Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Антипова, А. К. Цих, Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 5, 29–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/im6990>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:38:00

УДК 517.55+512.7

И. А. Антипова, А. К. Цих

Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных

Рассматривается система n алгебраических уравнений от n неизвестных, у которой в каждом уравнении фиксированы показатели мономов, а все коэффициенты являются переменными. Исследуется дискриминантное множество системы – замыкание совокупности всех коэффициентов, при которых система имеет кратные корни с ненулевыми координатами. Для дегомогенизированных дискриминантных множеств предъявлены параметризации неприводимых компонент, зависящих от коэффициентов всех уравнений. Доказано, что если коразмерность такой компоненты равна 1, то параметризация является обращением логарифмического отображения Гаусса компоненты (аналог результата М. Капранова для A -дискриминанта). В основе исследования лежат линеаризация алгебраической системы и параметризация множества критических значений линеаризации.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: дискриминантное множество, линеаризация алгебраической системы, логарифмическое отображение Гаусса.

Введение

Рассмотрим полиномиальное отображение

$$P = (P_1, \dots, P_n): \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

где $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ – комплексный алгебраический тор, а P_i – полиномы Лорана, т.е. полиномы от переменных $y_1, y_1^{-1}, \dots, y_n, y_n^{-1}$. Будем считать, что множества $A^{(i)}$ показателей мономов в P_i фиксированы, а все коэффициенты переменные. В таком случае будем говорить, что P – *общее полиномиальное отображение из $\mathbb{T}^n$ в $\mathbb{C}^n$* .

Для таких отображений обозначим через ∇^0 множество всех коэффициентов, при которых P имеет в $\mathbb{T}^n$ кратные нули, т.е. нули, в которых якобиан P равен нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Дискриминантным множеством ∇ отображения P назовем замыкание множества ∇^0 в пространстве коэффициентов.*

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-12132 офи-м) и Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-7347.2010.1), а работа второго автора – РФФИ (гранты № 09-01-00762, 11-01-00852).

Таким образом, для нас представляет интерес система полиномиальных уравнений вида

$$\sum_{\lambda \in A^{(i)}} a_{\lambda}^{(i)} y^{\lambda} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

с неизвестными $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{T}^n$ и переменными коэффициентами $a_{\lambda}^{(i)}$, где $A^{(i)} \subset \mathbb{Z}^n$ – фиксированные конечные подмножества, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $y^{\lambda} = y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n}$.

При $n = 1$, когда $A^{(1)} = \{0, 1, \dots, m\}$, система (1) представляет собой общее алгебраическое уравнение степени m

$$a_m y^m + \dots + a_1 y + a_0 = 0, \quad (2)$$

решением которого является многозначная алгебраическая функция $y(a)$, обладающая свойством двойной однородности. Значит, с точностью до мономиальной замены переменной она зависит от $m - 1$ переменных, следовательно, достаточно рассматривать *приведенное уравнение* вида

$$y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \dots + a_1 y - 1 = 0 \quad (3)$$

либо любое уравнение, полученное из (2) фиксацией какой-то пары коэффициентов.

Полином от коэффициентов уравнения (2)

$$D(a_0, \dots, a_m) = \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_m} c_{\alpha_0 \dots \alpha_m} a_0^{\alpha_0} \dots a_m^{\alpha_m}, \quad (4)$$

обращающийся в нуль тогда и только тогда, когда уравнение (2) имеет хотя бы один кратный корень, называется *дискриминантом уравнения (2)*. Например, для кубического уравнения

$$a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = 0$$

дискриминант имеет вид

$$D(a) = 27a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 + 4a_1^3 a_3 - a_1^2 a_2^2 - 18a_0 a_1 a_2 a_3.$$

С увеличением m число мономов полинома $D(a)$, а также его коэффициенты быстро растут; так, при $m = 4$ дискриминант $D(a)$ содержит уже 16 слагаемых.

В книге [1, гл. 12] перечислены мономы дискриминанта алгебраического уравнения (2), соответствующие вершинам его многогранника Ньютона (напомним, что *многогранник Ньютона* $\mathcal{N}(D) \subset \mathbb{R}^{m+1}$ полинома $D(a)$ – это выпуклая оболочка векторов $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ из показателей в (4) таких, что $c_{\alpha_0 \dots \alpha_m} \neq 0$). В частности, показано, что многогранник Ньютона $\mathcal{N}(D)$ дискриминанта D комбинаторно эквивалентен $(m - 1)$ -мерному кубу.

В [1] также было описано так называемое A -дискриминантное множество для скалярных отображений $P: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Отождествив конечное множество $A \subset \mathbb{Z}^n$ с множеством мономов $y^{\lambda} := y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n}$, $\lambda \in A$, в [1] авторы рассматривали

пространство $\mathbb{C}^A$, состоящее из полиномов

$$P(a, y) = \sum_{\lambda \in A} a_\lambda y^\lambda$$

с комплексными переменными коэффициентами $a = (a_\lambda) \in \mathbb{C}^A$ и показателями $\lambda \in A$. При этом A -дискриминантным множеством называлось замыкание в $\mathbb{C}^A$ множества всех таких коэффициентов $a = \{a_\lambda\}$, для которых система уравнений

$$P(a, y) = \frac{\partial P}{\partial y_1}(a, y) = \dots = \frac{\partial P}{\partial y_n}(a, y) = 0$$

имеет решение $y \in \mathbb{T}^n$; такое A -дискриминантное множество обозначалось ∇_A . Если множество ∇_A является гиперповерхностью (т.е. $\text{codim } \nabla_A(x) = 1$), то ее определяющий полином называется A -дискриминантом. Классический дискриминант (4) совпадает с A -дискриминантом $\Delta_A(x)$, где $A = \{0, 1, \dots, m\} \subset \mathbb{Z}$. Следуя [1], введенное в определении 1 дискриминантное множество ∇ уместно назвать $(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ -дискриминантным множеством.

Заметим, что дискриминантное множество ∇ не всегда имеет коразмерность 1. Например, для общей системы n линейных неоднородных уравнений оно лежит в множестве, которое задается одновременными нулями всех миноров порядка n расширенной матрицы системы.

Цель настоящей статьи состоит в исследовании дискриминантного множества $\nabla = \nabla(P)$ общего полиномиального отображения $P: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, или, что то же самое, системы уравнений (1). Основной результат состоит в предъявлении параметризации “дегомогенизированного” дискриминантного множества, соответствующего “приведенной” системе (вид приведенной системы дается ниже формулой (5)). Фактически параметризация определяется набором показателей $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$. Например, для классического дискриминантного множества приведенного уравнения (3) такая параметризация осуществляется отображением $s \rightarrow x(s)$ из $\mathbb{CP}_s^{m-2}$ в $\mathbb{C}_x^{m-1}$ и имеет вид (см. [2] или [3])

$$x_\lambda = -\frac{ms_\lambda}{\langle \beta, s \rangle} \left(\frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\lambda/m}, \quad \lambda = 1, \dots, m-1,$$

где $\alpha = (1, \dots, m-1)$ – вектор из показателей мономов $y, y^2, \dots, y^{m-1}$ уравнения (3), а $\beta = -(m-1, m-2, \dots, 1)$.

Отметим, что для специальных дегомогенизаций A -дискриминантных гиперповерхностей их параметризация была приведена в статье [4] (см. также [5], где параметризация представлена с помощью Gale-преобразования матрицы, составленной из вектор-столбцов множества A и дополненной строкой из единиц).

Схема изложения статьи следующая. В § 1 описаны условия вырождения (равенства нулю) якобиана системы (1) в ее корнях $y \in \mathbb{T}^n$. В этом вырожденном случае задача исследования дискриминанта системы (1) сводится к вычислению результата системы. В невырожденном случае предъявляются процедуры преобразования системы (1) к приведенному виду (5) и восстановления дискриминантного множества системы (1) по дискриминантному множеству системы (5).

Основные результаты формулируются и доказываются в § 2, 6. В теореме 1 доказывается, что универсальная параметризация (13) задает неприводимые компоненты дискриминантного множества, зависящие от всех n групп коэффициентов системы. В частности, всё дискриминантное множество параметризуется с помощью (13) в случае, когда многогранник Ньютона каждого уравнения является n -мерным. Если ∇ является гиперповерхностью, зависящей от коэффициентов каждого уравнения системы, то параметризация (13) является обращением логарифмического отображения Гаусса для ∇ (см. теорему 2). Это утверждение является аналогом результата М. Капранова [4] о параметризации A -дискриминантной гиперповерхности.

Следует отметить, что в [4] доказана бирациональность логарифмического отображения Гаусса для A -дискриминантной гиперповерхности. В нашем случае отображение Гаусса для ∇ не всегда бирационально (см. пример 3), поэтому $(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ -дискриминанты не сводятся, вообще говоря, к A -дискриминантам. Наконец, отметим, что с помощью предъявленной параметризации можно эффективно извлекать информацию о распределении дискриминантного множества. Подтверждающие примеры приведены в § 7 при использовании логарифмической шкалы, кроме того, из примера 4 видно, что при простой конструкции параметризации дискриминантного множества выражение для дискриминанта может становиться необозримо громоздким даже для максимально разреженной системы двух полиномов 4-й степени.

В основе доказательства лежат линеаризация приведенной системы, детальное изучение нулевого множества для якобиана линеаризации (§ 3, 4), а также связь дискриминантного множества с сингулярностями алгебраической функции, определяемой системой (§ 5). В заключение укажем, что некоторые идеи и результаты настоящей статьи были анонсированы в [6].

Авторы благодарны Б. Мартину, сделавшему полезное замечание по факторизации дискриминантов в примерах, приведенных в § 7. Мы также признательны рецензенту, указавшему на возможность новой концептуальной интерпретации полученных в статье результатов. А именно, по теореме Капранова A -дискриминанты характеризуют гиперповерхности с бирациональными отображениями Гаусса. Как уже упоминалось выше, для $(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ -дискриминантов ∇ это не так, поэтому логарифмическое отображение Гаусса для них осуществляет нетривиальное расширение $\mathbb{C}(\nabla)$ поля рациональных функций на проективном пространстве. Полученные в статье результаты наводят на мысль, что группа Галуа указанного расширения абелева. Поэтому рецензент поставил вопрос о характеристизации гиперповерхностей, для которых указанное расширение имеет абелеву группу Галуа.

§ 1. Приведенная система и дегомогенизация дискриминантного множества

В определении дискриминантного множества рассматривается сужение отображения P на тор $\mathbb{T}^n$, поэтому без ограничения общности можно считать, что все множества $A^{(i)}$ содержат нулевой элемент $\bar{0}$ (этого можно добиться делением i -го уравнения системы (1) на моном с показателем из $A^{(i)}$).

В многомерном случае под *приведенной системой* для системы (1) будем понимать систему вида

$$y^{\omega^{(i)}} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_{\lambda}^{(i)} y^{\lambda} - 1 = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где матрица из столбцов выделенных показателей $(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}) = \omega$ невырожденная, а $\Lambda^{(i)} := A^{(i)} \setminus \{\omega^{(i)}, 0\}$. Не ограничивая общности, будем считать, что в (5) каждое уравнение имеет мономы с переменными коэффициентами, т. е. все множества $\Lambda^{(i)}$ непустые, иначе задача нахождения дискриминанта для системы (1) сводится к такой же задаче для подсистемы из $k < n$ уравнений с k неизвестными.

Здесь мы покажем, что, как правило, систему (1) можно привести к виду (5). Мы также докажем, что дискриминантное множество системы (1) восстанавливается по дискриминантному множеству системы (5). Возможность такого восстановления обусловлена свойством полиоднородности решения $y(a) = (y_1(a), \dots, y_n(a))$ системы (1). Полиоднородность означает, что, во-первых, решение не изменится, если векторы из коэффициентов $a_{\lambda}^{(i)}$ уравнений системы (1) умножить на ненулевые скаляры $t^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, во-вторых, деление j -й координаты решения $y_j(a)$ на $l_j \neq 0$ компенсируется умножением коэффициентов $a_{\lambda}^{(i)}$ на $l^{\lambda} := l_1^{\lambda_1} \dots l_n^{\lambda_n}$. Таким образом, свойство полиоднородности решения $y(a)$ выражается следующим равенством:

$$y(\dots, t^{(i)} l^{\lambda} a_{\lambda}^{(i)}, \dots) = (l_1^{-1} y_1(\dots, a_{\lambda}^{(i)}, \dots), \dots, l_n^{-1} y_n(\dots, a_{\lambda}^{(i)}, \dots)), \quad (6)$$

где $t = (t^{(1)}, \dots, t^{(n)})$, $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{T}^n$.

Сформулируем точное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Если для любого набора n пар $\lambda^{(i)}, \mu^{(i)} \in A^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, показателей системы (1) определитель

$$\delta_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} = \det(\lambda_j^{(i)} - \mu_j^{(i)}) \quad (7)$$

равен нулю, то якобиан системы (1) равен нулю во всех ее корнях $y \in \mathbb{T}^n$.

2) Если для некоторого набора n пар $\lambda^{(i)}, \mu^{(i)} \in A^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, определитель $\delta_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}$ не равен нулю, то, разделив i -е уравнение системы (1) на $y^{\mu^{(i)}}$, приходим к ситуации, когда $A^{(i)}$ содержит пару $\omega^{(i)} = \lambda^{(i)} - \mu^{(i)}$, 0, причем $\det \omega \neq 0$. В таком случае нормировка коэффициентов при степенях $y^{\omega^{(i)}}$ и y^0 , т. е. приведение (1) к (5), осуществляется мономиальным (с рациональными показателями) преобразованием $F: a \rightarrow x$, задаваемым формулой (10), где $l = l(a)$ – решение системы (8).

3) Если $\{D_j(x) = 0\}$ – система уравнений для дискриминантного множества системы (5), то дискриминантное множество системы (1) определяется уравнениями $\{D_j(F(a)) = 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если для системы (1) все определители (7) равны нулю, то согласно утверждению 1) предложения 1 все корни системы из $\mathbb{T}^n$ кратные.

Тогда задача вычисления дискриминанта системы сводится к задаче о совместности системы уравнений, т. е. к задаче вычисления результата системы (точнее, к задаче вычисления смешанного $(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ -результанта; см. [1, гл. 8]). Эта *вырожденная* задача не рассматривается в настоящей статье. Отметим, что при определенных условиях смешанный $(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ -результант выражается при помощи так называемого трюка Кэли через A -дискриминант [1, гл. 9, предложение 1.7]. Согласно утверждению 2) предложения 1 в интересующем нас другом (невырожденном) случае задача описания дискриминантного множества для системы (1) сводится к такой же задаче для приведенной системы (5), дискриминантное множество которой мы называем *дегомогенизированным* (или *приведенным*) дискриминантным множеством системы (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $|\det \omega| = 1$ в (5), то отображение $F: a \rightarrow x$ пространств коэффициентов будет обычным мономимальным, т. е. с целыми показателями.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В обосновании утверждения 3) предложения 1 мы будем пользоваться одним фактом из § 5. Это не нарушает корректности, поскольку утверждение 3) нигде не используется далее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. 1) Зафиксируем в каждом $A^{(i)}$ по элементу $\mu_0^{(i)}$ и рассмотрим систему $f_i = y^{-\mu_0^{(i)}} P_i$, $i = 1, \dots, n$. Системы f и P имеют одинаковые множества корней в $\mathbb{T}^n$. Кроме того, в этих корнях якобианы систем одновременно вырождаются, так как по модулю идеала $\langle P_1, \dots, P_n \rangle$ имеет место равенство

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_n = y^{-(\mu_0^{(1)} + \dots + \mu_0^{(n)})} dP_1 \wedge \dots \wedge dP_n.$$

При вычислении якобиана $\frac{\partial f}{\partial y}$ мы не учитываем постоянные мономы $a_{\mu_0^{(i)}}^{(i)}$ в каждом f_i . Каждый набор непостоянных мономов $a_{\lambda^{(i)}}^{(i)} y^{\lambda^{(i)} - \mu_0^{(i)}}$, $i = 1, \dots, n$, дает следующий вклад в определитель, задающий $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$a_{\lambda^{(1)}}^{(1)} \dots a_{\lambda^{(n)}}^{(n)} \delta_{\bar{\lambda}\bar{\mu}_0} y^{\sum_i (\lambda_j^{(i)} - \mu_j^{(i)} - e_i)},$$

где e_i – элементы стандартного базиса. По условию все $\delta_{\bar{\lambda}\bar{\mu}_0}$ равны нулю, поэтому $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$, а $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ в каждом корне $y \in \mathbb{T}^n$ системы (1).

2) Пусть для заданного набора n пар $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ определитель $\delta_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}$ не равен нулю. Разделим i -е уравнение системы (1) на $y^{\mu^{(i)}}$ и будем считать, что коэффициенты i -го уравнения индексируются показателями из $A^{(i)} - \mu^{(i)}$; в частности, коэффициенты при $y^{\omega^{(i)}}$ и y^0 – это $a_{\omega^{(i)}}^{(i)}$ и $a_0^{(i)}$ соответственно. Выберем $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{T}^n$ так, чтобы

$$l^{\omega^{(i)}} = -\frac{a_0^{(i)}}{a_{\omega^{(i)}}^{(i)}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Такая система имеет $|\det \omega| = |\delta_{\lambda\mu}| \geq 1$ корней. Решить систему (8) относительно l можно, применив теорему об инвариантных множителях [7, теорема 16.6].

Для этого обозначим вектор-столбец в правой части (8) через g . По теореме об инвариантных множителях существуют унимодулярные матрицы A и B такие, что

$$A\omega B = D_m, \quad (9)$$

где D_m – диагональная матрица с целыми положительными числами $m_1, \dots, \dots, m_n$ на диагонали. В матричной записи левая часть системы (8) примет вид

$$l^\omega = (l_1^{\omega_1^1} \dots l_n^{\omega_n^1}, \dots, l_1^{\omega_1^n} \dots l_n^{\omega_n^n}).$$

С учетом такой записи получим

$$g^B = (l^\omega)^B = l^{\omega B}.$$

Пусть $\tilde{l} = l^{A^{-1}}$; тогда перепишем последние соотношения следующим образом:

$$g^B = l^{\omega B} = \tilde{l}^{A\omega B} = \tilde{l}^{D_m}.$$

Ввиду диагональности матрицы D_m получаем выражения для координат вектора $\tilde{l}$ посредством радикалов

$$\tilde{l}_1 = (g^{b^1})^{1/m_1}, \dots, \tilde{l}_n = (g^{b^n})^{1/m_n};$$

здесь $b^1, \dots, b^n$ – столбцы матрицы B . Следовательно, искомый вектор $l = \tilde{l}^A$ состоит из мономов Лорана (с целыми показателями) от переменных $(g^{b^1})^{1/m_1}, \dots, (g^{b^n})^{1/m_n}$. Поскольку координаты вектора g – это отношения пар коэффициентов $a_{\omega(i)}^{(i)}, a_0^{(i)}$ со знаком минус, получаем, что $l = l(a)$ выражается мономиально через указанные n пар коэффициентов системы (1).

При мономиальной замене коэффициентов $a \rightarrow x = F(a)$ по формуле

$$x_\lambda^{(i)} = F_\lambda^{(i)}(a) = -\frac{1}{a_0^{(i)}} l^\lambda(a) a_\lambda^{(i)}, \quad \lambda \in A^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

система (1) перейдет в (5), поскольку $F_{\omega(i)}^{(i)}(a) = 1, F_0^{(i)}(a) = -1$.

3) Обозначим через $y(a)$ и $Y(x)$ решения систем (1) и (5) соответственно и положим $t^{(i)} = -\frac{1}{a_0^{(i)}}, l = l(a)$ в формуле (6). Поскольку

$$t^{(i)} l^{\omega(i)} a_{\omega(i)}^{(i)} = 1, \quad t^{(i)} a_0^{(i)} = -1,$$

получим соотношение

$$(l_1(a)Y_1(x), \dots, l_n(a)Y_n(x))|_{x=F(a)} = y(a). \quad (11)$$

Формулы (10) и (8) показывают, что отображения $a \rightarrow x = F(a)$ и $a \rightarrow l = l(a)$ аналитичны в области из $\mathbb{C}^A$, где $a_{\omega(i)}^{(i)} a_0^{(i)} \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Поэтому из (11) следует, что если в точке a^0 из этой области значение сингулярной ветви $y(a)$ (не голоморфной в a) принадлежит $\mathbb{T}^n$, то в точке $F(a^0)$ существует сингулярная ветвь $Y(x)$, значение которой в этой точке также принадлежит $\mathbb{T}^n$. По утверждению 3) предложения 2 (см. § 4) такие точки характеризуются принадлежностью дискриминантному множеству. Отсюда получаем доказываемое свойство о соответствии дискриминантных множеств систем (1) и (5).

§ 2. Основные результаты

В этом параграфе мы будем рассматривать лишь приведенную систему (5). Напомним, что множества показателей $A^{(i)} \setminus \{\omega^{(i)}, \bar{0}\}$ мы обозначили $\Lambda^{(i)}$. Обозначим через Λ дизъюнктное объединение множеств $\Lambda^{(i)}$, и пусть N – мощность множества Λ , т. е. число коэффициентов в системе (5). Множество коэффициентов системы (5) составляет векторное пространство $\mathbb{C}^\Lambda \cong \mathbb{C}_x^N$, в котором координаты точек $x = (x_\lambda)$ индексируются элементами $\lambda \in \Lambda$. Группу координат, соответствующих индексам $\lambda \in \Lambda^{(i)}$, мы, как правило, выделяем записью $x_\lambda^{(i)}$ и, соответственно, $\mathbb{C}^\Lambda$ отождествляем с $\mathbb{C}^{\Lambda^{(1)}} \times \cdots \times \mathbb{C}^{\Lambda^{(1)}}$; иногда элементы из $\mathbb{C}^{\Lambda^{(i)}}$ мы записываем x_λ , подчеркивая, что $\lambda \in \Lambda^{(i)}$.

Множество Λ также будем интерпретировать как матрицу

$$\Lambda = (\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)}) = (\lambda^1, \dots, \lambda^N), \quad (12)$$

столбцами которой являются векторы $\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ из показателей мономов системы (5). Здесь имеется в виду, что блок $\Lambda^{(i)}$ матрицы Λ соответствует i -му уравнению системы (5), а нумерация столбцов λ^k внутри каждого из блоков $\Lambda^{(i)}$ произвольная, но фиксированная.

Обозначим матрицу из вектор-столбцов $\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}$ в (5) через ω . Введем две $(n \times N)$ -матрицы

$$\Phi := \omega^{-1} \Lambda, \quad \tilde{\Phi} = \Phi - \chi,$$

где χ – матрица, i -я строка которой представляет характеристическую функцию подмножества $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$, т. е. элементы этой строки равны 1 на местах $\lambda \in \Lambda^{(i)}$ и 0 – на всех остальных местах $\lambda \in \Lambda$. Строки матриц Φ и $\tilde{\Phi}$ обозначим через $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$ соответственно.

Рассмотрим два экземпляра пространства $\mathbb{C}^N$: пространство $\mathbb{C}_x^N$ переменных $x = (x_\lambda)$ и пространство $\mathbb{C}_s^N$ переменных $s = (s_\lambda)$, причем $\mathbb{C}_s^N$ будем понимать как пространство однородных координат для $\mathbb{CP}^{N-1}$. Определим алгебраическое (многозначное) отображение

$$\Delta: \mathbb{CP}_s^{N-1} \rightarrow \mathbb{C}_x^N = \mathbb{C}_{x^{(1)}}^{\Lambda^{(1)}} \times \cdots \times \mathbb{C}_{x^{(n)}}^{\Lambda^{(n)}}$$

из проективного пространства в пространство коэффициентов $x = (x_\lambda)$ системы (5), полагая

$$x_\lambda^{(i)} = -\frac{s_\lambda^{(i)}}{\langle \tilde{\varphi}_i, s \rangle} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}_k, s \rangle}{\langle \varphi_k, s \rangle} \right)^{\varphi_{k\lambda}}, \quad \lambda \in \Lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (13)$$

где $\varphi_{k\lambda}$ – координата с номером $\lambda \in \Lambda^{(i)} \subset \Lambda$ строки φ_k .

Поясним, как выбираются ветви радикалов дробно-линейных функций в (13). Введем для этих функций следующие обозначения:

$$W_k = \frac{\langle \tilde{\varphi}_k, s \rangle}{\langle \varphi_k, s \rangle}, \quad k = 1, \dots, n.$$

С учетом (9) имеет место равенство $\omega^{-1} = BD_m^{-1}A$ с унимодулярными матрицами A и B . Поэтому в обозначениях $W = (W_1, \dots, W_n)$, $W^B = V$ произведения

в (13) можно записать в виде

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}_k, s \rangle}{\langle \varphi_k, s \rangle} \right)^{\varphi_{k\lambda}} = W^{\varphi_\lambda} = (W^B)^{D_m^{-1} A \lambda} = (V_1^{1/m_1}, \dots, V_n^{1/m_n})^{A \lambda},$$

где φ_λ – вектор-столбец с координатами $\varphi_{k\lambda}$. Для всех $\lambda \in \Lambda$ векторы $A\lambda$ целочисленные. Выбирая для каждого k все m_k значений радикала V_k^{1/m_k} , мы получим все требуемые ветви для Δ . Формально их количество есть $m_1 \cdots m_n = |\det \omega|$, но некоторые из этих ветвей могут повторяться.

Будем говорить, что *дискриминантное множество ∇ системы (5) зависит от всех групп коэффициентов $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$* , если ∇ не факторизуется в виде $\nabla' \times \mathbb{C}^{\Lambda^{(k)}}$, где ∇' – алгебраическое подмножество в $\mathbb{C}^{\Lambda^{(1)}} \times \dots \times [k] \dots \times \mathbb{C}^{\Lambda^{(n)}}$. Будем также говорить, что полином Лорана $Q(y_1, \dots, y_n)$ *по существу зависит от не менее чем $k+1$ переменных*, если множество его показателей не лежит в k -мерной плоскости. В противном случае, т.е. когда все показатели лежат в некоторой k -мерной плоскости, существует мономиальная замена $y = t^\theta$ с невырожденной рациональной (целочисленной) $(n \times n)$ -матрицей θ , преобразующая $Q(y)$ к виду $Q(t^\theta) = M \times \tilde{Q}(t)$, где M – моном, а $\tilde{Q}$ зависит от не более чем k переменных t_j .

ТЕОРЕМА 1. 1) Если в (5) каждая подсистема из $k \leq n-1$ уравнений зависит от не менее чем $k+1$ переменных (в частности, если многогранник Ньютона каждого уравнения в (5) n -мерный), то дискриминантное множество ∇ системы (5) параметризуется по формуле (13).

2) Если ∇ имеет неприводимые компоненты, зависящие от всех групп переменных коэффициентов $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$, то объединение всех таких компонент также параметризуется по формуле (13).

Если неприводимая компонента ∇ зависит от менее чем n групп коэффициентов $x^{(i_1)}, \dots, x^{(i_k)}$, то она параметризуется формулой, построенной аналогично (13) по подсистеме уравнений с номерами $i_1, \dots, i_k$. Более точно, обозначим через I набор индексов $\{i_1, \dots, i_k\}$, а через J дополнительный к нему набор в $\{1, \dots, n\}$. Тогда эта компонента имеет вид $\mathbb{C}^{\Lambda^J} \times \nabla_I$, где $\mathbb{C}^{\Lambda^J}$ – подпространство коэффициентов $x^{(j)}$, $j \in J$, системы (5), а $\nabla_I \subset \mathbb{C}^{\Lambda^I}$ задается формулой (33), где L_I параметризуется по формуле (29).

Доказательство теоремы 1 будет приведено в § 6.

Напомним понятие *логарифмического отображения Гаусса* гиперповерхности $V = \{D(x) = 0\} \subset \mathbb{T}^N$ (см. [4] или [8]). Оно представляет собой отображение $\gamma_V: \text{reg}(V) \rightarrow \mathbb{CP}^{N-1}$, определенное в координатах $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^N$ формулой

$$(x_1, \dots, x_N) \rightarrow (x_1 D'_{x_1} : \dots : x_N D'_{x_N}).$$

Геометрическая интерпретация γ состоит в том, что вектор $\gamma(x)$ задает нормальную прямую к гиперповерхности $\log(V)$ в точке $\log(x) = (\log x_1, \dots, \log x_N)$, и эта нормаль определяет точку в $\mathbb{CP}^{N-1}$. Следующее утверждение является аналогом результата М. Капранова [4] о параметризации A -дискриминантной гиперповерхности.

ТЕОРЕМА 2. Если дискриминантное множество ∇ системы (5) является неприводимой гиперповерхностью, зависящей от всех групп переменных, то его параметризация (13) является обращением логарифмического отображения Гаусса: $\Delta(s) = \gamma^{-1}(s)$.

Для классического дискриминанта этот результат отмечался в [3]. Следуя [3], параметризацию ∇ в виде $\gamma^{-1}(s)$ назовем *параметризацией Горна–Капранова*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Здесь мы почти дословно повторяем рассуждения, используемые в статье [4, теорема 2.1, в)] для A -дискриминанта. Поясним основные фрагменты доказательства. Запишем параметризацию (13) в виде

$$x_\lambda = \prod_{\beta \in \Lambda} \langle \delta_\beta, s \rangle^{\delta_{\beta\lambda}} \prod_{k=1}^n \langle \varphi_k, s \rangle^{-\varphi_{k\lambda}} \langle \tilde{\varphi}_k, s \rangle^{-\tilde{\varphi}_{k\lambda}}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

т. е. в виде произведения степеней $N + 2n$ линейных функций, где $\delta_{\beta\lambda}$ – символ Кронекера. В такой записи легче усмотреть симметричность матрицы Якоби J для композиции $\log \circ \Delta$, т. е. справедливость равенств

$$\frac{\partial \log x_\lambda}{\partial s_\mu} = \frac{\partial \log x_\mu}{\partial s_\lambda}, \quad \lambda, \mu \in \Lambda.$$

Учитывая однородность степени 0 функций $x_\lambda(s)$, по формуле Эйлера получаем

$$\sum_{\beta \in \Lambda} \frac{\partial \log x_\lambda}{\partial s_\beta} s_\beta = 0, \quad \lambda \in \Lambda,$$

откуда ввиду указанной симметричности почти каждый вектор s ортогонален всем столбцам $(\frac{\partial \log x_\lambda}{\partial s_\beta})_{\beta \in \Lambda}$. Однако эти столбцы порождают касательное пространство образа отображения $\log \circ \Delta$, а по условию теоремы образ есть гиперповерхность. Поэтому нормаль в точках $\log \circ \Delta(s)$ логарифмического образа $\log(\nabla)$ совпадает с s . Следовательно, отображение $\gamma \circ \Delta: \mathbb{CP}^{N-1} \rightarrow \mathbb{CP}^{N-1}$, ставящее в соответствие элементу s нормаль к логарифмическому образу $\log \Delta(s)$, является тождественным. Теорема доказана.

Приведем одно достаточное условие для того, чтобы дискриминантное множество ∇ системы (5) было гиперповерхностью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если все векторы $\varphi_i, \tilde{\varphi}_i, i = 1, \dots, n$, имеют ненулевые координаты, то образ ∇ отображения (13) есть гиперповерхность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что ранг матрицы Якоби для отображения Δ равен $N - 1$ почти в каждой точке области определения Δ . Пронумеруем однородные координаты $(s_0, s_1, \dots, s_{N-1})$ в $\mathbb{CP}^{N-1}$; тогда в локальной карте $U_0 = \{s_0 \neq 0\}$ с локальными координатами $t_j = \frac{s_j}{s_0}$ отображение Δ имеет вид

$$\Delta(s) = (\varkappa_0, s_1 \varkappa_1, \dots, s_{N-1} \varkappa_{N-1}),$$

где $\varkappa_k$ – произведение радикалов от дробно-линейных функций переменных $s_1, \dots, s_{N-1}$. Коэффициенты дробно-линейных функций являются координатами векторов $\varphi_j, \tilde{\varphi}_j$, которые не равны нулю по условию. Поэтому $\varkappa_k$ и

их производные не обращаются в нуль при $t = 0$. Отсюда следует, что минор порядка $N - 1$ матрицы Якоби $\frac{\partial \Delta(t)}{\partial t}$, состоящий из столбцов с номерами $1, \dots, N - 1$, не равен нулю в точке $t = 0$, следовательно, и почти всюду.

Как уже отмечалось, число ветвей в (13) есть $|\det \omega| = m_1 \cdots m_n$, однако некоторые ветви могут совпадать. Совокупность всех $|\det \omega|$ ветвей разбивается на равномошные классы совпадающих ветвей, и (13) параметризует ∇ как голоморфную цепь [9, п. 11.5] с кратностью, равной числу ветвей в классе. Для вычисления этой кратности обозначим через H решетку в $\mathbb{Z}^n$, порожденную столбцами $(n \times (N + n))$ -матрицы (ω, Λ) , т. е. всеми показателями системы (5) (или, что то же самое, системы (1)).

ТЕОРЕМА 3. *В условиях теоремы 2 отображение (13) параметризует дискриминантную гиперповерхность ∇ с кратностью, равной индексу $|\mathbb{Z}^n : H|$ подрешетки $H \subset \mathbb{Z}^n$. В частности, если набор показателей системы (5) порождает решетку $\mathbb{Z}^n$, то кратность равна 1.*

Теорема 3 отражает следующую ситуацию. Предположим, что для системы (5) решетка H порождает $\mathbb{Z}^n$ и $D(x)$ – определяющий полином для неприводимой гиперповерхности ∇ (т. е. дискриминант). Положим в системе (5) нулевыми некоторые коэффициенты x_λ , т. е. перейдем от набора показателей Λ к поднабору $\Lambda' \subset \Lambda$. Если дискриминантное множество ∇' полученной системы также будет неприводимой гиперповерхностью, то ее дискриминант $D'(x')$ связан с дискриминантом $D(x)$ соотношением

$$D(x)|_{\{x_\lambda=0, \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'\}} \approx (D'(x'))^k,$$

где k – индекс подрешетки H' , порожденной столбцами матрицы (ω, Λ') , а знак $\approx$ означает равенство с точностью до постоянного множителя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В терминах введенных выше функций W_k отображение (13) записывается в виде

$$x_\lambda^{(i)} = -\frac{s_\lambda^{(i)}}{\langle \tilde{\varphi}_i, s \rangle} W_1^{\varphi_{1\lambda}} \cdots W_n^{\varphi_{n\lambda}}, \quad \lambda \in \Lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Монодромия этого отображения совпадает с монодromией отображения $W^\Phi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}^\Lambda$, заданного формулой

$$W = (W_1, \dots, W_n) \rightarrow (W^{\varphi_\lambda})_{\lambda \in \Lambda} = (W_1^{\varphi_{1\lambda}} \cdots W_n^{\varphi_{n\lambda}})_{\lambda \in \Lambda}.$$

Для произвольного $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$ рассмотрим в торе $\mathbb{T}^n$ переменных $W_1, \dots, W_n$ петлю γ_l :

$$W_k = e^{il_k \theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad k = 1, \dots, n.$$

При обходе γ_l значение функции W^{φ_λ} изменится на множитель

$$\exp \left\{ 2\pi i \sum_{k=1}^n l_k \varphi_{k\lambda} \right\} = \exp \{ 2\pi i \langle l, \varphi_\lambda \rangle \}.$$

Отсюда видно, что при обходе петли γ_l значение отображения W^Φ не изменяется тогда и только тогда, когда все $\langle l, \varphi_\lambda \rangle$ целые, т. е. когда $l\Phi \in \mathbb{Z}^N$. Напомним, что $\Phi = \omega^{-1}\Lambda$.

Наряду с матрицей Φ рассмотрим ее расширение $(E, \Phi) = \Psi$, где E – единичная $(n \times n)$ -матрица. Очевидно,

$$l\Phi \in \mathbb{Z}^N \Leftrightarrow l\Psi \in \mathbb{Z}^{N+n}.$$

Обозначим через $h = (h_1, \dots, h_n)$ базис решетки H , порожденной столбцами матрицы (ω, Λ) ; h – одновременно матрица из столбцов h_j . Тогда целочисленная линейная оболочка матрицы $\Psi = \omega^{-1}(\omega, \Lambda)$ порождается столбцами матрицы $\omega^{-1}h$, поэтому

$$l\Psi \in \mathbb{Z}^{N+n} \Leftrightarrow l\omega^{-1}h \in \mathbb{Z}^n \Leftrightarrow l \in \mathbb{Z}^n h^{-1}\omega.$$

Матрица $h^{-1}\omega$ целочисленная, поскольку решетка $\langle \omega \rangle$, порожденная столбцами матрицы ω , принадлежит H . Эта матрица порождает подрешетку в $\mathbb{Z}^n$ индекса

$$|\det h^{-1}\omega| = \frac{|\det \omega|}{|\det h|} = \frac{|\mathbb{Z}^n : \langle \omega \rangle|}{|\mathbb{Z}^n : H|} = |H : \langle \omega \rangle|.$$

Следовательно, из всех $|\det \omega| = m_1 \cdots m_n$ ветвей отображения W^Φ количество разных будет составлять $|H : \langle \omega \rangle|$, причем каждая группа из одинаковых ветвей состоит из $|\mathbb{Z}^n : H|$ экземпляров. Следовательно, отображение (13) параметризует свой образ с кратностью, равной индексу $|\mathbb{Z}^n : H|$.

§ 3. Линеаризация системы (5) и якобиан линеаризации

Напомним, что ω – невырожденная целочисленная $(n \times n)$ -матрица с вектор-столбцами $\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}$ из системы (5). Согласно теореме об инвариантных множителях для ω выполняется соотношение (9). Рассмотрим (5) как систему уравнений в пространстве $\mathbb{C}^\Lambda \times \mathbb{T}^n$ с координатами $x = (x_\lambda^{(i)})$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, и введем в $\mathbb{C}^\Lambda \times \mathbb{T}^n$ замену переменных $(\xi, W) \rightarrow (x, y)$, полагая

$$\begin{aligned} x_\lambda^{(i)} &= \xi_\lambda^{(i)} W^{\omega^{-1}\lambda} W_i^{-1}, \quad \lambda = (\lambda_k) \in \Lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \\ y &= W^{-\omega^{-1}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $W = (W_1, \dots, W_n)$. Отметим, что $\omega^{-1}\Lambda$ – матрица Φ , строки φ_k которой участвуют в определении параметризации (13). Поэтому $W^{\omega^{-1}\lambda} = W_1^{\varphi_{1\lambda}} \cdots W_n^{\varphi_{n\lambda}}$. При замене (14) для каждого $\lambda \in \Lambda^{(i)}$ моном $x_\lambda^{(i)} y^\lambda$ в (5) перейдет в $\xi_\lambda^{(i)} W_i^{-1}$, соответственно, вектор y^ω перейдет в $(W_1^{-1}, \dots, W_n^{-1})$, поэтому (5) запишем в виде системы линейных уравнений

$$W_i = 1 + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} \xi_\lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Таким образом, при замене $\xi \rightarrow x$ в пространстве коэффициентов $\mathbb{C}^\Lambda$, определенной формулой

$$x_\lambda^{(i)} = \xi_\lambda^{(i)} \prod_{k=1}^n \left(1 + \sum_{\tau \in \Lambda^{(k)}} \xi_\tau^{(k)} \right)^{\varphi_{k\lambda} - \delta_k^i}, \quad \lambda = (\lambda_k) \in \Lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (16)$$

решение $y(x)$ системы (5) примет вид

$$\tilde{y}(\xi) = y(x(\xi)) = (W(\xi))^{-\omega^{-1}}, \quad (17)$$

где $W(\xi) = (W_1(\xi^{(1)}), \dots, W_n(\xi^{(n)}))$ – вектор из линейных функций (15). Отсюда видно, что при замене (16) коэффициентов системы (5) решение $y(x)$ переходит в решение $\tilde{y}(\xi)$, аналитическое в области

$$G = \left\{ \xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}) \in \mathbb{C}^\Lambda : \prod_{k=1}^n \left(1 + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \xi_\lambda^{(k)} \right) \neq 0 \right\}. \quad (18)$$

Идея линейаризации скалярного алгебраического уравнения (т. е. при $n = 1$) с помощью такого типа замены была реализована Х. Меллином [10] (см. также [2]) для получения интегрального представления решения алгебраического уравнения. С этой же целью в работах [11], [12] была рассмотрена линейаризация системы вида

$$y_i^{m_i} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (19)$$

где $m_i \geq 1$. Такую приведенную систему назовем *канонической*. Для нее матрица $\omega = D_m$ диагональная, поэтому матрица $\Phi = \omega^{-1}\Lambda = D_m^{-1}\Lambda$ получается из Λ делением координаты λ_j^k каждого вектор-столбца $\lambda^k \in \Lambda$ на m_j . Для канонической системы линейаризация $\xi \rightarrow x$ следующая:

$$x_\lambda^{(i)} = \xi_\lambda^{(i)} \prod_{k=1}^n \left(1 + \sum_{\tau \in \Lambda^{(k)}} \xi_\tau^{(k)} \right)^{\frac{\lambda_k - \delta_k^i}{m_k}}, \quad \lambda = (\lambda_k) \in \Lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (20)$$

В статье [12] была получена следующая формула для якобиана замены (20):

$$\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)} = \prod_{i=1}^n (W_i(\xi))^{| \varphi_i | - (\#\Lambda^{(i)}) - 1} \times \det \left(\delta_j^k + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \frac{\lambda_j}{m_j} \xi_\lambda \right)_{j,k=\overline{1,n}}, \quad (21)$$

где $W_i(\xi)$ – функции из (15), а $\#\Lambda^{(i)}$ – мощность $\Lambda^{(i)}$, $|\varphi_i|$ – сумма элементов i -й строки φ_i матрицы $\Phi = D_m^{-1}\Lambda$.

Замена $\xi \rightarrow x$, заданная формулой (20), вместе с ее якобианом (21) зависят лишь от отношений $\frac{\lambda_k}{m_k}$, т. е. однозначно определяются матрицей $\Phi = D_m^{-1}\Lambda$. Поэтому для рациональной $(n \times N)$ -матрицы $\Phi = (\varphi_k^\lambda)$, где $k \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda \in \Lambda$, формула для якобиана $\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)}$ замены (16) будет получаться из (21) заменой отношений $\frac{\lambda_j}{m_j}$ на $\varphi_{j\lambda}$:

$$\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)} = \prod_{i=1}^n (W_i(\xi))^{| \varphi_i | - (\#\Lambda^{(i)}) - 1} \times \det \left(\delta_j^k + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \varphi_{j\lambda} \xi_\lambda \right)_{j,k=\overline{1,n}}. \quad (22)$$

§ 4. Множество критических точек линеаризации

Исследуем нулевое множество якобиана (22) отображения (16), т. е. множество критических точек для (16). Нас интересует гиперповерхность

$$L = \{\xi: P_{\Phi}(\xi) = 0\}$$

с определяющим полиномом

$$P_{\Phi}(\xi) = \det \left(\delta_j^k + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \varphi_{j\lambda} \xi_{\lambda} \right)_{j,k=\overline{1,n}}. \quad (23)$$

ЛЕММА 1. *Предположим, что все строки φ_i матрицы Φ ненулевые. Тогда отображение $\mathbb{CP}_s^{N-1} \rightarrow \mathbb{C}^{\Lambda}$, определенное дробно-линейными функциями*

$$\xi_{\lambda} = -\frac{s_{\lambda}}{\langle \varphi_j, s \rangle}, \quad \lambda \in \Lambda^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (24)$$

принимает значения в гиперповерхности $L \subset \mathbb{C}^{\Lambda}$ для всех s из области определения

$$S^{\varnothing} = \{s \in \mathbb{CP}^{N-1}: \langle \varphi_1, s \rangle \cdots \langle \varphi_n, s \rangle \neq 0\}.$$

(Смысл обозначения $S^{\varnothing}$ будет прояснен далее.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя параметризацию (24) в полином P_{Φ} , получим

$$\begin{aligned} P_{\Phi}(\xi(s)) &= \det \left(\delta_j^k - \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \frac{\varphi_{j\lambda} s_{\lambda}}{\langle \varphi_j, s \rangle} \right) \\ &= \frac{1}{\langle \varphi_1, s \rangle \cdots \langle \varphi_n, s \rangle} \det \left(\delta_j^k \langle \varphi_j, s \rangle - \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \varphi_{j\lambda} s_{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ в последнем детерминанте сумма элементов j -й строки есть

$$\sum_k \delta_j^k \langle \varphi_j, s \rangle - \sum_k \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \varphi_{j\lambda} s_{\lambda} = \langle \varphi_j, s \rangle - \langle \varphi_j, s \rangle = 0,$$

следовательно, $P_{\Phi}(\xi(s)) \equiv 0$. Лемма доказана.

Чтобы описать значения отображения (24) на всем $\mathbb{CP}^{N-1}$, рассмотрим его как “соответствие” (в терминологии книги [13]), т. е. как множество

$$L' = \pi(Z) \subset \mathbb{C}^{\Lambda},$$

которое является образом проекции $\pi: \mathbb{CP}^{N-1} \times \mathbb{C}^{\Lambda} \rightarrow \mathbb{C}^{\Lambda}$ алгебраического множества

$$Z = \{(s, \xi) \in \mathbb{CP}^{N-1} \times \mathbb{C}^{\Lambda}: \langle \varphi_j, s \rangle \xi_{\lambda} + s_{\lambda} = 0, \lambda \in \Lambda^{(j)}, j = 1, \dots, n\}. \quad (25)$$

ПРИМЕР 1. Для системы

$$\begin{aligned} y_1^2 + x_{11}^{(1)} y_1 y_2 - 1 &= 0, \\ y_2^2 + x_{01}^{(2)} y_2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

матрица Λ есть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а $\Phi = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Обозначим переменные $\xi_{11}^{(1)}$ и $\xi_{01}^{(2)}$ через ξ_1 и ξ_2 соответственно. Тогда

$$P_\Phi(\xi) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\xi_1}{2} & 0 \\ \frac{\xi_1}{2} & 1 + \frac{\xi_2}{2} \end{vmatrix} = \left(1 + \frac{\xi_1}{2}\right) \left(1 + \frac{\xi_2}{2}\right).$$

Следовательно, множество L состоит из двух прямых $\xi_j = -2$, $j = 1, 2$. По определению множество L' состоит из таких ξ , для которых линейная и однородная относительно s система

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(s_1 + s_2)\xi_2 + s_2 &= 0, \\ \frac{1}{2}s_1\xi_1 + s_1 &= 0 \end{aligned}$$

имеет нетривиальное решение. Ее определитель равен $(1 + \frac{\xi_1}{2})(1 + \frac{\xi_2}{2})$, таким образом, имеет место равенство $L' = L$.

ПРИМЕР 2. Для системы

$$\begin{aligned} y_1^3 + x_{21}^{(1)} y_1^2 y_2 - 1 &= 0, \\ y_2^3 + x_{12}^{(2)} y_1 y_2^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

матрица Λ есть $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, соответственно, $\Phi = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. В этом примере множество Z задается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(2s_1 + s_2)\xi_1 + s_1 &= 0, \\ \frac{1}{3}(s_1 + 2s_2)\xi_2 + s_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ее определитель

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{2}{3}\xi_1 & \frac{1}{3}\xi_1 \\ \frac{1}{3}\xi_2 & 1 + \frac{2}{3}\xi_2 \end{vmatrix}$$

совпадает с многочленом $P_\Phi(\xi)$, задающим L . Поэтому также $L' = L$. Как и в примере 1, этот факт неслучайный, о чем свидетельствует следующая

ЛЕММА 2. Имеем $L' = L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать точки ξ соответствия L' на комплексных прямых l_q , задаваемых направляющими векторами $(q_\lambda) \in \mathbb{C}^\Lambda \setminus \{0\}$:

$$\xi_\lambda = q_\lambda t, \quad t \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in \Lambda^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Каждая такая прямая l_a пересекает L' для тех и только тех значений параметра t , для которых система уравнений

$$\langle \varphi_j, s \rangle q_\lambda t + s_\lambda = 0, \quad \lambda \in \Lambda^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

разрешима относительно $s \in \mathbb{CP}^{N-1}$. Поиск таких s будем осуществлять на всевозможных (непустых) уровнях $\langle \varphi_j, s \rangle = u_j$, $j = 1, \dots, n$. На таких уровнях указанная система имеет вид $s_\lambda = -u_j q_\lambda t$, $\lambda \in \Lambda^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$. Подставляя эти выражения для s_λ в соотношение уровня $u_j = \langle \varphi_j, s \rangle$, получим

$$u_j = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_{j\lambda} s_\lambda = - \sum_{k=1}^n \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \varphi_{j\lambda} u_k q_\lambda t.$$

Таким образом, l_q пересекает L' для тех и только тех значений параметра t , для которых система n уравнений

$$u_j + \sum_{k=1}^n t \left(\sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \varphi_{j\lambda} q_\lambda \right) u_k = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

разрешима относительно $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ (рассматриваются лишь решения, не равные нулю, поскольку случай $u = 0$, соответствующий системе $\langle \varphi_1, s \rangle = \dots = \langle \varphi_n, s \rangle = 0$, не дает точек на множестве Z : в этом случае все s_λ равны нулю). Однако это является условием равенства нулю определителя

$$\det \left(\delta_j^k + t \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \varphi_{j\lambda} q_\lambda \right).$$

Теперь осталось заметить, что указанный определитель есть не что иное, как сужение на l_q многочлена P_Φ , определяющего гиперповерхность L . Лемма доказана.

Наряду с проекцией π рассмотрим другую проекцию $\rho: Z \rightarrow \mathbb{CP}^{N-1}$. Согласно лемме 2 мы имеем двойную проекцию

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \rho \swarrow & & \searrow \pi \\ \mathbb{CP}^{N-1} & & L \subset \mathbb{C}^\Lambda \end{array} \quad (26)$$

В случае, когда все строки матрицы Φ ненулевые, отображение $S^\varnothing \rightarrow L \subset \mathbb{C}^\Lambda$, определенное формулой (24), есть не что иное, как суженная на $S^\varnothing$ композиция $\pi \circ \rho^{-1}$. Точки из дополнения $L \setminus \pi \circ \rho^{-1}(S^\varnothing)$, не вошедшие в образ параметризации (24), являются образами точек $p \in Z$, лежащих над точками $s \in \mathbb{CP}^N$, где $\langle \varphi_i, s \rangle = 0$ для некоторых i . Из уравнений (25) для Z видно, что условие $\langle \varphi_i, s \rangle = 0$ влечет $s_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda^{(i)}$. Поэтому целесообразно исследовать Z над (непустыми) стратами

$$S^J = F^J \cap F_I \subset \mathbb{CP}^{N-1}, \quad (27)$$

где $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, I – дополнительный индекс к J , а

$$F^J = \{s: \langle \varphi_j, s \rangle = 0, s_\lambda = 0, \lambda \in \Lambda^{(j)}, j \in J\},$$

$$F_I = \left\{s: \prod_{i \in I} \langle \varphi_i, s \rangle \neq 0\right\}.$$

В случае $J = \emptyset$ получаем упомянутый ранее страт $S^\emptyset$. Для другого крайнего случая $J = \{1, \dots, n\}$ страт S^J пустой, поскольку на нем все s_λ равны нулю.

В примере 1, где $\langle \varphi_1, s \rangle = \frac{1}{2}s_1$, $\langle \varphi_2, s \rangle = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)$, имеем

$$S^\emptyset = \{s_1(s_1 + s_2) \neq 0\}, \quad S^{\{1\}} = \{s_1 = s_1 = 0, s_1 + s_2 \neq 0\} = \{s_1 = 0, s_2 \neq 0\},$$

$$S^{\{2\}} = \{s_1 + s_2 = s_2 = 0; s_1 \neq 0\} = \emptyset, \quad S^{\{1,2\}} = \{s_1 + s_2 = s_1 = 0\} = \emptyset.$$

По формуле (24) над $S^\emptyset$ параметризуется неприводимая компонента $\xi_1 = -2$, а точки $(s, \xi) \in Z$, лежащие над $S^{\{1\}}$, проектируются в компоненту $\xi_2 = -2$.

Множество индексов $\lambda \in \Lambda$, нумерующих столбцы матрицы Φ , разбивается на множества $\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)}$, поэтому Φ допускает блочную структуру $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n)$, где Φ^j – это $(n \times (\#\Lambda^{(j)}))$ -матрица из столбцов φ^λ , $\lambda \in \Lambda^{(j)}$.

Исследуем вопрос о приводимости полинома

$$P_\Phi(\xi) := P_\Phi(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}) = P_{\Phi^1 \dots \Phi^n}(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}),$$

эквивалентный вопросу о приводимости его нулевого множества $L = P_\Phi^{-1}(0)$. Эта эквивалентность следует из того, что P_Φ имеет по каждой переменной $\xi_\lambda^{(i)}$ степень не выше первой, и потому P_Φ не может иметь кратных множителей.

Отметим сначала некоторые свойства полинома P_Φ . Для всякой перестановки $\tau = (i_1, \dots, i_n)$ чисел от 1 до n обозначим через $\tau(\Phi)$ матрицу, полученную из Φ одновременной τ -перестановкой ее блочных столбцов $\Phi^{i_1}, \dots, \Phi^{i_n}$ и строк $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}$.

1. *Свойство τ -инвариантности*: для любой перестановки $\tau = (i_1, \dots, i_n)$ справедливо равенство

$$P_{\tau(\Phi)}(\xi^{(i_1)}, \dots, \xi^{(i_n)}) = P_\Phi(\xi).$$

Для доказательства этого равенства обозначим через Φ_j^k j -ю строку блока Φ^k . Поскольку $\tau(j) = \tau(k)$ тогда и только тогда, когда $j = k$, имеем

$$P_{\tau(\Phi)}(\xi^{(i_1)}, \dots, \xi^{(i_n)}) = \det(\delta_j^k + \langle \Phi_{ij}^{i_k}, \xi^{(i_k)} \rangle) = \det(\delta_{ij}^{i_k} + \langle \Phi_{ij}^{i_k}, \xi^{(i_k)} \rangle).$$

Однако последний определитель получен из определителя для $P_\Phi(\xi)$ одновременной τ -перестановкой его строк и столбцов, т. е. он совпадает с $P_\Phi(\xi)$.

2. *Редуционное свойство*: если j -я строка φ_j матрицы Φ нулевая, то

$$P_\Phi(\xi) = P_{\Phi^1 \dots [j] \dots \Phi^n}(\xi^{(1)}, \dots, [j], \dots, \xi^{(n)}).$$

3. *Свойство нетривиальности*: если Φ – ненулевая матрица, то $P_\Phi \neq \text{const}$.

Свойство 2 прямо вытекает из конструкции определителя (23), представляющего P_Φ : если $\varphi_j = 0$, то в нем j -я строка имеет координаты δ_j^k , $k = 1, \dots, n$. Свойство 3 получается из свойства 2 сведением P_Φ к $P_{\tilde{\Phi}}$, где матрица $\tilde{\Phi}$ имеет ненулевые строки. Для этой матрицы страт $S^\emptyset$ непустой, и по лемме 1 нулевое множество полинома $P_{\tilde{\Phi}}$ непустое, поэтому $P_\Phi = P_{\tilde{\Phi}} \neq \text{const}$.

ЛЕММА 3. 1) Сопоставим каждому страту S^J алгебраическую поверхность $L^J \subset L$, равную замыканию $\pi \circ \rho^{-1}(S^J)$. Если $J \neq \emptyset$ и $\dim L^J = n - 1$ (т. е. L^J – неприводимая компонента L), то перестановка τ , ставящая элементы из J на первые $l := \#J$ мест, сводит матрицу Φ к блочно-треугольному виду

$$\tau(\Phi) = \begin{pmatrix} \Phi' & 0 \\ \Psi & \Phi'' \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где Φ' и Φ'' – блочно-квадратные матрицы, для которых $P_{\Phi'}^{-1}(0) \supset L^\emptyset$, $P_{\Phi''}^{-1}(0) \supset L^J$.

2) Полином P_Φ приводим тогда и только тогда, когда существует перестановка $\tau = (i_1, \dots, i_n)$, сводящая Φ к блочно-треугольному виду.

3) Если полином P_Φ неприводимый и все строки φ_i матрицы Φ ненулевые, то его нулевое множество $L = P_\Phi^{-1}(0)$ совпадает с $L^\emptyset$ и параметризуется по формуле (24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $I = \{1, \dots, n\} \setminus J$ – дополнение для J (заметим, что $1 \leq \#J \leq n - 1$). Разобьем матрицу Λ на две подматрицы Λ^J и Λ^I ; соответственно этому будем использовать записи $\xi = (\xi^J, \xi^I)$, $s = (s^J, s^I)$. Имеет место равенство $\pi \circ \rho^{-1}(S^J) = \mathbb{C}^{\Lambda^J} \times L_I$, где

$$L_I = \left\{ \xi^I \in \mathbb{C}^{\Lambda^I}: \xi_\lambda^I = -\frac{s_\lambda^I}{\langle \varphi_i, s \rangle} \Big|_{S^J}, \lambda \in \Lambda^{(i)}, i \in I \right\}, \quad (29)$$

поскольку условие принадлежности $s \in S^J \subset F^J$ обеспечивает выполнение равенств $\langle \varphi_j, s \rangle \xi_\lambda = s_\lambda$ для всех $\xi_\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \Lambda^{(j)}$, $j \in J$, т. е. для всех $\xi^J \in \mathbb{C}^{\Lambda^J}$.

Поверхность $L_I \subset \mathbb{C}^{\Lambda^I}$ является образом части S^J плоскости F^J при отображении

$$s \rightarrow (\xi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda^I} = \left(-\frac{s_\lambda}{\langle \varphi_i, s \rangle} \right)_{\lambda \in \Lambda^I},$$

тем самым, $\dim S^J \geq \dim L_I$.

С другой стороны,

$$\text{codim } S^J \geq \sum_{j \in J} \# \Lambda^{(j)} =: \# \Lambda^J,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\varphi_j(0^J, s^I) \equiv 0$ для всех $j \in J$. В самом деле, среди уравнений для S^J имеется $\# \Lambda^J$ независимых уравнений $s_\lambda = 0$, $\lambda \in \Lambda^{(j)}$, $j \in J$ (систему таких уравнений можно записать в виде $s^J = 0^J$), поэтому последнее неравенство выполняется. Случай равенства соответствует ситуации, когда в задании S^J остальные уравнения $\varphi_j(s) = 0$, $j \in J$, являются следствиями системы $s^J = 0^J$, т. е. когда $\varphi_j(0^J, s^I) \equiv 0$, $j \in J$.

Складывая неравенства для размерности и коразмерности S^J , получим

$$N - 1 \geq \dim L_I + \# \Lambda^J$$

(напомним, что $N = \sum_{k=1}^n \# \Lambda^{(k)} = \# \Lambda^I + \# \Lambda^J$), откуда вытекает следующее ограничение для размерности L_I :

$$\dim L_I \leq \# \Lambda^I - 1.$$

Случай равенства $\dim L_I = \# \Lambda^I - 1$ соответствует тому, что L_I – гиперповерхность в $\mathbb{C}^{\Lambda^I}$. Согласно доказанному выше этот случай реализуется, лишь когда $\varphi_j(0^J, s^I) \equiv 0$, $j \in J$. Последнее означает, что строки φ_j матрицы Φ с номерами $j \in J$ имеют нулевые координаты $\varphi_{j\lambda}$ на местах $\lambda \in \Lambda^{(i)}$, где $i \notin J$, т. е. $i \in I$.

Пусть τ – перестановка, которая J ставит на первые $l = \#J$ мест, а I – на последние $n-l$ мест. С помощью τ -перестановки строк φ_j матрицы Φ мы в первых l строках получим нули на местах $\lambda \in \Lambda^I$. Последующая τ -перестановка блочных столбцов переведет эти нули на места из $\Lambda^{(l+1)}, \dots, \Lambda^{(n)}$. Тем самым, получим блочно-треугольный вид. По свойству τ -инвариантности из (28) получаем факторизацию

$$P_\Phi(\xi) = P_{\Phi'}(\xi^J) P_{\Phi''}(\xi^I) \quad (30)$$

с множителями, зависящими от разных групп переменных. Поскольку $\pi \circ \rho^{-1}(S^J) = \mathbb{C}^{\Lambda^I} \times L_I$, поверхность $L^J = \mathbb{C}^{\Lambda^I} \times \bar{L}_I$ задается лишь условиями для переменных ξ^I . Следовательно, $L^J \subset P_{\Phi''}^{-1}(0)$.

Поскольку $\tau(\Phi)$ имеет блочно-треугольный вид, j -я строка матрицы Φ' является нулевой тогда и только тогда, когда нулевой является j -я строка матрицы Φ . Поэтому если некоторая строка матрицы Φ' нулевая, то множество $S^\emptyset$ пустое и оно очевидным образом включено в $P_{\Phi'}^{-1}(0)$. Если же все строки Φ' ненулевые и $S^\emptyset \neq \emptyset$, то по лемме 1 получаем, что $\pi \circ \rho^{-1}(S^\emptyset)$ параметризуется по формуле (24), из которой следует, что для $\xi = (\xi^J, \xi^I) \in \pi \circ \rho^{-1}(S^\emptyset)$ координаты ξ^J имеют вид

$$\xi_\lambda^j = -\frac{s_\lambda^{(j)}}{\langle \varphi_j, s \rangle} = -\frac{s_\lambda^{(j)}}{\langle \varphi_j^J, s \rangle}, \quad \lambda \in \Lambda^{(j)}, \quad j \in J,$$

где φ_j^J – j -я строка матрицы Φ' . Также по лемме 1, примененной к $P_{\Phi'}$, получаем, что $\xi^J \in P_{\Phi'}^{-1}(0)$. Таким образом, $L^\emptyset = \pi \circ \rho^{-1}(S^\emptyset) \subset P_{\Phi'}^{-1}(0)$.

2) Если полином P_Φ приводим, то существуют K и J такие, что L^K и L^J имеют размерность $n-1$. Хотя бы один из K , J непуст, пусть таковым является J . По свойству 1) матрица Φ приводится к виду (28) с диагональными блоками $\Phi'_{(1)}$, $\Phi''_{(1)}$, причем $L^J \subset P_{\Phi''_{(1)}}^{-1}(0)$. Если $\Phi'_{(1)} = 0$, то по редукционному свойству $P_\Phi = P_{\Phi''_{(1)}}$. Применяя к приводимому полиному $P_{\Phi''_{(1)}}$ аналогичные рассуждения и, при необходимости, итерируя процесс, мы придем к ситуации, когда $P_{\Phi''_{(k)}} = P_\Phi$, а матрица $\Phi''_{(k)}$ приводится к блочно-треугольному виду с ненулевыми блоками $\Phi'_{(k+1)}$ и $\Phi''_{(k+1)}$ на диагонали.

Обратно, если Φ приводится к (28) с ненулевыми Φ' и Φ'' , то имеет место факторизация (30) с непостоянными множителями (по свойству нетривиальности).

3) Пусть полином P_Φ неприводим и все строки матрицы Φ ненулевые. В силу неприводимости гиперповерхность $L = P_\Phi^{-1}(0)$ равна некоторому L^J .

Если бы $J \neq \emptyset$, то по утверждению 1) матрица Φ была бы приводима к блочно-треугольному виду, причем при условии нетривиальности всех строк Φ полином P_Φ также был бы приводимым. Следовательно, $L = L^\emptyset$, и по лемме 1 гиперповерхность L параметризуется по формуле (24).

§ 5. Сингулярные множества решений систем (1) и (5)

Решения систем уравнений (1) и (5) будем обозначать

$$y(a) = (y_1(a), \dots, y_n(a)), \quad y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x)).$$

Рассмотрим их как алгебраические вектор-функции, которые получаются всевозможными продолжениями всех аналитических элементов – ростков голоморфных решений системы. Совокупность таких элементов непустая: например, при $x = 0$ система (5) приобретает вид $y^{\omega i} = 1$, $i = 1, \dots, n$, и имеет в $\mathbb{T}^n$ лишь простые корни в количестве $|\det \omega| \geq 1$, поэтому по теореме о неявных функциях с каждым из указанных корней ассоциируется росток голоморфного решения.

Опишем множества, где аналитичны вектор-функции $y(a)$ и $y(x)$. Напомним, что мы предполагаем выполненным условие 2) предложения 1, согласно которому множества $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ не лежат в параллельных плоскостях и, тем самым, система (1) сводится к приведенной системе (5), где $\det \omega \neq 0$.

Обозначим через $N(a)$ число изолированных корней в $\mathbb{T}^n$ системы (1), посчитанных с учетом кратностей. Пусть $\mu = \sup_a N(a)$. В нашем случае $\mu \geq 1$, поскольку для системы (5) имеем $N(0) = |\det \omega|$. По теореме Д. Бернштейна [14] для всех коэффициентов a , за исключением некоторого собственного алгебраического подмножества $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}^A$, система (1) имеет лишь изолированные корни, причем на $\mathbb{C}^A \setminus \mathcal{P}$ функция $N(a)$ постоянна и принимает максимальное значение μ (равное $n!V$, где V – смешанный объем Минковского выпуклых оболочек множеств $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \subset \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$).

Очевидно, $\mathcal{P} = \{a: N(a) < \mu\}$, и каждая точка a этого множества является полярной для некоторой мономимальной функции $y^\alpha(a) = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, решения $y(a)$: если последовательность $a^{(k)} \in \mathbb{C}^A \setminus \mathcal{P}$ сходится к $a \in \mathcal{P}$, то хотя бы одно из μ решений $y(a^{(k)})$ в $\mathbb{T}^n$ стремится к бесконечности или к точке из набора координатных плоскостей $\{y_1 \cdots y_n = 0\}$.

Напомним, что система (1) также записывается в виде $P = 0$, а ее дискриминантное множество ∇ определяется как замыкание в $\mathbb{C}^A$ множества ∇^0 тех a , для которых система имеет кратные корни $y \in \mathbb{T}^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1) Дискриминантное множество ∇ системы (1) (системы (5)) является собственным алгебраическим подмножеством в $\mathbb{C}^A$ (в $\mathbb{C}^A$).

2) Для всех $a \in \mathbb{C}^A \setminus (\nabla \cup \mathcal{P})$ система (1) имеет μ простых корней $\{y(a)\}$ в $\mathbb{T}^n$, которые образуют алгебраическую вектор-функцию $y(a)$, аналитическую в $\mathbb{C}^A \setminus (\nabla \cup \mathcal{P})$.

3) Точка z принадлежит ∇^0 тогда и только тогда, когда решение $y(a)$ имеет сингулярную в z ветвь с предельным значением $y^0 = y(z) \in \mathbb{T}^n$. Каждая точка $z \in \nabla$ является сингулярной для $y(a)$.

4) Объединение $\mathcal{S} := \nabla \cup \mathcal{P}$ составляет сингулярное множество для семейства функций $y^\alpha(a)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.

Например, для уравнения $xy^2 + y - 1 = 0$ (вида (5) при $n = 1$) сингулярное множество его решения

$$y(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2x}$$

состоит из двух точек: $\mathcal{S} = \{0, -1/4\}$. Здесь $\mathcal{P} = \{0\}$, $\nabla = \{-1/4\}$.

Простейший пример двумерной системы вида (5) доставляет линейная система

$$\begin{aligned} y_1 + x_1 y_2 - 1 &= 0, \\ y_2 + x_2 y_1 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ее решение $y(x)$ имеет координаты

$$y_1 = \frac{1 - x_1}{1 - x_1 x_2}, \quad y_2 = \frac{1 - x_2}{1 - x_1 x_2},$$

поэтому сингулярное множество $\mathcal{S}$ для $y(x)$ есть гипербола $1 - x_1 x_2 = 0$. Здесь $\mathcal{S} = \mathcal{P}$, а ∇ состоит из единственной точки $x = (1, 1)$, принадлежащей также $\mathcal{P}$. При подходе к этой точке извне $\mathcal{S}$ кратное решение появляется в виде недискретного множества $y_1 + y_2 = 1$. Мы еще раз видим, что ∇ может иметь коразмерность больше 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. 1) Рассмотрим в $\mathbb{C}^A \times \mathbb{T}^n$ подмножество

$$\mathcal{A} = \left\{ (a, y) \in \mathbb{C}^A \times \mathbb{T}^n : P(a, y) = 0, \frac{\partial P}{\partial y}(a, y) = 0 \right\},$$

где $\frac{\partial P}{\partial y}$ – якобиан системы P по y . Образ $p(\mathcal{A})$ проекции $p: \mathbb{C}^A \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^A$ есть множество ∇^0 . Очевидно, $\mathcal{A}$ является разностью $T' \setminus T''$ двух алгебраических подмножеств в $\mathbb{C}^A \times \mathbb{C}^n$, где T' задается теми же уравнениями, что и $\mathcal{A}$, но в $\mathbb{C}^A \times \mathbb{C}^n$, а T'' – уравнением $y_1 \cdots y_n = 0$. Поэтому согласно теории исключения [13, предложение 2.31] образ $p(\mathcal{A})$ представляет собой конечное объединение разностей $T'_i \setminus T''_i$ алгебраических множеств в $\mathbb{C}^A$. Тем самым, замыкание ∇ множества ∇^0 совпадает с алгебраическим множеством $\bigcup T'_i$.

Покажем, что ∇^0 не плотно в $\mathbb{C}^A$, и потому ∇ – собственное алгебраическое подмножество. Ввиду алгебраичности $\mathcal{P}$ достаточно установить, что ∇^0 не плотно в $\mathbb{C}^A \setminus \mathcal{P}$. Итак, пусть $z \in \nabla^0 \setminus \mathcal{P}$, т.е. все корни $\{y(z)\} \subset \mathbb{T}^n$ системы (1) изолированные, их число с учетом кратностей равно μ и среди них есть кратные. Возьмем один из таких корней $y^0 \in \mathbb{T}^n$ кратности $\mu^0 > 1$ и покажем, что существует сколь угодно малое шевеление коэффициента z , при котором корень y^0 распадается на μ^0 простых корней (заметим, что для $y^0 \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{T}^n$ это не верно: кратный корень $y = 0$ уравнения $a_2 y^2 + a_3 y^3 = 0$ не распадается на простые при любых шевелениях коэффициентов a_2, a_3). В самом деле, обозначим j -е уравнение в (1) через $P_j(a^{(j)}, y) = 0$. Вектор $a \in \mathbb{C}^A$ записывается

в виде $a = (a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$, где $a^{(j)} \in \mathbb{C}^{A^{(j)}}$. Сузим в пространстве коэффициентов систему (1) на n -мерную плоскость

$$E_q = \{a^{(1)} = z^{(1)} - q^{(1)}t_1, \dots, a^{(n)} = z^{(n)} - q^{(n)}t_n : t \in \mathbb{C}^n\},$$

проходящую через $z = (z^{(1)}, \dots, z^{(n)})$ и зависящую от вектора

$$q = (q^{(1)}, \dots, q^{(n)}) \in (\mathbb{C}^{A^{(1)}} \setminus 0) \times \dots \times (\mathbb{C}^{A^{(n)}} \setminus 0).$$

Поскольку все координаты y^0 отличны от нуля, векторы $q^{(j)}$ можно выбрать так, чтобы $P_j(q^{(j)}, y^0) \neq 0$ для всех j . Тогда в некоторой окрестности $U \subset \mathbb{T}^n$ точки y^0 сужение системы (1) на E_q станет равносильным системе

$$\frac{P_j(z^{(j)}, y)}{P_j(q^{(j)}, y)} = t_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (31)$$

По теореме Сарда для почти всех t из окрестности $t = 0 \in \mathbb{C}^n$ корень $y = y^0$ кратности μ^0 распадается на μ^0 простых корней.

Поскольку $\{y(z)\}$ – конечное множество, а совокупность $a \in \mathbb{C}^A$, для которых все μ корней $\{y(a)\}$ системы (1) простые, является открытым множеством, получаем, что дискриминантное множество системы (1) является собственным алгебраическим подмножеством.

2) Обозначим через $N_d(a)$ число различных изолированных корней системы (1) в $\mathbb{T}^n$. Равенство $N_d(a) = N(a)$ имеет место тогда и только тогда, когда все изолированные корни системы (1) в $\mathbb{T}^n$ простые. Отсюда следует, что

$$\mathbb{C}^A \setminus (\nabla \cup \mathcal{P}) \subset (\mathbb{C}^A \setminus \nabla^0) \cap (\mathbb{C}^A \setminus \mathcal{P}) = \{a : N_d(a) = N(a) = \mu\}.$$

Таким образом, утверждение об аналитичности вектор-функции $y(a)$ в дополнении к $\nabla \cup \mathcal{P}$ следует из теоремы о неявной функции.

3) Докажем сингулярность ∇ для $y(a)$. Ввиду плотности ∇^0 на ∇ достаточно доказать сингулярность $y(a)$ в точках из ∇^0 . Пусть $z \in \nabla^0$ и $y^0 \in \mathbb{T}^n$ – один из кратных корней $\{y(z)\}$, т. е. для которого $\frac{\partial P}{\partial y}(z, y^0) = 0$. Если хотя бы одна ветвь $y(a)$ с предельным значением y^0 при $a \rightarrow z$ была голоморфной в окрестности точки z , то было бы голоморфным в окрестности $t = 0$ сужение ветви $y(a(t))$ на подпространство E_q . Заметим, что сужение $y(a(t))$ имеет статус обратного отображения к отображению (31). Якобиан этого отображения обращается в нуль в точке y^0 тогда и только тогда, когда обращается в нуль якобиан $\frac{\partial P}{\partial y}(z, y^0)$ исходной системы (1). Поскольку якобиан обратимого отображения не может быть равен нулю, получаем противоречие с существованием голоморфной ветви с предельным значением y^0 при $a \rightarrow z$. Таким образом, z – сингулярная точка для $y(a)$.

4) Сингулярность $\mathcal{P}$ для семейства $y^\alpha(a)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, вытекает из свойства полярности, отмеченного перед формулировкой предложения 3. Сингулярность ∇ доказана в 3), поэтому согласно 2) множество $\mathcal{S} = \nabla \cup \mathcal{P}$ составляет всё сингулярное множество для указанного семейства.

§ 6. Доказательство теоремы 1

Проведем доказательство теоремы 1 в несколько шагов.

ШАГ 1. Связь ∇ с множеством критических значений линеаризации (16). Согласно (22) множество критических значений линеаризации (16) в области G есть образ $x(L \cap G)$, где $L = P_\Phi^{-1}(0)$ – гиперповерхность нулей полинома

$$P_\Phi(\xi) = \det \left(\delta_j^k + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(k)}} \varphi_{j\lambda} \xi_\lambda \right)_{j,k=1,\overline{n}}.$$

ЛЕММА 4. Замыкание множества критических значений $x(L \cap G)$ линеаризации $x(\xi)$ совпадает с дискриминантным множеством системы (5):

$$\overline{x(L \cap G)} = \nabla.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z \notin \overline{x(L \cap G)}$, то по теореме о неявных функциях обращение линеаризации $\xi^{-1}(x)$ аналитично в z , а потому аналитично и $y(x) = \tilde{y}(\xi^{-1}(x))$ как композиция аналитических функций. Однако в таком случае имеем $z \notin \nabla$ по утверждению 3) предложения 3. Таким образом, $\nabla \subset \overline{x(L \cap G)}$.

Пусть теперь $z \in x(L \cap G)$ и $\eta \in L \cap G$ – критический прообраз z для линеаризации (16). Обращение $\xi^{-1}(x)$ для (16) имеет сингулярную в точке z ветвь с предельным значением η при $x \rightarrow z$. Если бы решение $y(x)$ системы (5) было аналитическим в точке z , то согласно (17) таковым было бы отображение $(W(\xi^{-1}(x)))^{-\omega^{-1}}$, а значит, и отображение $(W_1(\xi^{-1}(x)), \dots, W_n(\xi^{-1}(x)))$. Однако в таком случае ввиду (16) были бы аналитическими в точке z все отложения

$$\xi_\lambda^{(i)}(x) = \frac{x_\lambda^{(i)}}{\prod_{k=1}^n (W_k(\xi^{-1}(x)))^{\varphi_{k\lambda} - \delta_k^i}}, \quad \lambda \in \Lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е. отображение $\xi^{-1}(x)$, что противоречит выбору точки z . Таким образом, $y(x)$ сингулярно в z и имеет при $x \rightarrow z$ предельное значение $(W(\eta))^{-\omega^{-1}} \in \mathbb{T}^n$. По утверждению 3) предложения 3 имеем $z \in \nabla^0$. Таким образом, $x(L \cap G) \subset \nabla^0$, следовательно, $\overline{x(L \cap G)} \subset \nabla^0 = \nabla$.

Леммы 3, 4 подсказывают нам, что неприводимые компоненты дискриминантного множества ∇ следует искать среди замыканий образов $x(L^J \cap G)$ неприводимых компонент L^J гиперповерхности L . Напомним, что $L^J = \pi \circ \rho^{-1}(S^J)$ (при условии его $(n-1)$ -мерности), где π и ρ – компоненты двойной проекции (26), а S^J – страт, определенный формулой (27).

ШАГ 2. Доказательство утверждения 1). По условию каждая подсистема из $k \leq n-1$ уравнений в (5) зависит от не менее чем $k+1$ переменных. Это означает, что никакой мономиальной заменой $y = t^\theta$, в частности заменой $y = t^{\omega^{-1}}$, систему (5) нельзя привести к виду, при котором какая-то подсистема из $k \leq n-1$ уравнений зависит от не более чем k переменных. Множество показателей системы $P(t^{\omega^{-1}})$ для мономов с переменными коэффициентами $x_\lambda^{(i)}$ состоит из столбцов матрицы $\omega^{-1}\Lambda = \Phi$. Из утверждения 2) леммы 3 следует, что при указанном условии множество L неприводимо. В самом деле, перестановка блочных столбцов Φ^i и Φ^j матрицы Φ соответствует перестановке

уравнений $P_i = 0$ и $P_j = 0$ системы (5), а перестановка строк φ_i и φ_j этой матрицы соответствует перестановке переменных t_i и t_j в системе $\tilde{P}(t) = P(t^{\omega^{-1}})$. Поэтому в случае приводимости L перестановкой уравнений и переменных t_j систему $\tilde{P}(t)$ можно свести к виду, в котором последние $k \leq n - 1$ уравнений зависят лишь от последних k переменных, вопреки предполагаемому условию.

Далее замечаем, что при нашем условии все строки φ_i и $\tilde{\varphi}_i$ матриц Φ и $\tilde{\Phi}$ ненулевые: например, из равенства нулю хотя бы одной из строк $\varphi_1, \tilde{\varphi}_1$ следует, что $\tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_n$ зависят лишь от $t_2, \dots, t_n$. Таким образом, по утверждению 3) леммы 3 гиперповерхность L совпадает с $L^\emptyset$ и параметризуется по формуле (24).

Множество критических значений $x(L \cap G)$ представляет собой образ композиции $x(\xi(s))$ отображений (24) и (16). Эта композиция задается формулами

$$x_\lambda^{(i)} = -\frac{s_\lambda}{\langle \varphi_i, s \rangle} \prod_{k=1}^n \left(1 - \sum_{\tau \in \Lambda^{(k)}} \frac{s_\tau^{(k)}}{\langle \varphi_k, s \rangle} \right)^{\varphi_{k\lambda} - \delta_k^i}, \quad \lambda \in \Lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и легко видеть, что она совпадает с параметризацией (13). Поскольку строки матриц $\Phi, \tilde{\Phi}$ ненулевые, она определена вне набора гиперплоскостей $\langle \varphi_i, s \rangle = 0$, $\langle \tilde{\varphi}_i, s \rangle = 0$ пространства $\mathbb{CP}^{N-1}$. Согласно лемме 4 дискриминантное множество ∇ параметризуется по формуле (13).

ШАГ 3. Доказательство утверждения 2). В лемме 3 было установлено, что неприводимая компонента $L^J \subset L$, соответствующая страту S^J при $J \neq \emptyset$, факторизуется в виде $L^J = \mathbb{C}_{\xi^J}^{\Lambda^J} \times \bar{L}_I$, где $L_I \subset \mathbb{C}_{\xi^I}^{\Lambda^I}$ параметризуется переменными $s \in S^J$ по формуле (29). Покажем, что такая факторизуемость наследуется для $\nabla^J = x(L^J \cap G) \subset \nabla$:

$$\nabla^J = \mathbb{C}_{x^J}^{\Lambda^J} \times \nabla_I, \quad \nabla_I \subset \mathbb{C}_{x^I}^{\Lambda^I}.$$

В самом деле, с учетом факторизации L^J координаты точки $x = (x^J, x^I)$ из образа $x(L^J \cap G)$ следующие: для x^J они выражаются формулами

$$x_\lambda^{(j)} = \xi_\lambda^{(j)} \prod_{k \in J} (W_k(\xi^{(k)}))^{\varphi_{k\lambda} - \delta_k^j} \times \left(\prod_{k \in I} (W_k(\xi^{(k)}))^{\varphi_{k\lambda}} \right) \Big|_{\xi^I \in L_I}, \quad \lambda \in \Lambda^{(j)}, \quad j \in J,$$

а для x^I — формулами

$$x_\lambda^{(i)} = \left(\xi_\lambda^{(i)} \prod_{k \in I} (W_k(\xi^{(k)}))^{\varphi_{k\lambda} - \delta_k^i} \right) \Big|_{\xi^I \in L_I} \times \prod_{k \in J} (W_k(\xi^{(k)}))^{\varphi_{k\lambda}}, \quad \lambda \in \Lambda^{(i)}, \quad i \in I. \quad (32)$$

При условии $J \neq \emptyset$ матрица Φ приводится к блочно-треугольному виду (28), и это означает, что $\varphi_{k\lambda} = 0$ для всех $(k, \lambda) \in J \times \Lambda^I$. Таким образом, координаты x^I не зависят от составляющей ξ^J вектора ξ :

$$x_\lambda^{(i)} = \xi_\lambda^{(i)} \prod_{k \in I} (W_k(\xi^{(k)}))^{\varphi_{k\lambda} - \delta_k^i} \Big|_{\xi^I \in L_I}, \quad \lambda \in \Lambda^{(i)}, \quad i \in I. \quad (33)$$

Тем самым, образ составляющей $x^I(\xi)$ отображения $x(\xi)$ лежит в некоторой алгебраической поверхности $\nabla_I \subset \mathbb{C}^{\Lambda^I}$. В то же время для $\xi \in L^J \cap G$ каждая

из функций $W_k(\xi^{(k)})$ не равна нулю, поэтому в представлении $x_\lambda^{(j)}$ множитель в скобках из (32) (зависящий лишь от ξ^I) отличен от нуля. При этом отображение $\xi^J \rightarrow x^J$, определенное формулами

$$x_\lambda^{(j)} = \xi_\lambda^{(j)} \prod_{k \in J} (W_k(\xi^{(k)}))^{\varphi_{k\lambda} - \delta_k^j}, \quad \lambda \in \Lambda^{(j)}, \quad j \in J,$$

имеет в точке $\xi^J = 0$ ненулевой якобиан, поэтому его образ в $\mathbb{C}^{\Lambda^J}$ всюду плотен. В итоге получаем, что каждый слой $\mathbb{C}_{\xi^J}^{\Lambda^J} \times \{\xi^I\}$ переходит в множество, замыкание которого есть $\overline{\mathbb{C}^{\Lambda^J} \times \{x^I(\xi^J)\}}$, где $x^I(\xi^J) \subset \nabla_I$. Отсюда вытекает факторизуемость $\overline{x(L^J \cap G)} = \nabla^J$.

Из доказанного следует, что нефакторизуемые неприводимые компоненты ∇ (т. е. зависящие от всех групп коэффициентов) входят в образ $x(L^\varnothing \cap G)$. Теорема доказана.

§ 7. Примеры

ПРИМЕР 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} y_1^3 + ay_1y_2 - 1 &= 0, \\ y_2^3 + by_1y_2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Для нее параметризация $\Delta(s)$ дискриминантного множества имеет вид

$$\begin{aligned} a &= -\frac{3}{-2+s} \left(\frac{-2+s}{1+s} \right)^{1/3} \left(\frac{1-2s}{1+s} \right)^{1/3}, \\ b &= -\frac{3s}{1-2s} \left(\frac{-2+s}{1+s} \right)^{1/3} \left(\frac{1-2s}{1+s} \right)^{1/3}. \end{aligned} \tag{34}$$

Приписывая к системе ее якобиан и исключая переменные y_1, y_2 , получим третью степень $D^3(a, b)$ неприводимого полинома

$$D(a, b) = -27 - 4a^3 + 6a^2b + 6ab^2 - 4b^3 + a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4,$$

нулевое множество которого и есть ∇ . Этот же результат мы получим, исключая s в (34). Здесь третья степень возникла в силу того, что метод исключения учитывает кратности. В данном случае кратность 3 совпадает с индексом подрешетки в $\mathbb{Z}^2$, натянутой на вектор-столбцы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

из показателей, участвующих в системе (индекс равен наибольшему общему делителю всех миноров второго порядка приведенной матрицы). Этот факт согласуется с теоремой 3: девятилистное отображение (34) параметризует $\nabla = D^{-1}(0)$ троекратно. Таким же свойством обладают все другие дегомогенизации дискриминанта. Поэтому логарифмическое отображение Гаусса для дискриминанта рассматриваемой системы не бирационально.

Рис. 1. Амеба и ее контур для дискриминантной кривой (34)

Напомним, что *амебой* алгебраической кривой $\nabla = \{D(a, b) = 0\}$ называется ее образ при логарифмическом проектировании $(a, b) \rightarrow (\log |a|, \log |b|)$ (см. [1], [3]). *Контур* амебы определяется как множество критических значений указанного проектирования. В нашем случае контур параметризуется сужением $\text{Log}(\Delta(s))$ на $\mathbb{RP}^1$ (см. [8]).

На рис. 1 изображена амеба дискриминантного множества ∇ , где выделенные линии составляют контур амебы. Из этого рисунка видно, что нормаль к контуру амебы при полном его обходе делает один оборот (т. е. пробегает $\mathbb{RP}^1$), однако $\text{Log}^{-1}(x)$ состоит из трех точек на ∇ , соответствующих разным значениям радикалов.

Рис. 2. Амеба и ее контур для дискриминантной кривой (35)

ПРИМЕР 4. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} y_1^3 + ay_1y_2^3 - 1 &= 0, \\ y_2^3 + by_1^3y_2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Для нее параметризация дискриминантного множества имеет вид

$$\begin{aligned} a &= -\frac{3}{(-2+3s)(3+s)} \left(\frac{-2+3s}{1+3s} \right)^{1/3} (3-2s), \\ b &= -\frac{3s}{(3-2s)(1+3s)} \left(\frac{3-2s}{3+s} \right)^{1/3} (-2+3s). \end{aligned} \quad (35)$$

Исключив параметр s , получим следующий неприводимый полином двух переменных a, b (дискриминант):

$$\begin{aligned} D(a, b) &= 538084012500a^3 - 144397834110000b^3a^3 - 2514840354180b^{15}a^9 \\ &\quad - 286152818688b^{12}a^{15} - 2514840354180b^9a^{15} - 286152818688b^{15}a^{12} \\ &\quad + 169697169169308b^{15}a^6 - 5397324579198736b^9a^9 + 4162327695194184b^6a^9 \\ &\quad + 4162327695194184b^9a^6 + 169697169169308b^6a^{15} - 9691069938750b^3a^9 \\ &\quad - 9691069938750b^9a^3 + 7703415106497b^6a^{18} + 7703415106497a^6b^{18} \\ &\quad - 12230590464a^{15}b^{15} - 480298005000b^{12}a^3 + 1325964214525104b^{12}a^6 \\ &\quad - 59911047139356b^9a^{12} + 1325964214525104b^6a^{12} - 59911047139356b^{12}a^9 \\ &\quad - 480298005000b^3a^{12} - 65024906422500b^3a^6 - 65024906422500b^6a^3 \\ &\quad + 3794714164806300b^6a^6 + 1210689028125 + 3936600000b^9 \\ &\quad - 6736036523130b^{12}a^{12} + 3936600000a^9 + 79716150000b^6 + 79716150000a^6 \\ &\quad + 538084012500b^3. \end{aligned}$$

В отличие от примера 3, здесь индекс подрешетки, натянутой на вектор-столбцы

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

равен 1. Поэтому результат исключения есть неприводимый полином $D(a, b)$ (в первой степени). Амеба дискриминанта $D(a, b)$ и ее контур с тремя каспами изображены на рис. 2.

Список литературы

1. I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Math. Theory Appl., Birkhäuser, Boston, MA, 1994.
2. И. А. Антипова, “Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений”, *Матем. сб.*, **198**:4 (2007), 3–20; англ. пер.: I. A. Antipova, “Inversion of many-dimensional Mellin transforms and solutions of algebraic equations”, *Sb. Math.*, **198**:4 (2007), 447–463.
3. M. Passare, A. Tsikh, “Algebraic equations and hypergeometric series”, *The legacy of Niels Henrik Abel* (Oslo, Norway, 2002), Springer-Verlag, Berlin, 2004, 653–672.
4. M. M. Kapranov, “A characterization of A -discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map”, *Math. Ann.*, **290**:1 (1991), 277–285.
5. M. A. Cueto, A. Dickenstein, “Some results on inhomogeneous discriminants”, *Proceedings of the XVIth Latin American Algebra Colloquium*, Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana, Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 2007, 41–62.

6. И. А. Антипова, “О параметризации дискриминантного множества для общего полиномиального преобразования $\mathbb{C}^n$ ”, *Докл. РАН*, **422**:4 (2008), 439–442; англ. пер.: I. A. Antipova, “Parametrization of the discriminant locus for the general polynomial transform of $\mathbb{C}^n$ ”, *Dokl. Math.*, **78**:2 (2008), 713–716.
7. Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, Наука, М., 1969; пер. с англ.: Ch. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley, New York–London, 1962.
8. M. Passare, A. Tsikh, “Amoebas: their spines and their contours”, *Idempotent mathematics and mathematical physics*, *Contemp. Math.*, **377**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 275–288.
9. Е. М. Чирка, *Комплексные аналитические множества*, Наука, М., 1985; англ. пер.: E. M. Chirka, *Complex analytic sets*, *Math. Appl. (Soviet Ser.)*, **46**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
10. Н. Меллин, “Résolution de l’équation algébrique générale à l’aide de la fonction gamma”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **172** (1921), 658–661.
11. И. А. Антипова, “Выражение суперпозиции общих алгебраических функций через гипергеометрические ряды”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:5 (2003), 972–980; англ. пер.: I. A. Antipova, “An expression for the superposition of general algebraic functions in terms of hypergeometric series”, *Siberian Math. J.*, **44**:5 (2003), 757–764.
12. В. А. Степаненко, “О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций”, *Вестн. Красноярского гос. ун-та. Серия физ.-мат. наук*, 2003, № 1, 35–48.
13. Д. Мамфорд, *Алгебраическая геометрия*, т. I: *Комплексные проективные многообразия*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: D. Mumford, *Algebraic geometry*, v. I: *Complex projective varieties*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
14. Д. Н. Бернштейн, “Число корней системы уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 1–4; англ. пер.: D. N. Bernshtein, “The number of roots of a system of equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:3 (1975), 183–185.

И. А. Антипова (И. А. АНТИПОВА)
 Институт космических и информационных технологий
 Сибирского федерального университета, г. Красноярск
E-mail: antipova@akadem.ru

Поступило в редакцию
 03.02.2011
 21.11.2011

А. К. Цих (А. К. ТСИХ)
 Институт математики
 Сибирского федерального университета, г. Красноярск
E-mail: tsikh@lan.krasu.ru