Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, Уравнения в свертках, содержащие сингулярные вероятностные распределения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 2, 21–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im70>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 03:23:54

УДК 517.9

Н. Б. Енгибарян

Уравнения в свертках, содержащие сингулярные вероятностные распределения

Работа посвящена уравнениям вида

$$\varphi(x) = g(x) - \int_0^\infty \varphi(t) dT(x-t), \quad (*)$$

где T – непрерывная функция ограниченной вариации на $(-\infty; \infty)$, содержащая сингулярную компоненту. Сначала изучаются асимптотические и другие свойства решения формально вольтерровых уравнений $(*)$, соответствующих $T(x) = 0$ при $x \leq 0$. Далее выводятся и изучаются нелинейные уравнения факторизации (НУФ) для $(*)$. Факторизация строится в случае, когда $T(-\infty) = 0$, $T(x) \uparrow$ по x , $T(+\infty) = \mu \leq 1$. С помощью этой факторизации доказываются теоремы существования для однородного ($g = 0$) и неоднородного уравнений в особом случае $\mu = 1$.

Библиография: 14 наименований.

Введение

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = g(x) - \int_0^\infty \varphi(t) dT(x-t), \quad (0.1)$$

где T – заданная функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$:

$$\mu \equiv \bigvee_{-\infty}^{+\infty} T < +\infty. \quad (0.2)$$

Функцию T назовем *предъядром уравнения* (0.1). Интеграл в правой части (0.1) понимается в смысле Римана–Стилтьеса.

Согласно разложению Лебега имеем [1]

$$T = T_A + T_D + T_S. \quad (0.3)$$

T_A – абсолютно непрерывная компонента функции T . Она почти всюду имеет конечную производную $T'(x) = K(x) \in L_1(\mathbb{R})$ и восстанавливается с ее помощью:

$$T(x) = \int_{-\infty}^x K(t) dt + C.$$

Дискретная компонента T_D в (0.3) является функцией скачков с конечной суммой абсолютных величин скачков. Сингулярная компонента T_S является сингулярной

функцией (или нулем), т.е. T_S – непрерывная функция ограниченной вариации, имеющая почти всюду равную нулю производную. Классическим примером сингулярной функции является канторова лестница [1].

В дальнейшем индексами A , D и S будут отмечены соответствующие компоненты данной функции ограниченной (или локально ограниченной) вариации, а индексом C – непрерывная компонента: $T_C = T_A + T_S$. Отметим, что в случае неубывающей функции T ее компоненты T_A , T_D и T_S также неубывающие.

Важным частным случаем уравнения (0.1) является *интегральное уравнение Винера-Хопфа второго рода* (ИУВХ): если $T = T_A$, то

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)\varphi(t) dt. \quad (0.4)$$

Если $T(x) = \text{const}$ при $x \leq 0$, то (0.1) обращается в *уравнение восстановления* (УВ):

$$\varphi(x) = g(x) - \int_0^x \varphi(t) dT(x-t). \quad (0.5)$$

ИУВХ (0.4) и соответствующее УВ имеют широкое применение в теории переноса излучения, в кинетической теории газов, в теории вероятностей и др. Они очень хорошо изучены (см. [2]–[10]). Достаточно изучены их интегрально-разностные аналоги, соответствующие случаю $T = T_A + T_D$ (см. [7], [6], [9], [11]).

Одной из важных задач теории вероятностей является следующая (см. [4]): для заданной случайной величины η найти независимо распределенную случайную величину ζ такую, чтобы имело место соотношение

$$\zeta \sim (\eta + \zeta)_+. \quad (0.6)$$

Эквивалентность двух случайных величин понимается в смысле совпадения их функций распределения. Через η_+ обозначается следующая случайная величина: $\eta_+ = \eta$ при $\eta \geq 0$ и $\eta_+ = 0$ при $\eta < 0$.

Соотношение (0.6) сводится к однородному интегральному уравнению

$$S(x) = - \int_0^\infty S(t) dT(x-t), \quad (0.7)$$

где T – функция распределения η , а S – искомая функция распределения ζ . Как в (0.7), так и в других приложениях уравнения (0.1) по теории вероятностей роль функции T обычно играет функция распределения некоторой случайной величины. Тогда

$$T(-\infty) = 0, \quad T(+\infty) = 1, \quad T(x) \uparrow \text{ по } x. \quad (0.8)$$

В случае наличия сингулярной компоненты функции T уравнение (0.1) почти не изучено. Аналогично обстоит дело с сингулярными распределениями в теории вероятностей. В [12, с. 177] сказано: “Сингулярные распределения не поддаются аналитическому изучению... (они) однако играют важную принципиальную роль, и многие статистические тесты основываются на их существовании”.

Настоящая работа посвящена уравнению (0.1) и его некоторым частным случаям, когда предъядро T непрерывно и обладает сингулярной компонентой: $T =$

$T_C = T_A + T_S$. Основные результаты работы по уравнению (0.1) относятся к случаю, когда $T = \mu T_0$, где $0 < \mu \leq 1$, а T_0 удовлетворяет условиям вида (0.8). Что касается уравнения (0.5), то оно будет изучено при более слабом ограничении на T , а именно $\bigvee_0^r T < +\infty$ при некотором $r \leq +\infty$.

Предлагаемый подход является развитием метода *нелинейных уравнений факторизации* (НУФ) автора (см. [5], [10], [13]). Выводится и изучается НУФ для уравнения (0.1). Это уравнение факторизации одновременно является новой формой НУФ интегральных операторов Винера–Хопфа (см. [7], [10]). Сочетание метода НУФ и других специальных методов позволяет построить достаточно полную теорию однородного и неоднородного уравнений (0.1), (0.8).

§ 1. Вспомогательные предложения

Уравнения (0.1) и (0.5) мы будем рассматривать в специальных классах непрерывных или кусочно непрерывных функций.

1. Функциональные пространства. Введем в рассмотрение следующие функциональные банаховы пространства и классы функций:

а) банахово пространство $C[a; b]$ непрерывных на $[a; b] \subset \mathbb{R}$ функций с равномерной нормой $\|f\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|$; через $\omega(\delta, f)$, как обычно, обозначается модуль непрерывности функции $f \in C[a; b]$:

$$\omega(\delta, f) = \sup_{|x_1 - x_2| < \delta} |f(x_1) - f(x_2)|;$$

б) банахово пространство $C_0[0; \infty) \equiv C[0; \infty]$ непрерывных на $[0; \infty)$ функций, имеющих конечный предел в ∞ , с нормой $\|f\| = \sup |f(x)|$;

в) банахово пространство $V[a; b]$ функций ограниченной вариации на $[a; b] \subset \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\| = |f(a)| + \bigvee_a^b f; \quad (1.1)$$

г) банахово пространство $V_C[a; b] \subset V[a; b]$ непрерывных функций ограниченной вариации на $[a; b]$ с нормой (1.1) (из сходимости по норме (1.1) следует равномерная сходимость);

д) классы $\text{Mon}[a; b]$ и $\text{Mon}^C[a; b]$ неубывающих ограниченных функций (они образуют воспроизводящие конусы в своих пространствах: $V[a; b]$ и $V_C[a; b]$ соответственно);

е) банахово пространство $H_\alpha[a; b] \subset C[a; b]$ функций, удовлетворяющих условию Гёльдера–Липшица с показателем α , $0 < \alpha \leq 1$; норма в нем определяется следующим образом:

$$\|f\| = |f(a)| + \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha};$$

ж) пусть $E[a; r]$, $r \leq +\infty$, — одно из пространств $C[a; r]$, $V_C[a; r]$, $V[a; r]$ и $E^+ = E[0; \infty]$; обозначим через $E^{\text{loc}}[0; \infty)$ топологическое пространство определенных на $[0; \infty)$ функций, принадлежащих $E[0; r] \forall r < +\infty$. Сходимость в E^{loc} определяется как сходимость по $E[0; r] \forall r < +\infty$.

2. Об интеграле Стильеса. Рассмотрим интеграл

$$\alpha = \int_a^b f(x) d\sigma(x), \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty,$$

где $\sigma \in V_C[a; b]$, а $f \in C[a; b]$, причем существуют конечные пределы $f(a+)$ и $f(b-)$. Тогда рассматриваемый интеграл существует как собственный или несобственный интеграл Стильеса [1].

Пусть $h(x) = \bigvee_a^x \sigma$. Из непрерывности σ следует непрерывность h на $[a; b]$. Имеет место неравенство

$$|\alpha| \leq \int_a^b |f(x)| dh(x) \equiv \int_a^b |f(x)| |d\sigma(x)|. \quad (1.2)$$

Мы воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = f(b)\sigma(b) - f(a)\sigma(a) - \int_a^b \sigma(x) df(x).$$

В случае отсутствия дискретной компоненты σ_D у функции σ интеграл Стильеса обладает свойством аддитивности.

Мы воспользуемся также теоремой Фубини о замене порядка интегрирования в кратном интеграле и первой теоремой Хелли о предельном переходе под знаком интеграла Стильеса (см. [1]).

§ 2. Простейшие свойства операторов свертки с непрерывным предъядром

1. Классы операторов. Введем в рассмотрение классы Ω_C , $\Omega_C^\pm \subset \Omega_C$ и $\Omega_{C,r}^+$ операторов типа свертки:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}^+ \in \Omega_{C,r}^+, \quad \text{если} \quad \mathbb{U}^+ \varphi(x) &= - \int_0^x \varphi(t) dU(x-t), \quad U \in V_C[0; r], \\ r &\leq +\infty; \quad \Omega_C^+ \equiv \Omega_{C,\infty}^+; \\ \mathbb{U}^- \in \Omega_C^-, \quad \text{если} \quad \mathbb{U}^- \varphi(x) &= \int_x^\infty \varphi(t) dU(t-x), \quad U \in V_C^+; \\ \mathbb{T} \in \Omega_C, \quad \text{если} \quad \mathbb{T} \varphi(x) &= - \int_0^\infty \varphi(t) dT(x-t), \quad T \in V_C(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Через $\Omega_A^\pm$ и Ω_A обозначаются аналогичные классы операторов, соответствующие абсолютно непрерывным предъядрам. Формально вольтерровы операторы из классов $\Omega_{C,r}^+$ и Ω_C^- назовем соответственно *нижними* и *верхними операторами восстановления*.

Предъядра рассматриваемых операторов $\mathbb{U}^\pm$ и $\mathbb{T}$ определяются с точностью до постоянных слагаемых. T мы будем нормировать согласно условию $T(-\infty) = 0$, а U — одним из следующих двух способов: либо $U(0) = 0$, либо $U(\infty) = 0$.

2. Класс $\Omega_{C,r}^+$. Пусть $\mathbb{U}^+ \in \Omega_{C,r}^+$ и $U(0) = 0$. Обозначим

$$\gamma_r = \bigvee_0^r U < +\infty, \quad \gamma = \gamma_\infty.$$

ЛЕММА 2.1. а) Оператор $\mathbb{U}^+$ действует в пространствах $E[0;r]$, причем во всех этих пространствах

$$\|\mathbb{U}^+\| \leq \gamma_r. \quad (2.1)$$

б) Если $U \in \text{Mon}^C[0;r]$, то $\mathbb{U}^+$ переводит $\text{Mon}[0;r]$ и $\text{Mon}^C[0;r]$ в себя, т.е. является положительным оператором в пространствах $V[0;r]$ и $V_C[0;r]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi = \mathbb{U}^+ \varphi$. Имеем

$$\psi(x) = - \int_0^x \varphi(t) dU(x-t). \quad (2.2)$$

Существование функции ψ при $x \in [0;r]$ следует из общих свойств интеграла Стильтьеса. Путем замены переменной $x-t = y$ получаем

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(x-y) dU(y). \quad (2.3)$$

Из (2.3) непосредственно следует, что если $U \in \text{Mon}^C[0;r]$ и $\varphi \in \text{Mon}[0;r]$ или $\varphi \geq 0$, то и $\psi \in \text{Mon}[0;r]$ или $\psi \geq 0$. Пусть теперь $U \in V_C[0;r]$ и $\varphi \in V[0;r]$. Представив каждую из этих функций в виде разности двух монотонных функций, мы получаем представление ψ в виде комбинации четырех монотонных ограниченных функций, поэтому $\psi \in V[0;r]$; стало быть, $\mathbb{U}$ переводит $V[0;r]$ в себя. Предположим теперь, что $\varphi \in C[0;r]$, $r < +\infty$. Для $\delta > 0$ и $x, x+\delta \in [0;r]$ имеем

$$\psi(x+\delta) - \psi(x) = \int_0^x [\varphi(x+\delta-y) - \varphi(x-y)] dU(y) + \int_x^{x+\delta} \varphi(x+\delta-y) dU(y).$$

Используя оценку (1.2), получаем

$$|\psi(x+\delta) - \psi(x)| \leq \omega(\delta, \varphi) \bigvee_0^x U + \|\varphi\|_{C[0;r]} \int_x^{x+\delta} |dU(y)|,$$

откуда

$$\omega(\delta, \psi) \leq \gamma_r \omega(\delta, \varphi) + \omega(\delta, h) \|\varphi\|_{C[0;r]}, \quad (2.4)$$

где $h(x) = \bigvee_0^x U \in C[0;r]$. Из оценки (2.4) следует $\psi \in C[0;r]$. Оценка (2.1) в случае пространства $C[0;r]$ очевидна.

Пусть теперь $\varphi \in V_C[0;r]$. Согласно вышедоказанному $\psi \in V[0;r]$ и $\psi \in C[0;r]$, поэтому $\psi \in V_C[0;r]$.

Докажем оценку (2.1) в $V[0;r]$ и $V_C[0;r]$, $r < +\infty$. Пусть $\varphi \in V[0;r]$ и Π – некоторое разбиение промежутка $[0;r]$: $\Pi : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = r$, а λ – диаметр этого разбиения.

Обозначим $\psi_k = \psi(x_k)$, $h_k = h(x_k)$, где $h(x) = \bigvee_0^x U$. Полагая в (2.4) $x = x_k$ и $x + \delta = x_{k+1}$ ($k = 0, n-1$), получаем

$$\psi_{k+1} - \psi_k = \int_0^{x_k} [\varphi(x_{k+1} - y) - \varphi(x_k - y)] dU(y) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x_{k+1} - y) dU(y),$$

откуда с учетом неравенства $|\varphi(x_{k+1} - y)| \leq |\varphi(0)| + \omega(\lambda, \varphi)$ при $y \in [x_k; x_{k+1}]$ получаем

$$\begin{aligned} |\psi_{k+1} - \psi_k| &\leq [\omega(\lambda, \varphi) + |\varphi(0)|] (h_{k+1} - h_k) \\ &+ \sum_{m=0}^k \int_{x_m}^{x_{m+1}} |\varphi(x_{k+1} - y) - \varphi(x_k - y)| dh(y). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Суммируя эти неравенства по k от 0 до $n-1$ и меняя порядок суммирования в двойной сумме по k и m , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |\psi_{k+1} - \psi_k| &\leq [|\varphi(0)| + \omega(\lambda, \varphi)] h(r) \\ &+ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=m}^{n-1} |\varphi(x_{k+1} - y) - \varphi(x_k - y)| dh(y) \\ &\leq [|\varphi(0)| + \omega(\lambda, \varphi)] h(r) + \sum_{m=0}^{n-1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\bigvee_0^r \varphi \right) dh(y), \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\psi_{k+1} - \psi_k| \leq [|\varphi(0)| + \omega(\lambda, \varphi)] \bigvee_0^r U + \left(\bigvee_0^r \varphi \right) \left(\bigvee_0^r U \right). \quad (2.6)$$

В силу произвольности разбиения Π (и произвольной малости λ) из (2.6) приходим к неравенству

$$\bigvee_0^r \psi \leq \left(|\varphi(0)| + \bigvee_0^r \varphi \right) \bigvee_0^r U.$$

Это неравенство с учетом $\psi(0) = 0$ представляет собой оценку (2.1) в случае пространств $V[0; r]$ и $V_C[0; r]$.

Итак, все утверждения леммы при $r < +\infty$ доказаны. Рассмотрим теперь случай $r = +\infty$. Покажем сначала, что при $U \in V_C^+$ оператор $\mathbb{U}^+$ переводит $C[0; \infty]$ в себя. Пусть $\varphi \in C[0; \infty]$ и $\varphi(\infty) = \alpha$. Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \beta \equiv \alpha \int_0^\infty dU(x) = \alpha U(+\infty), \quad (2.7)$$

т.е. в (2.3) можно совершить формальный предельный переход при $x \rightarrow +\infty$. Пусть $M = \sup |\varphi(x)|$ и $\varepsilon > 0$. Выберем число $r > 0$ такое, чтобы выполнялись неравенства

$$|\varphi(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2\gamma_+}, \quad x > r, \quad \text{и} \quad (\alpha + M) \int_r^\infty |dU(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \beta| &= \left| \int_0^r [\varphi(x-t) - \alpha] dU(t) \right. \\ &\quad \left. + \int_r^x \varphi(x-t) dU(t) - \int_r^\infty \alpha dU(t) \right| < \varepsilon, \quad x > 2r. \end{aligned}$$

Оценка (2.1) при $r = +\infty$ непосредственно следует из справедливости этой оценки $\forall r < +\infty$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор $\mathbb{U}^+ \in \Omega_{C,r}^+$ отображает пространства $E[0; r]$ в свои подпространства, состоящие из функций, для которых $\psi(0) = 0$. Поэтому $\mathbb{U}^+$ действует в этих подпространствах $E_0[0; r]$.

При $\varphi(x) \equiv 1$ из (2.3) имеем $\psi(x) = U(x)$. Этот пример показывает, что гладкость функции ψ может быть не выше гладкости U , сколь гладкой бы ни была функция φ . Если же оператор $\mathbb{U}^+$ рассмотреть в подпространствах $E_0[0; r]$, то свойства гладкости φ переходят к ψ .

ЛЕММА 2.2. Если $\mathbb{U}^+ \in \Omega_{C,r}^+$, а функция φ непрерывно дифференцируема или принадлежит $H_\alpha[0; r]$, причем $\varphi(0) = 0$, то таковой является функция $\psi = \mathbb{U}^+ \varphi$, определенная согласно (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in C_1[0; r]$. Из (2.3) с учетом $\varphi(0) = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \psi(x + \Delta x) - \psi(x) &= \int_0^x [\varphi(x + \Delta x - t) - \varphi(x - t)] dU(t) \\ &\quad + \int_x^{x+\Delta x} [\varphi(x + \Delta x - t) - \varphi(0)] dU(t). \end{aligned}$$

Во втором интеграле аргумент $x + \Delta x - t$ изменяется в пределах от 0 до Δx . Поэтому

$$\varphi(x + \Delta x - y) - \varphi(0) = \Delta x \cdot \varphi'(\theta_1 \Delta x) \theta_2, \quad 0 \leq \theta_{1,2} \leq 1.$$

Из полученных выше соотношений легко следует, что

$$\psi'(x) = \int_0^x \varphi'(x - y) dU(y) \in C[0; r],$$

поэтому $\psi \in C_1[0; r]$. Аналогично доказывается, что $\psi \in H_\alpha[0; r]$ при $\varphi \in H_\alpha[0; r]$ и $\varphi(0) = 0$.

3. Единственность предъядра. Покажем, что операторы $\mathbb{U}_1^+$ и $\mathbb{U}_2^+$ из $\Omega_{C,r}^+$ совпадают в рассматриваемых пространствах тогда и только тогда, когда их предъядра отличаются на постоянное слагаемое.

Пусть $\mathbb{U}^+ = \mathbb{U}_1^+ - \mathbb{U}_2^+$. Его предъядром служит функция $U = U_1 - U_2$. Пусть $\int_0^x \varphi(t) dU(x - t) = 0 \quad \forall \varphi \in V_C[0; r]$. При $\varphi(x) \equiv 1$ имеем $\int_0^x dU(x) = 0$, т.е. $U(x) = \text{const}$.

4. Свертка в $V_C[0; r]$. С помощью интеграла (2.3) определяется операция свертки в пространстве $V_C[0; r]$, $r \leq +\infty$, и в пространстве $V_C^0[0; r]$, состоящем из функций, удовлетворяющих условию $\varphi(0) = 0$.

Пусть $f, \varphi \in V_C^0[0; r]$. Их *сверткой* назовем функцию

$$(f * \varphi)(x) = \int_0^x f(x-t) d\varphi(t). \quad (2.8)$$

В $V_C[0; r]$ свертка определяется следующим образом:

$$(f * \varphi)(x) = \int_0^x [f(x-t) - f(0)] d\varphi(t). \quad (2.9)$$

Пространства $V_C[0; r]$ и $V_C^0[0; r]$, снабженные операцией умножения $*$, являются коммутативными сверточными алгебрами без единицы. Из (2.6) следует, что

$$\|f * \varphi\|_{V_C} \leq \|f\|_{V_C} \cdot \|\varphi\|_{V_C}, \quad (2.10)$$

т.е. $V_C[0; r]$ является банаховой алгеброй. Заметим, что при $f, \varphi \in \text{Mon}^C[0; \infty)$ неравенство (2.10) обращается в равенство.

Отмеченные выше свойства свертки в пространстве V_C аналогичны свойствам свертки $\int_0^x f(x-t)\varphi(t) dt$ в пространстве L_1^+ и широко применяются в теории вероятностей.

5. Класс Ω_C^- . Рассмотрим оператор $\mathbb{U}^- \in \Omega_C^-$, определенный в п. 1 настоящего параграфа. Пусть $\psi = \mathbb{U}^- \varphi$. Имеем

$$\psi(x) = \int_0^\infty \varphi(x+t) dU(t), \quad U \in V_C^+. \quad (2.11)$$

Нетрудно проверить справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 2.3. *Оператор $\mathbb{U}^-$ действует в каждом из банаховых пространств $C[r; \infty]$, $V[r; \infty]$, $V_C[r; \infty]$, $H_\alpha[r; \infty]$, $r \in \mathbb{R}$, причем в любом из указанных пространств*

$$\|\mathbb{U}^-\| \leq \gamma \equiv \bigvee_0^\infty U. \quad (2.12)$$

Если $U \in \text{Mon}^C$ и $\varphi \in \text{Mon}^C$, то $\psi \in \text{Mon}^C$. Если $\varphi(\infty) = 0$, то $\psi(\infty) = 0$.

Операторы из Ω_C^- мы будем в основном рассматривать в пространствах функций, определенных на $[0; \infty)$.

ЛЕММА 2.4. а) Пусть в (2.11) $\varphi \in V_C^+$ и $h \in C[0; r]$. Тогда имеет место формула (при $r < +\infty$)

$$\int_0^r h(x) d\psi(x) = \int_0^\infty \left[\int_0^r h(x) d\varphi(x+t) \right] dU(t). \quad (2.13)$$

б) Если $h \in \text{Mon}[0; \infty)$ и сходится интеграл $\int_0^\infty h(x) |d\varphi(x)|$, то формула (2.13) справедлива также при $r = +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in C[0; r]$. Интегрируя обе части равенства (2.11) по заряду dh от 0 до $r < +\infty$ и используя теорему Фубини [1], получаем

$$\int_0^r \psi(x) dh(x) = \int_0^\infty \left[\int_0^r \varphi(x+t) dh(x) \right] dU(t).$$

Применяя интегрирование по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} \psi(r)h(r) - \psi(0)h(0) - \int_0^r h(x) d\psi(x) \\ = \int_0^\infty \left[\varphi(r+t)h(r) - \varphi(t)h(0) - \int_0^r h(x) d\varphi(x+t) \right] dU(t). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом равенств $\psi(0) = \int_0^\infty \varphi(t) dU(t)$ и $\psi(r) = \int_0^\infty \varphi(r+t) dU(t)$ приходим к формуле (2.13) при $r < +\infty$.

Утверждение б) леммы достаточно доказать для случая, когда $\varphi(t) \downarrow$ на $[0; \infty)$. Обозначим

$$g_r(t) = \int_0^r h(x) d\varphi(x+t), \quad g(t) = g_\infty(t).$$

Имеем $g(t) = \int_t^\infty h(x-t) d\varphi(x)$. Из условий леммы следует, что функция $g(t) \downarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Имеем также $\lim_{r \rightarrow +\infty} g_r(t) = g(t)$ поточечно. Совершая в (2.13) предельный переход при $r \rightarrow +\infty$, с учетом первой теоремы Хелли [1] приходим к утверждению б) леммы. Лемма доказана.

В конце пункта покажем, что операторы из Ω_C^- совпадают тогда и только тогда, когда их предъядра отличаются на постоянное слагаемое. Действительно, пусть $\mathbb{U}_1^-, \mathbb{U}_2^- \in \Omega_C^-$ и $\mathbb{U}^- = \mathbb{U}_1^- - \mathbb{U}_2^-$. Имеем

$$\int_0^\infty \varphi(x+t) dU(t) = 0.$$

Полагая $\varphi(x) = \varphi_0(x) \equiv \theta(y-x)$, где θ — функция Хевисайда, получим $U(y-x) = U(\infty)$, $x < y$, т.е. $\mathbb{U}^- = 0$.

Наше утверждение доказано в пространстве V^+ . Аппроксимируя по норме пространства V^+ функцию φ_0 функциями φ_n из V_C^+ и заменяя φ на φ_n , легко можно установить справедливость нашего утверждения в случае пространств V_C^+ и $C[0; \infty]$.

6. Класс Ω_C . Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{T} \in \Omega_C$, определенный в п. 1. Пусть $\psi = \mathbb{T}\varphi$. Имеем

$$\psi(x) = - \int_0^\infty \varphi(t) dT(x-t). \quad (2.14)$$

Используя аддитивность интеграла Стильеса при непрерывном T , из (2.14) будем иметь

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_+ + \mathbb{T}_-, \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_+\varphi)(x) &= - \int_0^x \varphi(t) dT_+(x-t), \\ (\mathbb{T}_-\varphi)(x) &= \int_x^\infty \varphi(t) dT_-(t-x), \\ T_\pm(x) &= \pm [T(\pm x) - T(0)], \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Покажем единственность представления (2.15). Достаточно показать, что пересечение подпространств $\Omega_C^+ \cap \Omega_C^-$ состоит только из нулевого оператора 0. Пусть $\mathbb{U}^\pm \in \Omega_C^\pm$ и $\mathbb{U}^+ = \mathbb{U}^-$. Имеем

$$\int_0^\infty \varphi(x+t) dU_-(t) = - \int_0^x \varphi(x-t) dU_+(t).$$

При $\varphi(x) \equiv 1$ получаем $U_+(x) - U_+(0) = U_-(0) - U_-(\infty)$, т.е. $U_+(x) = \text{const}$. Поэтому $\mathbb{U}^+ = \mathbb{U}^- = 0$.

Нами показано, что Ω_C является прямой суммой своих подпространств $\Omega_C^\pm$:

$$\Omega_C = \Omega_C^+ \oplus \Omega_C^-. \quad (2.17)$$

Заметим, что при составлении суммы $\mathbb{U} = \mathbb{U}^+ + \mathbb{U}^-$, где $\mathbb{U}^\pm \in \Omega_C^\pm$, мы должны позаботиться о непрерывности предъядра U в точке стыка 0 и о выполнении условия $U(-\infty) = 0$. С учетом этих требований функция U определяется следующим образом (при $U_\pm(0) = 0$):

$$U(x) = U_-(\infty) - U_-(-x), \quad x \leq 0, \quad U(x) = U_+(x) + U_-(\infty), \quad x > 0. \quad (2.18)$$

Из представления (2.15) и лемм 2.1, 2.3 следует

ЛЕММА 2.5. *Оператор $\mathbb{T} \in \Omega_C$ действует в банаховых пространствах E^+ (т.е. $C[0; \infty]$, V_C^+ , V^+), причем в любом из этих пространств*

$$\|\mathbb{T}\| \leq \mu \equiv \bigvee_{-\infty}^{\infty} T. \quad (2.19)$$

Если $T \in \text{Mon}^C(\mathbb{R})$, то $\mathbb{T}$ отображает конус неотрицательных функций в себя.

Операторы из Ω_C мы будем рассматривать также в специальных классах функций из $C[0; \infty)$ и $V^{\text{loc}}[0; \infty)$, неограниченно растущих в ∞ .

§3. Уравнения восстановления

1. Алгебры $\Omega_C^\pm$. Хорошо известно, что класс интегральных операторов Винера–Хопфа Ω_A не замкнут относительно операторного умножения: ядро произведения двух интегральных операторов Винера–Хопфа может не быть зависящим только от разности аргументов. Классы же $\Omega_A^\pm$ образуют коммутативные алгебры. Аналогичная ситуация имеет место в случае классов Ω_C и $\Omega_C^\pm$.

Ниже мы выведем правило композиции предъядер при умножении операторов из Ω_C^+ . Пусть $r \leq +\infty$, $\mathbb{U}_k^+ \in \Omega_{C,r}^+$ ($k = 1, 2$),

$$\mathbb{U}_k^+ f(x) = - \int_0^x f(t) dU_k(x-t),$$

$U_k \in V_C[0; r]$, а $f \in V_C[0; r]$. Представим f в виде $f_0 + f_1$, где $f_0(x) \equiv f(0)$, а $f_1(0) = 0$. Обозначим $\varphi = \mathbb{U}_1^+ f_1$ и $\psi = \mathbb{U}_2^+ \varphi$. Имеем

$$\varphi = U_1 * f_1, \quad \psi = U_2 * \varphi = U * f_1 = \mathbb{U}^+ f_1,$$

где $U = U_2 * U_1$, а $\mathbb{U}^+ \in \Omega_{C,r}^+$ – оператор с предъядром U . Проверка того, что $(\mathbb{U}_2^+ \mathbb{U}_1^+) f_0 = \mathbb{U}^+ f_0$, не представляет труда. Справедлива

ЛЕММА 3.1. Класс $\Omega_{C,r}^+$ образует коммутативную алгебру. Предъядром произведения $\mathbb{U}_1^+ \mathbb{U}_2^+$ служит свертка $U_1 * U_2$ предъядер сомножителей:

$$U(x) = \int_0^x U_1(x-t) dU_2(t) \quad \text{при} \quad U_k(0) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (3.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если отказаться от требования $U(0) = 0$, накладываемого на предъядра операторов из $\Omega_{C,r}^+$, то предъядром произведения операторов будет служить свертка, определяемая согласно правилу (2.9).

Рассмотрим теперь класс Ω_C^- . При умножении операторов из этого класса удобно, как и в случае Ω_C^- , нормировать предъядра согласно условию $U(0) = 0$.

ЛЕММА 3.2. Класс операторов Ω_C^- образует коммутативную алгебру. Предъядром U произведения $\mathbb{U}^- = \mathbb{U}_2^- \mathbb{U}_1^-$, где $\mathbb{U}_{1,2}^- \in \Omega_C^-$, служит свертка (3.1) предъядер сомножителей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in E^+$, $f = f_0 + f_1$, где $f_0(x) \equiv f(\infty)$, $f_1(\infty) = 0$. Обозначим $\varphi = \mathbb{U}_1^- f_1$ и $\psi = \mathbb{U}_2^- \varphi$. Имеем

$$\varphi(y) = \int_y^\infty f_1(t) dU_1(t-y), \quad \psi(x) = \int_x^\infty \varphi(y) dU_2(y-x).$$

Применяя в выражении φ интегрирование по частям, с учетом $U_1(0) = f_1(\infty) = 0$ получаем

$$\varphi(y) = - \int_y^\infty U_1(t-y) df_1(y).$$

Поэтому

$$\psi(x) = - \int_x^\infty \left[\int_y^\infty U_1(t-y) df_1(t) \right] dy U_2(y-x).$$

Поменяв порядок интегрирования, получаем

$$\psi(x) = - \int_x^\infty U(t-x) df_1(t) = \int_x^\infty f_1(t) dU(t-x),$$

где U определяется согласно (3.1). Легко проверить, что $(\mathbb{U}_2^- \mathbb{U}_1^-)f_0 = \mathbb{U}^- f_0$. Лемма доказана.

Примечательно, что правило композиции предъядер в Ω_C^+ и Ω_C^- одинаково.

2. Нижнее уравнение восстановления. Рассмотрим уравнение вида (0.5) на произвольном промежутке $[0; r)$, $r \leq +\infty$: $\varphi = g + \mathbb{U}^+ \varphi$,

$$\varphi(x) = g(x) - \int_0^x \varphi(t) dU(x-t), \quad U \in V_C[0; r]. \quad (3.2)$$

Это уравнение назовем *нижним уравнением восстановления* (УВ). Пусть $\gamma_r \equiv V_0^r U$ ($< +\infty$). Согласно (2.1) имеем $\|\mathbb{U}^+\| \leq \gamma_r$. Если $\gamma_r < 1$, то оператор $\mathbb{U}^+$ сжимающий в $E[0; r]$ и (3.2) обладает единственным решением в $E[0; r]$ при

$g \in E[0; r]$. Пусть теперь $r < +\infty$ и $\gamma_r \geq 1$. Путем одного элементарного преобразования этот случай можно свести к случаю сжимающего оператора. Для этого умножим обе части (3.2) на e^{-px} , $p > 0$; получаем

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{g}(x) - \int_0^x \tilde{\varphi}(t) e^{-p(x-t)} dU(x-t), \quad (3.3)$$

где $\tilde{\varphi}(x) = e^{-px}\varphi(x)$, $\tilde{g}(x) = e^{-px}g(x)$.

Пусть $\mathbb{U}_p$ – оператор вида

$$\psi(x) \equiv (\mathbb{U}_p \varphi)(x) = - \int_0^x \varphi(t) e^{-p(x-t)} dU(x-t). \quad (3.4)$$

Очевидно, что $\mathbb{U}_p$ ограничен в $E[0; r]$. Покажем, что $\|\mathbb{U}_p\|_{E[0; r]} < 1$ при достаточно большом p . Обозначим

$$\rho(x) = \bigvee_0^x U, \quad \rho \in \text{Mon}^C[0; r].$$

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы $\rho(\delta) \leq 1/4$. Далее выберем число $p > 0$ так, чтобы $e^{-p\delta} < 1/(4\gamma_r)$. Покажем, что тогда $\|\mathbb{U}_p\| \leq 1/2$. Мы ограничимся доказательством этой оценки в $C[0; r]$. Пусть $\varphi \in C[0; r]$, $\|\varphi\| = M$, а $\psi = \mathbb{U}_p \varphi$ определяется согласно (3.4). Из (3.4) имеем следующее: если $x \leq \delta$, то

$$|\psi(x)| \leq \int_0^x M d\rho(x-t) \leq M\rho(\delta) \leq \frac{1}{4}M.$$

Пусть теперь $x > \delta$. Тогда

$$|\psi(x)| \leq M \int_0^\delta d\rho(t) + M \int_\delta^x e^{-p\delta} d\rho(t) \leq \frac{1}{2}M.$$

Из полученных неравенств следует $\|\mathbb{U}_p \varphi\| \leq \frac{1}{2}\|\varphi\|$, поэтому $\|\mathbb{U}_p\|_{C[0; r]} \leq \frac{1}{2}$.

Уравнение (3.2) нами заменено уравнением (3.3) со сжимающим оператором $\mathbb{U}_p$; (3.3) обладает единственным решением $\tilde{\varphi} \in E[0; r]$, поэтому (3.2) имеет единственное решение $\varphi(x) = e^{px}\tilde{\varphi}(x) \in E[0; r]$.

В силу $\|\mathbb{U}_p\| < 1$ последовательные приближения для (3.3) сходятся. Определим итерации для (3.3) согласно соотношениям

$$\tilde{\varphi}_{n+1} = \tilde{g} + \mathbb{U}_p \tilde{\varphi}_n, \quad \tilde{\varphi}_0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

Рассмотрим также итерации для (3.2)

$$\varphi_{n+1} = g + \mathbb{U}^+ \varphi_n, \quad \varphi_0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

Итерации φ_n и $\tilde{\varphi}_n$ связаны простым соотношением $\varphi_n(x) = e^{px}\tilde{\varphi}_n(x)$. Поэтому из сходимости (φ_n) в $E[0; r]$, $r < \infty$, следует сходимость (φ_n) в этих пространствах.

Пусть теперь $U \in V_C^{\text{loc}}[0; \infty)$ и $g \in E^{\text{loc}}[0; \infty)$. Тогда согласно доказанному выше (3.2) обладает единственным решением $\varphi \in E[0; r]$ на произвольном конечном промежутке $[0; r]$. Очевидно, что при $r' > r$ решение, построенное на $[0; r]$, является продолжением решения на $[0; r]$. Поэтому (3.2) обладает единственным решением в $E^{\text{loc}}[0; \infty)$, причем итерации (3.6) сходятся к этому решению по топологии $E^{\text{loc}}[0; \infty)$. Нами доказана

ЛЕММА 3.3. а) При $U \in V_C[0; r]$ и $g \in E[0; r]$, $r < +\infty$, УВ (3.2) обладает единственным решением $\varphi \in E[0; r]$, причем φ является пределом в $E[0; r]$ итераций (3.6).

б) При $\gamma = \bigvee_0^\infty U < 1$ и $g \in E^+$ УВ (3.2) обладает единственным решением $\varphi \in E^+$, являющимся пределом итераций (3.6) в E^+ .

в) При $U \in V_C^{\text{loc}}[0; \infty)$ и $g \in E^{\text{loc}}[0; \infty)$ УВ (3.2) обладает единственным решением в $E^{\text{loc}}[0; \infty]$, причем итерации (3.6) сходятся к этому решению по топологии пространства $E^{\text{loc}}[0; \infty)$.

г) Если $U \in \text{Mon}^C[0; r]$ и $g \geq 0$ или $g \in \text{Mon}^C[0; r]$, то $\varphi \geq 0$ или $\varphi \in \text{Mon}[0; r]$, $r \leq +\infty$.

Утверждения леммы 3.3 нетрудно перефразировать в терминах обратимости оператора $I - \mathbb{U}^+$, где I – единичный оператор, и положительности обратного оператора $(I - \mathbb{U}^+)^{-1}$ по конусу неотрицательных или монотонных функций.

Рассмотрим вопрос о построении оператора $(I - \mathbb{U}^+)^{-1}$ в виде $I + \Gamma_+$, где $\Gamma_+ \in \Omega_{C,r}^+$. Предъядро Γ искомого оператора Γ_+ назовем *резольвентным предъядром*. Из равенства

$$(I - \mathbb{U}^+)^{-1} = I + \Gamma_+ \quad (3.7)$$

следует, что Γ определяется из УВ

$$\Gamma(x) = U(x) - \int_0^x \Gamma(t) dU(x-t). \quad (3.8)$$

Легко убедиться, что разрешимость (3.8) в V_C^+ является необходимым и достаточным условием обратимости оператора $I - \mathbb{U}^+$ в пространстве E^+ . Что касается пространства $V_C^{\text{loc}}[0; \infty)$, то согласно лемме 3.3 уравнение (3.8) всегда обладает решением в данном пространстве при $U \in V_C^{\text{loc}}$.

Во всех случаях, предусмотренных леммой 3.3, решение уравнения (3.2) задается формулой

$$\varphi(x) = g(x) - \int_0^x g(t) d\Gamma(x-t). \quad (3.9)$$

3. УВ в консервативном случае. Под *консервативным случаем* (КС) уравнения (3.2) мы будем подразумевать выполнение условий

$$U(0) = 0, \quad U(+\infty) = 1, \quad U(x) \uparrow \quad \text{по } x. \quad (3.10)$$

Эти условия согласованы с условием (0.8) и относятся к тому частному случаю, когда распределение случайной величины сосредоточено на положительной полуоси. Изучение УВ в консервативном случае представляет не только самостоятельный интерес, но и важно с точки зрения изучения однородного уравнения (0.7) в консервативном случае (0.8).

Для нас специальный интерес представляет изучение асимптотических и других свойств следующего уравнения в КС:

$$S(x) = 1 - \int_0^x S(t) dU(x-t). \quad (3.11)$$

В случае абсолютно непрерывной функции U : $U'(x) = W(x) \in L_1^+$, уравнение (3.11) обращается в следующее уравнение, которое весьма хорошо изучено в связи с приложениями в теории вероятностей (теория восстановления), теории переноса излучения и др.:

$$S(x) = 1 + \int_0^x W(x-t)S(t) dt. \quad (3.12)$$

Классические методы изучения УВ (3.12) основаны на применении преобразования Лапласа и соответствующих тауберовых теорем (см. [5]). В [10] использованы прямые методы изучения (3.12), допускающие применение к уравнению (3.11). Ниже мы исследуем уравнение (3.12), применяя при этом соответствующие модификации результатов и методов работы [10].

Используя формулу (3.9), получаем

$$S(x) = 1 + \Gamma(x), \quad \gamma \leq 1, \quad (3.13)$$

т.е. мы фактически занимаемся изучением свойств резольвентного предъядра уравнения (3.2).

Покажем, что функция $S(x) \uparrow$ в КС не ограничена. Доказательство ведется от противного. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = M < +\infty$, $\delta > 0$ и числа $r_1, r_2 > 0$ удовлетворяют условиям

$$U(x) > 1 - \delta \quad \text{при} \quad x > r_1, \quad S(x) > M - \delta \quad \text{при} \quad x > r_2.$$

Из (3.11) при $x > r_1 + r_2$ имеем

$$S(x) \geq 1 + \int_0^{r_1} S(x-t) dU(t) \geq 1 + (M - \delta)(1 - \delta),$$

откуда $M \geq 1 + (M - \delta)(1 - \delta)$. В силу произвольности δ приходим к противоречию. Из неограниченности функции S следует, что в КС оператор $I - \mathbb{U}^+$ не обратим ни в одном из пространств E^+ .

Одним из замечательных свойств решения S уравнения (3.12) является следующее свойство полуаддитивности (см. [12], [10]):

$$S(x+y) \leq S(x) + S(y), \quad x, y \geq 0. \quad (3.14)$$

Ниже нами будет показано, что аналогичным свойством обладает решение (3.11) в КС. Заменим в (3.11) x на $x+y$, где y – фиксированное число:

$$S(x+y) = 1 + \int_0^x S(x+y-t) dU(t) + \int_x^{x+y} S(x+y-t) dU(t),$$

откуда имеем

$$\tilde{S}(x) \leq 1 + S(y) \int_x^{x+y} dU(t) + \int_0^x \tilde{S}(x-t) dU(t), \quad (3.15)$$

где $\tilde{S}(x) = S(x+y)$. Нами использован тот факт, что если $t \in [x; x+y]$, то $S(x+y-t) \leq S(y)$. Пусть функция φ удовлетворяет УВ

$$\varphi(x) = S(y) \int_x^{x+y} dU(t) - \int_0^x \varphi(t) dU(x-t). \quad (3.16)$$

Используя итерации вида (3.6) для (3.16) с учетом $\gamma = 1$, легко убедиться, что $\varphi(x) \leq S(y)$. Учитывая положительность оператора $(I - \mathbb{U}^+)^{-1}$, от интегрального неравенства (3.15) приходим к неравенству (3.14).

4. Асимптотические свойства решения уравнения (3.11) в диссипативном и консервативном случаях. Ниже мы будем заниматься изучением асимптотики при $x \rightarrow +\infty$ решения S УВ (3.11) как в КС (3.10), так и в диссипативном случае (ДС), когда

$$U(0) = 0, \quad U(+\infty) = \gamma < 1, \quad U(x) \uparrow \quad \text{по} \quad x. \quad (3.17)$$

Начнем с рассмотрения ДС. Тогда в силу $\gamma < 1$ оператор $I - \mathbb{U}^+$ обладает положительным обратным в $C[0; \infty]$, причем S – неотрицательная, непрерывная, неубывающая, ограниченная функция на $[0; \infty)$, $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = M$. Вычислим этот предел. Используя равенство (2.7), можно совершить предельный переход в (3.11) при $x \rightarrow +\infty$: $M = 1 + \gamma M$, откуда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = (1 - \gamma)^{-1}, \quad \gamma < 1. \quad (3.18)$$

Перейдем к рассмотрению УВ (3.11) в КС. Покажем, что $\exists$ числа $a, b > 0$ такие, что

$$S(x) \leq ax + b. \quad (3.19)$$

Так как S является пределом итераций типа (3.6) для (3.11), то для получения оценки (3.19) достаточно подобрать числа a и b так, чтобы выполнялось неравенство

$$1 + \int_0^x (at + b) dU(x - t) \leq ax + b. \quad (3.20)$$

С учетом $\gamma = 1$ неравенство (3.20) сводится к неравенству

$$(ax + b) \int_x^\infty dU(t) + a \int_0^x t dU(t) \geq 1. \quad (3.21)$$

Пусть число $r > 0$ удовлетворяет условиям

$$\alpha \equiv \int_0^r t dU(t) > 0, \quad \beta \equiv \int_r^\infty dU(t) > 0.$$

Пусть $a = \alpha^{-1}$ и $b = \beta^{-1}$. Тогда левая часть (3.21) будет ≥ 1 : при $x \leq r$ за счет первого слагаемого, а при $x > r$ за счет второго слагаемого.

Как и в случае уравнений (3.12), для (3.11) можно получить более точную асимптотику функции S , используя первый момент m_1 меры dU . Обозначим

$$m_1 = \int_0^\infty t dU(t) \leq +\infty.$$

Рассмотрим сначала случай $m_1 = +\infty$. Ясно, что тогда $\forall \varepsilon > 0$ можно взять число r настолько большим, чтобы $\alpha > \varepsilon^{-1}$. Поэтому в оценке (3.19) число $a = \alpha^{-1}$ может быть сколь угодно малым. Поэтому при $m_1 = +\infty$ имеем

$$S(x) = o(x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.22)$$

Пусть теперь $m_1 < +\infty$. Обозначим $q(x) = S(x) - x/m_1$. Функция q удовлетворяет УВ

$$q(x) = q_0(x) - \int_0^x q(t) dU(x-t),$$

где $q_0(x) = \frac{1}{m_1} \int_x^\infty (t-x) dU(t)$. Имеем $0 \leq q_0 \leq 1$ и $q_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Покажем, что $q(x) = o(S(x))$ при $x \rightarrow +\infty$. Используя формулу (3.9), получаем

$$q(x) = q_0(x) - \int_0^x q_0(t) d\Gamma(x-t). \quad (3.23)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $q_0(x) < \varepsilon$ при $x > r$. Полагая в (3.23) $x > r$, будем иметь

$$q(x) \leq \varepsilon - \int_0^r d_t \Gamma(x-t) - \int_r^x \varepsilon d\Gamma(x-t) \leq \varepsilon S(x) + [\Gamma(x) - \Gamma(x-r)].$$

С учетом полуаддитивности (3.14) функции $S(x) = \Gamma(x) + 1$ получаем

$$q(x) \leq \varepsilon S(x) + \Gamma(r) + 1 \quad \text{при} \quad x > r.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем

$$q(x) = o(S(x)), \quad S(x) - \frac{x}{m_1} = o(S(x)), \quad x \rightarrow +\infty,$$

отсюда при $m_1 < +\infty$ следует асимптотика

$$S(x) = \frac{x}{m_1} + o(x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.24)$$

Объединяя результаты предыдущего и настоящего пунктов по уравнению (3.11), мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.1. *В КС (3.10) решение S уравнения восстановления (3.11) обладает следующими свойствами:*

- а) $S(x) \geq 1$ – непрерывная, монотонно неограниченно возрастающая функция на $[0; \infty)$; имеет место соотношение (3.13);
- б) S обладает свойством полуаддитивности (3.14);
- в) пусть $m_1 \equiv \int_0^\infty t dU(t) \leq +\infty$; при $m_1 < +\infty$ имеет место асимптотика (3.24), при $m_1 = +\infty$ имеет место асимптотика (3.22);
- г) в диссипативном случае (3.17) решение S УВ (3.11) является положительной, непрерывной, неубывающей, ограниченной функцией на $[0; \infty)$, предел которой в ∞ определяется согласно (3.18); имеет место формула (3.13).

Заметим, что сформулированные в теореме 3.1 свойства решения УВ (3.11) отличаются от известных свойств решения УВ (3.12) (см. [5], [10]) только тем, что решение УВ (3.12) является абсолютно непрерывным, а решение УВ (3.11) является непрерывным и имеет сингулярную компоненту, если такую компоненту имеет функция U .

5. Верхнее уравнение восстановления. Перейдем к изучению следующего уравнения:

$$(I - \mathbb{U}^-)\varphi = g, \quad \mathbb{U}^- \in \Omega_C^-, \quad g \in E^+, \quad (3.25)$$

или, в раскрытом виде,

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^\infty \varphi(t) dU(t-x), \quad U \in V_C^+. \quad (3.26)$$

Уравнение (3.26) назовем *верхним уравнением восстановления*.

Обозначим $\gamma \equiv \bigvee_0^\infty U < +\infty$. При $\gamma < 1$ оператор $\mathbb{U}^-$, согласно (2.12), сжимающий в E^+ и $I - \mathbb{U}^-$ обратим в E^+ . Ищем $(I - \mathbb{U}^-)^{-1}$ в виде $I + \Gamma_-$, где $\Gamma_- \in \Omega_C^-$. Используя правило композиции предъядер в Ω_C^- (см. лемму 3.2), для Γ получаем уравнение

$$\Gamma(x) = U(x) - \int_0^x \Gamma(t) dU(t-x). \quad (3.27)$$

Если (3.27) обладает решением $\Gamma \in V_C^+$, то с его помощью решение УВ (3.26) записывается в виде

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^\infty g(t) d\Gamma(t-x). \quad (3.28)$$

Сходство между верхним и нижним уравнениями восстановления (3.28) и (3.2) проявляется в том, что их резольвентные предъядра удовлетворяют одному и тому же уравнению. Однако есть и принципиальная разница между указанными УВ: (3.2) всегда однозначно разрешимо в $E^{\text{loc}}[0; \infty)$ при $U \in V_C^{\text{loc}}[0; \infty)$ и $g \in E^{\text{loc}}[0; \infty)$, причем тогда справедлива формула (3.9), а вопрос разрешимости (3.28) и применимости формулы (3.28) нуждается в специальном исследовании. Приведем один интересный пример нетривиальной разрешимости однородного уравнения (3.26) (с $g = 0$). В консервативном случае (3.10) указанное уравнение обладает очевидным нетривиальным решением $\varphi(x) = \text{const}$. Этот факт будет нами использован в §6 для решения однородного уравнения (0.7) в КС.

Что касается формулы (3.28), то она не столь универсальна, как (3.9), тем не менее с ее помощью можно построить решение УВ (3.26) в ряде случаев, когда оператор $I - \mathbb{U}^-$ необратим в пространствах E^+ и $\Gamma \in V_C^+$. В случае абсолютно непрерывного предъядра ряд результатов в указанном направлении по консервативному уравнению (3.26) содержится в [10]. Эти результаты частично допускают распространение на случай $U \in V_C^+$. В настоящей работе этот вопрос мы рассматривать не будем.

§ 4. Задача факторизации. Нелинейное уравнение факторизации

1. Одно мультипликативное свойство класса Ω_C . В §3 нами было отмечено, что классы операторов Ω_A и Ω_C не замкнуты относительно умножения. Класс Ω_A обладает следующим замечательным свойством: если $\mathbb{U}^\pm \in \Omega_A^\pm$, то $\mathbb{U}^-\mathbb{U}^+ \in \Omega_A$. Этот факт впервые был явно сформулирован и использован в [7] и стал основой метода нелинейных уравнений факторизации (НУФ) автора для интегральных операторов Винера–Хопфа (см. [7], [10], [13]). На этом свойстве

интегральных операторов Винера–Хопфа, в неявной форме, основаны также ранее известные факторизационные методы решения интегральных уравнений Винера–Хопфа (ИУВХ). Ниже нами будет показано, что аналогичным свойством обладает класс Ω_C . На его основании предлагается метод НУФ для уравнений (0.1) с непрерывным предъядром, содержащим сингулярную компоненту.

Прежде всего отметим, что если с точки зрения изучения и решения УВ (3.2) и (3.26) было удобно нормировать предъядра согласно условию $U(0) = 0$, то в целях изучения факторизационной задачи мы в дальнейшем будем нормировать эти предъядра согласно условию $U(\infty) = 0$. Нами будут использованы “новые” предъядра $W_{\pm}$ для операторов из $\Omega_C^{\pm}$, связанные со старыми предъядрами соотношением $W(x) = U(\infty) - U(x)$. Тогда

$$\mathbb{U}^+ f(x) = \int_0^x f(t) dW_+(x-t), \quad \mathbb{U}^- f(x) = \int_x^{\infty} f(t) dW_-(t-x), \quad W_{\pm}(\infty) = 0. \quad (4.1)$$

Пусть операторы $\mathbb{U}^{\pm} \in \Omega_C^{\pm}$ записаны в терминах новых предъядер $W_{\pm}$, а $f \in E^+$. Обозначим $\varphi = \mathbb{U}^+ f$, $\psi = \mathbb{U}^- \varphi = Hf$, где $\mathbb{H} = \mathbb{U}^- \mathbb{U}^+$. Имеем

$$\varphi(y) = \int_0^y f(t) dW_+(y-t), \quad \psi(x) = - \int_x^{\infty} \varphi(y) dW_-(y-x).$$

Производя в выражении для φ интегрирование по частям, получаем

$$\varphi(y) = f(0)W_+(y) - \int_0^y \widetilde{W}_+(y-t) df(t), \quad \widetilde{W}_+(y) = W_+(y) - W_+(0).$$

Подставляя полученное выражение для φ в выражение для ψ , будем иметь

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -A - \int_x^{\infty} dW_-(y-x) \int_0^y \widetilde{W}_+(y-t) df(t), \\ A &= f(0) \int_x^{\infty} \widetilde{W}_+(y) dW_-(y-x). \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -A - \int_0^{\infty} df(t) \left[\int_{\max(x,t)}^{\infty} \widetilde{W}_+(y-x) dW(y-t) \right] \\ &= -A - \int_0^{\infty} df(t) \left[\int_{\max(t-x,0)}^{\infty} \widetilde{W}_+(x-t+z) dW_-(z) \right]. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям приводит к следующему выражению:

$$\psi(x) = \mathbb{H}f(x) = \int_0^{\infty} f(t) dh(x-t), \quad h(x) = \int_{\max(-x,0)}^{\infty} \widetilde{W}_+(x+z) dW_-(z). \quad (4.2)$$

Ниже мы разложим оператор $\mathbb{H}$ по подпространствам $\Omega_C^{\pm}$, используя при этом новые предъядра для $\mathbb{H}^{\pm}$. При $x \geq 0$ имеем

$$h(x) = \int_0^{\infty} W_+(x+z) dW_-(z) + c.$$

С учетом $h^+(\infty) = 0$ получаем

$$h^+(x) = \int_0^\infty W_+(x+z) dW_-(z).$$

При $x \leq 0$ имеем

$$h(x) = \int_{-x}^\infty \widetilde{W}_+(x+z) dW_-(z) = \int_0^\infty \widetilde{W}_+(t) dW_-(t-x).$$

Интегрируя по частям, с учетом $\widetilde{W}_+(0) = W_-(\infty) = 0$ получаем

$$h(x) = \int_0^\infty W_-(t-x) dW_+(x),$$

откуда следует

$$h^-(x) = \int_0^\infty W_-(x+t) dW_+(t), \quad x \geq 0.$$

Нами доказана следующая основная лемма.

ЛЕММА 4.1. Если $\mathbb{U}^\pm \in \Omega_C^\pm$, то $\mathbb{H} \equiv \mathbb{U}^-\mathbb{U}^+ \in \Omega_C$, причем $\mathbb{H} = \mathbb{H}^+ + \mathbb{H}^-$,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^+ f(x) &= \int_0^x f(t) dh^+(x-t), & \mathbb{H}^- f(x) &= - \int_x^\infty f(t) dh^-(t-x), \\ h^\pm(x) &= \int_0^\infty W_\pm(x+t) dW_\mp(t), & x &\geq 0, & W_\pm(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

2. Задача факторизации. Центральным вопросом настоящей работы является следующая задача факторизации: для $\mathbb{T} \in \Omega_C$ найти $\mathbb{U}^\pm \in \Omega_C^\pm$ такие, чтобы имело место разложение

$$I - \mathbb{T} = (I - \mathbb{U}^-)(I - \mathbb{U}^+). \quad (4.4)$$

Факторизация (4.4) понимается как равенство операторов, действующих в E^+ . Равенство (4.4) эквивалентно равенству $\mathbb{U}^+ + \mathbb{U}^- = \mathbb{T} + \mathbb{U}^-\mathbb{U}^+$. Согласно лемме 4.1 $\mathbb{H} = \mathbb{U}^-\mathbb{U}^+ \in \Omega_C$ и данное равенство эквивалентно следующим двум равенствам: $\mathbb{U}^\pm = \mathbb{T}_\pm + \mathbb{H}^\pm$, где $\mathbb{H}^\pm$ определены согласно лемме 4.1. Перейдя к равенству предъядер, с учетом (4.3) получаем

$$\begin{aligned} W_+(x) &= T_+(x) - \int_0^\infty W_+(x+t) dW_-(t), \\ W_-(x) &= T_-(x) - \int_0^\infty W_-(x+t) dW_+(t), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $T_+(x) = T(+\infty) - T(x)$, $T_-(x) = T(-x)$, $x \geq 0$.

Соотношения (4.5) мы назовем *нелинейным уравнением факторизации* (НУФ) для задачи (4.4).

Рассмотрим тот частный случай, когда функция T обладает свойством симметрии:

$$T(x) + T(-x) = 2T(0). \quad (4.6)$$

Выполнение условия (4.6) назовем *симметрическим случаем* (СС). В случае, когда роль T играет непрерывная функция распределения некоторой случайной величины, условие симметрии (4.6) означает, что эта случайная величина симметрично распределена относительно начала координат. При выполнении (4.6) имеем

$$T_+(x) = T_-(x) = T_0(x). \quad (4.7)$$

Очевидно, что если W удовлетворяет уравнению

$$W(x) = T_0(x) - \int_0^\infty W(x+t) dW(t), \quad W \in V_C^+, \quad (4.8)$$

то $W_\pm = W$ удовлетворяет уравнению (4.5) при (4.6).

Нами доказана

ТЕОРЕМА 4.1. а) *Факторизация (4.4) имеет место тогда и только тогда, когда “новые” предъядра $W_\pm$ операторов $\mathbb{W}^\pm$ удовлетворяют НУФ (4.5).*

б) *Если в симметрическом случае (4.6) функция W удовлетворяет уравнению (4.8), то имеет место факторизация (4.4), причем тогда $W_+ = W_- = W$.*

Уравнения (4.5) и (4.8) являются обобщением и новой формой записи НУФ интегральных операторов Винера–Хопфа (см. [7], [10]):

$$V_\pm(x) = K_\pm(x) + \int_0^\infty V_\pm(x+t) V_\mp(t) dt, \quad (4.9)$$

где $K_\pm(x) = -T'_\pm(x)$ – заданные, а $V_\pm$ – искомые функции из L_1^+ . Уравнения (4.9) сводятся к (4.4) путем введения новых искомых функций

$$W_\pm(x) = \int_x^\infty V_\pm(t) dt.$$

Таким образом, НУФ (4.5) является обобщением (4.9), так как (4.5) охватывает также случай предъядер из Ω_C , не являющихся абсолютно непрерывными.

§ 5. Основное решение НУФ

1. Настоящий параграф посвящен доказательству существования одного специального решения НУФ (4.5) и его симметрического случая (4.8), а также изучению свойств этого решения при предположении, что предъядро T удовлетворяет условиям

$$T(-\infty) = 0, \quad T(x) \uparrow \text{ по } x, \quad T(+\infty) = \mu \leq 1. \quad (5.1)$$

Условия (5.1) охватывают *консервативный случай* (КС) $\mu = 1$ и *диссипативный случай* (ДС) $\mu < 1$.

Рассмотрим следующие последовательные приближения для (4.5):

$$W_{n+1}^\pm(x) = T_\pm(x) - \int_0^\infty W_n^\pm(x+t) dW_n^\mp(t), \quad W_0^\pm = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.2)$$

Выполнение условий (5.1) мы пока не будем предполагать. Из свойств операторов из Ω_C^- (см. § 2) следует, что итерации (5.2) определяют последовательности $W_n^\pm$ в V_C^+ . При сходимости этих последовательностей в V_C^+ : $W_n^\pm \rightarrow W_\pm \in V_C^+$, можно показать, что (W_+, W_-) является решением НУФ (4.5). Такое решение назовем *основным решением* (ОР) НУФ (4.5). Аналогичным образом определяется ОР для симметрического случая (4.8) НУФ как предел итераций, определяемых посредством

$$W_{n+1}(x) = T_0(x) - \int_0^\infty W_n(x+t) dW_n(t), \quad W_0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.3)$$

Легко проверить индукцией по n , что при выполнении условия (4.7) имеют место равенства $W_n^+ = W_n^- = W_n$. Поэтому в СС существование ОР уравнения (4.5) равносильно существованию ОР НУФ (4.8).

2. Существование ОР. Исследуем вопрос о существовании ОР уравнений (4.5) при выполнении условий (5.1). Заметим, что из монотонного возрастания функции T следует убывание $T_\pm$, причем $T_\pm(x) \downarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

ЛЕММА 5.1. *При выполнении условий (5.1) последовательности $W_n^\pm$ (и W_n) обладают следующими свойствами:*

- а) $0 \leq W_n^\pm(x)$ по x , $W_n^\pm \in V_C^+$;
- б) $W_n^\pm(+\infty) = 0$;
- в) $W_n^\pm$ возрастают по n ;
- г) функции $\delta_n^\pm(x) = W_{n+1}^\pm(x) - W_n^\pm(x)$ неотрицательны и убывают по x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения а) и б) леммы проверяем индукцией по n , используя при этом лемму 2.3 о свойствах операторов из Ω_C^- . Докажем утверждения в) и г) совместно индукцией по n . Имеем $\delta_0^\pm(x) = T_\pm(x)$; они неотрицательны и убывают по x . Пусть $0 \leq \delta_n^\pm(x) \downarrow$ по x , $n \leq m$. Пусть $0 \leq x_1 < x_2 < +\infty$. Из (5.2) имеем

$$\begin{aligned} W_{m+1}^\pm(x_2) - W_{m+1}^\pm(x_1) &= T_\pm(x_2) - T_\pm(x_1) \\ &\quad - \int_0^\infty [W_m^\pm(x_2+t) - W_m^\pm(x_1+t)] dW_m^\mp(t), \\ W_m^\pm(x_2) - W_m^\pm(x_1) &= T_\pm(x_2) - T_\pm(x_1) \\ &\quad - \int_0^\infty [W_{m-1}^\pm(x_2+t) - W_{m-1}^\pm(x_1+t)] dW_{m-1}^\mp(t). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Согласно предположению индукции имеем

$$0 \leq \delta_m^\pm(x_2) \leq \delta_m^\pm(x_1),$$

что эквивалентно неравенству

$$W_m^\pm(x_1) - W_m^\pm(x_2) \geq W_{m-1}^\pm(x_1) - W_{m-1}^\pm(x_2). \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что меры $-dW_m^\pm$ больше или равны мерам $-dW_{m-1}^\pm$. Из (5.5) с учетом сказанного следует соответствующее неравенство между левыми частями первого и второго из соотношений (5.4). Мы пришли к неравенству (5.5), в котором m заменено на $m+1$. Лемма доказана.

Обозначим: $\mu_{\pm} = T_{\pm}(0)$, $\mu = \mu_+ + \mu_-$ (≤ 1), $\gamma_n^{\pm} = W_n^{\pm}(0)$. Числа $\mu_{\pm}$ и $\gamma_n^{\pm}$ представляют собой нормы соответствующих функций в пространстве V_C^+ . Из утверждения а) леммы 5.1 следует, что $\gamma_n^{\pm} \uparrow$ по n . Ниже будет установлена ограниченность этих последовательностей. Подставляя в (5.2) $x = 0$, будем иметь

$$\gamma_{n+1}^+ = \mu_+ - \int_0^{\infty} W_n^+(t) dW_n^-(t), \quad \gamma_{n+1}^- = \mu_- - \int_0^{\infty} W_n^-(t) dW_n^+(t). \quad (5.6)$$

Производя в последнем соотношении интегрирование по частям, с учетом $W_n^{\pm}(\infty) = 0$ получаем

$$\gamma_{n+1}^- = \mu_- + \gamma_n^- \gamma_n^+ + \int_0^{\infty} W_n^+(t) dW_n^-(t).$$

Складывая полученное равенство с (5.6), получаем

$$\gamma_{n+1}^+ + \gamma_{n+1}^- = \mu + \gamma_n^- \gamma_n^+. \quad (5.7)$$

Соотношение (5.7) идентично соотношениям, возникающим при построении основного канонического решения НУФ (4.9) для интегральных уравнений Винера-Хопфа (см. [7], [10]). Из (5.7) и монотонности $\gamma_n^{\pm} \uparrow$ легко следуют оценки

$$\gamma_n^{\pm} \leq \mu \quad (\leq 1). \quad (5.8)$$

Действительно, перепишем (5.7) в виде

$$\gamma_{n+1}^{\pm} = \mu - (\gamma_{n+1}^{\mp} - \gamma_n^{\mp}) - \gamma_n^{\mp}(1 - \gamma_n^{\pm}),$$

откуда получаем (5.8) индукцией по n . Итак, последовательности $\gamma_n^{\pm}$ возрастают и ограничены, поэтому они сходятся: $\gamma_n^{\pm} \rightarrow \gamma_{\pm} \leq \mu$. Из (5.7) следует

$$(1 - \gamma_-)(1 - \gamma_+) = 1 - \mu, \quad \gamma_{\pm} \leq \mu. \quad (5.9)$$

Нами показано, что $W_n^{\pm}(x) \geq 0$ образуют возрастающие последовательности монотонно убывающих непрерывных функций, причем

$$0 = W_n^{\pm}(\infty) \leq W_n^{\pm}(x) \leq W_n^{\pm}(0) = \gamma_n^{\pm} \leq \gamma_{\pm} \leq \mu.$$

Полагая в неравенствах (5.5) $x_1 = 0$, $x_2 = x$, получаем

$$\delta_n^{\pm}(x) = W_{n+1}^{\pm}(x) - W_n^{\pm}(x) \leq \gamma_{n+1}^{\pm} - \gamma_n^{\pm}.$$

Поэтому $W_n^{\pm}$ монотонно и равномерно сходятся к монотонным функциям $W_{\pm} \in V_C^+$, $W_{\pm}(x) \downarrow$ по x , причем $W_{\pm}(\infty) = 0$.

Докажем законность предельного перехода в (5.2). Пусть

$$\sigma_n^{\pm}(x) = \int_0^{\infty} W_n^{\pm}(x+t) dW_n^{\mp}(t), \quad \sigma_{\pm}(x) = \int_0^{\infty} W_{\pm}(x+t) dW_{\mp}(t).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm}(x) - \sigma_n^{\pm}(x) &= \int_0^{\infty} [W_{\pm}(x+t) - W_n^{\pm}(x+t)] dW_{\mp}(t) \\ &\quad + \int_0^{\infty} W_n^{\pm}(x+t) d[W_{\mp}(t) - W_n^{\mp}(t)], \end{aligned}$$

откуда нетрудно получить неравенство

$$|\sigma_{\pm}(x) - \sigma_n^{\pm}(x)| \leq (\gamma_{\pm} - \gamma_n^{\pm})\gamma_{\mp} + \gamma_n^{\pm}(\gamma_{\mp} - \gamma_n^{\mp}) \rightarrow 0.$$

В симметрическом случае имеем $W_n^{\pm} = W_n$,

$$\gamma_n^{\pm} = \gamma_n \uparrow \gamma = 1 - \sqrt{1 - \mu}. \quad (5.10)$$

Нами доказана

ТЕОРЕМА 5.1. При выполнении условий (5.1) НУФ (4.5) и (4.8) обладают основными решениями (W_+, W_-) и W соответственно, причем:

а) $W_\pm \in V_C^+$, $0 \leq W_\pm(x) \downarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$; имеют место равенство и оценки (5.9);

б) в симметрическом случае (4.7) ОР НУФ (4.8) обладает дополнительным свойством (5.10);

в) существует факторизация (4.4), где $U^\pm \in \Omega_C^\pm$ суть операторы вида (4.1), причем (W_+, W_-) является ОР НУФ (4.5) или НУФ (4.8) – в СС.

3. Дальнейшее изучение факторизации (4.4) с помощью моментов предъядра T в КС. В настоящем и последующем пунктах будут сформулированы две леммы о свойствах факторизации (4.4) в КС. Эти леммы представляют собой обобщение леммы 4.6 и теоремы 4.1 работы [10], относящихся к факторизации интегральных операторов Винера–Хопфа. Доказательства нижеприводимых лемм 5.2 и 5.3 несущественно отличаются от доказательств соответствующих результатов работы [10]. Поэтому мы ограничимся изложением доказательства только леммы 5.3, а лемму 5.2 приведем без доказательства.

Рассмотрим факторизацию (4.4) в КС. В силу $\mu = 1$ согласно (5.9) имеем $(1 - \gamma_-)(1 - \gamma_+) = 0$ (и $\gamma_\pm \leq 1$). Поэтому в КС хотя бы одно из чисел $\gamma_\pm$ равно 1. Из результатов §3 известно, что равенство единице числа γ_+ или γ_- означает необратимость соответственно операторов $I - U^+$ или $I - U^-$. Первым выводом из этих фактов является тот, что в КС хотя бы один из факторов $I - U^\pm$, участвующих в факторизации (4.4), необратим, стало быть, необратим и сам оператор $I - T$. Вопрос о том, какое из чисел $\gamma_\pm$ равно 1 в КС, представляет большой интерес в вопросах разрешимости однородного и неоднородного консервативных уравнений (0.1) – см. §6. Ясно, что в СС (4.7) $\gamma_+ = \gamma_- = 1$, т.е. оба фактора в правой части (4.4) необратимы.

Предположим, что сходятся интегралы

$$\nu_\pm = - \int_0^\infty x dT_\pm(x) < +\infty.$$

Обозначим

$$\nu_1 = \nu_+ - \nu_- = \int_{-\infty}^\infty x dT(x).$$

Число ν_1 представляет собой математическое ожидание случайной величины с функцией распределения T . Справедлива

ЛЕММА 5.2. а) Если $\nu_1 > 0$, то $\gamma_+ = 1$, $\gamma_- < 1$.

б) Если $\nu_1 < 0$, то $\gamma_+ < 1$, $\gamma_- = 1$.

в) Если $\nu_1 = 0$, то $\gamma_\pm = 1$.

4. Вычисление первого момента функции W в консервативном СС. Пусть $\nu_2 \leq +\infty$ – второй момент меры dT , а m_1 – первый момент меры $-dU$:

$$\nu_2 = \int_{-\infty}^\infty x^2 dT(x) \leq +\infty, \quad m_1 = - \int_0^\infty x dU(x) \leq +\infty.$$

ЛЕММА 5.3. а) Если в симметрическом КС $\nu_2 < +\infty$, то

$$m_1 = \sqrt{\nu_2/2}. \quad (5.11)$$

б) Если же $\nu_2 = +\infty$, то $m_1 = +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu_2 < +\infty$. Покажем сначала, что $m_1 \leq \sqrt{\nu_2/2}$. Рассмотрим итерации (5.3). Покажем индукцией по n , что все функции W_n обладают конечными моментами второго порядка $m_2^{(n)}$. Действительно, пусть $m_2^{(n)} < +\infty$. Применяя к (5.3) формулу (2.13) при $h(x) = x^2$ и $r = +\infty$, получаем

$$m_2^{(n+1)} = \frac{1}{2}\nu_2 + \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x^2 dW_n(x+t) \right] dW_n(t)$$

или

$$m_2^{(n+1)} = \frac{1}{2}\nu_2 + \int_0^\infty \left[\int_t^\infty (x-t)^2 dW_n(x) \right] dW_n(t), \quad (5.12)$$

откуда имеем

$$m_2^{(n+1)} \leq \frac{1}{2}\nu_2 + m_2^{(n)}\gamma_n < +\infty.$$

Изменяя в (5.12) порядок интегрирования и меняя местами x и t , получаем

$$m_2^{(n+1)} = \frac{1}{2}\nu_2 + \int_0^\infty \left[\int_0^x (x-t)^2 dW_n(x) \right] dW_n(t). \quad (5.13)$$

Складывая (5.12) и (5.13) и деля пополам, получаем

$$m_2^{(n+1)} = \frac{1}{2}\nu_2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (x-t)^2 dW_n(x) \right] dW_n(t),$$

откуда имеем

$$m_2^{(n+1)} = \frac{1}{2}\nu_2 + m_2^{(n)}\gamma_n - [m_1^{(n)}]^2, \quad m_1^{(n)} = - \int_0^\infty x dW_n(x) < +\infty,$$

или

$$[m_1^{(n)}]^2 = \frac{1}{2}\nu_2 - [m_2^{(n+1)} - m_2^{(n)}\gamma_n] \leq \frac{1}{2}\nu_2,$$

что влечет за собой неравенство $m_1 \leq \sqrt{\nu_2/2}$.

Докажем теперь обратное неравенство $m_1 \geq \sqrt{\nu_2/2}$. Применяя к равенству (4.8) формулу (2.13) с $h(x) = x^2$ и $r < +\infty$, получаем

$$\int_0^r x^2 dW(x) = \int_0^r x^2 dT_0(x) - A, \quad (5.14)$$

где

$$A = \int_0^\infty \left[\int_0^r x^2 dW(x+t) \right] dW(t) = \int_0^\infty \left[\int_t^{r+t} (x-t)^2 dW(x) \right] dW(t).$$

Имеем

$$A \geq \int_0^r \left[\int_t^r (x-t)^2 dW(x) \right] dW(t) = \int_0^r \left[\int_r^x (x-t)^2 dW(t) \right] dW(x),$$

поэтому

$$A \geq \frac{1}{2} \int_0^r \left[\int_0^r (x-t)^2 dW(x) \right] dW(t) = [1-W(r)] \int_0^r x^2 dW(x) - \left[\int_0^r x dW(x) \right]^2.$$

Используя полученное неравенство, из (5.14) будем иметь

$$\int_0^r x^2 dW(x) \geq \frac{1}{2} \int_{-r}^r x^2 dT(x) + [1-W(r)] \int_0^r x^2 dW(x) - \left[\int_0^r x dW(x) \right]^2$$

или

$$\left[- \int_0^r x dW(x) \right]^2 \geq \frac{1}{2} \int_{-r}^r x^2 dT(x).$$

Из полученного неравенства непосредственно следует как неравенство $m_1 \geq \sqrt{\nu_2/2}$ при $\nu_2 < +\infty$, так и утверждение б) леммы. Лемма доказана.

§ 6. Уравнение (0.1) в консервативном случае

1. Настоящий параграф посвящен применению факторизации (4.4) к решению уравнения (0.1) и соответствующего однородного уравнения (0.7) в КС (0.8).

Факторизация (4.4) сводит уравнение (0.1) к последовательному решению следующих двух: верхнего и нижнего уравнений восстановления

$$(I - \mathbb{U}^-)f = g, \quad (I - \mathbb{U}^+)\varphi = f,$$

или, в раскрытом виде,

$$f(x) = g(x) + \int_x^\infty f(t) dU_-(t-x), \quad (6.1)$$

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^x \varphi(t) dU_+(x-t), \quad (6.2)$$

где $U_\pm(x) = W_\pm(0) - W_\pm(x)$.

В п. 3 §5 было показано, что в КС оператор $I - \mathbb{T}$ необратим в пространствах E^+ , т.е. случай (0.8) является особым случаем для уравнения (0.1). В качестве одного из наиболее интересных приложений факторизации (4.4) в особом КС мы ниже будем исследовать вопрос о существовании положительного решения однородного уравнения (0.7) в КС. Эта задача возникает в теории вероятностей, в теории очередей и др. как задача о нахождении максимума последовательных частичных сумм для одинаково распределенных независимых случайных величин (см. [2], [4]). В случае, когда T — абсолютно непрерывная функция, т.е. распределение T обладает плотностью $T'(x) = K(x)$, задача (0.7), (0.8) принимает вид

$$S(x) = \int_0^\infty K(x-t)S(t) dt, \quad (6.3)$$

$$0 \leq K(x) \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^\infty K(x) dx = 1. \quad (6.4)$$

Различным частным случаям задачи (6.3), (6.4) посвящено огромное число исследований в связи с известной проблемой Милна в теории переноса излучения, с приложениями в кинетической теории газов, в теории вероятностей и др. (см. [2], [4], [7], [10], [14]). Что касается задачи (0.7), (0.8) в случае $T_S \neq 0$, то результаты по ней в литературе нами не были обнаружены.

В работе [4] использовано понятие $\mathbb{P}$ -решения и $\mathbb{P}^*$ -решения задачи (6.3), (6.4). Введем аналогичные понятия для задачи (0.7), (0.8). Под $\mathbb{P}$ -решением этой задачи будем понимать неотрицательную, неубывающую, непрерывную слева функцию на $[0; \infty)$, для которой $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 1$. Под $\mathbb{P}^*$ -решением будем понимать неотрицательную, неубывающую, непрерывную слева функцию с $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = +\infty$.

Классические результаты по существованию $\mathbb{P}$ -решения или $\mathbb{P}^*$ -решения задачи (6.3), (6.4) получены в работах [2], [4]. Наиболее общие результаты в указанном направлении получены в [10] на основании метода НУФ. Отметим, что задача о построении $\mathbb{P}^*$ -решения является намного сложнее задачи о построении $\mathbb{P}$ -решения (см. [4]).

Рассмотрим уравнения (6.1), (6.2), соответствующие однородному уравнению (0.8) в КС,

$$f(x) = \int_x^\infty f(t) dU_-(t-x), \quad (6.5)$$

$$S(x) = f(x) - \int_0^x S(t) dU_+(x-t), \quad (6.6)$$

где $U_\pm(x) = W_\pm(0) - W_\pm(x) = \gamma_\pm - W_\pm(x)$.

Предположим, что выполняется некоторое условие, обеспечивающее выполнение равенства $\gamma_- = 1$. Так обстоит дело в СС (4.7), когда $\gamma_\pm = \gamma = 1$ или при $\nu \leq 0$ (см. лемму 5.2). Из равенства $\gamma_- = 1$ следует, что однородное уравнение (6.5) обладает нетривиальным решением $f(x) \equiv 1$. Поэтому уравнение (6.6) принимает вид (3.11). Согласно результатам § 3 это уравнение обладает решением как при $\gamma_+ < 1$, так и при $\gamma_+ = 1$, причем имеет место формула (3.13). Свойства решения S сформулированы в теореме 3.1.

Строго говоря, априори мы не можем гарантировать, что построенное нами решение S , полученное из уравнений (6.5), (6.6), удовлетворяет исходному уравнению, поскольку при $\gamma_+ = 1$ построенная функция S неограничена, а факторизация (4.4) имеет место как равенство операторов, действующих в классах ограниченных функций E^+ . Аналогичная ситуация возникла в работе [10] в связи с решением уравнения (6.3), (6.4). Как и в работе [10], можно доказать, что решение факторизованного уравнения (6.5), (6.6) удовлетворяет исходному уравнению (0.7), (0.8). Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть предядро однородного уравнения (0.7) обладает свойством симметрии (4.7). Тогда задача (0.7), (0.8) обладает $\mathbb{P}^*$ -решением S , причем:

- а) $S(x) \geq 1$ – непрерывная, неограниченно монотонно возрастающая функция на $[0; \infty)$, удовлетворяющая условию полуаддитивности (3.4);
- б) если $\nu_2 \equiv \int_{-\infty}^\infty x^2 dT(x) < +\infty$, то имеет место асимптотика

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu_2/2}}x + o(x), \quad x \rightarrow +\infty; \quad (6.7)$$

если же $\nu_2 = +\infty$, то

$$S(x) = o(x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (6.8)$$

Для полного доказательства теоремы нам остается заметить, что асимптотики (6.7) и (6.8) следуют из (3.22) и (3.24) с учетом леммы 5.3. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть предядро консервативного однородного уравнения (0.7), (0.8) обладает конечным моментом первого порядка $\nu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x dT(x)$. Тогда:

а) в случае $\nu = 0$ задача обладает $\mathbb{P}^*$ -решением S ; это решение обладает свойствами утверждения а) теоремы 6.1 и асимптотикой

$$S(x) = O(x), \quad x \rightarrow +\infty; \quad (6.9)$$

б) если $\nu < 0$, то задача обладает $\mathbb{P}$ -решением $S_1 \in \text{Mon}^C[0; \infty]$, $S_1(x) = (1 - \gamma_+)S(x)$, где S определяется согласно (3.13); функция $\Gamma = \Gamma_+$ является резольвентным предядром оператора $\mathbb{U}^+$, а число $\gamma_+ < 1$ – нормой оператора $\mathbb{U}^+$, где $\mathbb{U}^\pm$ суть операторы, участвующие в факторизации (4.4).

2. В настоящем пункте мы вкратце остановимся на рассмотрении неоднородного консервативного уравнения (0.1), (0.8). Нами уже было отмечено, что факторизация (4.4) позволяет свести это уравнение к решению уравнений восстановления (6.1), (6.2). Мы ограничимся рассмотрением случая $\gamma_- < 1$, $\gamma_+ = 1$. Тогда уравнение (6.1) обладает единственным решением в E^+ при $g \in E^+$. Уравнение же (6.2) будет обладать единственным решением $S \in E^{\text{loc}}[0; \infty)$, имеющим вид

$$S(x) = f(x) - \int_0^x f(t) d\Gamma_+(x - t). \quad (6.10)$$

Из ограниченности функции $f \in E^+$ и из результатов пп. 3, 4 §3 следует, что

$$S(x) = O(x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (6.11)$$

Нами доказана

ТЕОРЕМА 6.3. Если $\exists \nu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x dT(x)$ и $\nu_1 > 0$, то уравнение (0.1), (0.8) обладает решением из $E^{\text{loc}}[0; \infty)$ с асимптотикой (6.11).

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику В.С. Владимирову и участникам руководимого им семинара по математической физике МИРАН за ценное обсуждение результатов настоящей работы.

Список литературы

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
2. Lindlay D. V. The theory of queue with a single server // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1952. № 48. P. 277–289.
3. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. № 5. С. 3–120.
4. Spitzer F. The Wiener–Hopf Equation, whose kernel is a probability density // Duke Math. J. 1957. V. 24. № 3. P. 323–343.
5. Беллман Р., Куз К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
6. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
7. Енгибарян Н. Б., Арутюнян А. А. Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения // Матем. сб. 1975. Т. 97. № 1. С. 35–58.
8. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.
9. Владимиров В. С. Уравнение Винера–Хопфа в алгебрах Неванлинны и Смирнова // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 4. С. 767–784.
10. Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. Т. 22. М.: ВИНТИ АН СССР, 1984. С. 175–240.
11. Спитцер Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967.
13. Енгибарян Н. Б. О нелинейных уравнениях факторизации операторов. Применение методов теории функций и функц. анализа к задачам мат. физики. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1982. С. 123–128.
14. Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1967.

Поступило в редакцию
30.I.1995