Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лебедев, А. М. Олевский, L^p -мультипликаторы
Фурье с ограниченными степенями, *Изв. РАН. Сер. ма-
тем.*, 2006, том 70, выпуск 3, 129–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/im704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 03:17:02

УДК 517.51+513.88

В. В. Лебедев, А. М. Олевский

L^p -мультипликаторы Фурье с ограниченными степенями

Рассматривается пространство $M_p(\mathbb{R}^d)$ мультипликаторов Фурье в L^p . Приводится подробное изложение следующего результата, анонсированного авторами в заметке [10]: если $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 2\pi[$ – измеримая функция и $\|e^{in\varphi}\|_{M_p} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, при каком-либо $p \neq 2$, то функция φ линейна в областях, дополнительных к некоторому замкнутому множеству $E(\varphi)$ лебеговой меры нуль, и множество значений градиента функции φ конечно. Рассматривается вопрос о том, какие множества могут служить в качестве множеств $E(\varphi)$. Изучается поведение норм экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в случае, когда частота λ стремится к бесконечности, пробегая последовательность вещественных чисел. В частности, построен гомеоморфизм φ прямой $\mathbb{R}$, не являющийся линейным ни на каком интервале и такой, что $\|e^{i2^n\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, при всех p , $1 < p < \infty$.

Библиография: 18 наименований.

Введение

Пусть G – локально компактная абелева группа и Γ – группа, двойственная к G . Рассмотрим функцию $m \in L^\infty(\Gamma)$ и оператор Q , задаваемый соотношением

$$\widehat{Qf} = m \hat{f}, \quad f \in L^p \cap L^2(G), \quad (1)$$

где $\hat{}$ обозначает преобразование Фурье. Функция m называется L^p -мультипликатором, $1 \leq p \leq \infty$, если Q является ограниченным оператором в $L^p(G)$. Пространство $M_p(\Gamma)$ всех таких мультипликаторов, снабженное нормой

$$\|m\|_{M_p(\Gamma)} = \|Q\|_{L^p(G) \rightarrow L^p(G)},$$

образует банахову алгебру относительно обычного умножения функций.

Мы рассматриваем группы $\Gamma = \mathbb{R}^d$ ($G = \mathbb{R}^d$) и $\Gamma = \mathbb{T}^d$ ($G = \mathbb{Z}^d$), где $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}$ – вещественная прямая, окружность и аддитивная группа целых чисел соответственно. Основные свойства мультипликаторов в этих случаях изложены в работах [1]–[5]. Ясно, что любой оператор (1) инвариантен относительно сдвига, т. е. для любого оператора сдвига $(S_\alpha f)(t) = f(t + \alpha)$, $\alpha \in G$, имеем $Q S_\alpha = S_\alpha Q$. При $p < \infty$ верно также обратное утверждение: любой инвариантный относительно сдвига ограниченный оператор в $L^p(G)$ имеет вид (1), где $m \in M_p(\Gamma)$.

Случай $p = 2$ тривиален, $M_2(\Gamma) = L^\infty(\Gamma)$. Хорошо известно также, что $M_1(\Gamma)$ совпадает с алгеброй $A(\Gamma)$ функций f вида $f = \hat{\mu}$, где μ – конечная борелевская мера на G , при этом $\|f\|_{M_1(\Gamma)} = \|f\|_{A(\Gamma)} = \int_G |d\mu|$. В частности,

$M_1(\mathbb{T}^d)$ совпадает с алгеброй Винера $A(\mathbb{T}^d)$ абсолютно сходящихся рядов Фурье на торе $\mathbb{T}^d$,

$$\|f\|_{M_1(\mathbb{T}^d)} = \|f\|_{A(\mathbb{T}^d)} = \|\hat{f}\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(k)|.$$

Простыми примерами мультипликаторов на $\mathbb{R}$ являются $m(t) = e^{i\lambda t}$ и характеристическая функция полупрямой $m(t) = 1_{(0, +\infty)}(t)$. Оператор Q в соотношении (1) в этих случаях является соответственно оператором сдвига S_λ и проектором Рисса P_+ . (Напомним, что $P_+ = (I + iH)/2$, где I – тождественный оператор и H – преобразование Гильберта.) В целом, вопрос о том, является ли заданная функция мультипликатором, обычно оказывается сложным.

Согласно теореме Берлинга–Хелсона [6] (см. также [7], [8]), если вещественная функция φ на $\mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{R})} = O(1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

то по $\bmod 2\pi$ функция φ совпадает с некоторой линейной (аффинной) функцией, т.е. $\varphi(t) = \alpha t + \beta \pmod{2\pi}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Аналогичное утверждение верно на окружности ($\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{T}$), а также в многомерном случае. Отметим также следующий вариант теоремы Берлинга–Хелсона: если $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{R})} = O(1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то функция φ линейна.

Теорема Берлинга–Хелсона влечет решение проблемы Леви об описании эндоморфизмов алгебры $A(\mathbb{T})$, равно как и вообще алгебры $A(\Gamma)$ ($A(\Gamma) = M_1(\Gamma)$) в случаях $\Gamma = \mathbb{R}^d, \mathbb{T}^d$. Всякий такой эндоморфизм оказывается тривиальным, а именно является оператором суперпозиции $f \rightarrow f \circ \varphi$ с аффинным отображением $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma$. (Иными словами, лишь тривиальные замены переменной сохраняют принадлежность функций классу $A(\Gamma)$.)

Несложно также увидеть, что теорема Берлинга–Хелсона дает описание инвариантных относительно сдвига операторов U в $L^1(\mathbb{R}^d)$ (или в $l^1(\mathbb{Z}^d)$) таких, что $\|U^n\|_{L^1 \rightarrow L^1} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, а именно всякий такой оператор с точностью до постоянного скалярного множителя, равного по модулю 1, является оператором сдвига.

Теорема Берлинга–Хелсона приводит к постановке вопроса об описании функций φ , удовлетворяющих условию

$$\|e^{in\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Заметим, что случай $1 < p < \infty$ отличается от случая $p = 1, \infty$. Как показал Шварц (см. [1]), если $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – кусочно линейная функция (т.е. такая, что $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^N I_k$, где I_k – интервалы, на каждом из которых φ линейна), то $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, при всех p , $1 < p < \infty$. Более того, если при этом угловые коэффициенты функции φ отличны от нуля, то оператор $m \rightarrow m \circ \varphi$ ограничен в $M_p(\mathbb{R})$ (и, таким образом, порождает нетривиальный эндоморфизм алгебры M_p).

С другой стороны, Л. Хермандер [1], рассматривая операторы суперпозиции $m \rightarrow m \circ \varphi$ в M_p , показал, что при дополнительном предположении дважды непрерывной дифференцируемости функции $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ условие

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

влечет линейность функции φ ($1 < p < \infty$, $p \neq 2$), т.е. $\varphi(t) = (\alpha, t) + \beta$, где $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\beta \in \mathbb{R}$ и (α, t) – скалярное произведение. Более того, то же заключение верно, если условие (3) заменить более слабым условием

$$\|e^{i\lambda_n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1), \quad (4)$$

где $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ – произвольная неограниченная последовательность. Л. Херман-дером была также высказана гипотеза, что условие (4) влечет линейность функции φ в предположении, что φ лишь один раз непрерывно дифференцируема. Справедливость этой гипотезы была доказана нами в работе [9]. Аналогичное утверждение верно на торе.

В настоящей статье мы исследуем вопрос о том, для каких (вещественных) функций φ на $\mathbb{R}^d$ могут выполняться соотношения (2)–(4) при $1 < p < \infty$ без предположений о гладкости функции φ . При этом если частоты λ экспонент $e^{i\lambda \varphi}$ целые, то естественно считать, что $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 2\pi[$, вместо того чтобы описывать свойства функции φ по mod 2π .

Мы приведем развернутое изложение результатов, ранее анонсированных в нашей заметке [10], а также получим некоторые новые результаты. Интерес, разумеется, представляет случай $p \neq 2$.

В § 1 мы приводим необходимые нам в дальнейшем известные утверждения о мультипликаторах.

В § 2 мы устанавливаем свойство *существенной непрерывности* мультипликаторов (при $p \neq 2$). Отметим, что частным случаем теоремы о существенной непрерывности является полученная нами ранее [11] теорема об идемпотентах алгебры $M_p(\mathbb{R}^d)$: если характеристическая функция 1_G множества $G \subseteq \mathbb{R}^d$ принадлежит $M_p(\mathbb{R}^d)$ при каком-либо значении $p \neq 2$, то с точностью до множества меры нуль множество G совпадает с открытым множеством. (В частности, если G – нигде не плотное множество положительной меры, то $1_G \notin M_p$, $p \neq 2$.)

В § 3 мы покажем, что если измеримая функция $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 2\pi[$ удовлетворяет соотношению (2) при каком-либо p , $p \neq 2$, то φ обладает следующими свойствами: (А) существует замкнутое множество $E(\varphi) \subset \mathbb{R}^d$ лебеговой меры нуль такое, что на каждой компоненте связности I его дополнения $\mathbb{R}^d \setminus E(\varphi)$ функция φ совпадает почти всюду с линейной функцией, т.е. $\varphi(t) = (\alpha_I, t) + \beta_I$ для п.в. $t \in I$; (В) число попарно различных градиентов α_I функции φ конечно. Множество $E(\varphi)$ мы называем множеством нелинейности функции φ , это множество состоит из точек, не имеющих окрестности, в которой φ совпадает п.в. с какой-либо линейной функцией. Аналогичное утверждение верно в случае, когда $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ и выполнено условие (3). Первый результат применяется к исследованию строения коммутирующих со сдвигами операторов U таких, что $\|U^n\|_{L^p \rightarrow L^p} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$ (см. § 7). Отметим, что доказательство свойства (А) основано на арифметических соображениях, заимствованных из оригинального доказательства теоремы Берлинга–Хелсона, и на теореме о существенной непрерывности. При выводе свойства (В) мы используем метод “раздвижения спектра”, ранее примененный нами для гладкого случая в работе [9].

В § 4 мы покажем, что множества нелинейности $E(\varphi)$ функций φ , удовлетворяющих условию (3), могут быть сложными даже “для хороших φ ”, а именно:

существует гомеоморфизм φ прямой $\mathbb{R}$ на себя, удовлетворяющий соотношению (3) (в случае $d = 1$) при всех p , $1 < p < \infty$, такой, что $E(\varphi)$ – совершенное множество и при этом как сам гомеоморфизм φ , так и обратный к нему φ^{-1} удовлетворяют условию Липшица. Более того, оператор суперпозиции $m \rightarrow m \circ \varphi$, порожденный φ , является ограниченным оператором в $M_p(\mathbb{R})$. Вместе с тем, легко построить пример счетного множества E (причем E компактно и имеет единственную точку накопления) такого, что если $E(\varphi) = E$, то соотношение (3) не имеет места ни при каком p , $p \neq 2$.

В § 5 мы покажем, что (при $d = 1$) в случае абсолютно непрерывной фазы φ условие (4) влечет (А) и (В). Отметим, что справедливость упомянутой выше гипотезы Хермандера вытекает отсюда в качестве простого следствия. С другой стороны, условие (4) может иметь место даже для нигде не линейных и “довольно гладких” φ . А именно, в § 6 мы покажем, что существует нигде не линейный (т. е. не являющийся линейным ни на каком интервале) гомеоморфизм φ прямой $\mathbb{R}$ на себя (и, таким образом, функция φ , дифференцируемая п. в.) такой, что

$$\|e^{i2^n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

при всех p , $1 < p < \infty$.

Все указанные выше результаты о поведении экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в пространствах мультипликаторов на $\mathbb{R}^d$ верны также на торе $\mathbb{T}^d$.

§ 1. Предварительные сведения

В настоящем параграфе формулируется ряд известных утверждений.

1°. Характеристическая функция 1_I любого куба $I \subseteq \mathbb{R}^d$ принадлежит $M_p(\mathbb{R}^d)$ при всех p , $1 < p < \infty$, и $\|1_I\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \leq c_p$, где константа c_p не зависит от I .

2°. Пусть $m \in M_p(\mathbb{R}^d)$ и l – аффинное отображение $\mathbb{R}^k$ на $\mathbb{R}^d$; тогда $\|m \circ l\|_{M_p(\mathbb{R}^k)} = \|m\|_{M_p(\mathbb{R}^d)}$, в частности норма в $M_p(\mathbb{R}^d)$ инвариантна относительно невырожденных аффинных замен переменной в $\mathbb{R}^d$ (см. [1]).

Следующие теоремы о сужении и продолжении мультипликаторов принадлежат К. де Лю [3] и М. Джодету [12] ($1 < p < \infty$).

3°. Пусть m_0 – функция, принадлежащая $M_p(\mathbb{R}^d)$, равная нулю вне куба I со сторонами длиной 2π , параллельными координатным осям. Рассмотрим функцию m , являющуюся 2π -периодическим по каждой переменной продолжением функции m_0 на все $\mathbb{R}^d$. Тогда m принадлежит $M_p(\mathbb{R}^d)$, причем

$$\|m\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \leq c_p \|m_0\|_{M_p(\mathbb{R}^d)},$$

где c_p – положительная константа.

4°. Если m – 2π -периодическая (по каждой переменной) функция на $\mathbb{R}^d$, то $m \in M_p(\mathbb{T}^d)$ тогда и только тогда, когда $m \in M_p(\mathbb{R}^d)$, причем соответствующие нормы совпадают. С учетом 1° и 3° видим, что нормы функции m в $M_p(\mathbb{R}^d)$ и $M_p(\mathbb{T}^d)$ эквивалентны друг другу и эквивалентны норме функции m_0 в $M_p(\mathbb{R}^d)$.

5°. Пусть $m \in M_p(\mathbb{R}^d)$ и функция $m(t)$ непрерывна в точках $t \in \mathbb{Z}^d$; тогда сужение $m|_{\mathbb{Z}^d} = \{m(k), k \in \mathbb{Z}^d\}$ функции m на $\mathbb{Z}^d$ принадлежит $M_p(\mathbb{Z}^d)$ и $\|m|_{\mathbb{Z}^d}\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)} \leq c_p \|m\|_{M_p(\mathbb{R}^d)}$.

6°. Пусть $m \in M_p(\mathbb{R}^d)$ и m непрерывна на $\mathbb{R}^d$. При $s \leq d$ рассмотрим сужение $\tilde{m}$ функции m на $\mathbb{R}^s$, полагая

$$\tilde{m}(t_1, t_2, \dots, t_s) = m(t_1, t_2, \dots, t_s, 0, \dots, 0).$$

Тогда $\|\tilde{m}\|_{M_p(\mathbb{R}^s)} \leq c_p \|m\|_{M_p(\mathbb{R}^d)}$, где c_p – положительная константа, не зависящая от s . Отсюда и из утверждения 2° очевидно следует, что если l – аффинное отображение $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^d$ и функция $m \in M_p(\mathbb{R}^d)$ непрерывна, то $m \circ l \in M_p(\mathbb{R}^k)$ и $\|m \circ l\|_{M_p(\mathbb{R}^k)} \leq c_p \|m\|_{M_p(\mathbb{R}^d)}$. С учетом утверждения 5° видим, что если l – аффинное отображение $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{R}^d$ и функция $m \in M_p(\mathbb{R}^d)$ непрерывна, то $\|m \circ l\|_{M_p(\mathbb{Z})} \leq c_p \|m\|_{M_p(\mathbb{R}^d)}$. (Константа c_p не зависит от m и l .)

7°. Пусть $m \in M_p(\mathbb{Z}^d)$. Рассмотрим кусочно постоянной функцию m_{ext} на $\mathbb{R}^d$, заданную соотношением

$$m_{\text{ext}}(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} m(\nu) 1_{\Pi}(t - \nu),$$

где Π – куб в $\mathbb{R}^d$ с центром в нуле и сторонами длиной 1, параллельными координатным осям. Тогда m_{ext} принадлежит $M_p(\mathbb{R}^d)$, причем

$$\|m_{\text{ext}}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \leq c_p \|m\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)}.$$

Мы также пользуемся следующими известными свойствами мультипликаторов.

8°. Если m_n , $n = 1, 2, \dots$, – последовательность функций из $M_p(\mathbb{R}^d)$ такая, что $m_n \rightarrow m$ п. в. и $\|m_n\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \leq c$, то $m \in M_p(\mathbb{R}^d)$ и $\|m\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \leq c$ (здесь $1 < p < \infty$).

9°. (Соотношение двойственности.) При $1/p + 1/q = 1$ имеем $M_p = M_q$ с соответствующим равенством норм. Кроме того, при $1 \leq p_1 < p_2 \leq 2$ имеем $A = M_1 \subseteq M_{p_1} \subseteq M_{p_2} \subseteq M_2 = L^\infty$, причем $\|\cdot\|_{L^\infty} = \|\cdot\|_{M_2} \leq \|\cdot\|_{M_{p_2}} \leq \|\cdot\|_{M_{p_1}} \leq \|\cdot\|_{M_1} = \|\cdot\|_A$.

Мы используем следующие обозначения: $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость; $B(x, r)$ – шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x и радиусом $r > 0$; для точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ в $\mathbb{R}^d$ мы обозначаем через (x, y) не только скалярное произведение x и y , но также точку $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_d, y_1, y_2, \dots, y_d)$ в $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (это не приводит к недоразумению); если E, F, α и a – соответственно два множества в $\mathbb{R}^d$, вектор в $\mathbb{R}^d$ и число, то $E + \alpha = \{x + \alpha, x \in E\}$, $aE = \{ax, x \in E\}$ и $E + F = \{x + y: x \in E, y \in F\}$. Для множеств E и F в $\mathbb{R}^d$ мы используем запись $E \sim F$ (E эквивалентно F), если симметрическая разность $E \Delta F$ имеет лебегову меру нуль; $\overline{E}$ означает замыкание множества $E \subseteq \mathbb{R}^d$, и 1_E – это его характеристическая функция: $1_E(t) = 1$ при $t \in E$, $1_E(t) = 0$ при $t \notin E$. Если множество $E \subseteq \mathbb{R}^d$ измеримо, то $|E|$ означает его

лебегову меру и E° – множество его точек плотности, т. е. множество точек $t \in \mathbb{R}^d$, для которых

$$\frac{|E \cap B(t, \delta)|}{|B(t, \delta)|} \rightarrow 1$$

при $\delta \rightarrow +0$. Как известно, $E^\circ \sim E$. Для произвольной локально интегрируемой функции f на $\mathbb{R}^d$ обозначим через $\mathcal{L}(f)$ множество ее точек Лебега, т. е. множество точек $t \in \mathbb{R}^d$, для которых

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{|B(0, \delta)|} \int_{B(t, \delta)} |f(\theta) - f(t)| d\theta = 0.$$

(Напомним, что $\mathcal{L}(f) \sim \mathbb{R}^d$.) Если g и E – соответственно измеримая функция на $\mathbb{R}^d$ и измеримое множество в $\mathbb{R}^d$, то мы пишем $\text{supp } g \subseteq E$, если $g(t) = 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}^d \setminus E$. Если $|E| > 0$, то $\text{ess sup}_E g$ – существенная верхняя грань функции g на множестве E . Символом $^\vee$ обозначено обратное преобразование Фурье. Через $c, c', c_p, c(p), C(p), a_p, b_p, \dots$ обозначены различные (положительные) константы, зависящие, быть может, только от p и размерности d .

§ 2. Существенная непрерывность мультипликаторов

Здесь мы установим свойство существенной непрерывности мультипликаторов, представляющее самостоятельный интерес и необходимое далее при изучении поведения экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в пространствах M_p .

Скажем, что точка $t \in \mathbb{R}^d$ является *точкой существенной непрерывности функции* f , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность U точки t такая, что $|f(\theta) - f(t)| < \varepsilon$ для п. в. $\theta \in U$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и $f \in M_p(\mathbb{R}^d)$. Тогда почти всякая точка $t \in \mathbb{R}^d$ является точкой существенной непрерывности функции f .

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется

ЛЕММА 1. Пусть E_1 и E_2 – измеримые множества в $\mathbb{R}^d$ такие, что

$$|\overline{E_1^\circ} \cap \overline{E_2^\circ}| > 0.$$

Тогда для любого натурального N и любого разбиения отрезка натурального ряда $\{1, 2, \dots, N\}$ на два непересекающихся подмножества $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ найдется арифметическая прогрессия длиной N , $t_k = a + kh$, $k = 1, 2, \dots, N$, $a \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}^d$, такая, что $t_k \in E_1^\circ$, если $k \in \mathcal{E}_1$, и $t_k \in E_2^\circ$, если $k \in \mathcal{E}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем N . Для всякой пары чисел k , $k = 1, 2, \dots, N$, и j , $j = 0, 1, \dots, N$, определим множество X_k^j следующим образом:

$$X_k^j = \begin{cases} E_1^\circ, & \text{если } k \in \mathcal{E}_1 \text{ и } 1 \leq k \leq j, \\ E_2^\circ, & \text{если } k \in \mathcal{E}_2 \text{ и } 1 \leq k \leq j, \\ (\overline{E_1^\circ} \cap \overline{E_2^\circ})^\circ, & \text{если } j < k \leq N. \end{cases}$$

Заметим, что

$$X_k^j = X_k^{j+1} \quad \text{при } k \neq j+1, \quad 0 \leq j < N \quad (5)$$

(это несложно увидеть, рассмотрев отдельно случаи $k < j+1$ и $k > j+1$).

Покажем, что при каждом j , $j = 0, 1, \dots, N$, существует арифметическая прогрессия $\{t_k^j = a^j + kh^j, k = 1, 2, \dots, N\}$ такая, что $t_k^j \in X_k^j$ при всех k , $1 \leq k \leq N$. Доказательство проведем индукцией по j . Хорошо известно, что любое множество положительной меры в $\mathbb{R}^d$ содержит арифметические прогрессии произвольной длины. Ясно, что $X_k^0 = (\overline{E_1^0} \cap \overline{E_2^0})^\circ$ при всех $k = 1, 2, \dots, N$, поэтому в качестве $\{t_k^0, k = 1, 2, \dots, N\}$ можем взять арифметическую прогрессию длиной N , содержащуюся в $(\overline{E_1^0} \cap \overline{E_2^0})^\circ$ (мера этого множества положительна по условию леммы). Фиксируем j такое, что $0 \leq j < N$, и, допустив, что прогрессия $\{t_k^j, k = 1, 2, \dots, N\}$ уже построена, построим прогрессию $\{t_k^{j+1}, k = 1, 2, \dots, N\}$. Положим $\varepsilon = 1/(4N^{d+1})$. Поскольку $t_k^j \in X_k^j$ и все точки множества X_k^j являются его точками плотности, можно выбрать $r > 0$ такое, что

$$|B(t_k^j, r) \setminus X_k^j| < \varepsilon |B(0, r)|, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Выберем $\theta > 0$ достаточно малое так, что

$$|B(0, r) \triangle B(u, r)| < \varepsilon |B(0, r)| \quad (7)$$

при всех $u \in \mathbb{R}^d$ длиной $|u| < \theta$.

Поскольку $t_{j+1}^j \in X_{j+1}^j = (\overline{E_1^0} \cap \overline{E_2^0})^\circ \subseteq \overline{E_1^0} \cap \overline{E_2^0}$, мы можем выбрать вектор $u \in \mathbb{R}^d$, $|u| < \theta$, так, что $t_{j+1}^j + u$ принадлежит E_1^0 или E_2^0 , в зависимости от того, принадлежит ли число $j + 1$ множеству $\mathcal{E}_1$ или $\mathcal{E}_2$ соответственно. Таким образом, будем иметь

$$t_{j+1}^j + u \in X_{j+1}^{j+1}. \quad (8)$$

Из соотношений (6) и (7), очевидно, следует, что

$$|B(t_k^j + u, r) \setminus X_k^j| < 2\varepsilon |B(0, r)|, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Положим

$$G_k = X_k^j - (t_k^j + u), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

и для $k \neq j + 1$ определим множества

$$V_k = \frac{1}{k - (j + 1)} G_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad k \neq j + 1.$$

Используя неравенство (9), в силу выбора ε получаем

$$\begin{aligned} \left| B\left(0, \frac{r}{N}\right) \setminus V_k \right| &\leq \left| B\left(0, \frac{r}{|k - (j + 1)|}\right) \setminus V_k \right| \\ &= \frac{1}{|k - (j + 1)|^d} |B(0, r) \setminus G_k| \leq |B(0, r) \setminus G_k| \\ &= |B(t_k^j + u, r) \setminus X_k^j| < 2\varepsilon |B(0, r)| \\ &= \frac{1}{2N^{d+1}} |B(0, r)| < \frac{1}{N} \left| B\left(0, \frac{r}{N}\right) \right|, \quad k \neq j + 1, \end{aligned}$$

откуда ясно, что пересечение $\bigcap_{1 \leq k \leq N, k \neq j+1} V_k$ непусто.

Выберем v , принадлежащее этому пересечению. Тогда

$$(k - (j + 1))v \in G_k = X_k^j - (t_k^j + u), \quad k \neq j + 1. \quad (10)$$

Положив $t_k^{j+1} = t_k^j + u + (k - (j + 1))v$, $k = 1, 2, \dots, N$, получаем арифметическую прогрессию. При этом из (10), учитывая соотношение (5), получаем $t_k^{j+1} \in X_k^j = X_k^{j+1}$ для $k \neq j + 1$, а с другой стороны, из (8) следует $t_{j+1}^{j+1} = t_{j+1}^j + u \in X_{j+1}^{j+1}$. Таким образом, $t_k^{j+1} \in X_k^{j+1}$ при всех $k = 1, 2, \dots, N$, и наше построение по индукции завершено.

После N шагов получаем прогрессию $\{t_k^N, k = 1, 2, \dots, N\}$ такую, что

$$t_k^N \in X_k^N = \begin{cases} E_1^\circ, & \text{если } k \in \mathcal{E}_1, \\ E_2^\circ, & \text{если } k \in \mathcal{E}_2. \end{cases}$$

Лемма доказана.

Для произвольной (комплекснозначной) функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ определим ее существенный скачок $\Omega(f, t)$ в точке t следующим образом:

$$\Omega(f, t) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \operatorname{ess\,sup}_{\theta: |\theta - t| < \delta} |f(\theta) - f(t)|, \quad (11)$$

где $|\theta - t|$ – расстояние между точками θ и t в $\mathbb{R}^d$. Существенная непрерывность функции f в точке t означает, что $\Omega(f, t) = 0$. Несложно увидеть, что функция $\Omega(f, t)$ измерима¹.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $f \in M_p(\mathbb{R}^d)$. В силу двойственности (см. утверждение 9° § 1) можно считать, что $1 < p < 2$.

Допустим, что множество точек, не являющихся точками существенной непрерывности функции f , имеет положительную меру. Тогда, очевидно, что при некотором $\varepsilon > 0$ множество

$$E = \{t \in \mathcal{L}(f) : \Omega(f, t) > \varepsilon\}$$

имеет положительную меру (напомним, что $\mathcal{L}(f)$ – множество точек Лебега функции f). Ясно также, что существует такое $c \in \mathbb{R}$, что множество

$$E_1 = \left\{ t \in E : |f(t) - c| < \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

имеет положительную меру. Положим

$$E_2 = \left\{ t \in \mathcal{L}(f) : |f(t) - c| > \frac{2\varepsilon}{3} \right\}.$$

Тогда $E_1 \subseteq \overline{E_2^\circ}$ и, поскольку $|E_1| > 0$, получаем

$$|\overline{E_1^\circ} \cap \overline{E_2^\circ}| > 0. \quad (12)$$

¹Пусть $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Для любых натуральных k и n положим $F_{k,n}(t) = (\int_{|t-\theta| < 1/k} |f(\theta) - f(t)|^n d\theta)^{1/n}$. Ясно, что функции $F_{k,n}$ измеримы. Поскольку $\Omega(f, t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{k,n}(t)$, видим, что $\Omega(f, t)$ также является измеримой функцией.

Рассмотрим функцию $F(t) = 9|f(t) - c|^2 - 3\varepsilon^2$. Ясно, что если функция m принадлежит M_p , то комплексно-сопряженная функция $\bar{m}$ также принадлежит M_p и, следовательно, $|m|^2 \in M_p$. Таким образом, $F \in M_p(\mathbb{R}^d)$. Заметим, что на множествах E_1, E_2 мы имеем

$$F(t) < -\varepsilon^2 \quad \text{при} \quad t \in E_1, \quad F(t) > \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad t \in E_2. \quad (13)$$

Фиксируем натуральное N и полином

$$P(t) = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k e^{ikt}, \quad \varepsilon_k = \pm 1,$$

такой, что $\|P\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq c_p \|P\|_{L^2(\mathbb{T})} = c_p \sqrt{N}$, где $1/p + 1/q = 1$ (существование такого полинома хорошо известно). Воспользовавшись леммой 1, в силу (12) можем найти арифметическую прогрессию $\{t_k = a + kh, k = 1, 2, \dots, N\}$ такую, что

$$t_k \in E_1^\circ, \quad \text{если} \quad \varepsilon_k = -1, \quad \text{и} \quad t_k \in E_2^\circ, \quad \text{если} \quad \varepsilon_k = +1. \quad (14)$$

Поскольку $\mathcal{L}(f) \subseteq \mathcal{L}(F)$ (это немедленно следует из того, что $f \in M_p(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$), то точки t_k принадлежат $\mathcal{L}(F)$.

Рассмотрим средние

$$F_\delta(t) = \frac{1}{|B(0, \delta)|} \int_{B(0, \delta)} F(t + \theta) d\theta, \quad \delta > 0.$$

Для $k = 1, 2, \dots, N$ имеем $F_\delta(t_k) \rightarrow F(t_k)$ при $\delta \rightarrow +0$. Заметим также, что $\|F_\delta\|_{M_p} \leq \|F\|_{M_p}$, $\delta > 0$. Вместе с тем, поскольку функции F_δ непрерывны, получаем $\|\{F_\delta(a + kh)\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{M_p(\mathbb{Z})} \leq c_p \|F_\delta\|_{M_p(\mathbb{R}^d)}$ (см. утверждение 6° § 1). Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N F_\delta(t_k) \varepsilon_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{k=1}^N F_\delta(t_k) e^{ikt} \right) \overline{P(t)} dt \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^N F_\delta(t_k) e^{ikt} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \|P\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq c'_p \|F\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \left\| \sum_{k=1}^N e^{ikt} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \sqrt{N}. \end{aligned}$$

Устремляя δ к нулю и учитывая оценку

$$\left\| \sum_{k=1}^N e^{ikt} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq c''_p N^{1/q},$$

имеем

$$\sum_{k=1}^N F(t_k) \varepsilon_k \leq c_p \|F\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} N^{\frac{1}{q} + \frac{1}{2}}.$$

Отсюда в силу соотношений (13), (14) получаем

$$\varepsilon^2 N \leq c_p \|F\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} N^{\frac{1}{q} + \frac{1}{2}},$$

что невозможно, если N достаточно велико, поскольку $q > 2$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 немедленно следует теорема об идемпотентах [11], цитированная во введении. Если $1_G \in M_p(\mathbb{R}^d)$ при каком-либо p , $p \neq 2$, то функция 1_G существенно непрерывна почти всюду, откуда ясно, что G эквивалентно открытому множеству.

В заключение этого параграфа отметим, что теорему 1 можно переформулировать следующим образом: *если $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и $f \in M_p(\mathbb{R}^d)$, то функция f совпадает почти всюду с функцией, непрерывной почти всюду.* Убедимся, что, вообще, если $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, то следующие условия эквивалентны:

1) почти всякая точка $t \in \mathbb{R}^d$ является точкой существенной непрерывности функции f ;

2) существует функция F такая, что $F(t) = f(t)$ для п. в. $t \in \mathbb{R}^d$, и F непрерывна почти всюду.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна. Покажем, что 1) $\Rightarrow$ 2). При $r > 0$ рассмотрим функцию

$$F_r(t) = \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in B(t,r)} f(\theta)$$

и положим

$$F(t) = \lim_{r \rightarrow +0} F_r(t), \quad t \in \mathbb{R}^d$$

(существование конечного предела очевидно). Пусть E – множество точек существенной непрерывности функции f . Имеем $E \sim \mathbb{R}^d$.

Пусть $t \in E$. При $\varepsilon > 0$ выберем шар $B(t, \delta)$, $\delta > 0$, такой, что для п. в. $\theta \in B(t, \delta)$ выполняется соотношение

$$f(t) - \varepsilon < f(\theta) < f(t) + \varepsilon. \quad (15)$$

При r таком, что $0 < r < \delta$, перейдем в (15) к существенной верхней грани по $\theta \in B(t, r) \subset B(t, \delta)$ и получим $f(t) - \varepsilon \leq F_r(t) \leq f(t) + \varepsilon$. Устремляя r к нулю, видим, что $f(t) - \varepsilon \leq F(t) \leq f(t) + \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, получаем $F(t) = f(t)$.

Покажем, что функция F непрерывна в любой точке множества E . Пусть $t \in E$ и $\varepsilon > 0$. Мы можем найти шар $B(t, \delta)$ такой, что для п. в. $\theta \in B(t, \delta)$ имеем

$$|f(\theta) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (16)$$

Убедимся, что для любой точки $t' \in B(t, \delta/2)$ будет выполнено неравенство $|F(t') - F(t)| < \varepsilon$. Пусть $0 < r < \delta/2$. Если $t' \in B(t, \delta/2)$, то оценка

$$F_r(t') - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(\theta) \leq F_r(t') \quad (17)$$

справедлива для всех θ из некоторого множества положительной меры в $B(t', r) \subset B(t, \delta)$. Поскольку (16) выполняется для почти всех $\theta \in B(t, \delta)$, видим, что существует θ такое, что выполнены оба соотношения (16) и (17), откуда имеем $|F_r(t') - f(t)| < \varepsilon$. Так как это верно при любом r , $0 < r < \delta/2$, получаем $|F(t') - f(t)| < \varepsilon$. Вместе с тем, поскольку $t \in E$, то $F(t) = f(t)$. Таким образом, $|F(t') - F(t)| < \varepsilon$.

§ 3. Поведение экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ при $\lambda \in \mathbb{Z}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$

Здесь мы рассмотрим поведение экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в пространствах M_p в случае, когда частоты λ целые, и в случае, когда частоты λ пробегает все вещественные числа. В первом случае естественно считать (см. введение), что $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 2\pi[$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 2\pi[$ — измеримая функция такая, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1), \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Тогда φ обладает следующими свойствами:

(А) существует замкнутое множество $E(\varphi) \subset \mathbb{R}^d$ лебеговой меры нуль такое, что на каждой компоненте связности I его дополнения $\mathbb{R}^d \setminus E(\varphi)$ функция φ совпадает почти всюду с линейной функцией, т. е. $\varphi(t) = (\alpha_I, t) + \beta_I$ для п. в. $t \in I$;

(В) множество всех попарно различных векторов α_I конечно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда φ обладает теми же свойствами (А) и (В), что и в утверждении теоремы 2.

Как мы увидим далее, теорема 3 немедленно следует из теоремы 2, причем достаточно, чтобы условие $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1)$ выполнялось, когда частота λ пробегает две арифметические прогрессии с несоизмеримым шагом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $p \neq 2$ и Φ — произвольная вещественная измеримая функция на $\mathbb{R}^s$ такая, что $\|e^{i\lambda\Phi}\|_{M_p(\mathbb{R}^s)} = O(1)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Тогда множество $G = \{t \in \mathbb{R}^s: \Phi(t) = 0 \pmod{2\pi}\}$ эквивалентно открытому множеству в $\mathbb{R}^s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\|e^{i\lambda\Phi}\|_{M_p(\mathbb{R}^s)} \leq \gamma$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Запишем

$$g_\Lambda = \frac{1}{\Lambda} \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} e^{i\lambda\Phi},$$

где $\Lambda = 1, 2, \dots$. Тогда $\|g_\Lambda\|_{M_p} \leq \gamma$ и при $\Lambda \rightarrow \infty$ имеем $g_\Lambda(t) \rightarrow 1_G(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}^s$. Следовательно, $1_G \in M_p(\mathbb{R}^s)$ (см. утверждение 8° § 1). По теореме об идемпотентах множество G эквивалентно некоторому открытому множеству. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. В предположениях теоремы 2 почти всякая точка $t \in \mathbb{R}^d$ является точкой существенной непрерывности функции φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два множества:

$$E_1 = \{t: 0 < \Omega(\varphi, t) < 2\pi\},$$

$$E_2 = \{t: \Omega(\varphi, t) = 2\pi\},$$

где $\Omega(\varphi, t)$ – существенный скачок функции φ в точке t (см. (11)). Положим

$$F_1 = \{t: \Omega(e^{i\varphi}, t) > 0\},$$

$$F_2 = \{t: \varphi(t) = 0\}.$$

Напомним, что $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 2\pi[$. Таким образом, функция φ существенно непрерывна в любой точке дополнения $\mathbb{R}^d \setminus (E_1 \cup E_2)$. По той же причине ясно, что $E_1 \subseteq F_1$ и $E_2 \subseteq F_2$. Поскольку $e^{i\varphi} \in M_p$ и $p \neq 2$, то в силу теоремы 1 имеем $|F_1| = 0$, откуда $|E_1| = 0$. С другой стороны, по лемме 2 множество F_2 эквивалентно некоторому открытому множеству U . Если мы предположим, что $|E_2| > 0$, то U непусто. Тогда $\varphi(t) = 0$ для п. в. $t \in U$, откуда $\Omega(\varphi, t) = 0$ для п. в. $t \in U$ и, следовательно, $\Omega(\varphi, t) = 0$ для п. в. $t \in E_2$, что противоречит определению множества E_2 . Таким образом, $|E_2| = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $F \subseteq \mathbb{R}^d$. Тогда:

(а) если $F \sim \mathbb{R}^d$, то для почти всех точек $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ арифметическая прогрессия $\{x + ky, k \in \mathbb{Z}\}$ содержится в F ;

(б) если $|F| > 0$, то для любого натурального N множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ таких, что прогрессия $\{x + ky, k = 1, 2, \dots, N\}$ содержится в F , имеет положительную меру (в $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k \in \mathbb{Z}$ положим $\mathcal{F}^k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d: x + ky \in F\}$. Каждое множество $\mathcal{F}^k$ является прообразом измеримого множества при аффинном отображении и, следовательно, измеримо. Поэтому оба множества $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^k$ и $\bigcap_{1 \leq k \leq N} \mathcal{F}^k$ измеримы. Если $F \sim \mathbb{R}^d$, то для любого $y \in \mathbb{R}^d$ имеем $F - ky \sim \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{Z}$, и, следовательно, при любом $y \in \mathbb{R}^d$ получаем $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} (F - ky) \sim \mathbb{R}^d$, что немедленно влечет (а) (в силу теоремы Фубини).

Докажем (б). Положим $\varepsilon = 1/(2N)^{d+1}$. Выберем точку t , являющуюся точкой плотности множества F . Тогда для некоторого $r > 0$ будем иметь

$$|B(t, r) \setminus F| < \varepsilon |B(t, r)|.$$

Положим $r_1 = r/(2N)$. Пусть $y \in B(0, r_1)$. Заметим, что тогда при $k = 1, 2, \dots, N$ имеем $B(t + ky, r_1) \subseteq B(t, r)$ и, следовательно, при этих k

$$|B(t, r_1) \setminus (F - ky)| = |B(t + ky, r_1) \setminus F| \leq |B(t, r) \setminus F| < \varepsilon |B(t, r)|.$$

Отсюда следует

$$\left| \bigcup_{k=1}^N (B(t, r_1) \setminus (F - ky)) \right| < N\varepsilon |B(t, r)| = N\varepsilon (2N)^d |B(t, r_1)| = \frac{1}{2} |B(t, r_1)|,$$

и, таким образом,

$$\left| \bigcap_{k=1}^N (F - ky) \right| > 0.$$

Лемма доказана.

Скажем, что точка $t \in \mathbb{R}^d$ является точкой нелинейности функции φ , если не существует окрестности $U \ni t$, в которой φ совпадает п. в. с линейной

функцией. Множество всех таких точек назовем множеством нелинейности функции φ и обозначим через $E(\varphi)$. Ясно, что множество нелинейности любой функции φ замкнуто и на каждой компоненте связности его дополнения функция φ совпадает п. в. с линейной функцией. Покажем, что в предположениях теоремы относительно φ множество $E(\varphi)$ имеет лебегову меру нуль. Тем самым часть (А) теоремы будет доказана.

Напомним, что (конечное) множество вещественных чисел

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$$

называется *рационально независимым по mod 2π* , если равенство

$$\sum_{k=1}^N n_k \varphi_k = 0 \pmod{2\pi}, \quad n_k \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

возможно лишь в случае $n_1 = n_2 = \dots = n_N = 0$. Известная теорема Кронекера утверждает, что если множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ рационально независимо по mod 2π , то для любого $\varepsilon > 0$ и для любых комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_N$, $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_N| = 1$, найдется $\lambda \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$|e^{i\lambda\varphi_k} - z_k| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Для каждого натурального N и целочисленного вектора

$$n = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}^N$$

определим функцию Φ_n на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ и множество $G_n \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, y) &= \sum_{k=1}^N n_k \varphi(x + ky), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \\ G_n &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : \Phi_n(x, y) = 0 \pmod{2\pi}\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. *Существует натуральное N_0 такое, что*

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \sim \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^{N_0} \setminus \{0\}} G_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь утверждением (а) леммы 4, видим, что для почти всех точек $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ арифметическая прогрессия $\{x + ky, k \in \mathbb{Z}\}$ содержится в $\mathcal{L}(\varphi)$. Поэтому если допустить, что утверждение леммы 5 неверно, то для любого N найдется арифметическая прогрессия $\{a + kh, k = 1, 2, \dots, N\} \subset \mathcal{L}(\varphi)$, $a \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}^d$, такая, что множество $\{\varphi_k = \varphi(a + kh), k = 1, 2, \dots, N\}$ рационально независимо по mod 2π . Для $\lambda \in \mathbb{Z}$ и $\delta > 0$ положим

$$g_{\lambda, \delta}(t) = \frac{1}{|B(0, \delta)|} \int_{B(0, \delta)} e^{i\lambda\varphi(t+\theta)} d\theta.$$

Из тривиальной оценки $|e^{i\lambda\varphi(\theta)} - e^{i\lambda\varphi(t)}| \leq |\lambda| |\varphi(\theta) - \varphi(t)|$ имеем $\mathcal{L}(\varphi) \subseteq \mathcal{L}(e^{i\lambda\varphi})$. Следовательно,

$$g_{\lambda, \delta}(a + kh) \rightarrow e^{i\lambda\varphi_k}, \quad \delta \rightarrow +0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

В предположении, что $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \leq \gamma$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, имеем

$$\|g_{\lambda,\delta}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \leq \gamma, \quad \lambda \in \mathbb{Z}, \quad \delta > 0,$$

и поскольку функции $g_{\lambda,\delta}$ непрерывны, то, воспользовавшись утверждением 6° § 1, получаем

$$\|\{g_{\lambda,\delta}(a + kh)\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{M_p(\mathbb{Z})} \leq c(p)\gamma.$$

Таким образом, для любых чисел $c_1, c_2, \dots, c_N$ имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^N g_{\lambda,\delta}(a + kh) c_k e^{ikt} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq c(p)\gamma \left\| \sum_{k=1}^N c_k e^{ikt} \right\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

и в силу (18)

$$\left\| \sum_{k=1}^N e^{i\lambda\varphi_k} c_k e^{ikt} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq c(p)\gamma \left\| \sum_{k=1}^N c_k e^{ikt} \right\|_{L^p(\mathbb{T})}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Теорема Кронекера немедленно влечет оценку

$$\left\| \sum_{k=1}^N \varepsilon_k c_k e^{ikt} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq c(p)\gamma \left\| \sum_{k=1}^N c_k e^{ikt} \right\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

для любых чисел $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 1, 2, \dots, N$. Поскольку N и $\{c_k\}_{k=1}^N$ были выбраны произвольно, последняя оценка противоречит известному факту: тригонометрическая система не образует безусловный базис в $L^p(\mathbb{T})$, $p \neq 2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $n \in \mathbb{Z}^N$. Тогда G_n эквивалентно открытому множеству в $\mathbb{R}^{2d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь утверждением 2° § 1 в предположении, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \leq \gamma, \quad \lambda \in \mathbb{Z},$$

имеем

$$\|e^{i\lambda\Phi_n}\|_{M_p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \leq \gamma^N, \quad \lambda \in \mathbb{Z},$$

и остается только воспользоваться леммой 2. Лемма доказана.

Фиксируем N_0 , существование которого установлено в лемме 5. Пусть $\mathbb{Z}_0$ – подмножество в $\mathbb{Z}^{N_0} \setminus \{0\}$, состоящее из тех векторов n , для которых $|G_n| > 0$. В силу леммы 6 каждое множество G_n , $n \in \mathbb{Z}_0$, эквивалентно некоторому непустому открытому множеству U_n . Таким образом, имеем

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \sim \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_0} U_n, \quad U_n \sim G_n. \quad (19)$$

Пусть теперь W – множество всех $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ таких, что все точки $x + ky$, $k \in \mathbb{Z}$, являются точками существенной непрерывности функции φ . Ясно, что из леммы 3 следует (см. утверждение (а) леммы 4)

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \sim W. \quad (20)$$

Из соотношений (19) и (20) получаем

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \sim \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_0} U_n \cap W. \quad (21)$$

ЛЕММА 7. Пусть $n \in \mathbb{Z}_0$ и $(a, h) \in U_n \cap W$. Тогда существует номер k_0 , $1 \leq k_0 \leq N_0$, такой, что в некоторой окрестности точки $a + k_0 h$ функция φ п. в. совпадает с линейной функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем k_0 так, чтобы $n_{k_0} \neq 0$. Поскольку $U_n \sim G_n$, то

$$\sum_{k=1}^{N_0} n_k \varphi(x + ky) = 0 \pmod{2\pi} \quad \text{для п. в. } (x, y) \in U_n.$$

Ясно, что поскольку функция φ существенно непрерывна во всех точках $a + kh$, $k \in \mathbb{Z}$, то, выбрав достаточно малую открытую ограниченную окрестность V точки (a, h) , для некоторого целого m получим

$$\sum_{k=1}^{N_0} n_k \varphi(x + ky) = 2\pi m \quad \text{для п. в. } (x, y) \in V. \quad (22)$$

Фиксируем бесконечно дифференцируемую функцию ρ на $\mathbb{R}^d$, принимающую только неотрицательные значения и такую, что $\text{supp } \rho \subseteq B(0, 1)$ и

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1.$$

Для $\varepsilon > 0$ положим

$$\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

и рассмотрим свертку $\varphi_\varepsilon = \varphi * \rho_\varepsilon$. Функции φ_ε бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}^d$ и $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ п. в. при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Рассмотрим окрестности I и J соответственно точек a и h такие, что окрестность $I \times J$ вместе со своим замыканием содержится в V . Ясно, что если $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, то из соотношения (22) следует, что

$$\sum_{k=1}^{N_0} n_k \varphi_\varepsilon(x + ky) = 2\pi m \quad \text{для всех } (x, y) \in I \times J \text{ и } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (23)$$

Пусть $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d$ – целые неотрицательные числа, $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_d = N_0$. Пусть s – натуральное число, $1 \leq s \leq N_0$. Очевидно, найдутся целые $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d$ такие, что $0 \leq \mu_j \leq \nu_j$, $j = 1, 2, \dots, d$, и $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_d = s$. Дифференцируя (23), имеем

$$\frac{\partial^{(\nu_1 - \mu_1) + \dots + (\nu_d - \mu_d)}}{\partial x_1^{(\nu_1 - \mu_1)} \dots \partial x_d^{(\nu_d - \mu_d)}} \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_d}}{\partial y_1^{\mu_1} \dots \partial y_d^{\mu_d}} \sum_{k=1}^{N_0} n_k \varphi_\varepsilon(x + ky) = 0, \\ (x, y) \in I \times J, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$. Отсюда, полагая

$$(D_{\nu_1, \dots, \nu_d} f)(t) = \left(\frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_d}}{\partial t_1^{\nu_1} \dots \partial t_d^{\nu_d}} f \right)(t), \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d,$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{N_0} k^s n_k (D_{\nu_1, \dots, \nu_d} \varphi_\varepsilon)(x + ky) = 0, \quad (x, y) \in I \times J, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Поскольку это верно при любом s , $1 \leq s \leq N_0$, и определитель матрицы $(k^s)_{1 \leq k, s \leq N_0}$ не равен нулю, то, учитывая, что $n_{k_0} \neq 0$, видим, что

$$(D_{\nu_1, \dots, \nu_d} \varphi_\varepsilon)(x + k_0 y) = 0, \quad (x, y) \in I \times J, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Напомним, что числа $\nu_1, \dots, \nu_d$, $\nu_1 + \dots + \nu_d = N_0$, были выбраны произвольно. Таким образом, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ все частные производные порядка N_0 функции φ_ε обращаются в нуль в области $\Delta = I + k_0 J$. Следовательно, φ_ε является полиномом степени не выше $N_0 - 1$ на Δ . Поскольку $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ п. в. при $\varepsilon \rightarrow +0$, видим, что φ совпадает п. в. с полиномом (степени не выше $N_0 - 1$) на Δ . При этом мы, конечно, имеем $\Delta = I + k_0 J \ni a + k_0 h$. Остается лишь заметить, что дословное повторение оригинального доказательства цитированной во введении теоремы Хермандера [1, теорема 1.14] немедленно дает ее локальный вариант, а именно: если (измеримая) функция $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой области $\Delta \subseteq \mathbb{R}^d$ и удовлетворяет условию (4), то φ линейна в Δ ($p \neq 2$). Лемма доказана.

Завершим доказательство утверждения (А) теоремы 2. Из (21) и леммы 7 следует, что для почти всех $(a, h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ арифметическая прогрессия $\{a + kh, k = 1, 2, \dots, N_0\}$ не содержится целиком в $E(\varphi)$. В силу утверждения (b) леммы 4 получаем $|E(\varphi)| = 0$.

Докажем теперь часть (В) теоремы 2. Воспользуемся методом “раздвижения спектра”, впервые использованным нами для гладкого случая в работе [9]. В “кусочно линейном” случае доказательство сводится к следующей лемме.

ЛЕММА 8. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция. Предположим, что имеется N областей $I_k \subset \mathbb{R}^d$, $k = 1, 2, \dots, N$, таких, что $\varphi(t) = (\alpha_k, t) + \beta_k$ для п. в. $t \in I_k$, причем векторы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ попарно различны. Тогда для любой неограниченной последовательности вещественных чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots$, имеем

$$\sup_n \|e^{i\lambda_n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \geq c_p N^{|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|}.$$

Пусть $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$ – пространство векторнозначных функций $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^N$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_N)$, $g_k \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $k = 1, 2, \dots, N$, снабженное нормой

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)} = \left\| \left(\sum_{k=1}^N |g_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Для $\alpha \in \mathbb{R}^d$ пусть S_α обозначает оператор сдвига на α , $(S_\alpha g)(t) = g(t - \alpha)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Пусть далее $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ – набор векторов $\alpha_k \in \mathbb{R}^d$, $k = 1, 2, \dots, N$. Определим оператор S_α в $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$, полагая

$$g = (g_1, \dots, g_N) \rightarrow S_\alpha g = (S_{\alpha_1} g_1, \dots, S_{\alpha_N} g_N), \quad (24)$$

где $g = (g_1, \dots, g_N) \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$.

Для доказательства леммы 8 нам потребуется следующее утверждение [9].

ЛЕММА 9. Пусть $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ – набор попарно различных векторов в $\mathbb{R}^d$. Тогда для нормы оператора (24), рассматриваемого как оператор в $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$, имеем

$$\|S_\alpha\| \geq N^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, выберем $\delta > 0$ такое, что шары $B(\alpha_k, \delta)$, $k = 1, 2, \dots, N$, попарно не пересекаются, и положим $g_k = 1_{B(0, \delta)}$, $k = 1, 2, \dots, N$. Положим далее $g = (g_1, g_2, \dots, g_N)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|S_\alpha g\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)} &= \left\| \left(\sum_{k=1}^N |S_{\alpha_k} g_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|1_{\bigcup_{k=1}^N B(\alpha_k, \delta)}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = (N|B(0, \delta)|)^{1/p}, \end{aligned}$$

и поскольку

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)} = \|N^{1/2} 1_{B(0, \delta)}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = N^{1/2} |B(0, \delta)|^{1/p},$$

получаем утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8. В силу соображений двойственности можем считать, что $1 \leq p < 2$. Положим

$$\gamma = \sup_n \|e^{i\lambda_n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)}.$$

Очевидно, можно считать, что $\lambda_n \rightarrow +\infty$.

Хорошо известно (см., например, [2]), что если Q – ограниченный оператор в $L^p(\mathbb{R}^d)$, то при любом N и любых $f_1, f_2, \dots, f_N \in L^p(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^N |Q f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_p \|Q\| \left\| \left(\sum_{k=1}^N |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad (25)$$

где $\|Q\|$ – норма оператора Q в $L^p(\mathbb{R}^d)$ (c_p не зависит от N). Фиксируем n и применим эту оценку к оператору $Q_n: f \rightarrow (e^{i\lambda_n \varphi} \hat{f})^\vee$. Для всех n и произвольных $f_1, f_2, \dots, f_N$ из $L^p \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ получим

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^N |(e^{i\lambda_n \varphi} \hat{f}_k)^\vee|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_p \gamma \left\| \left(\sum_{k=1}^N |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \quad (26)$$

Пусть $\mathcal{E}_p$ – множество функций g из $L^p \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, преобразование Фурье которых $\hat{g}$ имеет компактный носитель и непрерывно. Хорошо известно [13], что $\mathcal{E}_p$ всюду плотно в $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Фиксируем функции $g_1, g_2, \dots, g_N$ из $\mathcal{E}_p$. Положим

$$x_k = \hat{g}_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Внутри каждой из областей I_k выберем произвольным образом точку t_k и подберем λ_n столь большим, что для функций

$$y_k(t) = x_k(\lambda_n(t - t_k))$$

имеем

$$\text{supp } y_k \subset I_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Пусть $f_k = \check{y}_k$; тогда

$$|f_k(u)| = |\check{y}_k(u)| = \left| \frac{1}{\lambda_n^d} \check{x}_k\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \right| = \left| \frac{1}{\lambda_n^d} g_k\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \right|.$$

С другой стороны, $\varphi(t) = (\alpha_k, t) + \beta_k$ п. в. на I_k , поэтому мы получаем

$$\begin{aligned} |(e^{i\lambda_n\varphi} \hat{f}_k)^\vee(u)| &= |(e^{i\lambda_n\varphi} y_k)^\vee(u)| = |\check{y}_k(u + \lambda_n\alpha_k)| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda_n^d} \check{x}_k\left(\frac{u + \lambda_n\alpha_k}{\lambda_n}\right) \right| = \left| \frac{1}{\lambda_n^d} g_k\left(\frac{u}{\lambda_n} + \alpha_k\right) \right|. \end{aligned}$$

Оценка (26) влечет

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k=1}^N \left| \frac{1}{\lambda_n^d} g_k\left(\frac{u}{\lambda_n} + \alpha_k\right) \right|^2 \right)^{p/2} du \right)^{1/p} \\ &= \left\| \left(\sum_{k=1}^N |(e^{i\lambda_n\varphi} \hat{f}_k)^\vee|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_p \gamma \left\| \left(\sum_{k=1}^N |f_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &= c_p \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k=1}^N \left| \frac{1}{\lambda_n^d} g_k\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \right|^2 \right)^{p/2} du \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

После замены переменной $v = u/\lambda_n$ в интегралах имеем

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k=1}^N |g_k(v + \alpha_k)|^2 \right)^{p/2} dv \right)^{1/p} \leq c_p \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k=1}^N |g_k(v)|^2 \right)^{p/2} dv \right)^{1/p}.$$

Поскольку $\mathcal{E}_p$ плотно в $L^p(\mathbb{R}^d)$, последняя оценка верна для любого набора функций $g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Это означает, что норма оператора (24) (с заменой α на $-\alpha$) в $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$ не превосходит $c_p \gamma$. Согласно лемме 9 получаем $N^{1/p-1/2} \leq c_p \gamma$. Лемма доказана.

Теорема 2 также доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из теоремы 2 легко получить следующее более общее утверждение. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция такая, что $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1)$, $\lambda \in \Lambda$, где $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ – множество, содержащее две бесконечные арифметические прогрессии $a_1 + n\sigma_1$ и $a_2 + n\sigma_2$, $n \in \mathbb{Z}$, такие, что отношение σ_1/σ_2 иррационально. Тогда φ обладает свойствами (А) и (В) из теоремы 2.

В самом деле,

$$e^{in\sigma_{1,2}\varphi} = e^{i(a_{1,2}+n\sigma_{1,2})\varphi} e^{-i(a_{1,2}+0\sigma_{1,2})\varphi},$$

и мы имеем $\|e^{in\sigma_{1,2}\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$ (комплексное сопряжение не меняет норму функции в M_p). Положим

$$\psi_{1,2}(t) = 2\pi\{\sigma_{1,2}\varphi(t)/(2\pi)\}, \quad N_{1,2}(t) = [\sigma_{1,2}\varphi(t)/(2\pi)],$$

где $\{\cdot\}$ и $[\cdot]$ означают дробную и целую часть соответственно. Имеем $\sigma_{1,2}\varphi = \psi_{1,2} + 2\pi N_{1,2}$, и в силу условия $\|e^{in\sigma_{1,2}\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, получаем $\|e^{in\psi_{1,2}}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1)$. Тогда для функций $\psi_{1,2}$ справедливо заключение теоремы 2.

Рассмотрим какую-нибудь компоненту связности I множества $\mathbb{R}^d \setminus (E(\psi_1) \cup E(\psi_2))$ и соответствующие линейные функции $l_{1,2} = (\alpha_{1,2}, t) + \beta_{1,2}$ такие, что на I функции $\psi_{1,2}$ совпадают п. в. с $l_{1,2}$ соответственно. Сформулированное утверждение будет доказано, если мы покажем, что $N_1 \equiv \text{const}$ п. в. на I . Имеем

$$\sigma_2(l_1 + 2\pi N_1) = \sigma_1(l_2 + 2\pi N_2)$$

п. в. на I , и, следовательно, $\sigma_2 N_1 - \sigma_1 N_2 = l$ п. в. на I , где l – линейная функция. Поскольку функция $\sigma_2 N_1 - \sigma_1 N_2$ принимает не более чем счетное число значений, получаем $l(t) \equiv \text{const}$. Таким образом, $\sigma_2 N_1 - \sigma_1 N_2 \equiv \text{const}$ на некотором множестве I' , $I' \sim I$. Пусть $x, y \in I'$. Имеем

$$\sigma_2 N_1(x) - \sigma_1 N_2(x) = \sigma_2 N_1(y) - \sigma_1 N_2(y),$$

т. е.

$$\sigma_2(N_1(x) - N_1(y)) = \sigma_1(N_2(x) - N_2(y)).$$

Отсюда $N_1 = \text{const}$ п. в. на I .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как мы видели, доказательство утверждения (А) теорем 2, 3 основано на комбинации арифметических соображений и теоремы о существенной непрерывности. Значительно более слабый результат, а именно тот факт, что из условия (3) следует, что множество нелинейности $E(\varphi)$ нигде не плотно, можно получить, пользуясь только арифметическими соображениями в предположении того, что функция φ непрерывна. Это неявно содержится в работе [13, гл. VIII, § 4]². Отметим также, что функции, линейные на интервалах, дополнительных к некоторому замкнутому нигде не плотному множеству, и имеющие конечное число угловых коэффициентов, впервые появились в работе [14] в связи с задачей об отображениях прямой, сохраняющих множества Сидона.

²Отметим попутно, что утверждение пункта (b) из книги [13, с. 219] неверно. Автор ошибочно полагает, что если функция φ непрерывно дифференцируема и $E(\varphi)$ нигде не плотно, то φ линейна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если функция φ непрерывна, то ограничение на множество значений, т. е. условие $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 2\pi[$, в теореме 2 является лишним (достаточно рассмотреть вместо φ функцию $2\pi\{\varphi/(2\pi)\}$, где $\{\cdot\}$ – дробная часть).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В § 6 мы покажем, что существует нигде не линейный (т. е. не являющийся линейным ни на каком интервале) гомеоморфизм φ прямой $\mathbb{R}$ такой, что

$$\|e^{i2^n\varphi}\|_{M_p} = O(1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

при всех p , $1 < p < \infty$. Неясно, может ли для нигде не линейной непрерывной функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ иметь место оценка

$$\|e^{i\lambda_n\varphi}\|_{M_p} = O(1)$$

при каком-либо $p \neq 2$ в случае, когда частоты $\{\lambda_n\}$ растут медленнее геометрической прогрессии. Предположим, что последовательность $\{\lambda_n\}$ обладает тем свойством, что существует s такое, что любое число $\lambda \in \mathbb{Z}$ представимо в виде $\lambda = \pm\lambda_{n_1} \pm \lambda_{n_2} \pm \dots \pm \lambda_{n_m}$, где $m \leq s$. В этом случае если функция $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 2\pi[$ измерима и $\|e^{i\lambda_n\varphi}\|_{M_p} = O(1)$ при каком-либо p , $p \neq 2$, то φ обладает свойствами (А) и (В). То же верно для непрерывных функций $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Действительно, если $\|e^{i\lambda_n\varphi}\|_{M_p} \leq \gamma$ для любого n , то при любом $\lambda \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p} = \|e^{\pm i\lambda_{n_1}\varphi} e^{\pm i\lambda_{n_2}\varphi} \dots e^{\pm i\lambda_{n_m}\varphi}\|_{M_p} \leq \gamma^m \leq (\gamma + 1)^s$$

и остается воспользоваться теоремой 2 (см. также замечание 2). В частности, это так, если $\|e^{in^2\varphi}\|_{M_p} = O(1)$, $n = 1, 2, \dots$.

§ 4. Множества нелинейности

Согласно теореме Шварца (см. [1]), отмеченной во введении, если φ – кусочно линейная функция на $\mathbb{R}$, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

при всех p , $1 < p < \infty$. Более того, если при этом угловые коэффициенты функции φ отличны от нуля³, то

$$\|m \circ \varphi\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq c(p, \varphi) \|m\|_{M_p(\mathbb{R})}, \quad 1 < p < \infty. \quad (27)$$

В указанном случае множество нелинейности $E(\varphi)$ функции φ конечно.

С другой стороны, легко построить счетное компактное множество $E \subset \mathbb{R}$ с единственной точкой накопления такое, что если $E(\varphi) = E$ и $p \neq 2$, то $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} \neq O(1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Действительно, при $n = 1, 2, \dots$ пусть F_n – конечное множество в $\mathbb{Z}$ такое, что $\|1_{F_n}\|_{M_{2-\frac{1}{n}}(\mathbb{Z})} > n$ (тот факт, что при каждом $p \neq 2$ мы можем выбрать конечное множество $F \subset \mathbb{Z}$ так, что норма $\|1_F\|_{M_p(\mathbb{Z})}$ сколь угодно велика, следует из того, что тригонометрическая система не образует безусловный базис в $L^p(\mathbb{T})$, $p \neq 2$). С учетом утверждения 9° § 1 ясно,

³Это чисто техническое требование вызвано тем, что суперпозиция функции из L^∞ с функцией, имеющей интервалы постоянства, вообще говоря, не определена.

что для всех $p \neq 2$ мы имеем $\|1_{F_n}\|_{M_p(\mathbb{Z})} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть далее a_n , $n = 1, 2, \dots$, — убывающая к нулю последовательность положительных чисел. Обозначим через E_n какую-нибудь аффинную копию множества F_n (т. е. образ множества F_n при аффинном отображении прямой), содержащуюся в интервале $I_n = (a_{n+1}, a_n)$. Пусть $E = \bigcup_n E_n \cup \{0\}$. Предположим, что $E(\varphi) = E$ и $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \gamma$, $\lambda \in \mathbb{R}$, при каком-либо p , $p \neq 2$. Мы, конечно, можем считать, что на каждом интервале, дополнительном к E , функция φ совпадает всюду с некоторой линейной функцией. Фиксируем n и выберем $\delta > 0$ так, что δ -окрестности точек из E_n попарно не пересекаются и содержатся в интервале $(a_{n+1} + 2\delta, a_n - 2\delta)$. Положим $\Phi(t) = \varphi(t + \delta) - 2\varphi(t) + \varphi(t - \delta)$ и рассмотрим множество $G = \{t: \Phi(t) = 0\}$. Очевидно, что $\|e^{i\lambda\Phi}\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \gamma^4$. Пусть

$$g_\Lambda = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda e^{i\lambda\Phi} d\lambda,$$

где $\Lambda > 0$; тогда $\|g_\Lambda\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \gamma^4$, $\Lambda > 0$, и, поскольку $g_\Lambda(t) \rightarrow 1_G(t)$ для всех t при $\Lambda \rightarrow \infty$, видим, что $\|1_G\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \gamma^4$. Пусть $(E_n)_\delta$ — δ -окрестность множества E_n . Ясно, что равенство $\Phi(t) = 0$ выполняется для всех $t \in I_n \setminus (E_n)_\delta$ и лишь для конечного числа точек t из $(E_n)_\delta$. Таким образом, $I_n \setminus G \sim (E_n)_\delta$. Следовательно (см. утверждение 1° § 1),

$$\|1_{(E_n)_\delta}\|_{M_p(\mathbb{R})} = \|1_{I_n} \cdot (1 - 1_G)\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq c_p \|1 - 1_G\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq c_p (1 + \gamma^4).$$

Отсюда (см. утверждения 5°, 2° § 1) получаем $\|1_{F_n}\|_{M_p(\mathbb{Z})} \leq c'_p$, что невозможно, если n велико.

Тем не менее, как показывает следующая теорема, множество нелинейности функций φ , удовлетворяющих условию (27), может быть континуальным даже для “хороших φ ”.

ТЕОРЕМА 4. *Существует гомеоморфизм φ прямой $\mathbb{R}$ на себя такой, что:*

- 1) *его множество нелинейности $E(\varphi)$ является совершенным множеством;*
- 2) *оператор суперпозиции $t \rightarrow t \circ \varphi$ является ограниченным оператором в $M_p(\mathbb{R})$ при всех p , $1 < p < \infty$, и, в частности,*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

при всех p , $1 < p < \infty$;

- 3) *гомеоморфизм φ и гомеоморфизм φ^{-1} , обратный к нему, удовлетворяют условию Литтлвуда.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного интервала $I \subseteq \mathbb{R}$ определим оператор S_I соотношением

$$(S_I(f))^\wedge = 1_I \cdot \hat{f}, \quad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Пусть $\mathcal{I} = \{I_k\}$ — семейство попарно непересекающихся интервалов. Квадратичная функция Литтлвуда–Пэли семейства $\mathcal{I}$ определяется следующим образом:

$$S_{\mathcal{I}}(f) = \left(\sum_k |S_{I_k}(f)|^2 \right)^{1/2}, \quad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ – замкнутое множество меры нуль и $\mathcal{I} = \{I_k\}$ – семейство интервалов, дополнительных к E (т. е. компоненты связности дополнения $\mathbb{R} \setminus E$). Следуя [15], скажем, что множество E обладает свойством $\text{LP}(p)$ ($1 < p < \infty$), если

$$a_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|S_{\mathcal{I}}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq b_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}), \quad (28)$$

где a_p и b_p – положительные константы (не зависящие от f). Хорошо известно соотношение двойственности: при $1/p + 1/q = 1$ множество E обладает свойством $\text{LP}(p)$ тогда и только тогда, когда оно обладает свойством $\text{LP}(q)$.

Напомним неравенство Рубио де Франсия [16]:

$$\|S_{\mathcal{I}}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq d_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}),$$

верное при $2 < p < \infty$ для *любого* семейства попарно непересекающихся интервалов $\mathcal{I}$. Здесь d_p не зависит ни от $\mathcal{I}$, ни от f . Двойственным образом, при $1 < p < 2$ для любой функции $f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R})$ такой, что $\text{supp } \hat{f} \subseteq \bigcup_k I_k$, имеем

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq d_p \|S_{\mathcal{I}}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Следующее утверждение, возможно, представляет самостоятельный интерес.

ЛЕММА 10. Пусть $1 < p < \infty$ и множество $E \subset \mathbb{R}$ обладает свойством $\text{LP}(p)$. Предположим, что функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ линейна на каждом интервале, дополнительном к E , причем множество различных угловых коэффициентов функции φ конечно. Тогда для любой непрерывной функции $t \in M_p(\mathbb{R})$ имеем соотношение (27). Если при этом угловые коэффициенты функции φ не равны нулю, то (27) имеет место для любой функции $t \in M_p(\mathbb{R})$ (без предположения непрерывности).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда угловые коэффициенты функции φ не равны нулю. Пусть $t \in M_p(\mathbb{R})$. Очевидно, что $t \circ \varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R})$ и положим $F = ((t \circ \varphi) \hat{f})^\vee$. Пусть $\mathcal{J} = \{J_k\}$ – какое-то семейство интервалов, на которых функция φ имеет один и тот же угловой коэффициент α . Покажем, что

$$\|S_{\mathcal{J}}(F)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_p \|t\|_{M_p(\mathbb{R})} \|S_{\mathcal{I}}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad (29)$$

где c_p не зависит от t, f, α и $\mathcal{J}$. Действительно, будем считать, что $\varphi(t) = l_k(t)$ при $t \in J_k$, где $l_k(t) = \alpha t + \beta_k$, $\alpha \neq 0$. Определим функции g_k, h_k следующим образом:

$$\hat{g}_k = (S_{J_k}(f))^\wedge \circ l_k^{-1}, \quad \hat{h}_k = m \hat{g}_k,$$

где l_k^{-1} – функция, обратная к l_k . Тогда

$$(S_{J_k}(f))^\wedge = \hat{g}_k \circ l_k, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} (S_{J_k}(F))^\wedge &= 1_{J_k} \cdot (m \circ \varphi) \hat{f} = (m \circ l_k)(S_{J_k}(f))^\wedge \\ &= (m \circ l_k)(\hat{g}_k \circ l_k) = \hat{h}_k \circ l_k. \end{aligned} \quad (31)$$

Ясно, что если l – линейная функция на $\mathbb{R}$ с угловым коэффициентом $\alpha \neq 0$, то при $f \in L^2(\mathbb{R})$ имеем

$$|(\hat{f} \circ l)^\vee(u)| = \left| \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{u}{\alpha}\right) \right|, \quad u \in \mathbb{R},$$

поэтому из соотношений (30), (31) соответственно получаем

$$|S_{J_k}(f)(u)| = \left| \frac{1}{\alpha} g_k\left(\frac{u}{\alpha}\right) \right|,$$

$$|S_{J_k}(F)(u)| = \left| \frac{1}{\alpha} h_k\left(\frac{u}{\alpha}\right) \right|.$$

Таким образом, имеем

$$S_{\mathcal{J}}(f)(u) = \frac{1}{|\alpha|} \left(\sum_k \left| g_k\left(\frac{u}{\alpha}\right) \right|^2 \right)^{1/2},$$

$$S_{\mathcal{J}}(F)(u) = \frac{1}{|\alpha|} \left(\sum_k \left| h_k\left(\frac{u}{\alpha}\right) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\|S_{\mathcal{J}}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \frac{1}{|\alpha|^{1/q}} \left\| \left(\sum_k |g_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad (32)$$

$$\|S_{\mathcal{J}}(F)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \frac{1}{|\alpha|^{1/q}} \left\| \left(\sum_k |h_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (33)$$

Применяя оценку (25) к оператору $Q: f \rightarrow (m \hat{f})^\vee$, видим, что

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_k |h_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \left\| \left(\sum_k |(m \hat{g}_k)^\vee|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq c_p \|m\|_{M_p(\mathbb{R})} \left\| \left(\sum_k |g_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношений (32), (33) получаем оценку (29).

Пусть далее $\mathcal{I}$ – семейство всех интервалов, дополнительных к E , и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ – все (попарно различные) угловые коэффициенты функции φ . При $j = 1, 2, \dots, N$ рассмотрим соответствующее семейство $\mathcal{I}^j = \{I_k^j\}$ всех тех интервалов I_k^j , дополнительных к E , на которых φ имеет угловой коэффициент, равный α_j . Записывая оценку (29) для каждого семейства $\mathcal{I}^j$, получаем

$$\|S_{\mathcal{I}^j}(F)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_p \|m\|_{M_p(\mathbb{R})} \|S_{\mathcal{I}^j}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

Отсюда, поскольку

$$S_{\mathcal{I}}(F) = \left(\sum_{j=1}^N (S_{\mathcal{I}^j}(F))^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^N S_{\mathcal{I}^j}(F)$$

и E обладает свойством $\text{LP}(p)$, имеем (см. (28))

$$\begin{aligned} \|((m \circ \varphi) \hat{f})^\vee\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|F\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{a_p} \|S_{\mathcal{I}}(F)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{1}{a_p} \sum_{j=1}^N \|S_{\mathcal{I}^j}(F)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{c_p}{a_p} \|m\|_{M_p(\mathbb{R})} \sum_{j=1}^N \|S_{\mathcal{I}^j}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{c_p}{a_p} \|m\|_{M_p(\mathbb{R})} N b_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка (27).

Рассмотрим теперь случай, когда φ имеет интервалы постоянства, но функция $m \in M_p(\mathbb{R})$ непрерывна. Используя те же обозначения, будем считать, например, что $\alpha_1 = 0$. Тогда для интервалов семейства $\mathcal{I}^1 = \{I_k^1\}$ будем иметь $\varphi(t) = \beta_k$ при $t \in I_k^1$, откуда $S_{I_k^1}(F) = m(\beta_k) S_{I_k^1}(f)$ и, следовательно,

$$|S_{I_k^1}(F)| \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |S_{I_k^1}(f)| \leq \|m\|_{M_p(\mathbb{R})} |S_{I_k^1}(f)|$$

(см. утверждение 9° §1). Ясно, что таким образом мы также получаем (34), что влечет оценку (27). Лемма доказана.

В случае, если (28) имеет место при всех p , $1 < p < \infty$, скажем, что множество E обладает свойством LP . Классическим примером множества, обладающего этим свойством, является множество $\{\pm 2^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Ниже мы покажем, что существуют совершенные множества $E \subset \mathbb{R}$, обладающие свойством LP (этот факт отмечен без доказательства в [17] и [10]). Это влечет утверждение доказываемой теоремы. Действительно, взяв такое множество E , разобьем семейство интервалов $\mathcal{I} = \{I_k\}$, дополнительных к E (в $\mathbb{R}$), на два дизъюнктивных подсемейства $\mathcal{I}^1 = \{I_k^1\}$ и $\mathcal{I}^2 = \{I_k^2\}$ так, что интервалы как семейства $\mathcal{I}^1$, так и семейства $\mathcal{I}^2$ накапливаются к E , т.е. так, что в любой окрестности любой точки из E имеются некоторые интервалы обоих семейств $\mathcal{I}^1$ и $\mathcal{I}^2$. Пусть g – функция, принимающая значение, равное 1 на каждом интервале семейства $\mathcal{I}^1$, и значение, равное 2 на каждом интервале семейства $\mathcal{I}^2$. Положим

$$\varphi(t) = \int_0^t g(\theta) d\theta, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что φ – гомеоморфизм прямой на себя и $E(\varphi) = E$. Ясно также, что φ и φ^{-1} удовлетворяют условию Липшица. Ограниченность оператора $m \rightarrow m \circ \varphi$ в $M_p(\mathbb{R})$ вытекает из леммы 10.

Примеры совершенных множеств, обладающих свойством LP , несложно получить, опираясь на сформулированную ниже теорему Хеар–Клемеша о разбиениях Литтлвуда–Пэли в $\mathbb{Z}$. Скажем, что интервалы Δ_k , $k = 1, 2, \dots$, в $\mathbb{Z}$ образуют разбиение $\mathbb{Z}$, если эти интервалы попарно не пересекаются и $\bigcup_k \Delta_k = \mathbb{Z}$. Аналогично, интервалы Δ_k , $k = 1, 2, \dots$, в $\mathbb{R}$ образуют разбиение интервала $I \subseteq \mathbb{R}$, если они попарно не пересекаются и $\bigcup_k \Delta_k \sim I$. Пусть $\Delta = \{\Delta_k, k = 1, 2, \dots\}$ – семейство попарно непересекающихся интервалов в $\mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию f на окружности $\mathbb{T}$, $f \in L^p \cap L^2(\mathbb{T})$. Определим квадратичную функцию Литтлвуда–Пэли

$$s_\Delta(f) = \left(\sum_k |s_{\Delta_k}(f)|^2 \right)^{1/2},$$

где

$$s_{\Delta_k}(f)(x) = \sum_{\nu \in \Delta_k} \hat{f}(\nu) e^{i\nu x}, \quad x \in \mathbb{T}$$

($\hat{f} = \{\hat{f}(\nu), \nu \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность коэффициентов Фурье). Пусть $1 < p < \infty$; тогда согласно теореме Хеар–Клемеша [17] существуют положительные константы σ_p ($\sigma_p > 1$), a_p, b_p такие, что для любого семейства интервалов $\Delta = \{\Delta_k, k = 1, 2, \dots\}$, которые образуют разбиение $\mathbb{Z}$ и, будучи занумерованы в порядке возрастания длин, удовлетворяют условию

$$|\Delta_{k+1}|/|\Delta_k| \geq \sigma_p, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (35)$$

мы имеем

$$a_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|s_{\Delta}(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq b_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}, \quad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{T}).$$

(Отсюда, очевидно, следует, что если

$$|\Delta_{k+1}|/|\Delta_k| \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

то указанная оценка верна при всех p , $1 < p < \infty$, возможно, с другими константами a_p, b_p .)

Укажем аналог теоремы Хеар–Клемеша в случае интервалов на прямой $\mathbb{R}$ и функций, заданных на $\mathbb{R}$. Положим

$$\tau_p = \frac{1}{1 + 2\sigma_p},$$

где σ_p то же, что и в (35). Пусть E – замкнутое множество меры нуль на отрезке $[a, b]$, содержащее концы этого отрезка. Пусть интервалы $I = \{I_k, k = 1, 2, \dots\}$, дополнительные к E в I , будучи занумерованы в порядке убывания длин, удовлетворяют условию

$$|I_{k+1}|/|I_k| \leq \tau_p, \quad k = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Тогда E обладает свойством $LP(p)$.

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что если интервалы $\Delta_k = (x_k, y_k)$, которые образуют разбиение прямой, имеют целочисленные концы и удовлетворяют условию (35), то

$$\|S_{\Delta}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c(p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}), \quad (37)$$

где $c(p)$ не зависит от семейства $\Delta = \{\Delta_k\}$. Действительно, при произвольном выборе знаков $\pm$ рассмотрим функцию $m = \sum_k \pm 1_{\Delta_k}$. Рассмотрим интервалы $\Delta_k^0 = [x_k, y_k] \cap \mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$ и функцию $m^0 = \sum_k \pm 1_{\Delta_k^0}$ на $\mathbb{Z}$. Из теоремы Хеар–Клемеша немедленно следует оценка $\|m^0\|_{M_p(\mathbb{Z})} \leq b_p/a_p$. Для функции $(m^0)_{\text{ext}}$ (см. утверждение 7° §1) имеем $(m^0)_{\text{ext}}(\cdot) = m(\cdot + 1/2)$ и, таким образом, $\|m\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq c_p b_p/a_p$. Тогда для произвольной функции $f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R})$ получаем

$$\left\| \sum_k \pm S_{\Delta_k}(f) \right\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|(m \hat{f})^\vee\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{c_p b_p}{a_p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Возводя это соотношение в степень p и усредняя по всевозможным расстановкам знаков $\pm$, т. е. пользуясь неравенством Хинчина

$$c_1(p) \left(\sum_k |a_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_k r_k(\theta) a_k \right|^p d\theta \right)^{1/p} \leq c_2(p) \left(\sum_k |a_k|^2 \right)^{1/2},$$

где $r_k(\theta) = \text{sign}(\sin(2^k \pi \theta))$, $k = 1, 2, \dots$, – функции Радемахера, получаем оценку (37).

Рассмотрим теперь ограниченный интервал $I \subset \mathbb{R}$ и конечное семейство интервалов $\Delta = \{\Delta_k\}$, которые образуют разбиение интервала I и удовлетворяют (35). Если концы этих интервалов рациональны, то мы имеем (37). Это немедленно следует из того, что константа $c(p)$ в (37) не меняется, если все интервалы подвергнуть единому аффинному преобразованию. Отсюда, в свою очередь, видим, что если $\Delta = \{\Delta_k\}$ – произвольное конечное семейство интервалов (неважно – открытых, замкнутых или полуоткрытых), которые образуют разбиение интервала I и удовлетворяют условию

$$\frac{|\Delta_{k+1}|}{|\Delta_k|} \geq 2\sigma_p, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

то мы также имеем (37) (достаточно аппроксимировать интервалы $\{\Delta_k\}$ интервалами, удовлетворяющими (35), с рациональными концами).

Рассмотрим теперь множество E меры нуль, удовлетворяющее условию (36). Для произвольного натурального N возьмем первые N дополнительных интервалов $I_1, I_2, \dots, I_N$. Пусть $J_1, J_2, \dots, J_M$, $M \leq N - 1$, – разделяющие их невырожденные интервалы, остающиеся в $[a, b]$ после удаления интервалов $I_1, I_2, \dots, I_N$. Рассмотрим семейство всех этих интервалов $I_1, I_2, \dots, I_N, J_1, J_2, \dots, J_M$. Перенумеровав их в порядке неубывания длин, получим интервалы $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N+M}$.

Несложно понять, что в силу выбора τ_p условие (36) влечет (38). В самом деле, обозначим через δ_k длину наибольшего из дополнительных к E интервалов, содержащихся в Δ_k , $1 \leq k \leq N + M$. При $k = 1, 2, \dots, N + M$ имеем

$$\delta_k \leq |\Delta_k| \leq \delta_k + \tau_p \delta_k + \tau_p^2 \delta_k + \dots = \frac{1}{1 - \tau_p} \delta_k. \quad (39)$$

Заметим, что соотношение $\delta_{k+1} < \delta_k$ невозможно, поскольку в противном случае было бы $\delta_{k+1} \leq \tau_p \delta_k$ и

$$|\Delta_{k+1}| \leq \frac{1}{1 - \tau_p} \delta_{k+1} \leq \frac{\tau_p}{1 - \tau_p} \delta_k \leq \frac{\tau_p}{1 - \tau_p} |\Delta_k| = \frac{1}{2\sigma_p} |\Delta_k| < |\Delta_k|.$$

Поэтому при всех k , $1 \leq k \leq N + M$, имеем $\delta_k < \delta_{k+1}$ и, следовательно, $\delta_k \leq \tau_p \delta_{k+1}$. Учитывая (39), получаем

$$|\Delta_{k+1}| \geq \delta_{k+1} \geq \frac{1}{\tau_p} \delta_k \geq \frac{1 - \tau_p}{\tau_p} |\Delta_k| = 2\sigma_p |\Delta_k|,$$

т. е. условие (38).

Далее, поскольку (38) влечет (37), мы имеем

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^N |S_{I_k}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \left\| \left(\sum_{k=1}^{N+M} |S_{\Delta_k}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c(p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

и поскольку N здесь произвольно, получаем

$$\|S_{\mathcal{I}}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c(p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}). \quad (40)$$

Добавив к семейству интервалов, дополняющих E в I , еще два интервала $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$, мы получим семейство всех интервалов, дополнительных к E . Сохраняя обозначение $\mathcal{I}$ для этого семейства, мы также имеем оценку (40) (с другой константой $c(p)$). Таким образом, считая, что $1 < p < 2$ (в силу двойственности достаточно рассмотреть только этот случай), и учитывая неравенство Рубио де Франсиа, видим, что множество E обладает свойством $LP(p)$.

Пусть теперь E — замкнутое множество нулевой меры на отрезке $I = [a, b]$, содержащее концы этого отрезка, такое, что длины интервалов $\{I_k, k = 1, 2, \dots\}$, дополнительных к E в I , удовлетворяют условию

$$|I_{k+1}|/|I_k| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

(Существование совершенных множеств с этим свойством очевидно.) Тогда E обладает свойством LP . Действительно, пусть p произвольно, $1 < p < \infty$. Выберем номер $N(p)$ так, что $|I_{k+1}|/|I_k| \leq \tau_p$ при $k > N(p)$. Рассмотрим отрезки, остающиеся в I после удаления первых $N(p)$ интервалов I_k , $k = 1, 2, \dots, N(p)$, и порции множества E , сосредоточенные на этих отрезках. Достаточно заметить, что каждая такая порция обладает свойством $LP(p)$. Теорема 4 доказана.

§ 5. Абсолютно непрерывная фаза

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, абсолютно непрерывная на любом конечном интервале. Предположим, что

$$\|e^{i\lambda_n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1),$$

где $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, — некоторая неограниченная последовательность. Тогда φ обладает свойствами (A) и (B) из теоремы 2 (при $d = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно считать, что $\lambda_n > 0$. Для $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, и $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим функцию

$$\Phi_{\lambda, n}(t) = \frac{\varphi(t + \lambda/\lambda_n) - \varphi(t)}{\lambda/\lambda_n}.$$

В предположении, что $\|e^{i\lambda_n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \gamma$, $n = 1, 2, \dots$, имеем

$$\|e^{i\lambda \Phi_{\lambda, n}}\|_{M_p(\mathbb{R})} = \|e^{i\lambda_n \varphi(\cdot + \lambda/\lambda_n)} e^{-i\lambda_n \varphi(\cdot)}\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \gamma^2$$

при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Поскольку $\Phi_{\lambda, n}(t)$ п. в. стремится к производной $\varphi'(t)$ при $n \rightarrow \infty$, получаем (см. утверждение 8° § 1)

$$\|e^{i\lambda \varphi'}\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \gamma^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Воспользовавшись теоремой 3, видим, что производная φ' обладает свойством (А), т. е. существует замкнутое множество E (лебеговой) меры нуль такое, что на каждом интервале, дополнительном к E , производная φ' п. в. совпадает с некоторой линейной функцией. Тогда на каждом таком интервале функция φ является полиномом и из локального варианта теоремы Хермандера (см. окончание доказательства леммы 7) следует, что функция φ линейна на интервалах, дополнительных к E . Свойство (В) немедленно вытекает из леммы 8. Теорема доказана.

Для произвольной области U в $\mathbb{R}^d$ обозначим через $C^1(U)$ класс непрерывно дифференцируемых функций на U . Пользуясь теоремой 5, легко получить другое доказательство справедливости гипотезы Хермандера (впервые доказанной в [9]), а именно мы имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $p \neq 2$ и $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ – вещественная функция. Предположим, что для некоторой неограниченной последовательности чисел $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, выполнено условие $\|e^{i\lambda_n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1)$. Тогда функция φ линейна.

В одномерном случае это немедленно вытекает из теоремы 5. Общий случай сводится к одномерному: достаточно рассмотреть всевозможные сужения $\varphi_{u,v}(t) = \varphi(u + tv)$, $t \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^d$, функции φ на прямые $l_{u,v} = \{u + tv, t \in \mathbb{R}\}$ (см. утверждение 6° § 1).

Отметим, что справедлив также локальный вариант указанного следствия: если (измеримая) функция $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит $C^1(U)$, где U – некоторая область в $\mathbb{R}^d$, и $\|e^{i\lambda_n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1)$, то φ линейна в U ($p \neq 2$). Это несложно увидеть в одномерном случае, рассмотрев вместо φ функцию ψ , являющуюся ее C^1 -гладким продолжением с U на $\mathbb{R}$, линейным на лучах, дополнительных к интервалу U . Поскольку характеристическая функция интервала принадлежит M_p , условие $\|e^{i\lambda_n \varphi}\|_{M_p} = O(1)$ влечет аналогичное условие для ψ , и, воспользовавшись утверждением следствия, видим, что φ линейна в U . При $d > 1$, считая, что область U ограничена, рассмотрим произвольный шар B такой, что $\bar{B} \subset U$. Пусть χ – бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^d$, равная 1 на B и равная 0 на $\mathbb{R}^d \setminus U$. Тогда $\chi \in A(\mathbb{R}^d) \subseteq M_p(\mathbb{R}^d)$, поэтому если $\|e^{i\lambda_n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1)$, то $\|\chi e^{i\lambda_n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1)$. Пусть l – произвольное аффинное отображение прямой $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^d$, $l(t) = u + tv$, $u, v \in \mathbb{R}^d$. Поскольку все функции $\chi e^{i\lambda_n \varphi}$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывны, получаем (см. утверждение 6° § 1)

$$\|(\chi \circ l) e^{i\lambda_n \varphi \circ l}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1).$$

Рассмотрим интервал $I = \{t \in \mathbb{R}: l(t) \in B\}$. Мы имеем

$$\|1_I \cdot (\chi \circ l) e^{i\lambda_n \varphi \circ l}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1),$$

и поскольку $1_I \cdot (\chi \circ l) = 1_I$, то

$$\|1_I e^{i\lambda_n \varphi \circ l}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1).$$

Пусть ψ – это C^1 -гладкое продолжение функции $\varphi \circ l$ с I на $\mathbb{R}$, линейное на лучах, дополнительных к I . Мы получаем $\|e^{i\lambda_n \psi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1)$, и, следовательно, ψ – линейная функция на $\mathbb{R}$. Таким образом, функция $\varphi \circ l$ линейна на I ,

т. е. φ линейна на $l(\mathbb{R}) \cap B$. Поскольку линейное отображение l и шар B были выбраны произвольно, видим, что функция φ линейна в U .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть функция φ удовлетворяет предположениям какой-нибудь из теорем 2, 3 или 5 и, следовательно, обладает свойствами (А) и (В). Рассмотрим компоненты связности I дополнения $\mathbb{R}^d \setminus E(\varphi)$ (в теореме 5 имеем $d = 1$) и соответствующие векторы α_I . Пусть $\mathfrak{A}$ – множество всех попарно различных векторов α_I (множество $\mathfrak{A}$ конечно в силу (В)). При произвольном $\alpha \in \mathfrak{A}$ рассмотрим те компоненты I , где $\alpha_I = \alpha$, и их объединение:

$$G_\alpha = \bigcup_{I: \alpha_I = \alpha} I.$$

В утверждениях теорем 2, 3, 5 к свойствам (А), (В) можно добавить следующее свойство:

(С) *при любом $\alpha \in \mathfrak{A}$ имеем $1_{G_\alpha} \in M_p(\mathbb{R}^d)$.*

Чтобы увидеть это, заметим сначала, что если

$$\|e^{i\lambda\Phi}\|_{M_p} = O(1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

то характеристическая функция множества $G = \{t: \Phi(t) = 0\}$ принадлежит M_p . Это немедленно следует из того, что для средних $g_\Lambda = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda e^{i\lambda\Phi} d\lambda$ мы имеем $\|g_\Lambda\|_{M_p} = O(1)$, $\Lambda > 0$, и $g_\Lambda(t) \rightarrow 1_G(t)$ при $\Lambda \rightarrow +\infty$ для всех t . Далее, в предположениях теорем 2, 3 или 5 мы имеем $\|e^{i\lambda_n\varphi}\|_{M_p} = O(1)$, где $\{\lambda_n\}$ – некоторая неограниченная последовательность. Мы, конечно, можем считать, что на каждой компоненте I функция φ совпадает с линейной функцией всюду. Рассуждая практически так же, как в доказательстве теоремы 5, для частных производных $\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \dots, d$, функции φ получим

$$\|e^{i\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}}\|_{M_p} = O(1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$. Тогда

$$\|e^{i\lambda(\frac{\partial\varphi}{\partial t_j} - \alpha_j)}\|_{M_p} = O(1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

и, таким образом, для множеств $G_\alpha^j = \{t: \partial\varphi/\partial t_j = \alpha_j\}$, $j = 1, 2, \dots, d$, имеем $1_{G_\alpha^j} \in M_p$. Отсюда для множества уровня $G_\alpha = \{t: \nabla\varphi(t) = \alpha\}$ градиента $\nabla\varphi$ функции φ получаем $1_{G_\alpha} = 1_{G_\alpha^1} 1_{G_\alpha^2} \dots 1_{G_\alpha^d} \in M_p$.

§ 6. Последовательности частот. Нигде не линейная фаза

Здесь мы покажем, что соотношение (4) может иметь место для нигде не линейных функций φ .

Рассмотрим простой пример. Пусть

$$\varphi(t) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (1 - r_k(t)) \cdot 3^{-k}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где r_k , $k = 1, 2, \dots$, – функции Радемахера, которые мы полагаем непрерывными слева. Функция φ строго возрастает на $]0, 1]$ (чтобы увидеть это, достаточно сделать рисунок), и образ прямой $\mathbb{R}$ содержится в троичном канторовом множестве, построенном на $[0, \pi]$. Поэтому функция φ нигде не линейна, т. е. $E(\varphi) = \mathbb{R}$. Хорошо известно, что всякая функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ принадлежит $M_p(\mathbb{R})$ (см., например, [15]), поэтому $1_{]0, 1]} e^{i\varphi} \in M_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Поскольку $e^{i\varphi}$ является периодическим продолжением функции $1_{]0, 1]} e^{i\varphi}$ на $\mathbb{R}$, то (см. § 1, утверждения 3°, 2°) $e^{i\varphi} \in M_p(\mathbb{R})$ при всех p , $1 < p < \infty$. Вместе с тем ясно, что если t не является двоично-рациональным, то

$$3^n \varphi(t) = \varphi(2^n t) \pmod{2\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда имеем

$$e^{i3^n \varphi(t)} = e^{i\varphi(2^n t)} \quad \text{для п. в. } t \in \mathbb{R},$$

и поскольку норма в $M_p(\mathbb{R})$ не меняется при аффинной замене переменной, то

$$\|e^{i3^n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = \|e^{i\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

при всех p , $1 < p < \infty$.

Построенная функция φ разрывна. Более тонкий пример, показывающий, что в теореме 5 условие абсолютной непрерывности существенно, дает следующая

ТЕОРЕМА 6. *Существует нигде не линейный гомеоморфизм φ прямой $\mathbb{R}$ на себя ($E(\varphi) = \mathbb{R}$) такой, что при всех p , $1 < p < \infty$, имеем*

$$\|e^{i2^n \varphi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{I} = \{I_k\}$ – семейство попарно непересекающихся интервалов. Не предполагая, что интервалы семейства $\mathcal{I}$ образуют разбиение прямой $\mathbb{R}$, скажем, что семейство $\mathcal{I}$ является $LP(p)$ -семейством, $1 < p < \infty$, если для любой функции f , принадлежащей $L^p \cap L^2(\mathbb{R})$, такой, что $\text{supp } \hat{f} \subseteq \bigcup_k I_k$, квадратичная функция Литтлвуда–Пэли $S_{\mathcal{I}}(f)$ семейства $\mathcal{I}$ удовлетворяет соотношению

$$a_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|S_{\mathcal{I}}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq b_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

где $a_p = a_p(\mathcal{I})$, $b_p = b_p(\mathcal{I})$ – положительные константы (не зависящие от f). Наименьшую константу c такую, что

$$\frac{1}{c} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|S_{\mathcal{I}}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}), \quad \text{supp } \hat{f} \subseteq \bigcup_k I_k,$$

назовем $LP(p)$ -константой семейства $\mathcal{I} = \{I_k\}$ и обозначим $c_p(\mathcal{I})$.

Для произвольного интервала $I \subseteq \mathbb{R}$ положим $\|m\|_{V(I)} = \text{Var}_I(m) + \|m\|_{L^\infty(I)}$, где $\text{Var}_I(m)$ – вариация функции m на I .

Хорошо известно, что если $LP(p)$ -семейство интервалов $\mathcal{I}$ образует разбиение прямой, то любая функция из $L^\infty(\mathbb{R})$, вариации которой на интервалах семейства $\mathcal{I}$ равномерно ограничены, принадлежит $M_p(\mathbb{R})$ [15]. Аналогом этого утверждения является следующая лемма, которая верна при всех p , $1 < p < \infty$, однако для доказательства теоремы достаточно ограничиться рассмотрением случая $2 < p < \infty$.

ЛЕММА 11. Пусть $2 < p < \infty$ и $\mathcal{I} = \{I_k\}$ – это $LP(p)$ -семейство. Пусть m – комплекснозначная функция на $\mathbb{R}$, равная нулю вне $\bigcup_k I_k$, такая, что $\|m\|_{V(I_k)} \leq \eta$ при всех k . Тогда $m \in M_p(\mathbb{R})$ и справедлива оценка

$$\|m\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq 8\eta d_p c_p(\mathcal{I}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала m – вещественная функция. Заметим прежде всего, что если $\mathcal{J} = \{J_k\}$ – семейство интервалов, вписанных в интервалы $\{I_k\}$, т. е. $J_k \subseteq I_k \ \forall k$, то $1_{\bigcup_k J_k} \in M_p(\mathbb{R})$, причем

$$\|1_{\bigcup_k J_k}\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq d_p c_p(\mathcal{J}). \quad (41)$$

В самом деле, пусть f – произвольная функция из $L^p \cap L^2(\mathbb{R})$. Положим $g = (1_{\bigcup_k J_k} \hat{f})^\vee$. Тогда $\text{supp } \hat{g} \subseteq \bigcup_k I_k$ и $S_{\mathcal{I}}(g) = S_{\mathcal{J}}(f)$. Пользуясь тем, что $\mathcal{I}$ является $LP(p)$ -семейством, с учетом неравенства Рубио де Франсия для семейства $\mathcal{J}$ получаем

$$\begin{aligned} \|(1_{\bigcup_k J_k} \hat{f})^\vee\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_p(\mathcal{I}) \|S_{\mathcal{I}}(g)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= c_p(\mathcal{I}) \|S_{\mathcal{J}}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_p(\mathcal{I}) d_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

и, следовательно, оценка (41) верна.

Пусть $I_k = (a_k, b_k)$. Положим $m_k = m|_{I_k}$. Воспользовавшись стандартным представлением функции ограниченной вариации в виде разности двух монотонных функций, запишем $m_k = m_k^1 - m_k^2$, где

$$m_k^1(t) = \text{Var}_{(a_k, t)}(m) + \eta, \quad m_k^2(t) = \text{Var}_{(a_k, t)}(m) - m(t) + \eta, \quad t \in I_k.$$

Отсюда получаем $m = m^1 - m^2$, где функции m^1 и m^2 являются неубывающими на каждом интервале I_k и принимают значения между 0 и 2η . Заметим теперь, что всякая неубывающая функция на произвольном интервале (a, b) , принимающая значения между 0 и 2η , аппроксимируется в L^∞ кусочно постоянными функциями вида

$$\frac{2\eta}{N} \sum_{j=1}^N 1_{(a_j, b)}, \quad a \leq a_j \leq b.$$

Таким образом, функции m^1 и m^2 аппроксимируются в $L^\infty(\mathbb{R})$ функциями вида

$$\sum_k \frac{2\eta}{N} \sum_{j=1}^N 1_{(a_{k,j}, b_k)} = \frac{2\eta}{N} \sum_{j=1}^N \sum_k 1_{(a_{k,j}, b_k)} = \frac{2\eta}{N} \sum_{j=1}^N 1_{\bigcup_k (a_{k,j}, b_k)}, \quad a_k \leq a_{k,j} \leq b_k.$$

В силу (41) каждая функция такого вида имеет норму в $M_p(\mathbb{R})$, не превосходящую $2\eta d_p c_p(\mathcal{I})$, поэтому $\|m^{1,2}\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq 2\eta d_p c_p(\mathcal{I})$. Таким образом,

$$\|m\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq 4\eta d_p c_p(\mathcal{I}).$$

Для комплекснозначной функции m получаем утверждение леммы, применяя последнюю оценку к вещественной и мнимой частям функции m . Лемма доказана.

В отличие от рациональной независимости по $\bmod 2\pi$ (см. § 3), в следующей лемме имеется в виду обычная рациональная независимость: множество вещественных чисел $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ рационально независимо, если равенство

$$\sum_{k=1}^N n_k \varphi_k = 0, \quad n_k \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

возможно лишь при $n_1 = n_2 = \dots = n_N = 0$. Согласно теореме Кронекера в этом случае для любого $\varepsilon > 0$ и для любых чисел $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{C}$, $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_N| = 1$, найдется $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|e^{i\lambda\varphi_k} - z_k| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

ЛЕММА 12. *Для каждого p , $1 < p < \infty$, существует число $c_p > 0$ такое, что, каково бы ни было конечное рационально независимое множество $F = \{t_k\} \subset \mathbb{R}$, найдется $\delta = \delta(F) > 0$ такое, что при каждом p , $1 < p < \infty$, $LP(p)$ -константа всякого семейства $\{I_k\}$ попарно непересекающихся интервалов, удовлетворяющих условию $I_k \subseteq (t_k - \delta, t_k + \delta)$, не превосходит c_p .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольное рационально независимое множество $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$. Воспользовавшись теоремой Кронекера, для каждого вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$ с координатами $\varepsilon_k = \pm 1$, $1 \leq k \leq N$, выберем частоту $\lambda(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ такую, что

$$|e_{\lambda(\varepsilon)}(t_k) - \varepsilon_k| < \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (42)$$

Положим

$$\lambda = \max_{\varepsilon \in \{1; -1\}^N} |\lambda(\varepsilon)|$$

и выберем $\delta > 0$ такое, что $\lambda\delta < 1/N$ и интервалы $(t_k - \delta, t_k + \delta)$ попарно не пересекаются.

Рассмотрим произвольное семейство $\{I_k\}$ интервалов $I_k \subseteq (t_k - \delta, t_k + \delta)$. Для каждого вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N) \in \{1; -1\}^N$ определим две функции:

$$m_\varepsilon = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k 1_{I_k}, \quad m_\varepsilon^* = \sum_{k=1}^N e_{\lambda(\varepsilon)} 1_{I_k}.$$

Напомним, что любая функция g , имеющая ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, принадлежит $M_p(\mathbb{R})$ при всех p , $1 < p < \infty$, причем

$$\|g\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \alpha_p \|g\|_{V(\mathbb{R})} \quad (43)$$

(это очевидно, например, из леммы 11).

При $t \in I_k$ в силу выбора δ имеем

$$|e_{\lambda(\varepsilon)}(t) - e_{\lambda(\varepsilon)}(t_k)| \leq \lambda(\varepsilon) |t - t_k| \leq \lambda\delta \leq \frac{1}{N},$$

и с учетом оценки (42) получаем

$$|e_{\lambda(\varepsilon)}(t) - \varepsilon_k| \leq \frac{2}{N}, \quad t \in I_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (44)$$

Вместе с тем

$$\mathrm{Var}_{I_k}(e_{\lambda(\varepsilon)} - \varepsilon_k) = \int_{I_k} |(e^{i\lambda(\varepsilon)t})'| dt = \lambda(\varepsilon)|I_k| \leq \lambda \cdot 2\delta \leq \frac{2}{N}$$

и, учитывая неравенство (44), имеем

$$\mathrm{Var}_{\mathbb{R}}(e_{\lambda(\varepsilon)}1_{I_k} - \varepsilon_k1_{I_k}) \leq \frac{6}{N},$$

откуда $\mathrm{Var}_{\mathbb{R}}(m_{\varepsilon} - m_{\varepsilon}^*) \leq 6$. Поскольку $\|m_{\varepsilon} - m_{\varepsilon}^*\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq 2$, получаем

$$\|m_{\varepsilon} - m_{\varepsilon}^*\|_{V(\mathbb{R})} \leq 8$$

и, следовательно (см. (43)),

$$\|m_{\varepsilon} - m_{\varepsilon}^*\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq 8\alpha_p, \quad \varepsilon \in \{1; -1\}^N. \quad (45)$$

Пусть $f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R})$ – произвольная функция такая, что $\mathrm{supp} \hat{f} \subseteq \bigcup_k I_k$. Тогда $(m_{\varepsilon}^* \hat{f})^{\vee}(\cdot) = (e_{\lambda(\varepsilon)} \hat{f})^{\vee}(\cdot) = f(\cdot + \lambda(\varepsilon))$, и, учитывая (45), получаем

$$\begin{aligned} \|(m_{\varepsilon} \hat{f})^{\vee}\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|(m_{\varepsilon}^* \hat{f})^{\vee}\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|((m_{\varepsilon} - m_{\varepsilon}^*) \hat{f})^{\vee}\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq (1 + 8\alpha_p)\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (46)$$

Положим теперь $g = (m_{\varepsilon} \hat{f})^{\vee}$. Очевидно, что $\mathrm{supp} \hat{g} \subseteq \bigcup_k I_k$ и $f = (m_{\varepsilon} \hat{g})^{\vee}$. Применяя оценку (46) к g вместо f , получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|(m_{\varepsilon} \hat{g})^{\vee}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq (1 + 8\alpha_p)\|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= (1 + 8\alpha_p)\|(m_{\varepsilon} \hat{f})^{\vee}\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (47)$$

Из соотношений (46) и (47) видим, что при любом выборе знаков $\pm$ выполнено

$$(1 + 8\alpha_p)^{-1}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \left\| \sum_{k=1}^N \pm S_{I_k}(f) \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq (1 + 8\alpha_p)\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Остается перейти к среднему по знакам $\pm$ (пользуясь неравенством Хинчина). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы.

Для каждого $\nu = 1, 2, \dots$ и каждого конечного набора чисел $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s)$, $s = 1, 2, \dots$, где ε_j равно 0 или 1, мы построим (невыврожденные) замкнутые отрезки I^{ν} и I_{ε}^{ν} . Отрезки I^k и I_{ε}^{ν} , $\varepsilon \in \{0; 1\}^s$, для которых $s + \nu = k$, мы называем отрезками уровня k . Мы хотим, чтобы выполнялись следующие условия:

(i) любой интервал в $[0, 2\pi]$ содержит какой-то отрезок I^{ν} ;

(ii) I_0^{ν} и I_1^{ν} – это занумерованные слева направо отрезки, полученные из I^{ν} удалением некоторого открытого интервала; отрезки $I_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s, 0}^{\nu}$ и $I_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s, 1}^{\nu}$ получены аналогичным образом из отрезка $I_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s}^{\nu}$;

(iii) отрезки одного уровня попарно не пересекаются, и при любом p , $1 < p < \infty$, $LP(p)$ -константа семейства всех отрезков одного уровня не превосходит c_p ;

(iv) концы всех отрезков одного уровня рационально независимы.

Построение проведем индукцией по номеру уровня $k = 1, 2, \dots$. Фиксируем отрезок I^1 с рационально независимыми концами, содержащийся внутри интервала $(0, 2\pi)$. Это (единственный) отрезок первого уровня. Предположим, что отрезки уровня k с нужными нам свойствами (i)–(iv) уже построены, и построим отрезки уровня $k + 1$ следующим образом. Рассмотрим объединение всех отрезков уровня k и выберем интервал наибольшей длины среди интервалов, образующих дополнение к этому объединению в $(0, 2\pi)$ (если их несколько, то берем любой из них). Обозначим этот интервал через J . Разделим J на три равные части и выберем в средней трети точку θ , рационально не зависящую от концов отрезков уровня k , что возможно ввиду (iv). Пусть I^{k+1} – отрезок в $(0, 2\pi)$ с центром в θ , не пересекающийся с отрезками уровня k . Пусть остальные отрезки уровня $k + 1$ (с непустым нижним индексом) – это отрезки, порожденные отрезками уровня k в соответствии с (ii). Выбирая длины всех этих отрезков (включая I^{k+1}) достаточно малыми, получим, что $LP(p)$ -константа их семейства не превосходит c_p при всех p , $1 < p < \infty$. Это следует из леммы 12. Очевидно, можно также добиться, чтобы концы этих отрезков были рационально независимы, и, таким образом, наше построение завершено.

При каждом $\nu = 1, 2, \dots$ рассмотрим множество

$$E^\nu = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{\varepsilon \in \{0;1\}^s} I_\varepsilon^\nu.$$

Ясно, что E^ν – совершенное нигде не плотное множество, причем $E^\nu \subset I^\nu$ и концы отрезка I^ν принадлежат E^ν (см. (ii)).

Пусть, далее, ψ_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, – функция типа лестницы Кантора, соответствующая множеству E^ν , а именно непрерывная неубывающая функция на $\mathbb{R}$, равная 0 левее отрезка I^ν и равная 1 правее отрезка I^ν , постоянная на интервалах, дополнительных к E^ν , и прирастающая на каждом отрезке I_ε^ν , $\varepsilon \in \{0;1\}^s$, на величину, равную 2^{-s} , $s = 1, 2, \dots$.

Положим

$$\psi = 2\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} \psi_\nu.$$

Ясно, что функция ψ непрерывна и отображает отрезок $[0, 2\pi]$ на себя. Кроме того, ψ строго возрастает на $[0, 2\pi]$ (см. (i)). Ясно также, что при построении отрезков I^ν , I_ε^ν мы можем добиться выполнения условия

$$\sum_{\varepsilon \in \{0;1\}^s} |I_\varepsilon^\nu| \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty,$$

что влечет $|E^\nu| = 0$, $\nu = 1, 2, \dots$, и, следовательно, все функции ψ_ν имеют производную, равную нулю почти всюду. Пользуясь теоремой Фубини о почленном дифференцировании рядов с монотонными членами (см. [18]), получаем $\psi' = 0$ п. в. Таким образом, функция ψ нигде не линейна на $[0, 2\pi]$.

Функция $e^{i\psi}$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$ и, следовательно, принадлежит $M_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Покажем, что

$$\|e^{i2^n\psi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (48)$$

при всех p , $1 < p < \infty$. В силу двойственности (см. утверждение 9° § 1) достаточно рассмотреть случай $2 < p < \infty$.

При $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим две функции

$$X_n = \{2^{n-1}\psi_1\} + \{2^{n-2}\psi_2\} + \dots + \{2^1\psi_{n-1}\} + \{\psi_n\}$$

(как и выше, $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x) и

$$Y_n = \sum_{\nu > n} 2^{n-\nu}\psi_\nu.$$

Имеем

$$\begin{aligned} 2^n\psi &= 2\pi \left(2^{n-1}\psi_1 + 2^{n-2}\psi_2 + \dots + 2^1\psi_{n-1} + \psi_n + \sum_{\nu > n} 2^{n-\nu}\psi_\nu \right) \\ &= 2\pi(X_n + Y_n) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (49)$$

Заметим, что функция $\{2^s\psi_\nu\}$ аннулируется вне объединения $\bigcup_{\varepsilon \in \{0;1\}^s} I_\varepsilon^\nu$ и монотонно меняется от 0 до 1 на каждом отрезке этого объединения, поэтому функция X_n аннулируется вне отрезков уровня n и на каждом таком отрезке монотонно меняется от 0 до 1. Таким образом, функция $e^{i2\pi X_n} - 1$ аннулируется вне объединения отрезков уровня n , и на каждом отрезке J уровня n ее вариация равна 2π , откуда $\|e^{i2\pi X_n} - 1\|_{V(J)} = 2\pi + 2$. В силу условия (iii) и леммы 11 получаем

$$\|e^{i2\pi X_n} - 1\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq 8(2\pi + 2)d_p c_p,$$

откуда имеем

$$\|e^{i2\pi X_n}\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq c'_p. \quad (50)$$

Заметим далее, что $\text{Var}_{\mathbb{R}} Y_n \leq \sum_{\nu > n} 2^{n-\nu} \text{Var}_{\mathbb{R}} \psi_\nu \leq 1$, поэтому

$$\|e^{i2\pi Y_n}\|_{V(\mathbb{R})} \leq 2\pi + 1,$$

откуда (см. (43)) получаем

$$\|e^{i2\pi Y_n}\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \alpha_p(2\pi + 1) = c''_p. \quad (51)$$

Из соотношений (49)–(51) следует, что

$$\|e^{i2^n\psi}\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \|e^{i2\pi X_n}\|_{M_p(\mathbb{R})} \|e^{i2\pi Y_n}\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq c'_p c''_p, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и, таким образом, мы имеем оценку (48).

Из (48) получаем (см. утверждение 1° § 1)

$$\|1_{[0,2\pi]} e^{i2^n\psi}\|_{M_p(\mathbb{R})} = O(1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (52)$$

Определим функцию φ на $\mathbb{R}$, полагая

$$\varphi(t) = \psi(t - 2\pi k) + 2\pi k \quad \text{при} \quad 2\pi k \leq t < 2\pi(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что φ – нигде не линейный гомеоморфизм прямой $\mathbb{R}$. Ясно также, что при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ функция $e^{i2^n \varphi}$ является 2π -периодическим продолжением функции $1_{[0, 2\pi]} e^{i2^n \psi}$ на $\mathbb{R}$. Утверждение теоремы немедленно следует из оценки (52) и теоремы о периодическом продолжении (см. утверждение 3° § 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Неясно, может ли для нелинейной непрерывной функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выполняться условие $\|e^{i\lambda_n \varphi}\|_{A(\mathbb{R})} = O(1)$, где $\{\lambda_n\}$ – какая-нибудь (неограниченная) последовательность. Если φ абсолютно непрерывна на любом конечном интервале, то это невозможно. В самом деле, пусть $\|e^{i\lambda_n \varphi}\|_A \leq \gamma$, $n = 1, 2, \dots$. Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 5, для функций $\Phi_{\lambda, n}$ будем иметь $\|e^{\lambda \Phi_{\lambda, n}}\|_A \leq \gamma^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Поскольку почти всюду $\Phi_{\lambda, n} \rightarrow \varphi'$ при $n \rightarrow \infty$, то при каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ существует функция $F_\lambda \in A$, совпадающая почти всюду с $e^{i\lambda \varphi'}$, такая, что $\|F_\lambda\|_A \leq \gamma^2$. Пусть $\sigma \in \mathbb{R}$. Поскольку при любом $n \in \mathbb{Z}$ мы имеем $F_\sigma^n = F_{n\sigma}$, то $\|F_\sigma^n\|_A \leq \gamma^2$, $n \in \mathbb{Z}$. По теореме Берлинга–Хелсона $F_\sigma = e^{il_\sigma}$, где l_σ – линейная функция. Следовательно, почти всюду имеем $e^{i\sigma \varphi'} = F_\sigma = e^{il_\sigma}$. Таким образом, при любом $\sigma \in \mathbb{R}$ функция $\sigma \varphi'$ п. в. совпадает по mod 2π с некоторой линейной функцией. Легко увидеть, что тогда φ' совпадает п. в. с линейной функцией, и, следовательно, φ – полином (степени ≤ 2). Этот полином – линейная функция, что очевидно, например, из оценки $\|\cdot\|_{M_p} \leq \|\cdot\|_A$ и теоремы Хермандера. Такое же рассуждение справедливо в случае окружности.

§ 7. Операторная версия

Здесь мы укажем одно приложение теоремы 2. Как мы отметили во введении, теорема Берлинга–Хелсона может быть переформулирована следующим (эквивалентным) образом. Пусть U – (ограниченный) инвариантный относительно сдвига оператор в $L^1(\mathbb{R})$ такой, что $\|U^n\|_{L^1 \rightarrow L^1} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$; тогда $U = \xi S$, где $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| = 1$ и S – оператор сдвига. Аналогичное утверждение верно для операторов в $l^1(\mathbb{Z})$ так же, как и в многомерных случаях.

В следующей теореме мы даем подобное утверждение для операторов в L^p .

Пусть I – произвольная область в $\mathbb{R}^d$. Подпространство в $L^2(\mathbb{R}^d)$ вида

$$Q_I = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d): \operatorname{supp} \hat{f} \subseteq I\}$$

назовем *примитивным*. Очевидно, что всякое такое подпространство замкнуто и инвариантно относительно сдвига, т. е. $S_\alpha Q_I \subseteq Q_I$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$ (S_α – оператор сдвига).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и U – ограниченный инвариантный относительно сдвига оператор в $L^p(\mathbb{R}^d)$. Предположим, что $\|U^n\|_{L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда U продолжается (с $L^p \cap L^2(\mathbb{R}^d)$) до унитарного оператора в $L^2(\mathbb{R}^d)$, обладающего следующим свойством. Существует разложение

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_I Q_I$$

пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ в прямую сумму попарно ортогональных примитивных подпространств Q_I таких, что $U|_{Q_I} = \xi_I S_{\alpha_I}$, где $\xi_I \in \mathbb{C}$, $|\xi_I| = 1$ и S_{α_I} – оператор сдвига на α_I . При этом число попарно различных сдвигов S_{α_I} конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку оператор U инвариантен относительно сдвига, ему соответствует мультипликатор $m \in M_p(\mathbb{R}^d)$:

$$\widehat{Uf} = m \hat{f}, \quad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}^d).$$

Условие $\|U^n\|_{L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, означает, что

$$\|m^n\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $\|\cdot\|_{L^\infty} \leq \|\cdot\|_{M_p}$ (см. утверждение 9° § 1), получаем $|m(t)| = 1$ для п. в. $t \in \mathbb{R}^d$. Таким образом, $m(t) = e^{i\varphi(t)}$, причем

$$\|e^{in\varphi}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} = O(1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, можно считать, что $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 2\pi[$. Тогда, поскольку функция $e^{i\varphi}$ измерима ($e^{i\varphi} \in M_p(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$), видим, что φ также измерима. В силу теоремы 2 множество $E(\varphi)$ нелинейности функции φ замкнуто и имеет меру нуль. На каждой компоненте связности I дополнения $\mathbb{R}^d \setminus E(\varphi)$ имеем $\varphi(t) = (\alpha_I, t) + \beta_I$ для п. в. $t \in I$, причем множество попарно различных векторов α_I конечно. Ясно, что, рассматривая все компоненты связности I множества $\mathbb{R}^d \setminus E(\varphi)$ и соответствующие им примитивные подпространства Q_I , получим требуемое разложение.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Все результаты, полученные в настоящей работе, переносятся на тор $\mathbb{T}^d$ с очевидными изменениями формулировок. Это легко сделать, пользуясь утверждением 4° § 1. Например, сформулируем соответствующий аналог теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2'. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и $\varphi: \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 2\pi[$ – измеримая функция такая, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{M_p(\mathbb{T}^d)} = O(1), \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Тогда φ обладает следующими свойствами:

(A') существует замкнутое множество $E(\varphi) \subset \mathbb{T}^d$ лебеговой меры нуль такое, что на каждой компоненте связности I его дополнения $\mathbb{T}^d \setminus E(\varphi)$ функция φ совпадает почти всюду с линейной функцией, т. е. $\varphi(t) = (\alpha_I, t) + \beta_I$ для п. в. $t \in I$;

(B') множество всех попарно различных векторов α_I конечно.

Отсюда, в свою очередь, легко получить аналог теоремы 7 (о разложении на примитивные подпространства) для операторов в $l^p(\mathbb{Z}^d)$.

Список литературы

1. Хермандер Л., *Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига*, ИЛ, М., 1962.
2. Стейн И., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
3. De Leeuw K., “On L^p multipliers”, *Ann. Math.*, **81**:2 (1965), 364–379.

4. Edwards R. E., Gaudry G. I., *Littlewood–Paley and multiplier theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–N. Y., 1977.
5. Olevskii A., “Six lectures on translation-invariant operators and subspaces”, *Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste*, **XXXI**:1 (2000), 203–233.
6. Beurling A., Helson H., “Fourier transforms with bounded powers”, *Math. Scand.*, **1** (1953), 120–126.
7. Кахан Ж.-П., *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976.
8. Kahane J.-P., “Quatre leçons sur les homéomorphismes du cercle et les séries de Fourier”, *Topics in Modern Harmonic Analysis*, V. II, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990.
9. Lebedev V., Olevskii A., “ C^1 changes of variable: Beurling–Helson type theorem and Hörmander conjecture on Fourier multipliers”, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:2 (1994), 213–235.
10. Lebedev V., Olevskii A., “Bounded groups of translation invariant operators”, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **322**:2 (1996), 143–147.
11. Lebedev V., Olevskii A., “Idempotents of Fourier multiplier algebra”, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:5 (1994), 539–544.
12. Jodeit M., “Restrictions and extensions of Fourier multipliers”, *Studia Mathematica*, **34** (1970), 215–226.
13. Katznelson Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover, N. Y., 1976.
14. Graham C. C., “Mappings that preserve Sidon sets in $\mathbb{R}$ ”, *Arkiv för Matematik*, **19** (1981), 217–221.
15. Sjögren P., Sjölin P., “Littlewood–Paley decompositions and Fourier multipliers with singularities on certain sets”, *Ann. Inst. Fourier*, **31**:1 (1981), 157–175.
16. Rubio de Francia J. L., “A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals”, *Rev. Mat. Iberoam.*, **1**:2 (1985), 1–14.
17. Hare K. E., Klemes I., “On permutations of lacunary intervals”, *Trans. Am. Math. Soc.*, **347**:10 (1995), 4105–4127.
18. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979.

В. В. ЛЕБЕДЕВ (V. V. LEBEDEV)
 Московский институт
 электроники и математики (МИЭМ)
E-mail: lebedevhome@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
 05.04.2005

А. М. ОЛЕВСКИЙ (A. M. OLEVSKII)
 Tel Aviv University
E-mail: olevskii@post.tau.ac.il