(c_{19}tB^d)^J} \int_{(I^d)_{\xi}^{l_{\chi,J}}} |\Delta_{\xi}^{l_{\chi,J}} f(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} dt^J. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Поскольку множества $(2^{-\kappa} + 2^{-\kappa} I^d)^J$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $f(\kappa) = J$, попарно не пересекаются и $\bigcup_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: f(\kappa)=J} (2^{-\kappa} + 2^{-\kappa} I^d)^J \subset (I^d)^J$, то из (1.66) и (1.70) вытекает, что ряд (1.69) сходится для $J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1$, $J \neq \emptyset$, а следовательно, и ряд $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_p(I^d)}$ сходится. Отсюда на основании леммы 1.9 заключаем, что в $L_p(I^d)$ имеет место равенство

$$f = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f. \quad (1.71)$$

Сопоставляя (1.49) и (1.70), в силу тех же соображений, что и выше, приходим к выводу, что ряд

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)}$$

сходится, значит, ряд

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f$$

также сходится в $L_q(I^d)$.

Учитывая это обстоятельство и равенство (1.71), для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(I^d)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}^\lambda f, \varphi \rangle &= \int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f \right) (-1)^{(\lambda, \epsilon)} \mathcal{D}^\lambda \varphi \, dx \\ &= \int_{I^d} \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{D}^\lambda (\mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f) \right) \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Это значит, что в $L_q(I^d)$ верно равенство (1.67).

Теперь из (1.67), учитывая (1.49), (1.70) и используя соображения, приведенные после формулы (1.70), получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_0^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)} &\leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}} \|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)} \\ &\leq c_{29} \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1: J \neq \emptyset} \int_{(I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-\lambda_j - p^{-1} - (p^{-1} - q^{-1})_+ - 1} \right) \\ &\quad \times \left(\int_{(c_{19} t B^d)^J} \int_{(I^d)_\xi^{l_{X,J}}} |\Delta_\xi^{l_{X,J}} f(x)|^p \, dx \, d\xi^J \right)^{1/p} dt^J, \end{aligned}$$

что совпадает с (1.68).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $l = l(\alpha)$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(m)$ и

$$\alpha - \lambda - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon > 0. \quad (1.72)$$

Тогда для любой функции $f \in S_p^\alpha H(I^d)$ в $L_q(I^d)$ выполнено (1.67) и справедливо неравенство (1.68).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что при выполнении условия (1.72) для $f \in S_p^\alpha H(I^d)$ и любого непустого множества $J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1$ выполняется условие (1.66). Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{(c_{19}tB^d)^J} \int_{(I^d)_{\xi}^{l_{X,J}}} |\Delta_{\xi}^{l_{X,J}} f(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\int_{(c_{19}tB^d)^J} (\Omega^{l_{X,J}}(f, c_{19}t^J)_{L_p(I^d)})^p d\xi^J \right)^{1/p} \leq c_{32} \prod_{j \in J} t_j^{\alpha_j + p^{-1}}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{j \in J} t_j^{-\lambda_j - p^{-1} - (p^{-1} - q^{-1})_+ - 1} \right) \left(\int_{(c_{19}tB^d)^J} \int_{(I^d)_{\xi}^{l_{X,J}}} |\Delta_{\xi}^{l_{X,J}} f(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} \\ & \leq c_{32} \left(\prod_{j \in J} t_j^{\alpha_j - \lambda_j - (p^{-1} - q^{-1})_+ - 1} \right) \in L_1((I^d)^J) \end{aligned}$$

при выполнении (1.72). Отсюда видим, что соблюдается (1.66).

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ удовлетворяют условию (1.72). Тогда существуют константы $c_{33}(d, \alpha) > 0$, $c_{34}(d, \alpha, p, q, \lambda) > 0$ и $c_{35}(d, \alpha, p, q, \lambda) > 0$ такие, что при любых $\delta \in \mathbb{R}_+^d$, $x^0 \in \mathbb{R}^d$ для $Q = x^0 + \delta I^d$ и $f \in S_p^\alpha H(Q)$ при $l = l(\alpha)$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda P_{\delta, x^0}^{d, l-\epsilon, \lambda} f\|_{L_q(Q)} \leq c_{34} \delta^{-\lambda - p^{-1}\epsilon + q^{-1}\epsilon} \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1: J \neq \emptyset} \left(\prod_{j \in J} \delta_j^{\lambda_j + (p^{-1} - q^{-1})_+} \right) \\ & \times \int_{(c_{33}\delta I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-\lambda_j - p^{-1} - (p^{-1} - q^{-1})_+ - 1} \right) \\ & \times \left(\int_{(tB^d)^J} \int_{Q_{\xi}^{l_{X,J}}} |\Delta_{\xi}^{l_{X,J}} f(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} dt^J, \end{aligned} \quad (1.73)$$

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(Q)} \leq c_{35} \delta^{-\lambda - p^{-1}\epsilon + q^{-1}\epsilon} \left(\|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1: J \neq \emptyset} \left(\prod_{j \in J} \delta_j^{\lambda_j + (p^{-1} - q^{-1})_+} \right) \right) \\ & \times \int_{(c_{33}\delta I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-\lambda_j - p^{-1} - (p^{-1} - q^{-1})_+ - 1} \right) \\ & \times \left(\int_{(tB^d)^J} \int_{Q_{\xi}^{l_{X,J}}} |\Delta_{\xi}^{l_{X,J}} f(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} dt^J. \end{aligned} \quad (1.74)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что в условиях теоремы для $f \in S_p^\alpha H(Q)$ существует полином $g \in \mathcal{P}^{d,l-\epsilon}$ такой, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda g\|_{L_q(Q)} &\leq c_{36} \delta^{-\lambda-p^{-1}\epsilon+q^{-1}\epsilon} \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1: J \neq \emptyset} \left(\prod_{j \in J} \delta_j^{\lambda_j+(p^{-1}-q^{-1})_+} \right) \\ &\times \int_{(c_{33}\delta I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-\lambda_j-p^{-1}-(p^{-1}-q^{-1})_+-1} \right) \\ &\times \left(\int_{(tB^d)^J} \int_{Q_\xi^{l_{X,J}}} |\Delta_\xi^{l_{X,J}} f(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} dt^J. \end{aligned} \quad (1.75)$$

При $\delta = \epsilon$, $x^0 = 0$ для $f \in S_p^\alpha H(I^d)$ и $m = l = l(\alpha)$, полагая

$$g = \mathcal{E}_0^{d,l-\epsilon,m} f = (S_{0,0}^{d,l-\epsilon} f) \in \mathcal{P}^{d,l-\epsilon}(I^d)$$

(см. (1.25)), в силу предложения 1.1 видим, что справедливо неравенство (1.68), которое после соответствующей замены переменных принимает вид (1.75) при $\delta = \epsilon$, $x^0 = 0$.

Если $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ и $x^0 \in \mathbb{R}^d$ произвольные, то для функции $f \in S_p^\alpha H(Q)$ рассмотрим функцию $\varphi \in S_p^\alpha H(I^d)$, определяемую равенством $\varphi(x) = f(x^0 + \delta x)$, $x \in I^d$, и возьмем полином $\psi \in \mathcal{P}^{d,l-\epsilon}$, для которого в соответствии с (1.75) при $\delta = \epsilon$, $x^0 = 0$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda \varphi - \mathcal{D}^\lambda \psi\|_{L_q(I^d)} &\leq c_{36} \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1: J \neq \emptyset} \int_{(c_{33}I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} \tau_j^{-\lambda_j-p^{-1}-(p^{-1}-q^{-1})_+-1} \right) \\ &\times \left(\int_{(\tau B^d)^J} \int_{(I^d)_{\eta}^{l_{X,J}}} |\Delta_\eta^{l_{X,J}} \varphi(y)|^p dy d\eta^J \right)^{1/p} d\tau^J. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Для каждого $J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1$, $J \neq \emptyset$, делая замены переменных $y = \delta^{-1}(x - x^0)$, $\eta^J = (\delta^{-1}\xi)^J = (\delta^{-1})^J \xi^J$, $\tau^J = (\delta^{-1})^J t^J$, находим, что

$$\begin{aligned} &\int_{(c_{33}I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} \tau_j^{-\lambda_j-p^{-1}-(p^{-1}-q^{-1})_+-1} \right) \\ &\times \left(\int_{(\tau B^d)^J} \int_{(I^d)_{\eta}^{l_{X,J}}} |\Delta_\eta^{l_{X,J}} \varphi(y)|^p dy d\eta^J \right)^{1/p} d\tau^J \\ &= \delta^{-p^{-1}\epsilon} \left(\prod_{j \in J} \delta_j^{\lambda_j+(p^{-1}-q^{-1})_+} \right) \int_{(c_{33}\delta I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-\lambda_j-p^{-1}-(p^{-1}-q^{-1})_+-1} \right) \\ &\times \left(\int_{(tB^d)^J} \int_{Q_\xi^{l_{X,J}}} |(\Delta_\xi^{l_{X,J}} f)(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} dt^J. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Полагая $g(x) = \psi(\delta^{-1}(x - x^0)) \in \mathcal{P}^{d,l-\epsilon}$, после замены переменной $y = \delta^{-1}(x - x^0)$ получаем

$$\|\mathcal{D}^\lambda \varphi - \mathcal{D}^\lambda \psi\|_{L_q(I^d)} = \delta^{\lambda-q^{-1}\epsilon} \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda g\|_{L_q(Q)}. \quad (1.78)$$

Объединяя (1.76)–(1.78), приходим к (1.75).

Выбирая для $f \in S_p^\alpha H(Q)$ полином $g \in \mathcal{P}^{d,l-\epsilon}$, для которого соблюдается (1.75), согласно (1.3), (1.4), (1.2) имеем

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda P_{\delta,x^0}^{d,l-\epsilon,\lambda} f\|_{L_q(Q)} \\ &= \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda g + P_{\delta,x^0}^{d,l-\lambda-\epsilon,0} \mathcal{D}^\lambda g - P_{\delta,x^0}^{d,l-\lambda-\epsilon,0} \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(Q)} \\ &\leq \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda g\|_{L_q(Q)} + c_2 \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda g\|_{L_q(Q)}. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее неравенство оценку (1.75), получаем (1.73).

Чтобы убедиться в справедливости (1.74), достаточно заметить, что в силу (1.1) и (1.2) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(Q)} &\leq \|\mathcal{D}^\lambda P_{\delta,x^0}^{d,l-\epsilon,\lambda} f\|_{L_q(Q)} + \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda P_{\delta,x^0}^{d,l-\epsilon,\lambda} f\|_{L_q(Q)} \\ &\leq c_{37} \delta^{-\lambda-p^{-1}\epsilon+q^{-1}\epsilon} \|f\|_{L_p(Q)} + \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda P_{\delta,x^0}^{d,l-\epsilon,\lambda} f\|_{L_q(Q)}, \end{aligned}$$

и применить (1.73).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$ таковы, что

$$\alpha - p^{-1}\epsilon > 0. \quad (1.79)$$

Тогда для любой функции $f \in S_p^\alpha H(I^d)$ существует функция $F \in C(\bar{I}^d)$ такая, что почти для всех $x \in I^d$ верно равенство $f(x) = F(x)$, т.е. $S_p^\alpha H(I^d) \subset C(\bar{I}^d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируя $m \in \mathbb{N}^d$ и $l = l(\alpha)$, получим, что для любой функции $f \in S_p^\alpha H(I^d)$ последовательность $\{\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+n}^d} \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f, n \in \mathbb{Z}_+\} \subset C(\mathbb{R}^d) \subset C(\bar{I}^d)$ при соблюдении условия (1.79) в соответствии с предложением 1.1 сходится в $L_\infty(I^d)$, а следовательно, почти всюду на I^d к f . Учитывая, что для любой функции $g \in C(\bar{I}^d)$ выполнено равенство $\|g\|_{C(\bar{I}^d)} = \|g\|_{L_\infty(I^d)}$, благодаря полноте $C(\bar{I}^d)$ заключаем, что существует функция $F \in C(\bar{I}^d)$ такая, что последовательность $\{\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+n}^d} \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f, n \in \mathbb{Z}_+\}$ сходится в $C(\bar{I}^d)$ и, значит, в каждой точке $\bar{I}^d$ к функции F . Так что $f(x) = F(x)$ почти для всех $x \in I^d$.

§ 2. Задача С. Б. Стечкина для оператора частного дифференцирования на классах функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гёльдера

2.1. В этом пункте будет получена оценка сверху наилучшей точности приближения в $L_q(I^d)$ оператора $\mathcal{D}^\lambda$ ограниченными операторами, действующими из $L_s(I^d)$ в $L_q(I^d)$, на классах $S_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ и $S_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$.

Напомним постановку общей задачи, частным случаем которой является задача, рассматриваемая в настоящем параграфе.

Пусть X, Y – банаховы пространства, $\mathcal{B}(X, Y)$ – банахово пространство непрерывных линейных операторов $V: X \mapsto Y$ с обычной нормой

$$\|V\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \sup_{x \in B(X)} \|Vx\|_Y,$$

$A: D(A) \mapsto Y$ – линейный оператор с областью определения $D(A) \subset X$. Пусть $K \subset D(A)$ и $\rho > 0$.

Требуется описать поведение в зависимости от ρ величины

$$E(A, X, Y, K, \rho) = \inf_{\{V \in \mathcal{B}(X, Y) : \|V\|_{\mathcal{B}(X, Y)} \leq \rho\}} \sup_{x \in K} \|Ax - Vx\|_Y.$$

Теперь приведем некоторые факты, которыми мы будем пользоваться далее.

При $d \in \mathbb{N}$ для $x \in \mathbb{R}^d$ обозначим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(x) &= \max_{j=1, \dots, d} x_j, \\ \mathfrak{C}(x) &= \text{card}\{j \in \mathcal{N}_{1,d}^1 : x_j = \mathfrak{M}(x)\}, \\ \mathfrak{m}(x) &= \min_{j=1, \dots, d} x_j, \\ \mathfrak{c}(x) &= \text{card}\{j \in \mathcal{N}_{1,d}^1 : x_j = \mathfrak{m}(x)\}. \end{aligned}$$

Следующие две леммы приведены в работе [15].

ЛЕММА 2.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $\beta \in \mathbb{R}^d$ и $\mathfrak{M}(\alpha^{-1}\beta) > 0$. Тогда существуют константы $c_1(d, \alpha, \beta) > 0$ и $c_2(d, \alpha, \beta) > 0$ такие, что для $r \in \mathbb{N}$ соблюдается неравенство

$$c_1 2^{\mathfrak{M}(\alpha^{-1}\beta)r} r^{\mathfrak{C}(\alpha^{-1}\beta)-1} \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \alpha) \leq r} 2^{(\kappa, \beta)} \leq c_2 2^{\mathfrak{M}(\alpha^{-1}\beta)r} r^{\mathfrak{C}(\alpha^{-1}\beta)-1}. \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда существуют константы $c_3(d, \alpha, \beta) > 0$ и $c_4(d, \alpha, \beta) > 0$ такие, что при $r \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$c_3 2^{-\mathfrak{m}(\alpha^{-1}\beta)r} r^{\mathfrak{c}(\alpha^{-1}\beta)-1} \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \alpha) > r} 2^{-(\kappa, \beta)} \leq c_4 2^{-\mathfrak{m}(\alpha^{-1}\beta)r} r^{\mathfrak{c}(\alpha^{-1}\beta)-1}. \quad (2.2)$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ удовлетворяют условию (1.72), $1 \leq s \leq \infty$ и соблюдается условие $\lambda + (s^{-1} - q^{-1})_+ \mathfrak{e} > 0$. Пусть $\gamma = \alpha - \lambda - (p^{-1} - q^{-1})_+ \mathfrak{e}$ и $\tau = \lambda + (s^{-1} - q^{-1})_+ \mathfrak{e}$. Тогда существуют константы $c_5(d, \alpha, \lambda, p, q, s) > 0$ и $c_6(d, \alpha, \lambda, p, q, s) > 0$ такие, что при любом $r \in \mathbb{N}$ можно построить линейный оператор

$$\mathcal{V}_r = \mathcal{V}_r^{d, \alpha, \lambda, p, q, s} \in \mathcal{B}(L_1(I^d), L_\infty(I^d)),$$

обладающий следующими свойствами:

1) для любой функции $f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ имеет место неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{V}_r f\|_{L_q(I^d)} \leq c_5 2^{-r\mathfrak{m}(\tau^{-1}\gamma)} r^{\mathfrak{c}(\tau^{-1}\gamma)-1}, \quad (2.3)$$

2) выполняется неравенство

$$\|\mathcal{V}_r\|_{\mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))} \leq c_6 2^r r^{\mathfrak{c}(\tau^{-1}\gamma)-1}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем множество $J = \{j \in \mathcal{N}_{1,d}^1: \tau_j^{-1}\gamma_j = \mathbf{m}(\tau^{-1}\gamma)\}$ и зададим вектор $\beta \in \mathbb{R}_+^d$, полагая $\beta_j = \tau_j$ для $j \in J$, а для $j \in \mathcal{N}_{1,d}^1 \setminus J$ выбирая β_j такими, чтобы выполнялись условия $\beta_j > \tau_j$ и $\beta_j^{-1}\gamma_j > \mathbf{m}(\tau^{-1}\gamma)$.

Из определения вектора β видно, что $\mathbf{m}(\beta^{-1}\gamma) = \mathbf{m}(\tau^{-1}\gamma)$, а $\mathbf{c}(\beta^{-1}\gamma) = \mathbf{c}(\tau^{-1}\gamma)$, $\mathbf{M}(\beta^{-1}\tau) = 1$, $\mathbf{c}(\beta^{-1}\tau) = \mathbf{c}(\tau^{-1}\gamma)$.

Далее, полагая $l = l(\alpha)$ и фиксируя $m \in \mathbb{Z}_+^d$ так, чтобы $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(m)$, определим для $r \in \mathbb{N}$ линейный оператор $\mathcal{V}_r = \mathcal{V}_r^{d,\alpha,\lambda,p,q,s} \in \mathcal{B}(L_1(I^d), L_\infty(I^d))$ равенством

$$\mathcal{V}_r = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) \leq r} \mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m}.$$

Тогда при $r \in \mathbb{N}$ для $f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$, учитывая выполнение (1.72), на основании предложения 1.1 используя (1.67) и применяя (1.65) и (2.2), получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{V}_r f\|_{L_q(I^d)} &\leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} \|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)} \\ &\leq c_7 \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) > r} 2^{-(\kappa, \gamma)} \leq c_5 2^{-r \mathbf{m}(\tau^{-1}\gamma)} r^{\mathbf{c}(\tau^{-1}\gamma)-1}, \end{aligned}$$

что совпадает с (2.3). При этом для $f \in L_s(I^d)$ при $r \in \mathbb{N}$ в силу (1.64) и (2.1) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_r f\|_{L_q(I^d)} &\leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) \leq r} \|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{E}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)} \\ &\leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: (\kappa, \beta) \leq r} c_8 2^{(\kappa, \tau)} \|f\|_{L_s(I^d)} \leq c_6 2^r r^{\mathbf{c}(\tau^{-1}\gamma)-1} \|f\|_{L_s(I^d)}, \end{aligned}$$

т. е. имеет место (2.4).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $d, \alpha, \lambda, p, q, s, \gamma, \tau$ удовлетворяют условиям леммы 2.3 и при $s > p$ соблюдается неравенство $\alpha - (p^{-1} - s^{-1})\epsilon > 0$. Пусть $A = \mathcal{D}^\lambda$, $D(A) = \{f \in L_s(I^d): \mathcal{D}^\lambda f \in L_q(I^d)\}$, $X = L_s(I^d)$, $Y = L_q(I^d)$, $K = \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$, $\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$, $1 \leq \theta < \infty$. Тогда существуют константы $c_9(d, \alpha, \lambda, p, q, s) > 0$ и $\rho_0(d, \alpha, \lambda, p, q, s) > 0$ такие, что при $\rho \geq \rho_0$ выполняется неравенство

$$E(A, X, Y, K, \rho) \leq c_9 \rho^{-\mathbf{m}(\tau^{-1}\gamma)} (\log \rho)^{(\mathbf{m}(\tau^{-1}\gamma)+1)(\mathbf{c}(\tau^{-1}\gamma)-1)}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (2.5) является следствием из (2.3) и (2.4) (см. также (1.6)).

2.2. В этом пункте будет получена нижняя оценка величины $E(A, X, Y, K, \rho)$ для тех же A, X, Y, K , что и в п. 2.1.

Для доказательства нам понадобятся вспомогательные утверждения. Через l_p^n обозначим пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированной в нем нормой

$$\|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} & \text{при } p < \infty, \\ \max_{j=1, \dots, n} |x_j| & \text{при } p = \infty, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Как установлено в [2], имеет место

ТЕОРЕМА 2.2. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in I$, $1 \leq p, q, s \leq \infty$ справедливо равенство*

$$\min\{\|E - U\|_{\mathcal{B}(l_p^n, l_q^n)} : \|U\|_{\mathcal{B}(l_s^n, l_q^n)} \leq \varepsilon n^{(q^{-1}-s^{-1})_+}\} = (1 - \varepsilon)n^{(q^{-1}-p^{-1})_+}, \quad (2.6)$$

где E – тождественный оператор.

В работе [4] приведены следующие две леммы.

ЛЕММА 2.4. *Пусть функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $\varphi \not\equiv 0$ и $\text{supp } \varphi \subset I$. Пусть $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_k^\varphi$ – линейная оболочка системы функций $\{\varphi(kx - \nu), \nu \in \mathcal{N}_{0,k-1}^1\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_k^\varphi: \mathbb{R}^k \mapsto \mathcal{L}_k^\varphi$ – линейный оператор, определяемый равенством*

$$\mathcal{J}_k \beta = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,k-1}^1} \beta_\nu \varphi(kx - \nu), \quad \beta = \{\beta_\nu \in \mathbb{R}, \nu = 0, \dots, k-1\}.$$

Тогда:

- 1) для любого $k \in \mathbb{N}$ система функций $\{\varphi(kx - \nu), \nu = 0, \dots, k-1\}$ линейно независима и $\mathcal{J}_k$ является линейным изоморфизмом $\mathbb{R}^k$ на $\mathcal{L}_k$;
- 2) для любого p , $1 \leq p \leq \infty$, существует константа $c_{10}(p, \varphi) > 0$ такая, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}^k$ справедливо равенство

$$\|\mathcal{J}_k \beta\|_{L_p(I)} = c_{10} k^{-p^{-1}} \|\beta\|_{l_p^k}; \quad (2.7)$$

- 3) для любых $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ существует константа $c_{11}(\alpha, p, \theta, \varphi) > 0$ такая, что при любом $k \in \mathbb{N}$ имеет место включение

$$\mathcal{J}_k(\{\beta \in \mathbb{R}^k : \|\beta\|_{l_p^k} \leq c_{11} k^{-\alpha+1/p}\}) \subset \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I). \quad (2.8)$$

ЛЕММА 2.5. *Пусть функция φ такая же, как и в лемме 2.4. Тогда при любом $\lambda \in \mathbb{Z}_+$ существуют семейство констант $\{c_{12}(q, \lambda, \varphi) > 0, 1 \leq q \leq \infty\}$ и последовательность линейных операторов $\pi_k = \pi_k^{\lambda, \varphi}: L_1(I) \mapsto \mathcal{L}_k^\varphi$, $k \in \mathbb{N}$, таких, что:*

- 1) при $k \in \mathbb{N}$ для $f \in \mathcal{L}_k$ справедливо равенство

$$\pi_k \mathcal{D}^\lambda f = k^\lambda f; \quad (2.9)$$

- 2) при $k \in \mathbb{N}$ для $f \in L_q(I)$, $1 \leq q \leq \infty$, выполняется неравенство

$$\|\pi_k f\|_{L_q(I)} \leq c_{12} \|f\|_{L_q(I)}. \quad (2.10)$$

ЛЕММА 2.6. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$. Для каждого $j = 1, \dots, d$ через $A_j = A_j^{d, \lambda}$ обозначим линейное отображение, которое каждой функции $f: I \mapsto \mathbb{R}$ ставит в соответствие функцию $(A_j^{d, \lambda} f): I^d \mapsto \mathbb{R}$, определяемую равенством*

$$(A_j^{d, \lambda} f)(x) = f(x_j) \prod_{i=1, \dots, d: i \neq j} \frac{x_i^{\lambda_i}}{\lambda_i!}.$$

Тогда:

1) для s , $1 \leq s \leq \infty$, соблюдается неравенство

$$\|A_j^{d,\lambda}\|_{\mathcal{B}(L_s(I), L_s(I^d))} \leq 1; \quad (2.11)$$

2) для любых $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $\alpha > \lambda$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $j = 1, \dots, d$ справедливо включение

$$A_j^{d,\lambda}(\mathcal{S}_{p,\theta}^{\alpha_j} \mathcal{B}(I)) \subset \mathcal{S}_{p,\theta}^{\alpha} \mathcal{B}(I^d). \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы очевидно.

ЛЕММА 2.7. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $j \in \mathcal{N}_{1,d}^1$ и $S_j: L_1(I^d) \mapsto L_1(I)$ – линейный оператор, определяемый для $f \in L_1(I^d)$ равенством

$$(S_j f)(x_j) = \int_{I^{d-1}} f(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \dots, y_d) dy_1 \dots dy_{j-1} dy_{j+1} \dots dy_d.$$

Тогда при $1 \leq q \leq \infty$ верно неравенство

$$\|S_j\|_{\mathcal{B}(L_q(I^d), L_q(I))} \leq 1. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы очевидно.

ТЕОРЕМА 2.3. В условиях теоремы 2.1 существуют константы $c_{13}(d, \alpha, p, q, s, \lambda) > 0$ и $\rho_1(d, \alpha, p, q, s, \lambda) > 0$ такие, что при $\rho > \rho_1$ выполняется неравенство

$$E(A, X, Y, K, \rho) \geq c_{13} \rho^{-m(\tau^{-1}\gamma)}. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание (1.6), доказательство проведем при $K = \mathcal{S}_{p,\theta}^{\alpha} \mathcal{B}(I^d)$. Выберем $j \in \mathcal{N}_{1,d}^1$, для которого $\tau_j^{-1}\gamma_j = m(\tau^{-1}\gamma)$, и покажем, что существуют константы $c_{14}(d, q, s, \lambda) > 0$ и $c_{15}(d, \alpha, p, q, \lambda) > 0$ такие, что при $k \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$E(A, X, Y, K, c_{14}k^{\tau_j}) \geq c_{15}k^{-\gamma_j}. \quad (2.15)$$

Для доказательства (2.15) фиксируем функцию φ , удовлетворяющую условиям леммы 2.4, и построим последовательности подпространств $\mathcal{L}_k^{\varphi}$ и операторов $\mathcal{J}_k^{\varphi}$, $\pi_k^{\varphi, \lambda_j}$, указанные в леммах 2.4 и 2.5, а также оператор $A_j^{d,\lambda}$, из леммы 2.6 и оператор S_j из леммы 2.7. При этом заметим, что при $k \in \mathbb{N}$ для $f \in \mathcal{L}_k$ справедливо равенство (см. (2.9))

$$\pi_k^{\varphi, \lambda_j} S_j \mathcal{D}^{\lambda} A_j^{d,\lambda} f = k^{\lambda_j} f$$

и, следовательно, при $k \in \mathbb{N}$ для $\beta \in \mathbb{R}^k$ соблюдается равенство

$$\mathcal{J}_k^{-1} \pi_k S_j \mathcal{D}^{\lambda} A_j \mathcal{J}_k \beta = k^{\lambda_j} \beta.$$

В силу последнего равенства, учитывая (2.7), (2.10) и (2.13), при $k \in \mathbb{N}$ для $\beta \in \mathbb{R}^k$ и $V \in \mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))$ получаем оценку

$$\|k^{\lambda_j} \beta - \mathcal{J}_k^{-1} \pi_k S_j V A_j \mathcal{J}_k \beta\|_{l_q^k} \leq c_{16} k^{1/q} \|\mathcal{D}^{\lambda} A_j \mathcal{J}_k \beta - V A_j \mathcal{J}_k \beta\|_{L_q(I^d)}. \quad (2.16)$$

Из (2.8), (2.12) и (2.16) вытекает, что при $k \in \mathbb{N}$ для $V \in \mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \sup\{\|\mathcal{D}^\lambda f - Vf\|_{L_q(I^d)} : f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)\} \\ & \geq c_{17} k^{-\alpha_j + \lambda_j + 1/p - 1/q} \|E - k^{-\lambda_j} \mathcal{J}_k^{-1} \pi_k S_j V A_j \mathcal{J}_k\|_{\mathcal{B}(l_p^k, l_q^k)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Далее, поскольку при $k \in \mathbb{N}$ для $V \in \mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))$ ввиду (2.7), (2.10), (2.11), (2.13) имеет место оценка

$$\|k^{-\lambda_j} \mathcal{J}_k^{-1} \pi_k S_j V A_j \mathcal{J}_k\|_{\mathcal{B}(l_p^k, l_q^k)} \leq c_{18} k^{-\lambda_j - 1/s + 1/q} \|V\|_{\mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))},$$

то при $k \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$ для $V \in \mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))$ такого, что $\|V\|_{\mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))} \leq \rho$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|E - k^{-\lambda_j} \mathcal{J}_k^{-1} \pi_k S_j V A_j \mathcal{J}_k\|_{\mathcal{B}(l_p^k, l_q^k)} \\ & \geq \min\{\|E - U\|_{\mathcal{B}(l_p^k, l_q^k)} : \|U\|_{\mathcal{B}(l_s^k, l_q^k)} \leq c_{18} k^{-\lambda_j - 1/s + 1/q} \rho\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Объединяя (2.17) и (2.18), заключаем, что при $k \in \mathbb{N}$ и $\rho > 0$ для любого оператора $V \in \mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))$, у которого $\|V\|_{\mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))} \leq \rho$, соблюдается неравенство

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in K} \|\mathcal{D}^\lambda f - Vf\|_{L_q(I^d)} \\ & \geq c_{17} k^{-\alpha_j + \lambda_j + 1/p - 1/q} \min\{\|E - U\|_{\mathcal{B}(l_p^k, l_q^k)} : \|U\|_{\mathcal{B}(l_s^k, l_q^k)} \leq c_{18} k^{-\lambda_j - 1/s + 1/q} \rho\}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} & E(A, X, Y, K, \rho) \\ & \geq c_{17} k^{-\alpha_j + \lambda_j + 1/p - 1/q} \min\{\|E - U\|_{\mathcal{B}(l_p^k, l_q^k)} : \|U\|_{\mathcal{B}(l_s^k, l_q^k)} \leq c_{18} k^{-\lambda_j - 1/s + 1/q} \rho\}. \end{aligned}$$

Полагая здесь $\rho = c_{14} k^{\lambda_j + (1/s - 1/q)_+}$, где $c_{14} = \frac{1}{2c_{18}}$, получаем

$$\begin{aligned} & E(A, X, Y, K, c_{14} k^{\tau_j}) \\ & \geq c_{17} k^{-\alpha_j + \lambda_j + 1/p - 1/q} \min\left\{\|E - U\|_{\mathcal{B}(l_p^k, l_q^k)} : \|U\|_{\mathcal{B}(l_s^k, l_q^k)} \leq \frac{1}{2} k^{(q^{-1} - s^{-1})_+}\right\}. \end{aligned}$$

Подставляя (2.6) в правую часть последнего неравенства, приходим к (2.15), которое влечет (2.14).

§ 3. Восстановление производных функций из $\mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ и $\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ по значениям функций в заданном числе точек

3.1. В этом пункте приведем некоторые вспомогательные утверждения, которые понадобятся далее. Начнем с обозначений.

При $l \in \mathbb{Z}_+$ в интервале I фиксируем систему из $l + 1$ различных точек $\{\xi_{1,0}^{1,l,\lambda} \in I, \lambda = 0, \dots, l\}$ и построим систему полиномов $\{\pi_{1,0}^{1,l,\lambda} \in \mathcal{P}^{1,l}, \lambda =$

$0, \dots, l\}$, обладающую тем свойством, что при $\lambda, \mu = 0, \dots, l$ выполняются равенства

$$\pi_{1,0}^{1,l,\lambda}(\xi_{1,0}^{1,l,\mu}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{при } \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

При $l \in \mathbb{Z}_+$, $\delta \in \mathbb{R}_+$, $x^0 \in \mathbb{R}$ определим систему точек $\{\xi_{\delta,x^0}^{1,l,\lambda} \in x^0 + \delta I, \lambda = 0, \dots, l\}$ и систему полиномов $\{\pi_{\delta,x^0}^{1,l,\lambda} \in \mathcal{P}^{1,l}, \lambda = 0, \dots, l\}$, полагая

$$\xi_{\delta,x^0}^{1,l,\lambda} = x^0 + \delta \xi_{1,0}^{1,l,\lambda}, \quad \pi_{\delta,x^0}^{1,l,\lambda}(x) = \pi_{1,0}^{1,l,\lambda}(\delta^{-1}(x - x^0)).$$

Ясно, что при $\lambda, \mu = 0, \dots, l$ выполняются равенства

$$\pi_{\delta,x^0}^{1,l,\lambda}(\xi_{\delta,x^0}^{1,l,\mu}) = \pi_{1,0}^{1,l,\lambda}(\xi_{1,0}^{1,l,\mu}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{при } \lambda \neq \mu. \end{cases} \quad (3.1)$$

При $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\delta \in \mathbb{R}_+^d$, $x^0 \in \mathbb{R}^d$ построим систему точек $\{\xi_{\delta,x^0}^{d,l,\lambda} \in x^0 + \delta I^d, \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)\}$ и систему полиномов $\{\pi_{\delta,x^0}^{d,l,\lambda} \in \mathcal{P}^{d,l}, \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)\}$, задавая

$$(\xi_{\delta,x^0}^{d,l,\lambda})_j = \xi_{\delta_j,x_j^0}^{1,l_j,\lambda_j}, \quad j = 1, \dots, d, \quad \pi_{\delta,x^0}^{d,l,\lambda}(x) = \prod_{j=1}^d \pi_{\delta_j,x_j^0}^{1,l_j,\lambda_j}(x_j).$$

Из (3.1) следует, что при $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ справедливы равенства

$$\pi_{\delta,x^0}^{d,l,\lambda}(\xi_{\delta,x^0}^{d,l,\mu}) = \prod_{j=1}^d \pi_{\delta_j,x_j^0}^{1,l_j,\lambda_j}(\xi_{\delta_j,x_j^0}^{1,l_j,\mu_j}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{при } \lambda \neq \mu. \end{cases} \quad (3.2)$$

Понятно, что

$$\begin{aligned} \pi_{\delta,x^0}^{d,l,\lambda}(x) &= \prod_{j=1}^d \pi_{1,0}^{1,l_j,\lambda_j}(\delta_j^{-1}(x_j - x_j^0)) = \pi_{\epsilon,0}^{d,l,\lambda}(\delta^{-1}(x - x^0)), \\ \xi_{\delta,x^0}^{d,l,\lambda} &= x^0 + \delta \xi_{\epsilon,0}^{d,l,\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l). \end{aligned}$$

При $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\delta \in \mathbb{R}_+^d$, $x^0 \in \mathbb{R}^d$ обозначим через $A_{\delta,x^0}^{d,l}: \mathbb{R}^{(l+\epsilon)^c} \mapsto \mathcal{P}^{d,l}$ линейный оператор, который каждому набору чисел $t = \{t_\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)\}$ ставит в соответствие полином

$$A_{\delta,x^0}^{d,l} t = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)} t_\lambda \pi_{\delta,x^0}^{d,l,\lambda} \in \mathcal{P}^{d,l},$$

а через $\varphi_{\delta,x^0}^{d,l}$ обозначим непрерывное линейное отображение пространства $C(x^0 + \delta \bar{I}^d)$ в $\mathbb{R}^{(l+\epsilon)^c}$, которое каждой функции $f \in C(x^0 + \delta \bar{I}^d)$ сопоставляет набор ее значений $\{f(\xi_{\delta,x^0}^{d,l,\lambda}), \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)\}$, и определим линейный непрерывный оператор $\mathcal{P}_{\delta,x^0}^{d,l}: C(x^0 + \delta \bar{I}^d) \mapsto \mathcal{P}^{d,l} \cap C(x^0 + \delta \bar{I}^d)$ равенством

$$\mathcal{P}_{\delta,x^0}^{d,l} = A_{\delta,x^0}^{d,l} \circ \varphi_{\delta,x^0}^{d,l}.$$

Как видно из (3.2), при $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ имеет место равенство

$$(\mathcal{P}_{\delta, x^0}^{d,l} f)(\xi_{\delta, x^0}^{d,l, \lambda}) = f(\xi_{\delta, x^0}^{d,l, \lambda}). \quad (3.3)$$

Заметим, что вследствие (3.2) система полиномов $\{\pi_{\delta, x^0}^{d,l, \lambda} \in \mathcal{P}^{d,l}, \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)\}$ линейно независима и для числа элементов этой системы имеем $\text{card } \mathbb{Z}_+^d(l) = \dim \mathcal{P}^{d,l}$, следовательно, эта система является базисом в $\mathcal{P}^{d,l}$. Поэтому для любого полинома $f \in \mathcal{P}^{d,l}$ существует набор чисел $\{t_\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)\}$ такой, что

$$f = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)} t_\lambda \pi_{\delta, x^0}^{d,l, \lambda}.$$

Отсюда ввиду (3.2) получаем

$$t_\lambda = f(\xi_{\delta, x^0}^{d,l, \lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l),$$

т. е.

$$f = \mathcal{P}_{\delta, x^0}^{d,l} f, \quad f \in \mathcal{P}^{d,l}. \quad (3.4)$$

В работе [5] доказана

ЛЕММА 3.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда существует константа $c_1(d, l, \sigma, \tau) > 0$ такая, что для любого $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ и любых точек $x^0, y^0 \in \mathbb{R}^d$ таких, что $|x_j^0 - y_j^0| \leq \sigma_j \delta_j$, $j = 1, \dots, d$, для любого множества $Q \subset (y^0 + \tau \delta B^d)$ и любого $f \in \mathcal{P}^{d,l}$ справедлива оценка

$$\sup_{x \in Q} |f(x)| \leq c_1 \max_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)} |f(x^0 + \delta \xi_{\epsilon, 0}^{d,l, \lambda})|. \quad (3.5)$$

Введем следующее обозначение. При $d \in \mathbb{N}$ для $J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1$ обозначим через $\eta_J: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ отображение, у которого

$$(\eta_J(\xi, x))_j = \begin{cases} \xi_j, & j \in J, \\ x_j, & j \in \mathcal{N}_{1,d}^1 \setminus J, \end{cases} \quad \xi, x \in \mathbb{R}^d.$$

Несложно проверить, что при $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ и $x^0 \in \mathbb{R}^d$ таких, что $x^0 + \delta I^d \subset I^d$, для любой функции $f \in C(\bar{I}^d)$ и любого множества $J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1$ имеет место равенство

$$\left(\left(\prod_{j \in J} V_j(\mathcal{P}_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j}) \right) f \right)(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l_{\chi_J})} f(\eta_J(\xi_{\delta, x^0}^{d,l, \lambda}, x)) \prod_{j \in J} \pi_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j, \lambda_j}(x_j), \quad x \in \bar{I}^d. \quad (3.6)$$

Полагая в (3.6) $J = \mathcal{N}_{1,d}^1$, заключаем, что при $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ и $x^0 \in \mathbb{R}^d$ таких, что $x^0 + \delta I^d \subset I^d$, для $f \in C(\bar{I}^d)$ и $x \in \bar{I}^d$ выполняется равенство

$$\left(\left(\prod_{j=1}^d V_j(\mathcal{P}_{\delta_j, x_j^0}^{1, l_j}) \right) f \right)(x) = (\mathcal{P}_{\delta, x^0}^{d,l} f)(x). \quad (3.7)$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\rho, \sigma \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда существует константа $c_2(d, l, \rho, \sigma) > 0$ такая, что для любых $x^0, y^0 \in \mathbb{R}^d$ и $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ таких, что $(x^0 + \sigma \delta I^d) \subset (y^0 + \rho \delta I^d) \subset I^d$, и любого множества $J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1$ для $f \in C(\bar{I}^d)$ соблюдается неравенство

$$\left\| \left(\prod_{j \in J} V_j(E - \mathcal{P}_{\sigma_j \delta_j, x_j^0}^{1, l_j}) \right) f \right\|_{L_\infty(D)} \leq c_2 \|f\|_{L_\infty(D)}, \quad (3.8)$$

где $D = y^0 + \rho \delta I^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что (3.8) достаточно доказать в случае, когда $J = \{j\}$, $j \in \mathcal{N}_{1,d}^1$. Переходя к выводу (3.8) в этом случае, заметим, что в условиях леммы имеет место включение $(y_j^0 + \rho_j \delta_j I) \subset (x_j^0 + \rho_j \delta_j B^1)$.

Далее, ввиду утверждения 2) леммы 1.5 имеем

$$\|V_j(E - \mathcal{P}_{\sigma_j \delta_j, x_j^0}^{1, l_j})f\|_{L_\infty(D)} \leq \|f\|_{L_\infty(D)} + \|V_j(\mathcal{P}_{\sigma_j \delta_j, x_j^0}^{1, l_j})f\|_{L_\infty(D)}. \quad (3.9)$$

Оценивая второе слагаемое в правой части (3.9), на основании (3.6) с учетом условий леммы и сделанного выше замечания получаем

$$\begin{aligned} \|V_j(\mathcal{P}_{\sigma_j \delta_j, x_j^0}^{1, l_j})f\|_{L_\infty(D)} &\leq \|f\|_{L_\infty(D)} \sum_{\lambda_j=0}^{l_j} \sup_{x_j \in (x_j^0 + \rho_j \delta_j B^1)} |\pi_{\sigma_j \delta_j, x_j^0}^{1, l_j, \lambda_j}(x_j)| \\ &= c_3(d, l_j, \rho_j, \sigma_j) \|f\|_{L_\infty(D)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Объединяя (3.10) с (3.9), приходим к (3.8) в ситуации, когда $J = \{j\}$, $j \in \mathcal{N}_{1,d}^1$.

3.2. В этом пункте будет установлена оценка сверху наилучшей точности восстановления в $L_q(I^d)$ производной $\mathcal{D}^\lambda f$ по значениям в n точках функций f из классов $\mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$, $\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$.

Сначала опишем постановку задачи.

Пусть T – топологическое пространство, X – банахово пространство над $\mathbb{R}$, $U: D(U) \mapsto X$ – линейный оператор с областью определения $D(U) \subset C(T)$, принимающий значения в X . Пусть $K \subset D(U)$ – некоторый класс функций.

Для $n \in \mathbb{N}$ через $\Phi_n(C(T))$ обозначим совокупность всех отображений $\varphi: C(T) \mapsto \mathbb{R}^n$, для каждого из которых существует набор точек $\{t^j \in T, j = 1, \dots, n\}$ такой, что

$$\varphi(f) = (f(t^1), \dots, f(t^n)), \quad f \in C(T).$$

При $n \in \mathbb{N}$ обозначим также через $\mathcal{A}^n(X)$ ($\bar{\mathcal{A}}^n(X)$) множество всех отображений (всех линейных отображений) $A: \mathbb{R}^n \mapsto X$. При $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\begin{aligned} \sigma_n(U, K, X) &= \inf_{A \in \mathcal{A}^n(X), \varphi \in \Phi_n(C(T))} \sup_{f \in K} \|Uf - A \circ \varphi(f)\|_X, \\ \bar{\sigma}_n(U, K, X) &= \inf_{A \in \bar{\mathcal{A}}^n(X), \varphi \in \Phi_n(C(T))} \sup_{f \in K} \|Uf - A \circ \varphi(f)\|_X. \end{aligned}$$

Для формулировки следующего утверждения введем обозначения.

Для $d \in \mathbb{N}$, $l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$ определим непрерывный линейный оператор $\mathcal{R}_{\kappa,\nu}^{d,l} : C(\bar{I}^d) \mapsto \mathcal{P}^{d,l} \cap C(\bar{I}^d)$ равенством

$$\mathcal{R}_{\kappa,\nu}^{d,l} f = \mathcal{P}_{\delta,x^0}^{d,l}(f|_{(x^0+\delta\bar{I}^d)}), \quad f \in C(\bar{I}^d),$$

при $\delta = 2^{-\kappa}$, $x^0 = 2^{-\kappa}\nu$.

Как видно из (3.7), для $d \in \mathbb{N}$, $l, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$ верно равенство

$$\mathcal{R}_{\kappa,\nu}^{d,l} = \prod_{j=1}^d V_j(\mathcal{R}_{\kappa_j,\nu_j}^{1,l_j}).$$

При $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ определим линейный оператор $R_\kappa^{d,l,m} : C(\bar{I}^d) \mapsto L_\infty(\mathbb{R}^d)$ равенством

$$R_\kappa^{d,l,m} f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d} (\mathcal{R}_{\kappa,\nu}^{d,l} f) g_{\kappa,\nu}^{d,m}.$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$ удовлетворяют (1.79) и $l = l(\alpha)$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ справедливо соотношение

$$\lim_{m(\kappa) \rightarrow \infty} \|f - R_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_p(I^d)} = 0. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем пользоваться обозначениями, применявшимися в доказательстве леммы 1.10.

Пусть $f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда в условиях леммы ввиду (1.25), подобно (1.34), имеем

$$\begin{aligned} & \|f - R_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_p(I^d)}^p \\ & \leq \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d} \left(\sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d : \text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset} \|(f - \mathcal{R}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon} f) g_{\kappa,\nu}^{d,m}\|_{L_p(Q_{\kappa,\nu'}^{d,0})} \right)^p. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Далее, для $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$, учитывая (1.27), (1.30), получаем

$$\begin{aligned} & \|(f - \mathcal{R}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon} f) g_{\kappa,\nu}^{d,m}\|_{L_p(Q_{\kappa,\nu'}^{d,0})} \leq c_4 2^{-(\kappa,\epsilon)p^{-1}} \\ & \times \left(\|f - S_{\kappa,\nu'}^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_\infty(D_{\kappa,\nu'}^{d,m})} + \|S_{\kappa,\nu'}^{d,l-\epsilon,m} f - \mathcal{R}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon} f\|_{L_\infty(D_{\kappa,\nu'}^{d,m})} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

причем, учитывая, что в силу (1.32) соблюдается включение $2^{-\kappa}\nu_+ + 2^{-\kappa}\xi_{\epsilon,0}^{d,l-\epsilon,\lambda} \in D_{\kappa,\nu'}^{d,m}$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l-\epsilon)$, на основании (3.5) и (3.3) заключаем

$$\|S_{\kappa,\nu'}^{d,l-\epsilon,m} f - \mathcal{R}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon} f\|_{L_\infty(D_{\kappa,\nu'}^{d,m})} \leq c_5 \|S_{\kappa,\nu'}^{d,l-\epsilon,m} f - f\|_{L_\infty(D_{\kappa,\nu'}^{d,m})}. \quad (3.14)$$

Объединяя (3.13) и (3.14), а затем применяя (1.73), выводим неравенство

$$\begin{aligned} & \| (f - \mathcal{R}_{\kappa, \nu_+}^{d, l-\epsilon} f) g_{\kappa, \nu}^{d, m} \|_{L_p(Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0})} \\ & \leq c_6 \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1, d}^1: J \neq \emptyset} \left(\prod_{j \in J} 2^{-\kappa_j p^{-1}} \right) \int_{(c_7 2^{-\kappa} I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-2p^{-1}-1} \right) \\ & \quad \times \left(\int_{(tB^d)^J} \int_{(D_{\kappa, \nu'}^{d, m})_{\xi}^{l_{X, J}}} |\Delta_{\xi}^{l_{X, J}} f(x)|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} dt^J \end{aligned} \quad (3.15)$$

при $\nu' \in \mathcal{N}_{0, 2^{\kappa}-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^{\kappa}-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa, \nu}^{d, m} \cap Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0} \neq \emptyset$.

Выбирая $\epsilon \in \mathbb{R}_+^d$ так, чтобы соблюдалось условие $\alpha - p^{-1}\epsilon - \epsilon > 0$, из (3.15), пользуясь неравенством Гёльдера, находим, что для $\nu' \in \mathcal{N}_{0, 2^{\kappa}-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^{\kappa}-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa, \nu}^{d, m} \cap Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0} \neq \emptyset$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \| (f - \mathcal{R}_{\kappa, \nu_+}^{d, l-\epsilon} f) g_{\kappa, \nu}^{d, m} \|_{L_p(Q_{\kappa, \nu'}^{d, 0})} \leq c_8 \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1, d}^1: J \neq \emptyset} \left(\prod_{j \in J} 2^{-\kappa_j p^{-1} - \kappa_j \epsilon_j} \right) \\ & \quad \times \left(\int_{(c_7 2^{-\kappa} I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-p\epsilon_j - 3} \right) \int_{(tB^d)^J} \int_{(D_{\kappa, \nu'}^{d, m})_{\xi}^{l_{X, J}}} |\Delta_{\xi}^{l_{X, J}} f(x)|^p dx d\xi^J dt^J \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в (3.12) и применяя (1.33), неравенство Гёльдера и (1.31), получаем

$$\begin{aligned} & \| f - R_{\kappa}^{d, l-\epsilon, m} f \|_{L_p(I^d)}^p \leq c_9^p \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1, d}^1: J \neq \emptyset} \left(\prod_{j \in J} 2^{-\kappa_j - \kappa_j \epsilon_j p} \right) \\ & \quad \times \int_{(c_7 2^{-\kappa} I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-p\epsilon_j - 3} \right) \int_{(tB^d)^J} \int_{(I^d)_{\xi}^{l_{X, J}}} c_{10} |\Delta_{\xi}^{l_{X, J}} f(x)|^p dx d\xi^J dt^J \\ & \leq c_{11}^p \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1, d}^1: J \neq \emptyset} \left(\prod_{j \in J} 2^{-\kappa_j \alpha_j p} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m(\kappa) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует (3.11).

При $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ определим линейный оператор $\mathcal{R}_{\kappa}^{d, l, m}: C(\bar{I}^d) \mapsto L_{\infty}(\mathbb{R}^d)$, полагая

$$\mathcal{R}_{\kappa}^{d, l, m} = \sum_{\epsilon \in \Upsilon^d: f(\epsilon) \subset f(\kappa)} (-\epsilon)^{\epsilon} R_{\kappa - \epsilon}^{d, l, m}.$$

Заменяя в равенствах (1.39)–(1.48) операторы $\mathcal{E}_{\kappa}^{d, l, m}$ на $\mathcal{R}_{\kappa}^{d, l, m}$, $\mathcal{S}_{\kappa - \epsilon, \rho_+}^{d, l}$ на $\mathcal{R}_{\kappa - \epsilon, \rho_+}^{d, l}$, $\mathcal{S}_{\kappa_j - \epsilon_j, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}$ на $\mathcal{R}_{\kappa_j - \epsilon_j, \rho_{+j}}^{1, l_j}$, $\mathcal{S}_{\kappa_j - 1, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}$ на $\mathcal{R}_{\kappa_j - 1, \rho_{+j}}^{1, l_j}$, $\mathcal{S}_{\kappa_j, \rho_{+j}}^{1, l_j, 0}$ на $\mathcal{R}_{\kappa_j, \rho_{+j}}^{1, l_j}$ и пользуясь леммой 1.5 вместо леммы 1.4, получаем представление

$$\mathcal{R}_{\kappa}^{d, l, m} f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2^{\kappa}-\epsilon}^d} (\mathcal{U}_{\kappa, \nu}^{d, l, m} f) g_{\kappa, \nu}^{d, m}, \quad f \in C(\bar{I}^d), \quad (3.17)$$

где $\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l,m} : C(\bar{I}^d) \mapsto \mathcal{P}^{d,l}$ — линейный оператор, значение которого для $f \in C(\bar{I}^d)$ определяется равенством

$$\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l,m} f = \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d : f(\varepsilon) \subset f(\kappa)} (-\epsilon)^\varepsilon \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa,\nu,\varepsilon}^{d,m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) (\mathcal{R}_{\kappa - \varepsilon, \rho_+}^{d,l} f)$$

и который имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l,m} = & \sum_{\gamma \in \Upsilon^d : f(\kappa) \subset f(\gamma)} (-\epsilon)^\gamma \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d : f(\varepsilon) \subset f(\kappa)} (-\epsilon)^\varepsilon \\ & \times \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa,\nu,\varepsilon}^{d,m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j - 2\rho_j}^{m_j} \right) \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - \mathcal{R}_{\kappa_j - \varepsilon_j, \rho_{+j}}^{1,l_j}) \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

для $d \in \mathbb{N}$, $l, m, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2\kappa - \epsilon}^d$.

ЛЕММА 3.4. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(m)$ и выполняется (1.79). Тогда существует такая константа $c_{12}(d, \alpha, p, q, m, \lambda) > 0$, что для любой функции $f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ при $l = l(\alpha)$ и $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}$ соблюдается неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{R}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{12} 2^{-(\kappa, \alpha - \lambda - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon)}. \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теми же вспомогательными объектами, которые введены в начале доказательства леммы 1.12.

Теперь в условиях леммы в силу (1.38) и (3.17) так же, как (1.55), получаем

$$\|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{R}_\kappa^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_q(I^d)} \leq \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\mu \left\| \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2\kappa - \epsilon}^d} \mathcal{D}^\mu (\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m} \right\|_{L_q(I^d)}. \quad (3.20)$$

Оценивая правую часть (3.20) подобно (1.56), при $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ выводим

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2\kappa - \epsilon}^d} \mathcal{D}^\mu (\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m} \right\|_{L_q(I^d)}^q \\ & \leq \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{0, 2\kappa - \epsilon}^d} \left(\sum_{\substack{\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2\kappa - \epsilon}^d : \\ \text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset}} \left\| \mathcal{D}^\mu (\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m} \right\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu'}^{d,0})} \right)^q. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Применяя (1.27), (1.1) и (1.51), находим, что при $\nu' \in \mathcal{N}_{0, 2\kappa - \epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m, 2\kappa - \epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$, справедливо неравенство

$$\|\mathcal{D}^\mu (\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m}\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu'}^{d,0})} \leq c_{13} 2^{(\kappa, \lambda - q^{-1}\epsilon)} \|\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_\infty((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})}. \quad (3.22)$$

Из (3.18) для $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$, имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_\infty((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} &\leq \sum_{\gamma \in \Upsilon^d: f(\kappa) \subset f(\gamma)} \sum_{\varepsilon \in \Upsilon^d: f(\varepsilon) \subset f(\kappa)} \sum_{\rho \in \mathcal{P}_{\kappa,\nu',\varepsilon}^{d,m}} \left(\prod_{j \in f(\varepsilon)} a_{\nu_j-2\rho_j}^{m_j} \right) \\ &\quad \times \left\| \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - \mathcal{R}_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1}) \right) f \right\|_{L_\infty((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Далее, для $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$, $\gamma \in \Upsilon^d$ такого, что $f(\kappa) \subset f(\gamma)$, $\varepsilon \in \Upsilon^d$ такого, что $f(\varepsilon) \subset f(\kappa)$, и $\rho \in \mathcal{P}_{\kappa,\nu',\varepsilon}^{d,m}$, используя (1.10), а затем с учетом (1.53), (1.50) применяя (3.8), получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\prod_{j \in f(\gamma)} V_j(E - \mathcal{R}_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1}) \right) f \right\|_{L_\infty((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} \\ &\leq c_{14} \left\| \left(\prod_{j \in f(\kappa)} V_j(E - \mathcal{R}_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1}) \right) f \right\|_{L_\infty((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

и пользуясь тем, что ввиду (3.4) при $j = 1, \dots, d$ соблюдено равенство

$$E - \mathcal{R}_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1} = (E - \mathcal{R}_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1})(E - (S')_{\kappa_j, \nu'_j}^{l_j-1, m_j}),$$

согласно утверждению 2) леммы 1.5 и (1.10), а также в силу (1.53), (1.50), (3.8) выводим

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\prod_{j \in f(\kappa)} V_j(E - \mathcal{R}_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1}) \right) f \right\|_{L_\infty((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} \\ &= \left\| \left(\prod_{j \in f(\kappa)} V_j(E - \mathcal{R}_{\kappa_j-\varepsilon_j, \rho+j}^{1,l_j-1}) \right) \left(\left(\prod_{j \in f(\kappa)} V_j(E - (S')_{\kappa_j, \nu'_j}^{l_j-1, m_j}) \right) f \right) \right\|_{L_\infty((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} \\ &\leq c_{15} \left\| \left(\prod_{j \in f(\kappa)} V_j(E - (S')_{\kappa_j, \nu'_j}^{l_j-1, m_j}) \right) f \right\|_{L_\infty((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Объединяя (3.23)–(3.25) и учитывая (1.54), находим, что для $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$, выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_\infty((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} \leq c_{16} \left\| \left(\prod_{j \in f(\kappa)} V_j(E - (S')_{\kappa_j, \nu'_j}^{l_j-1, m_j}) \right) f \right\|_{L_\infty((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})}. \quad (3.26)$$

Применяя сначала к правой части (3.26) неравенство (1.74), а затем используя (1.11), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f\|_{L_\infty((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} \\ &\leq c_{17} ((\delta')_{\kappa,\nu'})^{-p-1\epsilon} \left\| \left(\prod_{j \in f(\kappa)} V_j(E - (S')_{\kappa_j, \nu'_j}^{l_j-1, m_j}) \right) f \right\|_{L_p((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1: J \neq \emptyset} \left(\prod_{j \in J} ((\delta')_{\kappa, \nu'}^{d,m})_j^{p^{-1}} \right) \int_{(c_{18}(\delta')_{\kappa, \nu'}^{d,m} I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-2p^{-1}-1} \right) \\
& \times \left(\int_{(tB^d)^J} \int_{((D')_{\kappa, \nu'}^{d,m})_\xi^{l_{X,J}}} \left| \Delta_\xi^{l_{X,J}} \left(\left(\prod_{j \in f(\kappa)} V_j(E - (S')_{\kappa_j, \nu'_j}^{l_j-1, m_j}) \right) f \right)(x) \right|^p dx d\xi^J \right)^{1/p} dt^J \\
& \leq c_{19} 2^{(\kappa, \epsilon)p^{-1}} \left[\left(\prod_{j \in f(\kappa)} 2^{\kappa_j/p} \right) \right. \\
& \times \left(\int_{(c_{20} 2^{-\kappa} B^d)^{f(\kappa)}} \int_{((D')_{\kappa, \nu'}^{d,m})_\xi^{l_{X,f(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l_{X,f(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa)} \right)^{1/p} \\
& + \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1: J \neq \emptyset} \left(\prod_{j \in J} 2^{-\kappa_j p^{-1}} \right) \left(\prod_{j \in f(\kappa) \setminus J} 2^{\kappa_j/p} \right) \int_{(c_{21} 2^{-\kappa} I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-2p^{-1}-1} \right) \\
& \times \left(\int_{(tB^d)^J} \int_{(c_{20} 2^{-\kappa} B^d)^{f(\kappa) \setminus J}} \int_{((D')_{\kappa, \nu'}^{d,m})_\xi^{l_{X,J \cup f(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l_{X,J \cup f(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa) \setminus J} d\xi^J \right)^{1/p} dt^J \Big] \quad (3.27)
\end{aligned}$$

для $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa, \nu'}^{d,m} \cap Q_{\kappa, \nu'}^{d,0} \neq \emptyset$.

Фиксируя $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^d$ так, чтобы соблюдалось условие $\alpha - p^{-1}\epsilon - \varepsilon > 0$, и с учетом того, что $t_j^{-2p^{-1}-1} = t_j^{\varepsilon_j-1/q'} t_j^{-2p^{-1}-\varepsilon_j-1/q}$, $q' = q/(q-1)$, $j \in \mathcal{N}_{1,d}^1$, применяя неравенство Гёльдера, для $J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1$, $J \neq \emptyset$, $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$ имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{(c_{21} 2^{-\kappa} I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-2p^{-1}-1} \right) \left(\int_{(tB^d)^J} \int_{(c_{20} 2^{-\kappa} B^d)^{f(\kappa) \setminus J}} \right. \\
& \times \left. \int_{((D')_{\kappa, \nu'}^{d,m})_\xi^{l_{X,J \cup f(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l_{X,J \cup f(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa) \setminus J} d\xi^J \right)^{1/p} dt^J \\
& \leq c_{22} \left(\prod_{j \in J} 2^{-\kappa_j \varepsilon_j} \right) \left[\int_{(c_{21} 2^{-\kappa} I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-2qp^{-1}-q\varepsilon_j-1} \right) \right. \\
& \times \left(\int_{(tB^d)^J} \int_{(c_{20} 2^{-\kappa} B^d)^{f(\kappa) \setminus J}} \right. \\
& \times \left. \left. \int_{((D')_{\kappa, \nu'}^{d,m})_\xi^{l_{X,J \cup f(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l_{X,J \cup f(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa) \setminus J} d\xi^J \right)^{q/p} dt^J \right]^{1/q}. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Объединяя (3.22), (3.27), (3.28), заключаем, что при $\nu' \in \mathcal{N}_{0,2^\kappa-\epsilon}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu}^{d,m} \cap Q_{\kappa,\nu'}^{d,0} \neq \emptyset$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{D}^\mu(\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m}\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu'}^{d,0})} \leq c_{23} 2^{(\kappa,\lambda+p^{-1}\epsilon-q^{-1}\epsilon)} \left[\left(\prod_{j \in f(\kappa)} 2^{\kappa_j/p} \right) \right. \\ & \times \left(\int_{(c_{20}2^{-\kappa} B^d)^{f(\kappa)}} \int_{((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})_\xi^{l_{Xf(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l_{Xf(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa)} \right)^{1/p} \\ & + \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1: J \neq \emptyset} \left(\prod_{j \in J} 2^{-\kappa_j p^{-1} - \kappa_j \epsilon_j} \right) \left(\prod_{j \in f(\kappa) \setminus J} 2^{\kappa_j/p} \right) \\ & \times \left(\int_{(c_{21}2^{-\kappa} I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-2qp^{-1} - q\epsilon_j - 1} \right) \left(\int_{(tB^d)^J} \int_{(c_{20}2^{-\kappa} B^d)^{f(\kappa) \setminus J}} \right. \right. \\ & \times \left. \left. \int_{((D')_{\kappa,\nu'}^{d,m})_\xi^{l_{XJ \cup f(\kappa)}}} |\Delta_\xi^{l_{XJ \cup f(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa) \setminus J} d\xi^J \right)^{q/p} dt^J \right)^{1/q} \Big]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Подставляя (3.29) в (3.21) и учитывая (1.33), а затем применяя неравенства Гёльдера с показателями q и $p/q \leq 1$ и используя (1.52), получаем, что при $p \leq q$ и $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{-m,2^\kappa-\epsilon}^d} \mathcal{D}^\mu(\mathcal{U}_{\kappa,\nu}^{d,l-\epsilon,m} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu}^{d,m} \right\|_{L_q(I^d)}^q \\ & \leq (c_{24} 2^{(\kappa,\lambda+p^{-1}\epsilon-q^{-1}\epsilon)})^q \left[\left(\prod_{j \in f(\kappa)} 2^{\kappa_j q/p} \right) \right. \\ & \times \left(\int_{(c_{20}2^{-\kappa} B^d)^{f(\kappa)}} \int_{(I^d)_\xi^{l_{Xf(\kappa)}}} c_{25} |\Delta_\xi^{l_{Xf(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa)} \right)^{q/p} \\ & + \sum_{J \subset \mathcal{N}_{1,d}^1: J \neq \emptyset} \left(\prod_{j \in J} 2^{-\kappa_j qp^{-1} - \kappa_j q\epsilon_j} \right) \left(\prod_{j \in f(\kappa) \setminus J} 2^{\kappa_j q/p} \right) \\ & \times \int_{(c_{21}2^{-\kappa} I^d)^J} \left(\prod_{j \in J} t_j^{-2qp^{-1} - q\epsilon_j - 1} \right) \left(\int_{(tB^d)^J} \int_{(c_{20}2^{-\kappa} B^d)^{f(\kappa) \setminus J}} \right. \\ & \times \left. \int_{(I^d)_\xi^{l_{XJ \cup f(\kappa)}}} c_{25} |\Delta_\xi^{l_{XJ \cup f(\kappa)}} f(x)|^p dx d\xi^{f(\kappa) \setminus J} d\xi^J \right)^{q/p} dt^J \Big] \\ & \leq (c_{26} 2^{-(\kappa,\alpha-\lambda-p^{-1}\epsilon+q^{-1}\epsilon)})^q. \end{aligned}$$

Объединяя это неравенство с (3.20), приходим к (3.19) при $p \leq q$. Неравенство (3.19) при $q < p$ вытекает из неравенства (3.19) при $q = p$ и того факта, что для $h \in L_p(I^d)$ при $q < p$ справедлива оценка $\|h\|_{L_q(I^d)} \leq \|h\|_{L_p(I^d)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $l = l(\alpha)$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(m)$ и выполняются условия (1.72), (1.79). Тогда для

$f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ в $L_q(I^d)$ имеет место равенство

$$\mathcal{D}^\lambda f = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d} \mathcal{D}^\lambda \mathcal{R}_\kappa^{d, l-\epsilon, m} f. \quad (3.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО равенства (3.30) опирается на леммы 1.9, 3.3 и 3.4 и проводится аналогично доказательству равенства (1.67).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ удовлетворяют условиям (1.72), (1.79). Пусть $U = \mathcal{D}^\lambda$, $D(U) = \{f \in C(I^d) : \mathcal{D}^\lambda f \in L_q(I^d)\}$, $X = L_q(I^d)$, $K = \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$, $\mathcal{S}_{p, \theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ ($1 \leq \theta < \infty$). Тогда существуют константа $c_{27}(d, \alpha, p, q, \lambda) > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\bar{\sigma}_n(U, K, X) \leq c_{27} n^{-m} (\log n)^{(m+1)(c-1)}, \quad (3.31)$$

где

$$m = m(\alpha - \lambda - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon), \quad c = c(\alpha - \lambda - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в силу (1.6) достаточно установить неравенство (3.31) в случае, когда $K = \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$. В этом случае для $n \geq n_0 = 2c_{28}$, где константа c_{28} будет указана ниже, выберем $r \in \mathbb{N}$ такое, чтобы соблюдалось соотношение

$$c_{28} 2^r r^{c-1} \leq n < c_{28} 2^{r+1} (r+1)^{c-1}, \quad (3.32)$$

и, полагая $J = \{j \in \mathcal{N}_{1,d}^1 : \alpha_j - \lambda_j - (p^{-1} - q^{-1})_+ = m\}$, фиксируем вектор $\beta \in \mathbb{R}_+^d$, обладающий следующими свойствами: $\beta_j = 1$, $j \in J$, $\beta_j > 1$ и $\beta_j^{-1}(\alpha_j - \lambda_j - (p^{-1} - q^{-1})_+) > m$, $j \in \mathcal{N}_{1,d}^1 \setminus J$.

Далее, при $l = l(\alpha)$ рассмотрим множество точек

$$\{\mathcal{X}_{\kappa, \nu}^{d, l-\epsilon, \rho} = 2^{-\kappa} \nu + 2^{-\kappa} \xi_{\epsilon, 0}^{d, l-\epsilon, \rho} : \rho \in \mathbb{Z}_+^d(l - \epsilon), \nu \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, (\kappa, \beta) \leq r\}.$$

В силу (2.1) число этих точек удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \text{card}\{\mathcal{X}_{\kappa, \nu}^{d, l-\epsilon, \rho} : \rho \in \mathbb{Z}_+^d(l - \epsilon), \nu \in \mathcal{N}_{0, 2^\kappa - \epsilon}^d, \kappa \in \mathbb{Z}_+^d, (\kappa, \beta) \leq r\} \\ \leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} l^\epsilon 2^{(\kappa, \epsilon)} \leq l^\epsilon c_{29} 2^r r^{c-1} \leq n \end{aligned}$$

при $c_{28} = l^\epsilon c_{29}$ (см. (3.32)). Поэтому, взяв некоторое $m \in \mathbb{Z}_+^d$ так, чтобы $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(m)$, нетрудно видеть, что существуют отображения $\varphi \in \Phi_n(C(I^d))$ и $A \in \mathcal{A}^n(L_q(I^d))$ такие, что для $f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ выполняется равенство

$$A \circ \varphi(f) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) \leq r} \mathcal{D}^\lambda \mathcal{R}_\kappa^{d, l-\epsilon, m} f.$$

При этом в силу (3.30), (3.19), (2.2) и (3.32) для $f \in \mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda f - A \circ \varphi(f)\|_{L_q(I^d)} &\leq \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d : (\kappa, \beta) > r} c_{12} 2^{-(\kappa, \alpha - \lambda - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon)} \\ &\leq c_{30} 2^{-mr} r^{c-1} \leq c_{27} n^{-m} (\log n)^{(m+1)(c-1)}, \end{aligned}$$

из которого следует (3.31).

3.3. В этом пункте устанавливается оценка снизу наилучшей точности восстановления производной $\mathcal{D}^\lambda f$ по значениям в n точках функций f из классов $\mathcal{S}_p^\alpha \mathcal{H}(I^d)$ и $\mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$.

Как показано в [3], имеет место

ЛЕММА 3.5. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+$. Тогда существует константа $c_{31}(\alpha, \lambda, p, \theta, q) > 0$ такая, что при любом $n \in \mathbb{N}$ для любых точек $y^1, \dots, y^n \in I$ можно построить функцию $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I)$, для которой

$$g(y^i) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\|\mathcal{D}^\lambda g\|_{L_q(I)} \geq c_{31} n^{-(\alpha - \lambda - (p^{-1} - q^{-1})_+)}.$$

Из леммы 3.5 легко получить следующую лемму.

ЛЕММА 3.6. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$, $\alpha > \lambda$. Тогда существует константа $c_{32}(d, \alpha, \lambda, p, \theta, q) > 0$ такая, что при любом $n \in \mathbb{N}$ для любых точек $x^1, \dots, x^n \in I^d$ существует функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$ со следующими свойствами:

$$f(x^i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.33)$$

$$\|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} \geq c_{32} n^{-\mathfrak{m}(\alpha - \lambda - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon)}. \quad (3.34)$$

ТЕОРЕМА 3.2. В условиях теоремы 3.1 существует такая константа $c_{33}(U, K, X) > 0$, что при $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\sigma_n(U, K, X) \geq c_{33} n^{-\mathfrak{m}(\alpha - \lambda - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon)}. \quad (3.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.6) неравенство (3.35) достаточно установить для $K = \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$. Рассмотрим этот случай.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}^n(X)$ и отображение $\varphi \in \Phi_n(C(I^d))$ определяется системой точек $x^1, \dots, x^n \in I^d$. Возьмем функцию $f \in \mathcal{S}_{p,\theta}^\alpha \mathcal{B}(I^d)$, удовлетворяющую условиям (3.33) и (3.34). Тогда $\varphi(f) = \varphi(0)$ и, следовательно,

$$c_{32} n^{-\mathfrak{m}(\alpha - \lambda - (p^{-1} - q^{-1})_+ \epsilon)} \leq \|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} = \|Uf - A \circ \varphi(f) + A \circ \varphi(0) - U(0)\|_X$$

$$\leq \|Uf - A \circ \varphi(f)\|_X + \|U(0) - A \circ \varphi(0)\|_X \leq 2 \sup_{g \in K} \|U(g) - A \circ \varphi(g)\|_X,$$

значит, в силу произвольности $\varphi \in \Phi_n(C(I^d))$, $A \in \mathcal{A}^n(X)$ имеет место (3.35).

Список литературы

1. С. Н. Кудрявцев, “Восстановление функций вместе с их производными по значениям функций в заданном числе точек”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:6 (1994), 79–104; англ. пер.: S. N. Kudryavtsev, “Recovering a function with its derivatives from function values at a given number of points”, *Izv. Math.*, **45**:3 (1995), 505–528.

2. С. Н. Кудрявцев, “Приближение оператора частного дифференцирования ограниченными операторами на классе функций конечной гладкости”, *Матем. сб.*, **187**:3 (1996), 75–92; англ. пер.: S. N. Kudryavtsev, “Approximation of a partial differential operator by bounded operators on a class of functions of finite smoothness”, *Sb. Math.*, **187**:3 (1996), 385–402.
3. С. Н. Кудрявцев, “Наилучшая точность восстановления функций конечной гладкости по их значениям в заданном числе точек”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:1 (1998), 21–58; англ. пер.: S. N. Kudryavtsev, “The best accuracy of reconstruction of finitely smooth functions from their values at a given number of points”, *Izv. Math.*, **62**:1 (1998), 19–53.
4. С. Н. Кудрявцев, “Задача Стечкина для оператора частного дифференцирования на классах функций конечной гладкости”, *Матем. заметки*, **67**:1 (2000), 77–86; англ. пер.: S. N. Kudryavtsev, “The Stechkin problem for partial derivation operators on classes of finitely smooth functions”, *Math. Notes*, **67**:1 (2000), 61–68.
5. С. Н. Кудрявцев, “Приближение производных функций конечной гладкости из неизотропных классов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:1 (2004), 79–122; англ. пер.: S. N. Kudryavtsev, “Approximation of the derivatives of finitely smooth functions belonging to non-isotropic classes”, *Izv. Math.*, **68**:1 (2004), 77–123.
6. В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976.
7. Н. Н. Анучина, К. И. Бабенко, С. К. Годунов и др., *Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики*, Наука, М., 1979.
8. Дж. Трауб, Х. Вожняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, ACM Monogr. Ser., Academic Press, New York–London, 1980.
9. В. М. Тихомиров, “Гармоники и сплайны как оптимальные средства приближения и восстановления”, *УМН*, **50**:2 (1995), 125–174; англ. пер.: V. M. Tikhomirov, “Harmonics and splines as optimal tools for approximation and recovery”, *Russian Math. Surveys*, **50**:2 (1995), 355–402.
10. В. В. Арестов, “Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи”, *УМН*, **51**:6 (1996), 89–124; англ. пер.: V. V. Arestov, “Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems”, *Russian Math. Surveys*, **51**:6 (1996), 1093–1126.
11. С. Н. Кудрявцев, “Восстановление производных функций, удовлетворяющих смешанным условиям Гельдера, по значениям функций в заданном числе точек”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ* (Москва, 2005), Матем. инст. им. В. А. Стеклова РАН, М., 2005, 140.
12. С. М. Никольский, “Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера”, *Сиб. матем. журн.*, **4**:6 (1963), 1342–1364; англ. пер.: S. M. Nikol’skii, “Functions with dominant mixed derivative satisfying a multiple Hölder condition”, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, **102** (1973), 27–51.
13. Т. И. Аманов, *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, “Наука” КазССР, Алма-Ата, 1976.
14. К. Чуи, *Введение в вэйлеты*, Мир, М., 2001; пер. с англ.: C. K. Chui, *An introduction to wavelets*, Wavelet Anal. Appl., **1**, Academic Press, Boston, 1992.
15. Ё. М. Galeev, “Bernstein diameters for the classes of periodic functions of several variables”, *Math. Balkanica (N.S.)*, **5**:3 (1991), 229–244.