Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Довбыш, Оптимальные ляпуновские метрики экспансивных гомеоморфизмов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 5, 31–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/im705>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:58:29

УДК 515.124.55+515.122.4

С. А. Довбыш

Оптимальные ляпуновские метрики экспансивных гомеоморфизмов

Получены уточнения результатов У.Л. Редди, К. Сакая и Д. Фрида о существовании для экспансивного гомеоморфизма метризуемого компакта ляпуновской метрики, совместимой с топологией, и о том, что в случае дополнительного наличия локальной структуры произведения (т.е. когда гомеоморфизм является $A^\#$ -гомеоморфизмом по терминологии В.М. Алексеева и М.В. Якобсона, или обладает каноническими гиперболическими координатами по терминологии Р. Боуэна, или вместе с метрическим компактом образует пространство Смейла по терминологии Д. Рюэля) возможно добиться также выполнения введенной Д. Рюэлем технической аксиомы о липшицевом характере гомеоморфизма и его обратного, а также локальной структуры произведения. Показано, что для экспансивного гомеоморфизма найдется ляпуновская метрика, относительно которой гомеоморфизм в малых масштабах на локальных устойчивых (соответственно, неустойчивых) “многообразиях” приблизительно представляется как сжатие (соответственно, растяжение) с постоянным коэффициентом λ_s (λ_u^{-1}). Для $A^\#$ -гомеоморфизмов установлено, что в малых масштабах искомая метрика может быть приблизительно представлена как прямая сумма метрик, соответствующих каноническим координатам, определяемым локальной структурой произведения, а локальные “многообразия” являются в некотором смысле “плоскими”. Для $A^\#$ -гомеоморфизмов также доказано, что нижние грани констант сжатия λ_s и растяжения λ_u одновременно достигаются на некоторой метрике, удовлетворяющей всем описанным условиям.

Библиография: 20 наименований.

§ 1. Определения и формулировки результатов

1. Основные определения. Напомним некоторые сведения (см. [1], [2]). Пусть $f: X \rightarrow X$ – гомеоморфизм компактного метрического пространства X (называемого *фазовым пространством гомеоморфизма*), $\rho(\cdot, \cdot)$ – метрика (*функция расстояния*) на X , локальные (радиуса δ) устойчивое $W_\delta^s(x)$ и неустойчивое $W_\delta^u(x)$ “многообразия” точки $x \in X$ определяются следующим образом:

$$W_\delta^s(x) = W_\delta^s(x; \rho) = \{y: \rho(f^n x, f^n y) \leq \delta, n \geq 0\},$$
$$W_\delta^u(x) = W_\delta^u(x; \rho) = \{y: \rho(f^n x, f^n y) \leq \delta, n \leq 0\},$$

а глобальные устойчивое $W^s(x)$ и неустойчивое $W^u(x)$ “многообразия” – следующим образом:

$$W^s(x) = \left\{ y: \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(f^n x, f^n y) = 0 \right\},$$

$$W^u(x) = \left\{ y: \lim_{n \rightarrow -\infty} \rho(f^n x, f^n y) = 0 \right\}.$$

Локальные устойчивые и неустойчивые многообразия являются замкнутыми подмножествами в топологическом пространстве X и зависят от выбора метрики $\rho(\cdot, \cdot)$ на X . Глобальные устойчивые и неустойчивые многообразия не зависят от выбора метрики $\rho(\cdot, \cdot)$ ввиду равномерной эквивалентности метрик на компактном пространстве, определяющих одну и ту же топологию (метрики, определяющие одну и ту же топологию, называются *эквивалентными*). Очевидно, $f(W_\delta^s(x)) \subseteq W_\delta^s(fx)$, $f(W_\delta^u(x)) \supseteq W_\delta^u(fx)$, а глобальные многообразия обладают свойством инвариантности:

$$f(W^s(x)) = W^s(fx), \quad f(W^u(x)) = W^u(fx).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Гомеоморфизм f называется *разделяющим траектории*, или *экспансивным*, или обладает свойством *разделения траекторий*, а число $\gamma > 0$ является *разделяющей константой*, если для любых $x \neq y$ найдется $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $\rho(f^n x, f^n y) > \gamma$.

Эквивалентная формулировка: $W_\gamma^s(x) \cap W_\gamma^u(x) = \{x\}$ для любого $x \in X$.

Свойство экспансивности также не зависит от выбора метрики ввиду равномерной эквивалентности метрик на компактном пространстве, совместимых с его топологией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Гомеоморфизм f обладает *гиперболической структурой* (ГС), а метрика ρ называется *гиперболической*, если существуют такие $\delta > 0$, $c \geq 1$ и $0 < \lambda < 1$, что

$$y \in W_\delta^s(x) \quad (y \in W_\delta^u(x)) \Rightarrow \rho(f^n x, f^n y) \leq c\lambda^{|n|}\rho(x, y) \quad (1.1)$$

при $n \geq 0$ ($n \leq 0$). Метрика называется *ляпуновской*, если при этом $c = 1$.

Этот последний термин заимствован из теории гиперболических множеств, а также гиперболических линейных расширений динамических систем. В данной ситуации в англоязычной литературе обычно используется термин “adapted metric” или “Mather metric”. В рассматриваемой здесь топологической ситуации введенная терминология не является общепринятой¹.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Гомеоморфизм, обладающий ГС с радиусом $\delta > 0$ локальных многообразий, является экспансивным с разделяющей константой δ . Если гомеоморфизм f экспансивный с разделяющей константой $\delta > 0$, то:

а) для любых x, y пересечение $W_{\delta/2}^s(x) \cap W_{\delta/2}^u(y)$ состоит из не более чем одной точки;

б) для всякого $\gamma > 0$ найдется $N > 0$ такое, что $f^N(W_\delta^s(x)) \subset W_\gamma^s(f^N x)$ и $f^{-N}(W_\delta^u(x)) \subset W_\gamma^u(f^{-N} x)$ при любом $x \in X$;

в) $W^u(x) = \bigcup_{n \leq 0} f^{-n}W_\delta^u(f^n x)$, $W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}W_\delta^s(f^n x)$ для любого $x \in X$;

¹Например, в [9] ляпуновская метрика называется *гиперболической*.

г) для всякого $\gamma > 0$ найдется $\nu > 0$ такое, что $W_\gamma^\sigma(x) \supset D_\nu(x) \cap W_\delta^\sigma(x)$ при любом $x \in X$, где $\sigma = u, s$ и $D_\nu(x) = D_\nu(x; \rho) = \{y \in X: \rho(x, y) \leq \nu\}$ – замкнутый шар радиуса ν с центром в точке x .

Среди свойств а)–г) в качестве основного удобно взять свойство б), являющееся ослабленным вариантом определения 1.2, поскольку все другие свойства легко из него выводятся. Ослабление состоит в том, что постулируется только равномерный (не обязательно экспоненциальный) по всем x и $y \in W_\delta^s(x)$ (соответственно, x и $y \in W_\delta^u(x)$) характер сближения точек $f^n x$ и $f^n y$ при $n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow -\infty$). Свойство б) (см. [3]) непосредственно вытекает из следующего результата (см. [4]), который нетрудно доказать методом от противного. Если $\delta > 0$ – разделяющая константа для гомеоморфизма f метрического компакта, то для всякого $\gamma > 0$ найдется $N > 0$ такое, что из $\rho(f^n x, f^n y) \leq \delta$ для всех $|n| \leq N$ следует, что $\rho(x, y) \leq \gamma$.

Введем следующие обозначения: $\mathring{D}_\nu(x) = \mathring{D}_\nu(x; \rho) = \{y \in X: \rho(x, y) < \nu\}$ – открытый шар радиуса ν с центром в точке x и $A_{\delta, \nu}^\sigma(x) = W_\delta^\sigma(x) \cap \mathring{D}_\nu(x)$, где $\sigma = u, s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 [1]. Гомеоморфизм f (вернее, пространство X относительно гомеоморфизма f) обладает *локальной структурой произведения* (ЛСП), если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$, что при $\rho(x, y) \leq \varepsilon$ пересечение $W_\gamma^s(x) \cap W_\gamma^u(y)$ состоит из единственной точки, обозначаемой $[x, y]$, и отображение $[\cdot, \cdot]: \{(x, y) \in X \times X: \rho(x, y) \leq \varepsilon\} \rightarrow X$ непрерывно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3'. Гомеоморфизм f обладает *локальной структурой произведения*, если существуют такие $\varepsilon' > 0$ и $\gamma > 0$, что для всякого $x \in X$ выполнено следующее условие: при $v \in A_{\gamma, \varepsilon'}^u(x)$, $w \in A_{\gamma, \varepsilon'}^s(x)$ пересечение $W_\gamma^s(v) \cap W_\gamma^u(w)$ состоит из единственной точки, обозначаемой $[v, w]$, и отображение $[\cdot, \cdot]: A_{\gamma, \varepsilon'}^u(x) \times A_{\gamma, \varepsilon'}^s(x) \rightarrow X$ задает гомеоморфизм на некоторую окрестность $U_{\gamma, \varepsilon'}(x)$ точки x в X .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Определения 1.3 и 1.3' эквивалентны с одной и той же константой $\gamma > 0$. При этом $W_\gamma^s(x) \cap W_\gamma^u(x) = \{x\}$ для всякого x и, следовательно, γ – разделяющая константа. Уменьшая $\varepsilon' > 0$, можно добиться, чтобы $U_{\gamma, \varepsilon'}(x) \subset D_\varepsilon(x)$ для всех $x \in X$. Тогда обратный гомеоморфизм $U_{\gamma, \varepsilon'}(x) \rightarrow A_{\gamma, \varepsilon'}^u(x) \times A_{\gamma, \varepsilon'}^s(x)$ задается формулой $(\cdot) \rightarrow ([\cdot, x], [x, \cdot])$. Доказательство этих результатов использует только следующее свойство симметричности локальных многообразий относительно выбора центра: $y \in W_\gamma^\sigma(x) \iff x \in W_\gamma^\sigma(y)$, где $\sigma = u, s$.

Содержание определения 1.3' делает ясным термин “локальная структура произведения”. Соответственно, множества $A_{\gamma, \varepsilon'}^\sigma(x)$, где $\sigma = u, s$, называют *каноническими координатами*.

АКСИОМА $A^\#$ [5], [1], [2]. Гомеоморфизм f на метрическом компакте (X, ρ) удовлетворяет аксиоме $A^\#$ или является $A^\#$ -гомеоморфизмом, если он одновременно обладает и ГС и ЛСП, а метрика ρ является ляпуновской.

Аксиома $A^\#$ фактически появилась в [6] и была в явном виде сформулирована В. М. Алексеевым и М. В. Якобсоном.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Если выполнено свойство б) замечания 1.1 и гомеоморфизм обладает ЛСП, то он также обладает каноническими координатами

в смысле Боуэна [7], т.е. для всякого $\gamma > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $W_\gamma^s(x) \cap W_\gamma^u(y) \neq \emptyset$ при $\rho(x, y) \leq \varepsilon$ (в этом определении не требуется, чтобы пересечение состояло из единственной точки, к тому же непрерывно зависящей от x, y). Итак, определения 1.3 и 1.3' останутся в силе при выборе любого меньшего радиуса $\gamma > 0$ локальных многообразий (и некотором новом $\varepsilon > 0$). Канонические координаты при наличии гиперболической структуры названы в [7] гиперболическими каноническими координатами. Уменьшая, при необходимости, константы γ и δ , можно всегда добиться выполнения равенства $\gamma = \delta$, предполагавшегося в формулировке аксиомы $A^\#$ в [5], [2]. Отметим, что в то время как наличие каждого из двух свойств – гиперболической структуры или локальной структуры произведения – зависит от выбора метрики на компакте X , наличие канонических координат в смысле Боуэна от метрики не зависит.

У. Л. Редди доказал [8], что для экспансивного гомеоморфизма метризуемого компакта всегда найдется гиперболическая метрика, совместимая с топологией². Поэтому если гомеоморфизм является экспансивным и обладает ЛСП относительно некоторой (а значит, и любой) метрики, то найдется эквивалентная метрика, относительно которой он обладает ГС и ЛСП. Далее, К. Сакай доказал [9], что гомеоморфизм f , обладающий ГС, имеет ляпуновскую метрику, эквивалентную исходной. Фактически еще раньше этот результат появился в редко цитируемой работе Д. Фрида [10]. (О конструкциях К. Сакая и Д. Фрида см. далее, в приложении А.) Кроме того, непрерывность отображения $[\cdot, \cdot]$ легко следует из его однозначности (см. [11]). Эти результаты фактически дают ответы на вопросы, поставленные в [1, с. 170], относительно возможности ослабления условий аксиомы $A^\#$ (см. также краткий обзор [12] эквивалентных определений гомеоморфизмов, обладающих ГС и ЛСП, и развернутый обзор [13], посвященный экспансивным и родственным им гомеоморфизмам). В частности, Д. Рюэль представил в [14, гл. 7] аксиому $A^\#$ в более абстрактном, но, как там же показано, эквивалентном виде, а набор $(X, f, [\cdot, \cdot])$ назвал *пространством Смейла*. Он ввел также дополнительную аксиому о том, что

$$\rho(x, [x, y]) \leq L\rho(x, y), \quad \rho(y, [x, y]) \leq L\rho(x, y) \quad \text{при} \quad \rho(x, y) \leq \varepsilon \quad (1.2)$$

для некоторого $L > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 [15]. Гомеоморфизм f метрического компакта (X, ρ) , обладающий ЛСП, называется *$\mathcal{L}$ -гиперболическим*, если выполнено (1.2) для некоторого $L > 0$, метрика является ляпуновской, а оба отображения f и f^{-1} – липшицевыми.

В работах [10] и [15] было независимо и разными способами доказано, что гомеоморфизм, обладающий ГС и ЛСП, имеет ляпуновскую метрику (эквивалентную исходной), относительно которой этот гомеоморфизм является $\mathcal{L}$ -гиперболическим, что дает положительный ответ на вопрос, поставленный в [14, проблема В7]. (О динамических следствиях свойства $\mathcal{L}$ -гиперболичности см. [14], [15].)

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. В работе [10] рассматривалось пространство Смейла, т.е. априори предполагалось наличие некоторой ляпуновской метрики. Однако поскольку фактически используется только наличие марковского разбиения, то

²Наличие канонических координат, о которых говорится в цитируемой статье, в доказательстве не используется.

упомянутое предположение не является существенным по следующим хорошо известным причинам. Во-первых, гиперболическая метрика гомеоморфизма f является ляпуновской для некоторой его степени f^N , $N > 0$, а во-вторых, если $\mathcal{R}$ – марковское разбиение для f^N , то $\mathcal{R} \vee \dots \vee f^{N-1}\mathcal{R}$ – искомое марковское разбиение для f . Кроме того, конструкцию Фрида можно было бы применить почти сразу к экспансивным гомеоморфизмам, обладающим ЛСП, избегая при этом предварительного доказательства наличия гиперболической метрики. Действительно, для таких гомеоморфизмов можно установить свойство отслеживания ε -траекторий, что позволяет непосредственно показать [11] существование марковских разбиений, основываясь на конструкции, приведенной в работе [16, § 3].

2. Формулировки результатов. Целью настоящей статьи является доказательство следующих результатов о существовании ляпуновских метрик (эквивалентных исходной метрике), обладающих некоторыми оптимальными свойствами.

Пусть ρ – гиперболическая метрика гомеоморфизма f . Величины

$$\Lambda_s = \Lambda_s(\rho) = \inf \{ \lambda > 0 : \rho(f^n x, f^n y) \lambda^{-n} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty, \forall x, y \in W_\delta^s(x) \},$$

$$\Lambda_u = \Lambda_u(\rho) = \inf \{ \lambda > 0 : \rho(f^n x, f^n y) \lambda^n \rightarrow 0, n \rightarrow -\infty, \forall x, y \in W_\delta^u(x) \}$$

равны точным нижним граням для констант λ таких, что при подходящих $c \geq 1$ выполнены неравенства (1.1), относящиеся соответственно к устойчивым и неустойчивым многообразиям. Константы Λ_s и Λ_u не изменятся при выборе меньшего радиуса δ локальных многообразий вследствие свойства б) замечания 1.1.

Величины

$$\overset{\circ}{\Lambda}_s = \overset{\circ}{\Lambda}_s(\rho) = \overline{\lim}_{\substack{\rho(x,y) \rightarrow 0 \\ y \in W_\delta^s(x)}} \frac{\rho(fx, fy)}{\rho(x, y)}, \quad \overset{\circ}{\Lambda}_u = \overset{\circ}{\Lambda}_u(\rho) = \overline{\lim}_{\substack{\rho(x,y) \rightarrow 0 \\ y \in W_\delta^u(x)}} \frac{\rho(f^{-1}x, f^{-1}y)}{\rho(x, y)}$$

равны точным нижним граням для констант λ таких, что при выборе достаточно малого радиуса $\delta > 0$ локальных многообразий выполнены неравенства (1.1) при $c = 1$, относящиеся соответственно к устойчивым и неустойчивым многообразиям. Очевидно, $\overset{\circ}{\Lambda}_\sigma(\rho) \geq \Lambda_\sigma(\rho)$ в силу свойства б) замечания 1.1, причем $\overset{\circ}{\Lambda}_\sigma(\rho) < 1$ для $\sigma = s, u$, только если метрика ρ – ляпуновская.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть гомеоморфизм f обладает ГС и $\lambda_s \in [\Lambda_s, 1)$, $\lambda_u \in [\Lambda_u, 1)$. Тогда ляпуновскую метрику ρ_0 можно выбрать так, что:

- $\rho_0(fx, fy)/\rho_0(x, y) \rightarrow \lambda_s$ (соответственно, $\rho_0(f^{-1}x, f^{-1}y)/\rho_0(x, y) \rightarrow \lambda_u$) равномерно по всем x, y таким, что $y \in W_\delta^s(x)$ (соответственно, $y \in W_\delta^u(x)$) при $\rho_0(x, y) \rightarrow 0$, или, что равносильно, при $\rho(x, y) \rightarrow 0$; в частности, $\overset{\circ}{\Lambda}_\sigma(\rho_0) = \lambda_\sigma$ для $\sigma = s, u$;
- если $\lambda_u > 0$ (соответственно, $\lambda_s > 0$), то отображение f (соответственно, f^{-1}) липшицево относительно ρ_0 с константой λ_u^{-1} (соответственно, λ_s^{-1}).

Как отмечено в работе [1], обычный прием, используемый для отыскания эквивалентной ляпуновской римановой метрики в случае гиперболического

множества (или в случае гиперболического линейного расширения гомеоморфизма), здесь непосредственно не применим. Согласно мнению, высказанному в [1], причина этого состоит в том, что “многообразия” $W_\delta^s(x)$ и $W_\delta^u(x)$ могут не быть “гладкими” или “спрямляемыми” ни в каком, пусть даже очень слабом смысле. Эти утверждения являются, вообще говоря, неверными в силу двух обстоятельств. Во-первых, конструкция упомянутой ляпуновской римановой метрики легко переносится на рассматриваемый здесь случай, что фактически было сделано в работах [9] и [10] (более подробно об этом см. далее, в приложении А). Во-вторых, согласно следующей теореме локальные “многообразия” оказываются в некотором смысле приблизительно “плоскими”.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть гомеоморфизм обладает ГС и ЛСП. Тогда ляпуновская метрика ρ_0 , существование которой утверждается в теореме 1.1, может быть выбрана так, что:*

а) для всякого $\nu > 0$ найдется $r > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} |\rho_0(x, [x, y]) + \rho_0([x, y], y) - \rho_0(x, y)| &\leq \nu \rho_0(x, y), \\ |\rho_0(x, [x, y]) + \rho_0(x, [y, x]) - \rho_0(x, y)| &\leq \nu \rho_0(x, y), \end{aligned}$$

если $\rho_0(x, y) < r$;

б) “многообразия” $W_\delta^s(x)$ и $W_\delta^u(x)$ оказываются спрямляемыми в следующем локальном смысле: для всякого $\nu > 0$ найдутся $r > 0$ и $\tau > 0$ такие, что из $y \in W_\delta^\sigma(x)$, где $\sigma = u, s$, и $\rho_0(x, y) < r$, $\rho_0(x, z) + \rho_0(z, y) < (1 + \tau)\rho_0(x, y)$ вытекает $\rho_0(z, W_\delta^\sigma(x)) < \nu \rho_0(x, y)$.

Теорема 1.2 означает, что:

а) в малых масштабах метрика ρ_0 приблизительно представляется как прямая сумма метрик, соответствующих каноническим координатам;

б) малые участки “многообразий” $W_\delta^\sigma(x)$, $\sigma = u, s$ (рассмотренные при надлежащем увеличении), приблизительно являются “плоскими” подмножествами в X .

Здесь свойство подмножества $Y \subset X$ метрического пространства (X, ρ) быть “плоским” означает следующее: для всякого $\nu > 0$ найдется $\tau > 0$ такое, что из $x, y \in Y$ и $\rho(x, z) + \rho(z, y) - \rho(x, y) < \tau$ вытекает $\rho(z, Y) < \nu$. Утверждение б) теоремы 1.2 следует из утверждения а).

Теорема 1.2 допускает следующее обобщение. Пусть Φ – норма на плоскости $\mathbb{R}^2\{(a_s, a_u)\}$ такая, что $\Phi(\pm 1, 0) = \Phi(0, \pm 1) = 1$. Норма Φ симметрична относительно координатных осей, т. е. удовлетворяет тождествам

$$\Phi(a_s, a_u) = \Phi(-a_s, a_u) = \Phi(a_s, -a_u) = \Phi(-a_s, -a_u),$$

тогда и только тогда, когда ее единичный шар $B_\Phi = \{(a_s, a_u) \in \mathbb{R}^2: \Phi(a_s, a_u) \leq 1\}$ также симметричен относительно этих осей.

Далее, будем говорить, что симметричная норма Φ *выпукла вдоль координатной оси a_s* (соответственно, a_u), если $\Phi(\pm 1, a_u) > 1$ при $a_u \neq 0$ (соответственно, $\Phi(a_s, \pm 1) > 1$ при $a_s \neq 0$). Будем говорить, что метрики на X , принадлежащие некоторому множеству $\mathcal{P}$, являются s -*липшицево эквивалентными*, если $s^{-1} \leq \rho_1(x, y)/\rho_2(x, y) \leq s$ для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, и $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}$. Будем также говорить, что метрики на X , принадлежащие $\mathcal{P}$, *равномерно асимптотически равны* на “многообразиях” $W_\delta^\sigma(x)$, если $\rho_1(x, y)/\rho_2(x, y) \rightarrow 1$ равномерно по всем $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}$ и $x, y \in X$ таким, что $y \in W_\delta^\sigma(x)$, при $\rho(x, y) \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 1.2'. Пусть Φ – описанная выше симметричная норма на плоскости $\mathbb{R}^2\{(a_s, a_u)\}$, а гомеоморфизм обладает ГС и ЛСП. Тогда ляпуновская метрика ρ_0 , существование которой утверждается в теореме 1.1, может быть выбрана так, что:

а) для всякого $\nu > 0$ найдется $r > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} |\Phi(\rho_0(x, [x, y]), \rho_0([x, y], y)) - \rho_0(x, y)| &\leq \nu \rho_0(x, y), \\ |\Phi(\rho_0(x, [x, y]), \rho_0(x, [y, x])) - \rho_0(x, y)| &\leq \nu \rho_0(x, y), \end{aligned}$$

если $\rho_0(x, y) < r$; более того, для всех норм Φ соответствующие метрики ρ_0 можно выбрать 2-липшицево эквивалентными, равномерно асимптотически равными на “многообразиях” $W_\delta^\sigma(x)$ для двух индексов $\sigma = u, s$ и такими, что все описанные выше свойства оказываются выполненными равномерно по всем Φ , а именно:

1) пределы в п. а) теоремы 1.1 будут равномерными по всем Φ ,

2) числа $r = r(\nu) > 0$ для всех $\nu > 0$ можно выбрать не зависящими от Φ ;

б) если норма Φ выпукла вдоль координатной оси a_σ , где $\sigma \in \{u, s\}$, то “многообразия” $W_\delta^\sigma(x)$ спрямляемы в смысле п. б) теоремы 1.2.

Теорема 1.2 соответствует случаю $\Phi(a_s, a_u) = \Phi_0(a_s, a_u) \stackrel{\text{def}}{=} |a_s| + |a_u|$ в теореме 1.2'.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Пусть гомеоморфизм f обладает ГС и ЛСП. Тогда из п. а) теоремы 1.1 и п. а) теоремы 1.2' следует, что гомеоморфизм f является $\mathcal{L}$ -гиперболическим относительно метрики ρ_0 , если были выбраны положительные $\lambda_s \in [\Lambda_s, 1)$ и $\lambda_u \in [\Lambda_u, 1)$. Более того, для всякого $\nu > 0$ найдется $r > 0$ такое, что если $\rho_0(x, y) < r$, то неравенства (1.2) справедливы при $L = 1 + \nu$ и

$$\rho_0(fx, fy) \leq (\lambda_u^{-1} + \nu)\rho_0(x, y), \quad \rho_0(f^{-1}x, f^{-1}y) \leq (\lambda_s^{-1} + \nu)\rho_0(x, y).$$

Это означает, что в малых масштабах константа L и постоянные Липшица для отображений f и f^{-1} могут быть выбраны близкими соответственно к единице, λ_u^{-1} и λ_s^{-1} . Доказательство этих оценок для констант Липшица элементарно и опирается на неравенства

$$\max\{|a_s|, |a_u|\} \leq \Phi(a_s, a_u) \leq |a_s| + |a_u|, \quad (1.3)$$

$$\min\{|k_s|, |k_u|\} \leq \frac{\Phi(k_s a_s, k_u a_u)}{\Phi(a_s, a_u)} \leq \max\{|k_s|, |k_u|\}, \quad (a_s, a_u) \neq (0, 0), \quad (1.4)$$

справедливые для любых $(a_s, a_u) \in \mathbb{R}^2$ и коэффициентов k_s, k_u (эти неравенства будут установлены в §2; второе неравенство в (1.3) не используется при доказательстве описанных оценок, но понадобится в дальнейшем). Утверждение б) теоремы 1.1 уточняет эти оценки, гарантируя, что оптимальные возможные значения констант Липшица на самом деле достигаются. Кроме того, как будет следовать из доказательства утверждения а) теоремы 1.2' (леммы 2.2 и 2.4), построенная метрика ρ_0 дополнительно обладает определенным свойством близости в липшицевом смысле на семействах локальных устойчивых и неустойчивых многообразий (является “согласованной” в смысле определения 4.1). Из этого свойства и из утверждения а) теоремы 1.2' вытекает следующее усиление сформулированного выше утверждения о том, что в малых масштабах константа L в неравенстве (1.2) может быть выбрана близкой к единице:

для всякого $\nu > 0$ найдется $r > 0$ такое, что относительно метрики ρ_0 отображение $[\cdot, \cdot]: (x, y) \mapsto [x, y]$ является липшицевым с константой $L = 1 + \nu$ по каждому из двух аргументов на множестве пар точек (x, y) таких, что $\rho_0(x, y) < r$. Таким образом, в малых масштабах константа Липшица отображения $[\cdot, \cdot]$ также может быть выбрана близкой к единице.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Теорема 1.2' допускает дальнейшее обобщение – “неавтономный” вариант, в котором норма Φ заменяется на семейство норм Φ_x , поточечно-непрерывно зависящих от точки x фазового пространства X . Поточечная непрерывность означает непрерывность в топологии поточечной сходимости, которая определяется, как обычно: $\Phi_x \rightarrow \Phi$ поточечно при $x \rightarrow x_*$, если $\Phi_x(a) \rightarrow \Phi(a)$ при $x \rightarrow x_*$ для каждого $a \in \mathbb{R}^2$. Удобнее рассматривать топологию равномерной сходимости на ограниченных множествах: $\Phi_x \rightarrow \Phi$ при $x \rightarrow x_*$, если $\Phi_x(a) \rightarrow \Phi(a)$ при $x \rightarrow x_*$ равномерно по всем a , принадлежащим произвольному фиксированному ограниченному подмножеству в $\mathbb{R}^2$. Эквивалентная формулировка: если B_{Φ_x} и B_Φ – единичные шары норм Φ_x и Φ , то $B_{\Phi_x} \rightarrow B_\Phi$ в метрике Хаусдорфа при $x \rightarrow x_*$. (Напомним, что для двух подмножеств B', B'' метрического пространства расстояние Хаусдорфа $d_H(B', B'')$ определяется как точная нижняя грань $\varepsilon > 0$ таких, что каждое из этих подмножеств содержится в ε -окрестности другого.) Оказывается, обе эти топологии в пространстве норм совпадают, так как поточечная сходимость норм в конечномерных пространствах равносильна сходимости, равномерной на ограниченных множествах. Действительно, поскольку нормы являются выпуклыми функциями, то этот факт сразу вытекает из следующего известного и несложно доказываемого результата: если последовательность выпуклых функций поточечно сходится на открытом подмножестве нормированного пространства, то предельная функция является выпуклой, а сходимость к ней – равномерная на компактных подмножествах (см. [17, теорема 10.8]).

Итак, пусть Φ_x – семейство симметричных норм на плоскости $\mathbb{R}^2\{(a_s, a_u)\}$, непрерывно зависящих от $x \in X$. Тогда справедливы полные аналоги утверждений а) и б) теоремы 1.2', а именно:

а') в неравенствах п. а) норму Φ можно заменить на Φ_x или Φ_y (таким образом получаются четыре неравенства), причем для всех непрерывных семейств норм Φ_x соответствующие метрики ρ_0 будут 2-липшицево эквивалентными и равномерно асимптотически равными на “многообразиях” $W_\sigma^\sigma(x)$ для обоих индексов $\sigma = u, s$, а пределы в п. а) теоремы 1.1 – равномерными;

б') для данных $\sigma \in \{u, s\}$ и $x \in X$ “многообразие” $W_\sigma^\sigma(x)$ спрямляемо, если норма Φ_x выпукла вдоль координатной оси a_σ .

Здесь существенно, что для данного семейства норм Φ_x число $r = r(\nu) > 0$ в п. а') по-прежнему можно выбрать не зависящим от x и y (но зависящим от семейства Φ_x). Аналогичные равномерные оценки на замкнутых подмножествах справедливы и в п. б'): если норма Φ_x выпукла вдоль a_σ для всех x , принадлежащих некоторому замкнутому подмножеству $Y \subset X$, то соответствующие числа $r = r(\nu) > 0$ и $\tau = \tau(\nu) > 0$ можно выбрать одинаковыми для всех $x \in Y$. Указанные здесь равномерные оценки в неравенствах п. а') и п. б') обусловлены равномерной непрерывностью непрерывного отображения $x \mapsto B_{\Phi_x}$ компакта X , причем число $r(\nu) > 0$ в п. а') зависит только от модуля непрерывности этого отображения (если все объекты, кроме семейства Φ_x , зафиксированы).

Как будет объяснено в § 2, условие непрерывности семейства норм Φ_x оказывается необходимым для выполнения хотя бы одного из четырех неравенств

п. а'), по крайней мере, если фазовое пространство X гомеоморфизма f является многообразием, в частности если f есть $\mathcal{U}$ -диффеоморфизм. С другой стороны, как указано выше, пределы в п. а) теоремы 1.1 будут равномерными, а метрики ρ_0 равномерно асимптотическими равными на локальных устойчивых и неустойчивых "многообразиях" для всевозможных непрерывных семейств норм Φ_x . Причина этого заключается в том, что при доказательстве соответствующих свойств, а также свойства 2-липшицевой эквивалентности метрик ρ_0 непрерывность семейства Φ_x не используется.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Поскольку эквивалентные метрики на метрическом компакте равномерно эквивалентны, то в приведенных выше теоремах условия $\rho_0(x, y) \rightarrow 0$ и $\rho_0(x, y) < r$ можно заменить на аналогичные условия, в которых фигурирует произвольная эквивалентная метрика ρ' . Кроме того, ляпуновская метрика ρ_0 не зависит от выбора метрики ρ в том смысле, что теоремы остаются справедливыми для прежней метрики ρ_0 при замене условия $y \in W_\delta^\sigma(x; \rho)$ условием $y \in W_{\delta'}^\sigma(x; \rho')$, где $\delta' > 0$ столь мало, что $W_{\delta'}^\sigma(x; \rho') \subset W_\delta^\sigma(x; \rho)$ для любого $x \in X$ (последнее условие гарантировано, если $\rho'(x, y) \leq \delta' \Rightarrow \rho(x, y) \leq \delta$ для любых $x, y \in X$). В частности, полагая $\rho' = \rho$, видим, что метрика ρ_0 не изменится при выборе меньшего радиуса $\delta > 0$ локальных многообразий. В случае теоремы 1.1 и для п. а) теоремы 1.2' независимость ρ_0 от ρ очевидна. Чтобы доказать ее для п. б) теоремы 1.2', выберем $\gamma > 0$ такое, что $W_\gamma^\sigma(x; \rho) \subset W_{\delta'}^\sigma(x; \rho')$ для всех $x \in X$, а затем число $\nu > 0$ в соответствии с п. р) замечания 1.1. Тогда

$$(W_\delta^\sigma(x; \rho) \setminus W_\gamma^\sigma(x; \rho)) \cap D_\nu(x; \rho) = \emptyset.$$

Пусть теперь $\tilde{r} > 0$ столь мало, что $\overset{\circ}{D}_{2\tilde{r}}(x; \rho_0) \subset D_\nu(x; \rho)$ для всех $x \in X$. Тогда при $\rho_0(z, x) < \tilde{r}$ в цепочке неравенств

$$\rho_0(z, W_\delta^\sigma(x; \rho)) \leq \rho_0(z, W_{\delta'}^\sigma(x; \rho')) \leq \rho_0(z, W_\gamma^\sigma(x; \rho))$$

первая и третья части равны, что влечет требуемое равенство

$$\rho_0(z, W_{\delta'}^\sigma(x; \rho')) = \rho_0(z, W_\delta^\sigma(x; \rho)).$$

Чтобы гарантировать выполнение условия $\rho_0(z, x) < \tilde{r}$, достаточно в утверждении б) теоремы 1.2' выбрать столь малое $r > 0$, что $(1 + \tau)r \leq \tilde{r}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Д. Фрид [10] строил метрику, относительно которой гомеоморфизм является $\mathcal{L}$ -гиперболическим, используя марковские разбиения, введенные Р. Боуэном. Он показал также, что любые две такие метрики являются гёльдерово-эквивалентными. Хотя этот результат существенно опирается на предложенный способ построения метрик, нетрудно видеть, что он остается справедливым для любых двух метрик, относительно которых гомеоморфизм $\mathcal{L}$ -гиперболичесок. Действительно, во-первых, такие метрики гёльдерово-эквивалентны на локальных устойчивых и неустойчивых многообразиях, что легко следует из гиперболичности метрик и липшицевости отображений f и f^{-1} относительно этих метрик, во-вторых, отсюда с использованием неравенства треугольника

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, [x, y]) + \rho([x, y], y)$$

и неравенств (1.2) сразу вытекает искомый результат о гёльдеровой эквивалентности метрик для всех пар близких точек (x, y) , а значит, и для произвольных пар точек (x, y) .

Для экспансивного гомеоморфизма f метризуемого компакта X обозначим через $\mathcal{H}$ множество всех его гиперболических метрик (совместимых с топологией), через $\mathcal{L}$ – множество всех ляпуновских метрик и через Lip_s (соответственно, Lip_u) – множество всех метрик, относительно которых гомеоморфизм f (соответственно, гомеоморфизм f^{-1}) является липшицевым; $\text{Lip} = \text{Lip}_s \cap \text{Lip}_u$. Положим

$$\Lambda_\sigma^*(\mathcal{M}) = \inf\{\Lambda_\sigma(\rho) : \rho \in \mathcal{M}\}, \quad \mathring{\Lambda}_\sigma^*(\mathcal{M}) = \inf\{\mathring{\Lambda}_\sigma(\rho) : \rho \in \mathcal{M}\}$$

для $\sigma = u, s$ и $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Для краткости $\Lambda_\sigma^*(\mathcal{H})$ обозначается через Λ_σ^* .

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть f – экспансивный гомеоморфизм, имеющий ЛСП, $\lambda_s \in [\Lambda_s^*, 1)$ и $\lambda_u \in [\Lambda_u^*, 1)$. Тогда найдется гиперболическая метрика ρ_0 такая, что $\Lambda_\sigma(\rho_0) = \lambda_\sigma$ для $\sigma = u, s$.

СЛЕДСТВИЕ. Утверждение теоремы 1.2' останется справедливым с числами Λ_u^* и Λ_s^* вместо Λ_u и $\Lambda_s(\rho)$. В частности, найдется “оптимальная” ляпуновская метрика ρ_0^* , для которой выполнено утверждение теоремы 1.2' при $\lambda_\sigma = \mathring{\Lambda}_\sigma(\rho_0^*) = \Lambda_\sigma^*$ для $\sigma = u, s$. Итак, нижние грани Λ_σ^* обеих функций $\Lambda_\sigma(\cdot)$ и нижние грани обеих функций $\mathring{\Lambda}_\sigma(\cdot)$ на множестве $\mathcal{H}$ достигаются на некотором элементе $\rho_0^* \in \mathcal{L}$, так что $\mathring{\Lambda}_\sigma(\rho_0^*) = \Lambda_\sigma(\rho_0^*) = \Lambda_\sigma^*$ и, кроме того, $\rho_0^* \in \mathcal{L} \cap \text{Lip}_\sigma$, если $\Lambda_\sigma^* > 0$.

ПРИМЕР. Пусть A – целочисленная матрица размера $n \times n$ с определителем ± 1 , не имеющая собственных значений, по модулю равных единице. Линейное преобразование $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ переводит целочисленную решетку $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ в себя. Индуцированный автоморфизм тора $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ называется *гиперболическим автоморфизмом* тора. Известно, что всякий гиперболический автоморфизм тора является У-дiffeоморфизмом и, следовательно, удовлетворяет аксиоме A#. В случае стандартной плоской метрики ρ на торе имеем

$$\Lambda_s(\rho) = \{\max |\lambda| : |\lambda| < 1, \lambda \in \text{spec } A\}, \\ \Lambda_u(\rho) = \{\max |\lambda|^{-1} : |\lambda| > 1, \lambda \in \text{spec } A\}.$$

Нетрудно доказать, что $\Lambda_\sigma(\rho) = \Lambda_\sigma^*$. С другой стороны, очевидно, если жордановы клетки, соответствующие некоторому числу $\lambda \in \text{spec } A$ такому, что $|\lambda| = \Lambda_s(\rho)$ либо $|\lambda|^{-1} = \Lambda_u(\rho)$, не сводятся к диагональной матрице (т. е. имеет клетка порядка выше первого), то ρ не является “оптимальной” ляпуновской метрикой ρ_0^* , поскольку не удовлетворяет утверждению а) теоремы 1.1.

В конструкциях Д. Фрида [10] и К. Сакая [9], [15] искомая ляпуновская метрика строится фактически в виде конечной суммы:

$$\rho_0(x, y) = \sum_k \rho(f^k x, f^k y) G_k, \quad (1.5)$$

где G_k – некоторые неотрицательные просто задаваемые коэффициенты, а ρ – гиперболическая метрика, удовлетворяющая некоторому дополнительному условию (см. приложение А). В доказательстве теоремы 1.1 искомая ляпуновская метрика будет строиться в виде бесконечной суммы (1.5) исходя из произвольной гиперболической метрики с весьма специальным и нетривиальным выбором

коэффициентов G_k . В доказательстве теоремы 1.2' такие суммы будут рассматриваться для точек x, y , лежащих на одном глобальном устойчивом или неустойчивом “многообразии”, что дает семейства ляпуновских метрик на этих “многообразиях”, которые затем используются для построения искомой метрики на всем пространстве. Наконец, доказательство теоремы 1.3 основано на аккуратном построении искомой метрики исходя из двух последовательностей метрик $\rho_n^{(\sigma)} \in \mathcal{H}$, $\sigma = u, s$, для которых $\Lambda_\sigma(\rho_n^{(\sigma)}) \rightarrow \lambda_\sigma$, $n \rightarrow +\infty$. Здесь также существенную роль играют идеи доказательства теоремы 1.2'.

Доказательства теорем 1.1 и 1.2' приведены ниже, в § 2, 3. В § 2 будет доказана основная часть теоремы 1.2': если гомеоморфизм обладает ГС и ЛСП, то ляпуновскую метрику можно выбрать так, что будут выполнены утверждение а) теоремы 1.1 и утверждения а), б) теоремы 1.2'. В § 3 будет показано, как добиться в этой ситуации дополнительного выполнения утверждения б) теоремы 1.1, что завершает доказательство теоремы 1.2'. Кроме того, здесь же будет показано, что доказательство теоремы 1.1 непосредственно следует из некоторых конструкций, использованных в доказательстве теоремы 1.2'. Теорема 1.3 доказана в § 4.

Ослабленный вариант теоремы 1.1 (только утверждение а)) и теорема 1.2 были анонсированы автором без доказательства в [18].

Автор благодарен С. Ю. Пилюгину за ценные библиографические ссылки, а также В. И. Богачеву за указание на то, что эквивалентность двух топологий на множестве норм является следствием известного результата о пределе выпуклых функций.

§ 2. Доказательство основной части теоремы 1.2'

Разобьем доказательство теоремы 1.2' на несколько пунктов. Вначале рассматривается более простой случай, когда неравенства $\lambda_u \geq \Lambda_u$ и $\lambda_s \geq \Lambda_s$ являются строгими. Рассмотрение общего случая, когда возможно равенство, технически сложнее и требует модификации доказательства. Впрочем, именно конструкция, использованная в доказательстве для общего случая, будет приспособлена в дальнейшем для установления теоремы 1.1.

1. Конструкция метрики ρ_0 и метрик ρ_u, ρ_s на локальных многообразиях в случае $\lambda_u > \Lambda_u$ и $\lambda_s > \Lambda_s$. Сначала зададим на каждом локальном многообразии $W_\delta^\sigma(x)$ некоторую метрику $\rho_\sigma(\cdot, \cdot)$. Ограничимся рассмотрением случая $\sigma = u$ и предположим, что $\lambda_u > \Lambda_u$, т.е. в неравенстве (1.1) для неустойчивых многообразий можно взять $\lambda \in (\Lambda_u, \lambda_u)$. Для любых x, y таких, что $y \in W_\delta^u(x)$, положим

$$\rho_u(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho(f^k x, f^k y) \lambda_u^k. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) напоминает формулу, используемую при построении ляпуновской римановой метрики для гиперболического множества или для гиперболического линейного расширения гомеоморфизма (однако при этом построении рассматривается ряд, бесконечный в одну сторону). Ряд (2.1) сходится в силу ограниченности метрического компакта X и оценок (1.1) для неустойчивых многообразий с учетом неравенства $\lambda_u > \lambda$. Очевидно, что $\rho_u(\cdot, \cdot)$ – метрика

на $W_\delta^u(x)$ и даже на глобальном многообразии $W^u(x)$. Кроме того, очевидно, что

$$\rho_u(f^{-1}x, f^{-1}y) = \lambda_u \rho_u(x, y). \quad (2.2)$$

Далее, при рассмотрении общего случая, допускающего равенство $\lambda_u = \Lambda_u$, формула (2.1) будет видоизменена.

Докажем, что на каждом локальном многообразии $W_\delta^u(x)$ метрика ρ_u эквивалентна исходной метрике ρ , причем эта эквивалентность носит равномерный характер, т. е. не зависит от выбора центра x неустойчивого многообразия. (Отметим, что на глобальных многообразиях $W^u(x)$ метрика ρ_u уже не эквивалентна ρ , поскольку точки, далекие в метрике ρ_u , могут быть близкими в метрике ρ .) Неравенство $\rho_u(x, y) \geq \rho(x, y)$ очевидно. Далее, $\rho_u(x, y) \rightarrow 0$ равномерно по всем x, y таким, что $y \in W_\delta^u(x)$, при $\rho(x, y) \rightarrow 0$, т. е.

$$\forall \nu > 0 \quad \exists \mu > 0: \rho(x, y) < \mu \Rightarrow \rho_u(x, y) < \nu.$$

Это легко следует из равномерной непрерывности $f: X \rightarrow X$, ограниченности X и оценок (1.1) с учетом $\lambda_u > \lambda$.

Аналогично строится метрика $\rho_s(\cdot, \cdot)$ на многообразиях $W_\delta^s(x)$ в случае $\lambda_s > \Lambda_s$.

Искомая метрика будет определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_0(x, y) &= \inf \{ l(z_0, z_1) + l(z_1, z_2) + \dots + l(z_{m-1}, z_m) : \\ &\quad z_0 = x, z_m = y; z_{k+1} \in W_\delta^\sigma(z_k), l(z_k, z_{k+1}) = \rho_\sigma(z_k, z_{k+1}), \\ &\quad \sigma = u \text{ или } \sigma = s \}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если $\rho(x, y) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ взято из определения 1.3, то цепочка $Z = \{x = z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m = y\}$, связывающая точки x и y и фигурирующая в определении (2.3), заведомо существует. Если же такой цепочки нет, то функции $\rho_0(x, y)$ будет приписываться некоторое фиксированное положительное значение $R > 0$. Очевидно, ρ_0 является псевдометрикой³, т. е. неотрицательной симметричной функцией, такой, что $\rho_0(x, x) = 0$ для всех $x \in X$ и удовлетворяющей неравенству треугольника $\rho_0(x, z) \leq \rho_0(x, y) + \rho_0(y, z)$. Проверка факта, что псевдометрика ρ_0 действительно является метрикой на X (не обязательно эквивалентной исходной), сводится к доказательству того, что $\rho_0(x, y) = 0 \iff x = y$. Этот факт и эквивалентность ρ_0 исходной метрике ρ будут установлены ниже. В последующем для каждой цепочки $Z = \{x = z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m = y\}$ будем обозначать ее длину через $l(Z) = l(z_0, z_1) + \dots + l(z_{m-1}, z_m)$. Обозначим также через

$$l_\sigma(Z) = \sum_{k: z_{k+1} \in W_\delta^\sigma(z_k)} \rho_\sigma(z_k, z_{k+1}),$$

где $\sigma = u, s$, сумму ρ_σ -длин звеньев, “параллельных” многообразиям W_δ^σ .

Определение псевдометрики ρ_0 допускает следующую равносильную форму. Рассмотрим все неотрицательные функции ρ_0 пары точек, являющиеся псевдометриками и удовлетворяющие условиям $\rho_0(x, y) \leq \rho_\sigma(x, y)$ для всех x, y таких, что $y \in W_\delta^\sigma(x)$. Для данной пары точек (x, y) величины $\rho_0(x, y)$ неограничены сверху тогда и только тогда, когда не существует цепочки Z , соединяющей точки x и y . В этом случае положим $\rho_0(x, y) = R$. Тогда ρ_0 , задаваемая формулой (2.3), есть наибольшая функция, удовлетворяющая описанным условиям.

³Н. Бурбаки использует термин “отклонение”.

2. Близость (в липшицевом смысле) метрик ρ_u на близких неустойчивых многообразиях $W_\delta^u(x)$. Здесь будет доказан результат (основная лемма 2.2), из которого вытекает теорема 1.2 (пока в предположении $\lambda_u > \Lambda_u$ и $\lambda_s > \Lambda_s$; в дальнейшем, при рассмотрении общего случая, лемма 2.2 будет передоказана). Обозначим через $K \subset X \times X$ множество пар точек (x, y) таких, что $y \in W_\delta^u(x)$.

ЛЕММА 2.1. *Функция $\rho_u(\cdot, \cdot)$ равномерно непрерывна на компакте K , т. е. для всякого $\mu > 0$ найдется $\delta_2 = \delta_2(\mu) > 0$ такое, что если $(x, y) \in K$, $(x', y') \in K$, $\rho(x, x') < \delta_2$, $\rho(y, y') < \delta_2$, то $|\rho_u(x, y) - \rho_u(x', y')| < \mu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко вытекает из равномерной непрерывности f , ограниченности X и оценок (1.1) с учетом $\lambda_u > \lambda$.

Очевидно, аналогичный результат справедлив для метрик ρ_s на множестве пар точек (x, y) таких, что $y \in W_\delta^s(x)$. Будем считать, что число $\delta_2 = \delta_2(\mu) > 0$ удовлетворяет условию леммы 2.1 для обоих случаев $\sigma = u, s$.

На неустойчивых многообразиях $W_\delta^u(x)$ и $W_\delta^u(x')$ близких точек x и x' имеются естественным образом согласованные канонические координаты, отождествляемые проекцией вдоль пересекающих их устойчивых многообразий. Строго говоря, пусть $\rho(x, x') \leq \varepsilon/2$. Тогда проекция $W_\delta^u(x) \cap D_{\varepsilon/2}(x) \rightarrow W_\delta^u(x')$ задается формулой $y \mapsto [y, x']$ (здесь $\varepsilon > 0$ – число из определения 1.3).

ЛЕММА 2.2 (основная). *Для всякого $\nu > 0$ найдется $\delta_1 = \delta_1(\nu) > 0$ такое, что выполнено следующее утверждение. Пусть $y, z \in W_\delta^u(x) \cap D_{\varepsilon/2}(x)$, $x' \in W_\delta^s(x) \cap D_{\varepsilon/2}(x)$ и $y', z' \in W_\delta^u(x')$ – точки, соответствующие y, z при естественном отождествлении канонических координат (“проекции” y, z на $W_\delta^u(x')$ вдоль устойчивых “многообразий”). Тогда*

$$\left| \frac{\rho_u(y', z')}{\rho_u(y, z)} - 1 \right| < \nu,$$

если $\rho(y, z) \leq \delta_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства заключается в следующем. В силу (2.2) при всех n справедливы равенство $\rho_u(y, z) = \lambda_u^n \rho_u(f^n y, f^n z)$ и аналогичное тождество для (y', z') . Следовательно,

$$\frac{\rho_u(y', z')}{\rho_u(y, z)} = \frac{\rho_u(f^n y', f^n z')}{\rho_u(f^n y, f^n z)}. \quad (2.4)$$

Если $\rho(y, z) > 0$ достаточно мало, то, во-первых, $(y, z) \in K$, а во-вторых, для всех n , не превосходящих некоторого достаточно большого $n_u(y, z)$, величина $\rho(f^n y, f^n z) < \delta/3$, но для $n = n_u(y, z)$ эта величина равномерно отделена от нуля. В частности, $(f^n y, f^n z) \in K$ для $n = n_u(y, z)$. Далее, если $\rho(y, z)$ мало, то и $\rho(y', z')$ мало. Тогда, аналогично, $(y', z') \in K$ и $\rho(f^n y', f^n z') < \delta/3$ для $0 < n \leq n_u(y', z')$. При этом если $n_u(y', z')$ достаточно велико, то каждая величина $\rho(f^n y, f^n y')$ и $\rho(f^n z, f^n z')$ меньше $\delta/3$ для всех $n > n_u(y', z')$, и в силу неравенства треугольника $\rho(f^n y', f^n z') < \delta$ для $n_u(y', z') < n \leq n_u(y, z)$. Итак, $(f^n y', f^n z') \in K$ при $n = n_u(y, z)$. Далее, величины $\rho(f^n y, f^n y')$ и $\rho(f^n z, f^n z')$ достаточно малы при $n = n_u(y, z)$, поскольку $n_u(y, z)$ велико. Из леммы 2.1 следует, что числитель в правой части (2.4) близок к знаменателю. Наконец,

знаменатель равномерно отделен от нуля, поскольку всегда $\rho_u \geq \rho$, что и гарантирует искомый результат.

Перейдем к строгому доказательству. Найдется $\delta_3 > 0$ такое, что $(y, z) \in K$, если $y, z \in W_\delta^u(x)$ и $\rho(y, z) \leq \delta_3$. Действительно, в силу оценок (1.1) на неустойчивых многообразиях существует N' такое, что если $n > N'$, то $\rho(f^{-n}x, f^{-n}y) \leq \delta/2$ и, аналогично, $\rho(f^{-n}x, f^{-n}z) \leq \delta/2$, а в силу равномерной непрерывности f^{-1} существует $\delta_3 = \delta_3(N') > 0$ такое, что $\rho(f^{-n}y, f^{-n}z) \leq \delta$ для всех $0 \leq n \leq N'$, если $\rho(y, z) \leq \delta_3$. Это число $\delta_3 > 0$ является искомым. В дальнейшем $\rho(y, z) \leq \delta_3$ и, значит, $(y, z) \in K$. В силу равномерной непрерывности f найдется $\hat{\delta} \in (0, \delta)$ такое, что $\rho(y, z) < \hat{\delta} \Rightarrow \rho(fy, fz) < \delta/3$. Положим

$$n_u(y, z) = \min\{k > 0: \rho(f^k x, f^k y) \geq \hat{\delta}\},$$

если $\rho(y, z) < \hat{\delta}$, но $y \neq z$. Существование такого положительного числа следует из того, что δ – разделяющая константа. Заметим, что $\hat{\delta} \leq \rho(f^n y, f^n z) < \delta/3$ при $n = n_u(y, z)$. Аналогично, из равномерной непрерывности f следует, что $n_u(y, z) \rightarrow +\infty$ равномерно по всем $(y, z) \in K$ при $\rho(y, z) \rightarrow 0$, т. е.

$$\forall N \geq 0 \exists \delta_4 = \delta_4(N) > 0: \rho(y, z) \leq \delta_4 \Rightarrow n_u(y, z) > N.$$

Здесь всегда можно считать, что $\delta_4 < \hat{\delta}$. Далее, в силу оценок (1.1) на устойчивых многообразиях, $\rho(f^n y, f^n y') \rightarrow 0$ равномерно по всем y, y' таким, что $y' \in W_\delta^s(y)$, при $n \rightarrow +\infty$, т. е.

$$\forall \delta_5 > 0 \exists N = N(\delta_5): n > N \Rightarrow \rho(f^n y, f^n y') < \delta_5.$$

Наконец, $\rho(y', z') \rightarrow 0$ равномерно по всем (y, z) при $\rho(y, z) \rightarrow 0$, т. е.

$$\forall \delta_6 > 0 \exists \delta_7 = \delta_7(\delta_6) \in (0, \delta_6]: \rho(y, z) < \delta_7 \Rightarrow \rho(y', z') < \delta_6.$$

Действительно, $\rho(y', z')$ равномерно непрерывно зависит от тройки точек (y, z, x') и обращается в нуль при $y = z$, а значит, $\rho(y', z') \rightarrow 0$ равномерно по указанным x, y, z, x' при $\rho(y, z) \rightarrow 0$, откуда следует существование искомого $\delta_7 = \delta_7(\delta_6)$.

Полагая $\mu = \nu \hat{\delta}$, выберем $\delta_2 = \delta_2(\mu)$ по лемме 2.1. Далее, по числу $\delta_5 = \delta_2$ выберем $N_1 = N(\delta_2)$, а по числу $\delta_5 = \delta/3$ выберем $N_2 = N(\delta/3)$. По $N = N_1$ выберем $\delta'_4 = \delta_4(N_1)$; по $N = N_2$ выберем $\delta''_4 = \delta_4(N_2)$, а затем по $\delta_6 = \min\{\delta'_4, \delta_3\}$ выберем $\delta_7 = \delta_7(\delta_6)$. Тогда неравенство $\rho(y, z) \leq \delta_7$ гарантирует выполнение следующих условий: во-первых, $(y, z) \in K$ (поскольку $\delta_7 \leq \delta_3$) и $\rho(f^n y, f^n z) < \delta/3$ при $0 < n \leq n_u(y, z)$ (поскольку $\delta_7 < \hat{\delta}$), что влечет $(f^n y, f^n z) \in K$ для $n = n_u(y, z)$; во-вторых, выполнение аналогичных утверждений, в которых y, z и $n_u(y, z)$ заменены на y', z' и $n_u(y', z')$ соответственно; в-третьих, справедливость неравенства

$$\rho(f^n y', f^n z') \leq \rho(f^n y', f^n y) + \rho(f^n y, f^n z) + \rho(f^n z, f^n z') < \delta$$

при $n_u(y', z') < n \leq n_u(y, z)$, поскольку $n_u(y', z') > N_2$. Значит, $(f^n y', f^n z') \in K$ для $n = n_u(y, z)$. Следовательно, если дополнительно потребовать $\rho(y, z) \leq \delta'_4$, то

$$\left| \frac{\rho_u(y', z')}{\rho_u(y, z)} - 1 \right| = \frac{|\rho_u(f^n y', f^n z') - \rho_u(f^n y, f^n z)|}{\rho_u(f^n y, f^n z)} < \frac{\mu}{\hat{\delta}} = \nu.$$

Итак, полагая $\delta_1 = \min\{\delta'_4, \delta_7\}$, получим требуемый результат.

Очевидно, аналогичный результат справедлив для метрик ρ_s на близких устойчивых многообразиях $W_\delta^s(x)$. Будем считать, что число $\delta_1 = \delta_1(\nu) > 0$ удовлетворяет условию леммы 2.2 для обоих этих случаев.

3. Доказательство теоремы 1.2 в случае $\lambda_u > \Lambda_u$ и $\lambda_s > \Lambda_s$. Покажем вначале, что функция $\rho_0(\cdot, \cdot)$ является метрикой, эквивалентной исходной метрике $\rho(\cdot, \cdot)$. Доказательство использует только неравенство треугольника, неравенства $\rho \leq \rho_\sigma$ и следующие свойства, имеющие равномерный характер: эквивалентность ρ_σ и ρ на локальных многообразиях и непрерывность $[\cdot, \cdot]$. Основная идея последующих рассуждений будет заключаться в том, что если $\rho_0(x, y)$ мало, то соответствующий $\inf$ в определении (2.3) реализуется только цепочками Z , лежащими в малой ρ -окрестности x , где по лемме 2.2 метрики ρ_u и ρ_s на неустойчивых и устойчивых многообразиях близки в липшицевом смысле, что и влечет справедливость утверждения теоремы 1.2.

ЛЕММА 2.3. *Функция $\rho_0(\cdot, \cdot)$ является метрикой, эквивалентной метрике $\rho(\cdot, \cdot)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С одной стороны, $\rho(x, y) \leq \rho_0(x, y)$, если существует цепочка Z , соединяющая x и y . Действительно, согласно определению (2.3) для всякого $\tau > 0$ найдется цепочка Z , соединяющая x и y и имеющая длину $l(Z) \leq \rho_0(x, y) + \tau$. Тогда

$$\rho(x, y) \leq \rho(z_0, z_1) + \dots + \rho(z_{m-1}, z_m) \leq l(Z),$$

поскольку всегда $\rho \leq \rho_\sigma$. Отсюда, в силу произвольного выбора $\tau > 0$ вытекает искомый результат. Если же цепочки Z не существует, то $\rho(x, y)$ и $\rho_0(x, y)$ равномерно отделены от нуля: $\rho(x, y) > \varepsilon$ и $\rho_0(x, y) = R$. С другой стороны, $\rho_0(x, y) \rightarrow 0$ равномерно по всем x, y при $\rho(x, y) \rightarrow 0$. Действительно,

$$\rho_0(x, y) \leq \rho_s(x, [x, y]) + \rho_u([x, y], y),$$

причем метрики ρ_u, ρ_s на локальных многообразиях равномерно эквивалентны ρ и $\rho(x, [x, y]) \rightarrow 0, \rho([x, y], y) \rightarrow 0$ равномерно по x, y при $\rho(x, y) \rightarrow 0$ в силу равномерной непрерывности $[\cdot, \cdot]$. Лемма доказана.

Если $\rho_0(x, y) < r$, где $r < R$, то при вычислении $\rho_0(x, y)$ по формуле (2.3) достаточно ограничиться рассмотрением цепочек Z , имеющих длину $l(Z) < r$. Для этих цепочек

$$\rho(x, z_k) + \rho(z_k, y) \leq \rho(z_0, z_1) + \dots + \rho(z_{m-1}, z_m) \leq l(Z) < r$$

при любом $k, 0 \leq k \leq m$. Итак, вся цепочка Z содержится в $D_r(x)$.

Тот факт, что метрика ρ_0 удовлетворяет утверждению а) теоремы 1.1, непосредственно вытекает из (2.2) и аналогичного тождества для устойчивых многообразий и из следующей леммы, которую мы сформулируем только для случая неустойчивых многообразий.

ЛЕММА 2.4. *Имеет место $\rho_0(x, y)/\rho_u(x, y) \rightarrow 1$ равномерно по всем x, y таким, что $(x, y) \in K$, при $\rho_0(x, y) \rightarrow 0$, т.е. для всякого $\nu > 0$ найдется $r = r(\nu) > 0$ такое, что если $\rho_0(x, y) < r$, то $|\rho_u(x, y)/\rho_0(x, y) - 1| \leq \nu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\delta_1 = \delta_1(\nu') \leq \varepsilon$ по лемме 2.2, а затем $r = t(\delta_1/2)$, где для всякого $\tau > 0$ число $t = t(\tau) \in (0, \varepsilon]$ определяется так, чтобы

для любых x, y было выполнено $\rho(x, [x, y]) < \tau$, $\rho([x, y], y) < \tau$, если $\rho(x, y) < t$. Докажем, что это r – искомое, если ν' таково, что $(1 - \nu')^{-1} = 1 + \nu$.

Для каждой цепочки $Z = \{x = z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m = y\}$ длины $l(Z) < r$ те ее звенья $[z_k, z_{k+1}]$, $0 \leq k < m$, которые “параллельны” многообразию $W_\delta^u(x)$, будем проектировать на это многообразие. При этом согласно лемме 2.2 отношение ρ_u -длин каждого такого звена и его “проекции” отличается от единицы на величину, которая по модулю меньше ν' . Итак, получим цепочку $Z^u = \{x = v_0, v_1, \dots, v_p = y\} \subset W_\delta^u(x) \cap D_{\delta_1/2}(x)$, причем

$$\frac{l(Z^u)}{l_u(Z)} < \frac{1}{1 - \nu'} = 1 + \nu. \quad (2.5)$$

Наконец, используя неравенства $l(Z^u) \geq \rho_u(x, y)$ и $l_u(Z) \leq l(Z)$, а затем переходя к нижней грани $l(Z)$ по формуле $\rho_0(x, y) = \inf l(Z)$ и учитывая $\rho_0(x, y) \leq \rho_u(x, y)$, получим $0 \leq \rho_u(x, y)/\rho_0(x, y) - 1 \leq \nu$, что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения а) теоремы 1.2 следует основной идее доказательства леммы 2.4. Выберем число $r = r(\nu)$, удовлетворяющее и утверждению леммы 2.2 для неустойчивых многообразий, и аналогичному утверждению для устойчивых многообразий, а затем цепочку Z так, как это было сделано выше, и рассмотрим цепочки Z^u и Z^s , получаемые проекциями Z на $W_\delta^u(y)$ и $W_\delta^s(x)$. Тогда выполнено неравенство (2.5) и его аналог, в котором индексы u заменены на индексы s . Складывая числители и знаменатели дробей в левых частях этих двух неравенств, получим

$$\frac{l(Z^u) + l(Z^s)}{l(Z)} - 1 < \nu. \quad (2.6)$$

Используя неравенства $l(Z^u) \geq \rho_u([x, y], y) \geq \rho_0([x, y], y)$ и $l(Z^s) \geq \rho_s(x, [x, y]) \geq \rho_0(x, [x, y])$, а затем переходя к нижней грани $l(Z)$, получим

$$\frac{\rho_0(x, [x, y]) + \rho_0([x, y], y)}{\rho_0(x, y)} - 1 \leq \nu, \quad (2.7)$$

причем выражение в левой части последнего неравенства неотрицательно. Это доказывает первое неравенство из п. а) теоремы 1.2.

Второе неравенство отличается от первого заменой слагаемого $\rho_0([x, y], y)$ на $\rho_0(x, [y, x])$. Если $r > 0$ выбрано достаточно малым, то отношение этих слагаемых в силу лемм 2.2 и 2.4 близко к единице. Кроме того, каждое из них не превосходит $(1 + \nu)\rho_0(x, y)$, что видно из неравенства (2.7) и неравенства, получаемого из него перестановкой x и y . Поэтому второе неравенство п. а) теоремы 1.2 оказывается справедливым, но константа ν в его правой части заменяется на некоторую величину $h(\nu)$, которая мала при малых $\nu > 0$. Это доказывает искомый результат. Чтобы провести доказательство аккуратно, заметим, что

$$\left| \frac{\rho_u([x, y], y)}{\rho_u(x, [y, x])} - 1 \right| < \nu$$

в силу леммы 2.2 при выбранном ранее r . Чтобы применить лемму 2.4 к парам точек $([x, y], y)$ и $(x, [y, x])$, выберем $\mu > 0$ такое, что $\rho(x, y) < \mu \Rightarrow \rho_0(x, y) <$

$r_0 = r(\nu)$ для любых x, y , а затем положим $r \leq R(\nu) = \min\{t(\mu), r_0\}$. Тогда оказывается, что отношение заменяемых слагаемых заключено в интервале (α, β) , где $\alpha = (1 - \nu)^2/(1 + \nu)$, $\beta = (1 + \nu)^2/(1 - \nu)$. Поэтому имеет место второе неравенство п. а) теоремы 1.2, в котором вместо ν фигурирует величина $h(\nu) = \nu + (1 + \nu) \max\{1 - \alpha, \beta - 1\}$. Для всякого $\nu > 0$ найдется $\nu' > 0$ такое, что $h(\nu') \leq \nu$. Наконец, выбирая $r \leq R(\nu')$, мы добьемся выполнения обоих неравенств п. а) теоремы.

Доказательство п. б) теоремы 1.2 изложим только для случая неустойчивых локальных многообразий. Зададим $\tau_0 > 0$, выберем $r < r(\nu)/(1 + \tau_0)$ и будем считать, что $\tau \leq \tau_0$. Тогда к каждой паре точек (z, x) и (z, y) применимо первое неравенство п. а), поскольку обе величины $\rho_0(x, z)$ и $\rho_0(z, y)$ меньше $r(\nu)$. Складывая числители и знаменатели дробей в левых частях двух соответствующих неравенств, получим

$$\frac{2\rho_0(z, z') + \rho_0(x, z') + \rho_0(y, z')}{\rho_0(x, z) + \rho_0(z, y)} \leq 1 + \nu,$$

где $z' = [z, x]$ – проекция z на $W_\delta^u(x)$. Поскольку $\rho_0(x, z') + \rho_0(z', y) \geq \rho_0(x, y)$ и $\rho_0(x, z) + \rho_0(z, y) < (1 + \tau)\rho_0(x, y)$, то после элементарных преобразований имеем

$$\frac{\rho_0(z, z')}{\rho_0(x, y)} \leq \frac{1}{2} [(1 + \nu)(1 + \tau) - 1]. \quad (2.8)$$

Заметим, наконец, что $\rho_0(z, W_\delta^u(x)) \leq \rho_0(z, z')$, а правая часть неравенства (2.8) оказывается меньше ν при достаточно малых $\tau > 0$ (при $\tau < \nu/(1 + \nu)$), что и доказывает искомый результат.

4. Доказательство теоремы 1.2' и ее “неавтономного” аналога в случае $\lambda_u > \Lambda_u$ и $\lambda_s > \Lambda_s$. Для доказательства теоремы 1.2' следует только слегка видоизменить определение метрики ρ_0 и рассуждения, приведенные в п. 3. А именно,

$$\rho'_0(x, y) = \inf\{\Phi(l_s(Z), l_u(Z)) : Z \text{ описаны в (2.3)}\} \quad (2.9)$$

– искомая метрика (обозначение ρ_0 будет зарезервировано для построенной в п. 3 метрики, соответствующей случаю $\Phi(a_s, a_u) = \Phi_0(a_s, a_u) = |a_s| + |a_u|$). Очевидно, ρ'_0 – псевдометрика, причем $\rho'_0(x, y) \leq \rho_\sigma(x, y)$ для всех x, y таких, что $y \in W_\delta^\sigma(x)$. Далее, поскольку $1/2 \leq \Phi(a_s, a_u)/\Phi_0(a_s, a_u) \leq 1$ (в силу неравенств (1.3)), то $1/2 \leq \rho'_0(x, y)/\rho_0(x, y) \leq 1$. Поэтому справедлив аналог леммы 2.3: функция $\rho'_0(\cdot, \cdot)$ является метрикой, эквивалентной метрике $\rho(\cdot, \cdot)$, причем метрики ρ'_0 для всевозможных норм Φ будут 2-липшицево эквивалентными, а вместо неравенства $\rho_0(x, y) < r$ в рассуждениях, приведенных в п. 3, следует использовать неравенство $\rho'_0(x, y) < r' = r/2$. Доказательство аналога леммы 2.4 (в варианте, равномерном по всем нормам Φ) проходит практически без изменений и использует только неравенство $\Phi(a_s, a_u) \geq a_u$ с числами $a_\sigma = l_\sigma(Z)$. Поэтому пределы в утверждении а) теоремы 1.1 равномерны по всем метрикам ρ'_0 и все эти метрики равномерно асимптотически равны на локальных устойчивых и неустойчивых многообразиях. Однако доказательство существования подходящего числа $r(\nu) > 0$ в утверждении а) теоремы 1.2' требует небольшой модификации, но использует только неравенства (1.4). Действительно, поскольку неравенство $\Phi(\rho'_0(x, [x, y]), \rho'_0([x, y], y)) \geq \rho'_0(x, y)$ может

теперь нарушаться, то вместо одностороннего неравенства (2.5) следует потребовать выполнения двустороннего неравенства

$$\left| \frac{l(Z^u)}{l_u(Z)} - 1 \right| < \nu,$$

и это же относится к аналогичному неравенству, в котором индексы u заменены на индексы s . Тогда неравенство (2.6) примет вид

$$\left| \frac{\Phi(l(Z^s), l(Z^u))}{\Phi(l_s(Z), l_u(Z))} - 1 \right| < \nu.$$

Как и ранее, отсюда следует, что $\Phi(\rho'_0(x, [x, y]), \rho'_0([x, y], y)) \leq (1 + \nu)\rho'_0(x, y)$.

Теперь, чтобы установить неравенство

$$\Phi(\rho'_0(x, [x, y]), \rho'_0([x, y], y)) \geq (1 - \nu)\rho'_0(x, y), \quad (2.10)$$

возьмем цепочку $Z = \{x, [x, y], y\}$, для которой $l(Z^s) = \rho_s(x, [x, y])$ и $l(Z^u) = \rho_u([x, y], y)$, и заметим, что согласно аналогу леммы 2.4 и ввиду равномерной непрерывности отображения $[\cdot, \cdot]$, при выборе достаточно малого $r > 0$ отношения $\rho'_0(x, [x, y])/\rho_s(x, [x, y])$ и $\rho'_0([x, y], y)/\rho_u([x, y], y)$ будут превосходить $1 - \nu$. Поэтому вследствие $\Phi(l_s(Z), l_u(Z)) \geq \rho'_0(x, y)$ имеем неравенство (2.10), в правой части которого вместо $1 - \nu$ фигурирует $(1 - \nu)^2$. Полагая $1 - \nu = (1 - \nu')^2$ и используя в приводимых выше рассуждениях ν' вместо ν , добьемся выполнения неравенства (2.10).

Далее, при доказательстве утверждения б) теоремы 1.2' для случая $\sigma = u$ получим неравенство

$$\Phi(\rho'_0(z, z'), \rho'_0(x, z')) + \Phi(\rho'_0(z, z'), \rho'_0(y, z')) \leq (1 + \nu)(1 + \tau)\rho'_0(x, y),$$

из которого в силу неравенства треугольника следует, что

$$\Phi(a_s, a_u) \leq h \min\{a_u, \overset{\circ}{a}_u\},$$

где введены обозначения $h = (1 + \nu)(1 + \tau)$, $a_s = \rho'_0(z, z')$, $\overset{\circ}{a}_u = \rho'_0(x, y)$, $a_u = \rho'_0(w, z')$ и $w = x$ либо $w = y$. Поэтому $a_u \leq h\overset{\circ}{a}_u$ и $\Phi(a_s, a_u) \leq ha_u$.

ЛЕММА 2.5. *Если норма Φ выпукла вдоль координатной оси a_u , то для всякого $\nu > 0$ найдется $h = h(\nu) > 1$ такое, что если $a_u > 0$ и $\Phi(a_s, a_u) \leq ha_u$, то $|a_s| < \nu a_u$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно предполагать, что $a_u = 1$. Норма Φ на множестве $A = \{(a_s, 1) \in \mathbb{R}^2: |a_s| \geq \nu\}$ достигает точной нижней грани $H > 1$. Действительно, если $G \in \Phi(A)$, то $G > 1$ и $H = \inf_{a \in A} \Phi(a)$ достигается на компактном множестве $A \cap \{a \in \mathbb{R}^2: \Phi(a) \leq G\}$, причем $H > 1$. Очевидно, в качестве h можно выбрать любое число из интервала $(1, H)$.

Переобозначив теперь величину ν , входящую в формулу для h , через ν' , а h — через h' , выберем по заданному $\nu > 0$ некоторое $\tilde{\nu} \in (0, \nu)$, а затем $h = h(\tilde{\nu})$ по лемме 2.5 и столь малые положительные ν' и τ , что $h' = (1 + \nu')(1 + \tau) \leq h$ и $\tilde{\nu}h' \leq \nu$. Тогда $a_s < \nu\overset{\circ}{a}_u$, откуда следует утверждение б) теоремы 1.2'.

Чтобы доказать описанный в замечании 1.6 “неавтономный” вариант теоремы 1.2', слегка модифицируем определение метрики ρ'_0 . Введем вначале метрику $\rho'_{0,w}$, зависящую от $w \in X$, используя формулу (2.9), в которой Φ заменено на Φ_w . Теперь искомая метрика задается формулой

$$\rho''_0(x, y) = \inf_{Z=\{x=z_0, \dots, z_m=y\}} \sum_{k=1}^m \min\{\rho'_{0,z_{k-1}}(z_{k-1}, z_k), \rho'_{0,z_k}(z_{k-1}, z_k)\}, \quad (2.11)$$

где нижняя грань берется по всем цепочкам Z , соединяющим x и y и таким, что концы каждого звена $[z_{k-1}, z_k]$ могут быть, в свою очередь, соединены цепочкой, описанной в формуле (2.3). Такие цепочки, соединяющие z_{k-1} и z_k , мы обозначим через Z_k . Очевидно, неравенство $1/2 \leq \rho''_0(x, y)/\rho_0(x, y) \leq 1$, а следовательно, и результат о 2-липшицевой эквивалентности всех метрик ρ''_0 останутся в силе. Модуль непрерывности ω_B семейства единичных шаров B_{Φ_x} – это минимальная функция $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $d_H(B_{\Phi_x}, B_{\Phi_y}) \leq \omega_B(\Delta)$, если $\rho(x, y) \leq \Delta$. Можно ввести также модуль непрерывности ω_Φ семейства норм Φ_x как аналогичную функцию такую, что

$$\left| \frac{\Phi_x(a_s, a_u)}{\Phi_y(a_s, a_u)} - 1 \right| \leq \omega_\Phi(\Delta) \quad \text{для всех} \quad (a_s, a_u) \neq (0, 0),$$

если $\rho(x, y) \leq \Delta$. Нетрудно показать, что тогда $1/\sqrt{2} \leq \omega_\Phi(\Delta)/\omega_B(\Delta) \leq 2$, если при определении d_H используется метрика на $\mathbb{R}^2$, порождаемая стандартной евклидовой нормой. Единственную небольшую сложность представляет доказательство оценки сверху для $\omega_\Phi(\Delta)/\omega_B(\Delta)$. Оно основано на следующем наблюдении. Пусть B – единичный шар симметричной нормы Φ и $a \in \partial B$, причем a отлично от точек $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ пересечения ∂B с координатными осями. Пусть, для определенности, a лежит в первом квадранте, так что $(1, 0)$, $(0, 1)$ – ближайшие к a среди точек $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Тогда a принадлежит треугольнику с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Обозначим через K угол, содержащий начало $(0, 0)$, стороны которого – лучи с вершиной a , проходящие через точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Тогда множество B в силу выпуклости лежит в замыкании дополнения к углу, который вертикален углу K . Искомая оценка вытекает из того факта, что прямая, соединяющая точку $(0, 0)$ с точкой a , образует с прямыми, на которых лежат стороны угла K , углы, не меньшие $\pi/4$.

Если $\rho'_0(x, y) < r' = r/2$, то при вычислении $\rho'_0(x, y)$ по формуле (2.9) достаточно ограничиться рассмотрением цепочек Z таких, что $\Phi(l_s(Z), l_u(Z)) < r'$. Для этих цепочек $l(Z) = \Phi_0(l_s(Z), l_u(Z)) \leq 2\Phi(l_s(Z), l_u(Z)) < r$. Поэтому если $\rho''_0(x, y) < r'$, то при вычислении величин $\rho'_{0,w}(z_{k-1}, z_k)$, где $w \in \{z_{k-1}, z_k\}$, фигурирующих в формуле (2.11), достаточно ограничиться рассмотрением цепочек Z_k таких, что $l(Z_1) + \dots + l(Z_m) < r$, и, следовательно, лежащих в $D_r(x)$. Отсюда, очевидно, следует, что

$$\left| \frac{\rho''_0(x, y)}{\rho'_{0,z}(x, y)} - 1 \right| \leq \omega_\Phi(r), \quad \text{если} \quad \rho''_0(x, y) + \rho''_0(x, z) < r' = \frac{r}{2}, \quad x \neq y.$$

Далее, из этого утверждения и из неравенств утверждения а) теоремы 1.2', в которых вместо Φ взято Φ_x или Φ_y , следуют четыре неравенства п. а') замечания 1.6 с числами $r = r(\nu) > 0$, зависящими от модуля непрерывности ω_Φ . Простое доказательство п. б') замечания 1.6 также основано на этом утверждении. Кроме того, из справедливости для метрик ρ'_0 аналога леммы 2.4,

равномерного по всем нормам Φ , сразу следует, что для метрик ρ_0'' также справедлив аналог леммы 2.4, в котором число $r = r(\nu) > 0$ зависит дополнительно от модуля непрерывности ω_Φ . Покажем, однако, что, слегка модифицируя непосредственно доказательство леммы 2.4, число $r = r(\nu) > 0$ можно выбрать не зависящим от семейства Φ_x , даже не предполагая непрерывность последнего. Отсюда сразу будут следовать искомые результаты о равномерности пределов в утверждении а) теоремы 1.1 и о равномерном асимптотическом равенстве метрик ρ_0'' на многообразиях $W_\delta^\sigma(x)$.

Выберем $r > 0$, как указано выше в доказательстве леммы 2.4, и обозначим через Z_k^u “проекцию” цепочки Z_k на многообразие $W_\delta^u(x)$, а через Z^u , как и ранее, “проекцию” цепочки Z . Тогда имеем аналог (2.5): $l(Z_k^u)/l_u(Z_k) < 1 + \nu$. Заметим, что $l(Z_k^u) \geq \rho_u(v_{q-1}, v_q)$, где $[v_{q-1}, v_q]$ – звено цепочки Z^u , концы которого являются концами цепочки Z_k^u . Используя это неравенство и $l_u(Z_k) \leq \Phi_w(l_s(Z_k), l_u(Z_k))$, а затем переходя к нижней грани $\rho'_{0,w}(z_{k-1}, z_k) = \inf_{Z_k} \Phi_w(l_s(Z_k), l_u(Z_k))$, получим

$$\frac{\rho_u(v_{q-1}, v_q)}{\rho'_{0,w}(z_{k-1}, z_k)} \leq 1 + \nu.$$

Складывая числители и знаменатели в левых частях всех этих неравенств, а затем используя оценку $l(Z^u) \geq \rho_u(x, y)$ для суммы числителей $l(Z^u)$, переходя по формуле (2.11) к нижней грани суммы знаменателей и учитывая $\rho_0''(x, y) \leq \rho_u(x, y)$, получим $0 \leq \rho_u(x, y)/\rho_0''(x, y) - 1 \leq \nu$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Непрерывность семейства Φ_x , или, по крайней мере, некоторый ослабленный вариант этого свойства, оказывается необходимым условием для выполнения хотя бы одного из четырех неравенств “неавтономного” аналога утверждения а) теоремы 1.2'. Пусть для определенности выполнено, например, первое неравенство, в котором Φ заменено на Φ_x , т. е. метрика ρ_0' обладает тем свойством, что для всякого $\nu > 0$ найдется $r = r(\nu) > 0$ такое, что $|\Phi_x(a_s, a_u) - a| \leq \nu a$, если $a < r$, где введены обозначения $a_s = \rho_0'(x, [x, y])$, $a_u = \rho_0'([x, y], y)$, $a = \rho_0'(x, y)$ (в случае выполнения одного из трех других неравенств будут иметь место аналогичные утверждения). Обозначим через P_x множество предельных точек при $y \rightarrow x$ для двумерного нормированного вектора $(a_s, a_u)/\|(a_s, a_u)\|$, зависящего от y , где $\|\cdot\|$ – произвольная норма на плоскости. Тогда, как нетрудно показать, $\Phi_w \rightarrow \Phi_x$ поточечно на P_x при $w \rightarrow x$. Если, кроме того, для данного $x \in X$ вектор (a_s, a_u) принимает все значения из некоторой окрестности U_x точки $(0, 0)$, то семейство Φ_w непрерывно в точке $w = x$, причем величина $\|\Phi_w(a_s, a_u)/\Phi_x(a_s, a_u) - 1\|$ для всех $(a_s, a_u) \neq (0, 0)$ оценивается сверху функцией, определяемой только окрестностью U_x , функцией $r(\nu)$ и модулем непрерывности отображения $[\cdot, \cdot]: (w, y) \mapsto [w, y]$ по аргументу w .

Нетрудно видеть, что это условие будет заведомо выполнено для всех $x \in X$, если на каждом “многообразии” $W_\delta^\sigma(x)$ имеется непрерывная кривая, проходящая через x . Это, например, так, если гомеоморфизм f является У-диффеоморфизмом или, более общо, фазовое пространство $\Lambda^\#$ -гомеоморфизма f является многообразием, поскольку тогда [19] локальные “многообразия” будут кусочками листов инвариантных топологических слоений, т. е. настоящими топологическими многообразиями. Кроме того, в этом примере выполнено следующее условие локальной линейной связности многообразий $W_\delta^\sigma(x)$: любую

точку $y \in W_\delta^\sigma(x)$, достаточно близкую к x , можно соединить с x кривой, лежащей на $W_\delta^\sigma(x)$ и остающейся в малой окрестности точки x . Отсюда нетрудно получить, что окрестность U_x можно выбрать локально постоянной, т. е. для всякой точки $x \in X$ найдется ее окрестность V_x в X такая, что U_y может быть задана одинаковой для всех $y \in V_x$. Выбирая теперь из покрытия компакта X окрестностями V_x ($x \in X$) конечное подпокрытие, получим, что $U_x = U$ можно задать не зависящей от $x \in X$. Тогда модуль непрерывности семейства Φ_x оценивается сверху функцией, определяемой только окрестностью U , функцией $r(\nu)$ и модулем непрерывности отображения $[\cdot, \cdot]$ по первому аргументу.

В заключение докажем неравенства (1.3), (1.4). Поскольку точка $(a_s, 0)$ лежит на отрезке с концами в точках $(a_s, \pm a_u)$, где норма Φ принимает одинаковые значения, то $\Phi(a_s, a_u) \geq \Phi(a_s, 0) = |a_s|$. Аналогично, $\Phi(a_s, a_u) \geq |a_u|$. Неравенство $\Phi(a_s, a_u) \leq \Phi(a_s, 0) + \Phi(0, a_u) = |a_s| + |a_u|$ очевидно. Оценки для $\Phi(k_s a_s, k_u a_u)/\Phi(a_s, a_u)$ достаточно установить для случая, когда $k_u = 1$, $k_s > 1$, поскольку Φ – однородная функция 1-й степени, симметричная относительно координатных осей. Во-первых, $\Phi(k_s a_s, a_u) \geq \Phi(a_s, a_u)$, поскольку точка (a_s, a_u) лежит на отрезке с концами в точках $(\pm k_s a_s, a_u)$, в которых норма Φ принимает одинаковые значения. Во-вторых, $\Phi(k_s a_s, a_u) \leq k_s \Phi(a_s, a_u)$ ввиду того, что $\Phi(k_s a_s, a_u) = k_s \Phi(a_s, a_u/k_s)$ и $\Phi(a_s, a_u/k_s) \leq \Phi(a_s, a_u)$, поскольку точка $(a_s, a_u/k_s)$ лежит на отрезке с концами в точках $(a_s, \pm a_u)$, в которых норма Φ принимает одинаковые значения.

5. Сведение доказательства теоремы 1.2' для случая $\lambda_u > 0$ и $\lambda_s > 0$ к задаче построения числовой последовательности с заданными свойствами. Введем отношение частичного порядка на множестве всех последовательностей $\{a_n: n \geq 0\}$ с положительными членами: $\{a_n\} \prec \{b_n\}$, или, сокращенно, $a_n \prec b_n$, если $\{b_n\}$ растет быстрее $\{a_n\}$, т. е. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = 0$ или $a_n = o(b_n)$, $n \rightarrow +\infty$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех последовательностей $\{a_n\}$, растущих медленнее всех возрастающих показательных функций, т. е. $a_n \prec c^n$ для любого $c > 1$.

Введем также последовательность

$$t_n = \lambda_u^{-n} \sup_{\substack{y \in W_\delta^\sigma(x) \\ x \neq y}} \frac{\rho(f^{-n}x, f^{-n}y)}{\rho(x, y)}, \quad (2.12)$$

где $n \geq 0$, $\lambda_u \geq \Lambda_u$. Тогда числа t_n определены корректно и $\{t_n\} \in \mathcal{S}$. Действительно, для любого $c > 1$ найдется $N \geq 0$ такое, что $t_N \leq c^N$. (В противном случае найдется $c > 1$ такое, что $t_N > c^N$ для всех $N \geq 0$, и тогда условие (1.1) нарушается для любых $\lambda < \Lambda_u c$, что противоречит определению Λ_u .) Поэтому $t_n \leq \max_{0 \leq k \leq N} (t_k c^{-k}) \cdot c^n$ для всех $n \geq 0$ в силу очевидного неравенства $t_{n+m} \leq t_n t_m$.

При $\lambda_u = \Lambda_u > 0$ формула (2.1) неприменима, поскольку ряд $\sum_n t_n$ может расходиться. Поэтому заменим формулу (2.1) на более общую формулу

$$\rho_u(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho(f^k x, f^k y) \lambda_u^k g_k, \quad (2.13)$$

где $\{g_k: k \in \mathbb{Z}\}$ – бесконечная в обе стороны последовательность с неотрицательными членами, на которую в дальнейшем будут наложены некоторые

условия. Для сходимости ряда (2.13) достаточно, чтобы мажорирующий ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} t_k g_{-k}$ был сходящимся и последовательность $\{g_k: k \geq 0\}$ принадлежала $\mathcal{S}$. Эти условия будут предполагаться выполненными. Более того, сходимость мажорирующего ряда оказывается единственным условием, налагаемым на левый конец последовательности $\{g_k\}$, а выбор правого конца будет уточнен. В частности, всегда можно взять $g_k = 0$ для всех $k < 0$, и тогда в ряде (2.13) присутствуют только слагаемые с индексами $k \geq 0$. Интересно отметить, что при построении ляпуновской римановой метрики для гиперболического множества или для гиперболического линейного расширения гомеоморфизма рассматривается ряд, аналогичный (2.13), в котором присутствуют только слагаемые с индексами $k \leq 0$ в противоположность обсуждаемой здесь конструкции.

Теперь формула (2.2), использованная в доказательстве леммы 2.2 и при выводе теоремы 1.2 из леммы 2.4, оказывается не верна, а все другие результаты пп. 1–3 остаются в силе (при этом неравенства $\rho(x, y) \leq \rho_\sigma(x, y)$ и $\rho(x, y) \leq \rho_0(x, y)$ заменяются на $g_0 \rho(x, y) \leq \rho_\sigma(x, y)$ и $g_0 \rho(x, y) \leq \rho_0(x, y)$ соответственно, если $g_0 \neq 0$). Поэтому нашей целью является построение такой последовательности $\{g_k\}$, что утверждение леммы 2.2 останется в силе и $\rho_u(x, y)/\rho_u(fx, fy) \rightarrow \lambda_u$ при $\rho(x, y) \rightarrow 0$ равномерно по всем x, y таким, что $y \in W_\delta^u(x)$. Это потребует непосредственного доказательства леммы 2.2, не опирающегося на лемму 2.1.

Будем использовать обозначения п. 2, и пусть $N = n_u(y, z)$, $\alpha_n = \rho(f^{-n+N}y, f^{-n+N}z)$, $\alpha'_n = \rho(f^{-n+N}y', f^{-n+N}z')$, так что $\hat{\delta} \leq \alpha_0 < \delta/3$, $\alpha'_0 < \delta$. Тогда

$$\rho_u(y, z) = \sum_k \alpha_{k+N} \lambda_u^{-k} g_{-k} = \lambda_u^N \sum_k \alpha_k \lambda_u^{-k} g_{N-k}$$

и имеет место аналогичное выражение для $\rho_u(y', z')$. Поэтому справедлива важная оценка снизу $\rho_u(y, z)/\lambda_u^N \geq \alpha_0 g_N \geq \hat{\delta} g_N$.

Далее, очевидно, $\alpha_n \leq \alpha_0 \lambda_u^n t_n$, $\alpha'_n \leq \alpha'_0 \lambda_u^n t_n$ при $n \geq 0$ и, следовательно,

$$|\alpha_n - \alpha'_n| < 2\delta \lambda_u^n t_n \quad \text{при } n \geq 0. \quad (2.14)$$

В силу оценок (1.1) на устойчивых многообразиях при $n \geq 0$ справедливо неравенство $\rho(f^n y, f^n y') \leq C \mu^n$ и такое же неравенство для $\rho(f^n z, f^n z')$, где $C > 0$, $0 < \mu < 1$. Поэтому из неравенства треугольника следует, что

$$|\alpha_n - \alpha'_n| \leq 2C \mu^{N-n} \quad \text{при } n \leq N. \quad (2.15)$$

Чтобы оценить сверху разность

$$\frac{1}{\lambda_u^N} |\rho_u(y, z) - \rho_u(y', z')| \leq \sum_k |\alpha_k - \alpha'_k| \lambda_u^{-k} g_{N-k}, \quad (2.16)$$

будем использовать неравенство (2.15) при $k \leq [\theta N]$ и неравенство (2.14) при $k \geq [\theta N] + 1$, где $0 < \theta < 1$ – некоторое число и $[\cdot]$ – целая часть числа. Соответственно, неравенство (2.15) даст следующий вклад в оценку для правой части (2.16):

$$2C \sum_{k=-\infty}^{[\theta N]} \mu^{N-k} \lambda_u^{-k} g_{N-k} = 2C \lambda_u^{-N} \sum_{m=N-[\theta N]}^{+\infty} (\mu \lambda_u)^m g_m. \quad (2.17)$$

Поскольку $\{g_m: m \geq 0\} \in \mathcal{S}$, то для любого $\tau \in (\mu\lambda_u, 1)$ при всех достаточно больших $m > 0$ суммируемое выражение не больше τ^m . Следовательно, если $N \geq N(\theta, \tau, \{g_m: m \geq 0\})$, то выражение (2.17) допускает оценку сверху $C_1 \xi^{-N}$, где $\xi = \lambda_u / \tau^{(1-\theta)}$, а C_1 зависит от τ и C . Если θ и τ были выбраны соответственно близкими к нулю и $\mu\lambda_u$, то ξ близко к $1/\mu$ и, значит, $\xi > 1$. Итак, при больших N соответствующий вклад (2.17) в разность $|\rho_u(y, z) - \rho_u(y', z')|$ значительно меньше, чем $\rho_u(y, z)$, если только выполнено условие $g_N \geq 1$.

Далее, неравенство (2.14) даст следующий вклад в оценку сверху для правой части (2.16):

$$2\delta \sum_{k=[\theta N]+1}^{+\infty} t_k g_{N-k}. \quad (2.18)$$

Итак, если мы добьемся того, чтобы

$$g_N \succ \sum_{k=[\theta N]+1}^{+\infty} t_k g_{N-k} = \sum_{m=0}^{N-[\theta N]-1} t_{N-m} g_m + \sum_{m=1}^{+\infty} t_{N+m} g_{-m} \quad (2.19)$$

и $g_N \geq 1$ для всех больших $N \geq 0$, то тем самым будет гарантировано, что

$$\frac{\rho_u(y', z')}{\rho_u(y, z)} - 1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N = n_u(y, z) \rightarrow +\infty$$

равномерно по всем четверкам точек y, y' и z, z' , удовлетворяющим условиям леммы 2.2. Отсюда, как и в п. 2, следует существование искомого $\delta_1 > 0$, что завершает доказательство леммы 2.2.

Заметим, что в случае строгого неравенства $\lambda_u > \Lambda_u$ ряд $\sum t_n$ оказывается сходящимся. Поэтому условие (2.19) выполнено, если $g_N = 1$ для всех N , что и доказывает лемму 2.2 в варианте, установленном п. 2.

Аналогично, слагаемые, образующие $\rho_u(y, z)$, разобьем на две группы:

$$\frac{1}{\lambda_u^N} \rho_u(y, z) = \left(\sum_{k=-\infty}^{[\theta N]} + \sum_{k=[\theta N]+1}^{+\infty} \right) \alpha_k \lambda_u^{-k} g_{N-k}.$$

Вторая группа слагаемых допускает оценку сверху, равную половине выражения (2.18). Вклад этих слагаемых много меньше, чем одного слагаемого $\alpha_0 g_N$ из первой группы, если выполнено условие (2.19), а $N \geq 0$ выбрано достаточно большим. Заметим, что слагаемые из первой группы имеют множители g_m , где $m \geq N - [\theta N]$, и потребуем, чтобы $g_{N+1}/g_N \rightarrow 1$ при $N \rightarrow +\infty$. Тогда $\rho_u(x, y)/\rho_u(fx, fy) \rightarrow \lambda_u$ равномерно по всем $(y, z) \in K$ при $N = n_u(y, z) \rightarrow +\infty$, или, что эквивалентно, при $\rho(x, y) \rightarrow 0$.

В силу очевидного неравенства $t_{m+n} \leq t_m t_n$ второе слагаемое в правой части (2.19) не превосходит $v_N = t_N \left(\sum_{m=1}^{+\infty} t_m g_{-m} \right)$. Первое же слагаемое допускает оценку сверху величиной $r_N \sum_{m=0}^{N-[\theta N]} g_m$, где $r_N = \max_{[\theta N]+1 \leq m \leq N} t_m$ и, как нетрудно видеть, $\{r_N\} \in \mathcal{S}$, поскольку $\{t_m\} \in \mathcal{S}$.

Итак, достаточно потребовать выполнения двух условий:

$$\begin{aligned} g_N \succ r_N \sum_{n=0}^{p(N)} g_n + v_N, \quad p(N) = N - [\theta N], \\ g_{N+1}/g_N \rightarrow 1, \quad N \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $\{r_N\}, \{v_N\} \in \mathcal{S}$. Заметим, что требуемое неравенство $g_N \geq 1$ для всех больших $N \geq 0$ будет гарантировано, если вместо $\{v_N\}$ рассматривать последовательность $\{v'_N\}$, также принадлежащую $\mathcal{S}$ и определяемую формулой $v'_N = \max\{1, v_N\}$. Требование $\{g_N\} \in \mathcal{S}$ автоматически выполнено в силу второго условия (2.20).

6. Сведение доказательства теоремы 1.2' для случая $\lambda_u = 0$ или $\lambda_s = 0$ к задаче построения числовой последовательности с заданными свойствами. Заметим, что формула (2.13) имеет вид

$$\rho_u(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho(f^k x, f^k y) G_k, \quad (2.21)$$

где $\{G_k = \lambda_u^k g_k\}$ – последовательность, удовлетворяющая асимптотическим условиям, описанным в п. 5, в частности $G_{k+1}/G_k \rightarrow \lambda_u$, $k \rightarrow +\infty$. При $\lambda_u = \Lambda_u = 0$ результаты п. 5 не будут непосредственно применимы. Однако, как и в п. 5, мы покажем, что при некоторых асимптотических условиях на последовательность $\{G_k\}$ формула (2.21) дает метрику на неустойчивых многообразиях, для которой утверждение леммы 2.2 останется в силе и $\rho_u(x, y)/\rho_u(fx, fy) \rightarrow 0$ при $\rho(x, y) \rightarrow 0$ равномерно по всем x, y таким, что $y \in W_\delta^u(x)$. С этой целью будут слегка модифицированы и усложнены рассуждения, использовавшиеся для нахождения условий, налагаемых на последовательность $\{g_k\}$.

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех последовательностей $\{a_n\}$, стремящихся к нулю быстрее всех убывающих показательных функций, т.е. $a_n \prec c^n$ для любого $c \in (0, 1)$.

Введем также последовательность

$$T_n = T_n^u = \sup_{\substack{y \in W_\delta^u(x) \\ x \neq y}} \frac{\rho(f^{-n}x, f^{-n}y)}{\rho(x, y)},$$

где $n \geq 0$. Тогда $\{T_n\} \in \mathcal{F}$, поскольку $\Lambda_u = 0$. Очевидно, $t_n = \lambda_u^{-n} T_n$, если $\lambda_u > 0$ и последовательность $\{t_n\}$ была введена формулой (2.12).

Как и ранее, сходимость мажорирующего ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} T_k G_{-k}$ оказывается единственным условием, налагаемым на левый конец последовательности $\{G_k\}$, а выбор правого конца будет уточнен. При этом условие $\{G_k: k \geq 0\} \in \mathcal{F}$ будет гарантировать сходимость ряда (2.21).

В обозначениях, используемых в п. 5, имеем соотношение

$$\rho_u(y, z) = \sum_k \alpha_{k+N} G_{-k} = \sum_k \alpha_k G_{N-k},$$

аналогичное выражение для $\rho_u(y', z')$ и важную оценку снизу $\rho_u(y, z) \geq \hat{\delta} G_N$. Далее, в неравенствах для α_n, α'_n и $|\alpha_n - \alpha'_n|$ для $n \geq 0$ следует заменить $\lambda_u^n t_n$ на T_n так, что (2.14) примет вид

$$|\alpha_n - \alpha'_n| < 2\delta T_n \quad \text{при } n \geq 0. \quad (2.22)$$

Чтобы оценить сверху разность

$$|\rho_u(y, z) - \rho_u(y', z')| \leq \sum_k |\alpha_k - \alpha'_k| G_{N-k}, \quad (2.23)$$

будем использовать неравенство (2.15) при $k \leq q(N)$ и неравенство (2.22) при $k \geq q(N) + 1$, где $q(N)$ – некоторая последовательность целых чисел такая, что $0 \leq q(N) \leq N$. Однако теперь эту последовательность невозможно представить в виде $q(N) = [\theta N]$ с постоянной $\theta \in (0, 1)$, не зависящей от номера N .

Соответственно, неравенства (2.15) и (2.22) дадут следующие вклады в оценку для правой части (2.23):

$$2C \sum_{k=-\infty}^{q(N)} \mu^{N-k} G_{N-k}, \quad 2\delta \sum_{k=q(N)+1}^{+\infty} T_k G_{N-k}.$$

Поэтому для справедливости леммы 2.2 достаточно добиться выполнения условий

$$\begin{aligned} G_N &\succ \sum_{k=-\infty}^{q(N)} \mu^{N-k} G_{N-k} = \sum_{m=p(N)}^{+\infty} \mu^m G_m, \\ G_N &\succ \sum_{k=q(N)+1}^{+\infty} T_k G_{N-k} = \sum_{m=0}^{p(N)-1} T_{N-m} G_m + \sum_{m=1}^{+\infty} T_{N+m} G_{-m}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $p(N) = N - q(N)$, а для выполнения условия, что $\rho_u(x, y)/\rho_u(fx, fy) \rightarrow 0$ равномерно по всем $(y, z) \in K$ при $\rho(x, y) \rightarrow 0$, достаточно дополнительно потребовать, чтобы $p(N) \rightarrow +\infty$ и $G(N+1)/G(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$. Наконец, как и в п. 5, оценим сверху второе слагаемое в правой части выражения (2.24) величиной $T_N (\sum_{m=1}^{+\infty} T_m G_{-m})$ в силу очевидного неравенства $T_{m+n} \leq T_m T_n$. Итак, это слагаемое по порядку не превосходит член $T_N G_0$ в первом слагаемом. В отличие от п. 5, мы не станем здесь упрощать первое слагаемое.

В итоге получим, что достаточно потребовать выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} G_N &\succ \sum_{n=p(N)}^{+\infty} \mu^n G_n, \quad G_N \succ \sum_{n=0}^{p(N)} T_{N-n} G_n, \\ p(N) &\rightarrow +\infty, \quad G_{N+1}/G_N \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $0 \leq p(N) \leq N$ и $\{T_N\} \in \mathcal{F}$. Заметим, что $\{G_N\} \in \mathcal{F}$ автоматически выполнено в силу последнего условия (2.25).

7. Построение искомых числовых последовательностей. Существование искомых числовых последовательностей гарантируется следующими леммами.

ЛЕММА 2.6. *Если $\{r_N\}, \{v_N\} \in \mathcal{S}$ и $0 < \theta < 1$, то существует последовательность $\{g_N: N \geq 0\}$ с положительными членами, удовлетворяющая условиям (2.20).*

ЛЕММА 2.6'. *Если $\{T_N\} \in \mathcal{F}$ и $0 < \mu < 1$, то существуют последовательность $\{G_N: N \geq 0\}$ с положительными членами и последовательность $\{p(N): N \geq 0\}$ такая, что $0 \leq p(N) \leq N$, которые удовлетворяют условиям (2.25).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.6. Домножив r_N и v_N на числа w_N , образующие последовательность $\{w_N\} \in \mathcal{S}$ такую, что $w_N \succ 1$, достаточно заменить

в первой формуле (2.20) знак $\succ$ на неравенство $\geq$, которое будет накладывать ограничение снизу на g_N , начиная с номера $N = -[-1/\theta]$, в терминах членов g_n с меньшими номерами $n < N$. Далее, достаточно потребовать выполнения этого неравенства, заменив r_N на $r_N + v_N/g_0$, а v_N – на нуль. Поэтому в дальнейшем $v_N \equiv 0$. Заметим, что достаточно требовать выполнения полученных неравенств только для всех достаточно больших N .

Последовательность $\{g_N\}$ будем искать в следующем виде. Пусть $\{c_k\}$ – убывающая последовательность чисел, стремящаяся к единице, и $\{N_k\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, где $k \geq 0$ и $N_0 = 0$. Тогда $\{g_N\}$ задается рекуррентно на интервалах $N_k < N \leq N_{k+1}$ по формуле $g_N = g_{N_k} c_k^{N-N_k}$. Число $g_0 > 0$ может быть произвольным. Это число и последовательности $\{c_k\}$, $\{N_k\}$, выбор которых далее будет уточнен, однозначно определяют $\{g_N\}$. Очевидно, второе условие (2.20) оказывается выполненным.

Рис. 1

Поскольку $g_n \leq g_N c_k^{n-N}$ для всех n и если $N_k \leq N \leq N_{k+1}$, то для такого N имеет место оценка

$$\sum_{n=0}^N g_n < \frac{g_N}{c_k - 1}.$$

Поэтому достаточно потребовать выполнения неравенства

$$g_N \geq r_N \frac{g_{p(N)}}{c_k - 1}, \quad N_k \leq p(N) \leq N_{k+1}, \quad k \geq 1. \quad (2.26)$$

Для каждого $k \geq 0$ рассмотрим две следующие модификации последовательности $\{g_N\}$ (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \underline{g}_N^{(k)} &= \bar{g}_N^{(k)} = g_N, & N &\leq N_k, \\ \underline{g}_N^{(k)} &= g_{N_k} c_{k+1}^{N-N_k}, & \bar{g}_N^{(k)} &= g_{N_k} c_k^{N-N_k}, & N &\geq N_k. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{g}_N^{(k)} &= g_N, & N &\leq N_{k+1}, \\ \underline{g}_N^{(k)} &\leq g_N, & N &\leq N_{k+2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Обозначим $a_N^{(k)} = r_N \bar{g}_{p(N)}^{(k)} / (c_k - 1)$. На последовательность $\{c_k\}$ налагается единственное ограничение $c_{k+1} > c_k^{\theta'}$, где $\theta' = 1 - \theta$ и $k \geq 0$ (таким образом, $c_{k+1} \in (c_k^{\theta'}; c_k)$). Это гарантирует выполнение асимптотического условия $\underline{g}_N^{(k)} \succ a_N^{(k)}$ при $N \rightarrow +\infty$ и фиксированном k . Поскольку $(\theta')^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$, то можно добиться выполнения требуемого условия $c_k \rightarrow 1$, $k \rightarrow +\infty$.

Для всех $k \geq 1$ потребуем выполнения двух условий:

- 1) $\underline{g}_N^{(k)} \geq a_N^{(k)}$ при всех N таких, что $p(N) \geq N_k$;
- 2) $p(N_k) > N_{k-1}$.

Выполнение условия 1) при данном k и условия 2) при $k+2$ влечет искомое неравенство (2.26). Действительно, если $N_k \leq p(N) \leq N_{k+1}$, то $N < N_{k+2}$, и поэтому из $\underline{g}_N^{(k)} \geq a_N^{(k)}$ в силу (2.27) следует (2.26). Таким образом, неравенство (2.26) выполнено при всех $k \geq 1$, что достаточно для справедливости утверждения леммы.

Покажем теперь, как исходя из N_K , где $K \geq 0$, выбрать N_{K+1} так, чтобы условия 1) и 2) оказались выполнены для $k = K+1$. При этом окажется, что все достаточно большие N_{K+1} удовлетворяют искомым условиям.

Будем выбирать N_{K+1} настолько большим, что $p(N_{K+1}) > N_K$ (условие 2) для $k = K+1$). Пусть теперь $p(N) \geq N_{K+1}$. Тогда $N \geq N_{K+1}$ и

$$\frac{\underline{g}_N^{(K+1)}}{g_{N_{K+1}}} = c_{K+2}^{N-N_{K+1}}, \quad \frac{\bar{g}_{p(N)}^{(K+1)}}{g_{N_{K+1}}} = c_{K+1}^{p(N)-N_{K+1}},$$

причем $p(N) - N_{K+1} < \theta'(N - N_{K+1}) - \theta N_{K+1} + 1$. Поэтому выполнение условия 1) для $k = K+1$ гарантировано, если

$$c_{K+2}^{\Delta} \geq c_{K+1} \frac{1}{c_{K+1} - 1} r_N c_{K+1}^{\theta' \Delta} c_{K+1}^{-\theta N_{K+1}} \quad \text{при всех } \Delta = N - N_{K+1} \geq 0.$$

Поскольку $\{r_N\} \in \mathcal{S}$, то для всякого $c > 1$ найдется $H > 0$ такое, что $r_N \leq Hc^N$ при всех N (здесь достаточно рассматривать N такие, что $p(p(N)) > N_K$). Следовательно, достаточно потребовать выполнения неравенств

$$c_{K+2} \geq c c_{K+1}^{\theta'} \quad \text{и} \quad H \frac{c_{K+1}}{c_{K+1} - 1} (c c_{K+1}^{-\theta})^{N_{K+1}} \leq 1.$$

Для справедливости первого неравенства и выполнения второго при всех достаточно больших N_{K+1} следует взять $c \in (1, c_{K+2}/c_{K+1}^{\theta'}) \cap (1, c_{K+1}^{\theta})$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.6'. Доказательство является несколько усложненной модификацией доказательства леммы 2.6. В правой части второй формулы (2.25) присутствуют члены T_m с индексами $m \geq q(N)$. Потребуем, чтобы $q(N) \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow +\infty$. Тогда, как и в доказательстве леммы 2.6, домножив T_N на числа w_N , образующие последовательность $\{w_N\} \in \mathcal{S}$ такую, что $w_N \succ 1$, достаточно заменить во второй формуле (2.25) знак $\succ$ на неравенство $\geq$. Аналогично, поскольку $p(N) \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow +\infty$, то, немного увеличив число $\mu \in (0, 1)$, можно также заменить в первой формуле (2.25) знак $\succ$ на неравенство $\geq$. Достаточно требовать выполнения полученных неравенств для всех достаточно больших N .

Последовательность $\{G_N\}$ будем искать точно в таком же виде, как и последовательность $\{g_N\}$ при доказательстве леммы 2.6, исходя из убывающей стремящейся к нулю последовательности чисел $\{c_k\}$. Очевидно, это гарантирует последнее условие (2.25). Для всех $k \geq 0$ введем функции $q_k(N) = [\theta_k N]$ и $p_k(N) = N - q_k(N)$, где $\{\theta_k\}$ – убывающая последовательность чисел из интервала $(0, 1)$, стремящаяся к нулю при $k \rightarrow +\infty$. Выбор этой последовательности, заменяющей одно число θ из доказательства леммы 2.6, будет уточнен в дальнейшем. Обозначим $\theta'_k = 1 - \theta_k$. Покажем, что для каждого N найдется $k = k(N)$ такое, что $N_k \leq p_k(N) \leq N_{k+1}$, и в этом случае положим $q(N) = q_k(N)$ и, соответственно, $p(N) = p_k(N)$ (если существует несколько таких k , то можно выбрать любое из них; эта неоднозначность не будет в дальнейшем существенна). Действительно, условие $N_k \leq p_k(N) \leq N_{k+1}$ равносильно тому, что $N \in I_k = (\alpha_k, \beta_k]$, где $\alpha_k = (N_k - 1)/\theta'_k$ и $\beta_k = N_{k+1}/\theta'_k$. В силу $\theta'_k < \theta'_{k+1}$ имеем $\beta_k > \alpha_{k+1}$. Кроме того, $\alpha_k \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow +\infty$, поскольку $\theta'_k \rightarrow 1$, $k \rightarrow +\infty$. Поэтому, во-первых, получаем искомый результат о том, что объединение интервалов I_k для $k \geq 0$ покрывает множество натуральных чисел, а во-вторых, гарантированы условия $k = k(N) \rightarrow +\infty$ и $p(N) \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow +\infty$. Как будет показано ниже, числа N_k можно выбрать сколь угодно большими при фиксированных θ_k , и поэтому легко добиться выполнения условия $q(N) \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$.

Далее, напомним, что последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ называется *логарифмически вогнутой*, если ее логарифм, т.е. последовательность $\{b_n\}$, $b_n = \ln a_n$, имеет выпуклый вверх график. Последнее означает, что этот график целиком лежит в нижней полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через любые две его соседние вершины (n, b_n) и $(n+1, b_{n+1})$. Если $\{T_n\} \in \mathcal{F}$, то существуют наименьшие числа T'_n , образующие логарифмически вогнутую последовательность и такие, что $T_n \leq T'_n$ для всех $n \geq 0$. В самом деле, выпуклая оболочка графика последовательности $\{\ln T_n\}$ будет иметь верхнюю границу, задающую график логарифма $\{\ln T'_n\}$ искомой последовательности. Кроме того, $\{T'_n\} \in \mathcal{F}$. Поэтому, заменяя, если необходимо, T_n на T'_n , можно предполагать в дальнейшем, что последовательность $\{T_n\}$ логарифмически вогнута. Это в точности означает, что последовательность $\{d_n = T_{n+1}/T_n\}$ является невозрастающей. При этом $d_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$, поскольку $\{T_n\} \in \mathcal{F}$.

Если $N_k \leq N \leq N_{k+1}$, то $G_n \leq G_N c_k^{n-N}$ для всех n (в силу логарифмической вогнутости последовательности $\{G_n\}$). Аналогично, $T_m \leq T_M d_M^{m-M}$ для любых m и M . Поэтому, предположив, что $d_{q_k(N)} < c_k$ для некоторого N такого, что $N_k \leq p(N) \leq N_{k+1}$ и $\mu c_k < 1$ (последнее гарантировано, если $c_k \leq 1$), получим оценки

$$\sum_{n=p(N)}^{+\infty} \mu^n G_n \leq \frac{G_{p(N)} \mu^{p(N)}}{1 - \mu c_k}, \quad \sum_{n=0}^{p(N)} T_{N-n} G_n < \frac{G_{p(N)} T_{q(N)}}{1 - d_{q(N)}/c_k}.$$

Поэтому достаточно потребовать выполнения неравенств

$$d_{q_k(N)} < c_k, \quad g_N \geq \frac{G_{p(N)} \mu^{p(N)}}{1 - \mu c_k}, \quad g_N \geq \frac{G_{p(N)} T_{q(N)}}{1 - d_{q(N)}/c_k}, \quad (2.28)$$

когда $N_k \leq p(N) \leq N_{k+1}$, $k \geq 1$.

Для каждого $k \geq 0$ введем последовательности $\{\underline{G}_N^{(k)}\}$ и $\{\overline{G}_N^{(k)}\}$, являющиеся модификациями последовательности $\{G_k\}$ и аналогичные рассмотренным

ранее последовательностям $\{g_N^{(k)}\}$ и $\{\bar{g}_N^{(k)}\}$ (формулы получаются из прежних формул заменой $g_l, \underline{g}_N^{(k)}, \bar{g}_N^{(k)}$ на $G_l, \underline{G}_N^{(k)}, \bar{G}_N^{(k)}$ соответственно). Вместо $a_N^{(k)}$ рассмотрим теперь две серии последовательностей:

$$A_N^{(k)} = \frac{\bar{G}_{p(N)}^{(k)} \mu^{p(N)}}{1 - \mu c_k}, \quad B_N^{(k)} = \frac{\bar{G}_{p(N)}^{(k)} T_{q(N)}}{1 - d_{q(N)}/c_k}.$$

На последовательности $\{c_k\}$ и $\{\theta_k\}$ будут налагаться только ограничения $c_k \leq 1$ и

$$c_{k+1} \geq (c_k \mu)^{\theta'_k}, \quad c_k^{-\theta_k} \mu^{\theta'_k} < 1, \quad (2.29)$$

которые совместимы с требованиями, предъявляемыми к этим последовательностям, для чего последовательность θ_k должна быть выбрана достаточно быстро стремящейся к нулю. Первое из неравенств (2.29) гарантирует выполнение условия $\underline{G}_N^{(k)} \geq C A_N^{(k)}$ при всех больших N и фиксированном k , где $C > 0$ – некоторая постоянная.

Для всех $k \geq 1$ потребуем выполнения двух условий:

- 1) $d_{q_k(N)} < c_k$ и $\underline{G}_N^{(k)} \geq A_N^{(k)}$, $\underline{G}_N^{(k)} \geq B_N^{(k)}$ при всех N таких, что $p_k(N) \geq N_k$;
- 2) $p_{k-2}(N_k) > N_{k-1}$.

Чтобы последнее условие имело смысл при $k = 1$, введем число θ_{-1} и соответствующую функцию $p_{-1}(N)$. Рассуждения, дословно повторяющие приведенные в доказательстве леммы 2.6, показывают, что эти условия влекут требуемые неравенства (2.28). Первое неравенство условия 1) гарантировано, если N_k выбрано достаточно большим. Более того, можно добиться, чтобы $d_{q_k(N)} < c_k/2$ при $p_k(N) \geq N_k$. Остается показать, как исходя из N_K , где $K \geq 0$, выбрать N_{K+1} так, чтобы второе и третье неравенства условия 1) и неравенство условия 2) были выполнены для $k = K + 1$. При этом окажется, что все достаточно большие N_{K+1} удовлетворяют искомым условиям.

Будем выбирать N_{K+1} настолько большим, что $p_{K-1}(N_{K+1}) > N_K$ (условие 2) для $k = K + 1$), а также $q_{K+1}(N) > K$ и $d_{q_{K+1}(N)} < c_{K+1}/2$, если $p_{K+1}(N) \geq N_{K+1}$ (выполнение первого из этих двух неравенств для всех K гарантирует требуемое условие, что $q(N) \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow +\infty$; второе неравенство является первым неравенством условия 1) для $k = K + 1$). Поскольку $\{T_N\} \in \mathcal{F}$, то для всякого $c \in (0, 1)$ найдется $H > 0$ такое, что $T_N \leq H c^N$ при всех N . Используя неравенства

$$p_{K+1}(N) - N_{K+1} \geq \theta'_{K+1} \Delta - \theta_{K+1} N_{K+1}, \quad q_{K+1}(N) > \theta_{K+1} \Delta + \theta_{K+1} N_{K+1} - 1,$$

где $\Delta = N - N_{K+1}$, и рассуждая, как в доказательстве леммы 2.6, получим следующие ограничения, гарантирующие выполнение второго и третьего неравенств условия 1) для $k = K + 1$, если только N_{K+1} было выбрано достаточно большим: второе неравенство гарантировано, если выполнено (2.29) для $k = K + 1$, а третье неравенство гарантировано, если

$$c < c_{K+1}, \quad c_{K+2} \geq c_{K+1}^{\theta'_{K+1}} c^{\theta_{K+1}}.$$

Итак, следует взять $c \in (0, c_{K+1}) \cap (0, (c_{K+2}/c_{K+1}^{\theta'_{K+1}})^{1/\theta_{K+1}}]$. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1.1 и завершение доказательства теоремы 1.2'

1. Доказательство теоремы 1.1. В § 2 были рассмотрены метрики на многообразиях $W_\delta^\sigma(x)$, задаваемые формулами

$$\rho_u(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho(f^k x, f^k y) G_k^u, \quad \rho_s(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho(f^{-k} x, f^{-k} y) G_k^s$$

и удовлетворяющие условиям, что $\rho_u(x, y)/\rho_u(fx, fy) \rightarrow \lambda_u$ (соответственно, $\rho_s(x, y)/\rho_s(f^{-1}x, f^{-1}y) \rightarrow \lambda_s$) при $\rho(x, y) \rightarrow 0$ равномерно по всем x, y таким, что $y \in W_\delta^u(x)$ (соответственно, $y \in W_\delta^s(x)$). При этом левый конец каждой, вообще говоря, бесконечной в обе стороны последовательности $\{G_k^\sigma: k \in \mathbb{Z}\}$ удовлетворяет единственному условию сходимости ряда $\sum_{k=0}^\infty T_k^\sigma G_{-k}^\sigma$ (определение T_k^s аналогично определению $T_k^u = T_k$), а правый конец строился специальным образом в таком виде, что последовательность $G_{k+1}^\sigma/G_k^\sigma$ не возрастает и стремится к λ_σ при $k \rightarrow +\infty$. Можно построить последовательность положительных чисел $\{G_k: k \in \mathbb{Z}\}$, для которой последовательности $\{G_k^u\}$ и $\{G_k^s\}$, заданные равенствами $G_k^u = G_k$ и $G_k^s = G_{-k}$, удовлетворяют условиям, налагаемым на правые концы последовательностей $\{G_k^\sigma\}$, причем $\lambda_u \leq G_{k+1}^\sigma/G_k^\sigma \leq \lambda_s^{-1}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$ (эту последовательность $\{G_k\}$ можно выбрать логарифмически вогнутой). Условия, налагаемые на левые концы последовательностей $\{G_k^\sigma\}$, будут при этом автоматически выполнены. Тогда формула (1.5) для произвольных $x, y \in X$ дает метрику ρ_0 такую, что $\rho_0(x, y) = \rho_\sigma(x, y)$, если $y \in W_\delta^\sigma(x)$. Эта метрика удовлетворяет всем условиям теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Теперь уже не требуется, чтобы метрики ρ_σ удовлетворяли утверждению леммы 2.2. Поэтому в рассуждениях, приведенных в п. 5 § 2, можно опустить анализ вклада, даваемого формулой (2.17). В силу этого отпадает требование, что θ – достаточно мало, а асимптотические условия (2.20) останутся неизменными. Аналогично, в рассмотренных из п. 6 § 2, можно опустить анализ всех выражений, содержащих величину μ . Поэтому отпадает первое из асимптотических условий (2.25), а значит, и ограничения (2.29).

2. Завершение доказательства теоремы 1.2'. Построим, как в п. 1, последовательности $\{G_k^\sigma\}$ такие, что $\lambda_u \leq G_{k+1}^u/G_k^u \leq \lambda_s^{-1}$, $\lambda_s \leq G_{k+1}^s/G_k^s \leq \lambda_u^{-1}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_s &\leq \frac{\rho_s(fx, fy)}{\rho_s(x, y)} \leq \lambda_u^{-1}, & y \in W_\delta^s(x), \quad y \neq x, \\ \lambda_u &\leq \frac{\rho_u(f^{-1}x, f^{-1}y)}{\rho_u(x, y)} \leq \lambda_s^{-1}, & y \in W_\delta^u(x), \quad y \neq x, \end{aligned} \quad (3.1)$$

и доказательство теоремы 1.2' завершается при использовании следующей леммы.

ЛЕММА 3.1. Если выполнены неравенства (3.1), то

$$\lambda_s \leq \frac{\rho'_0(fx, fy)}{\rho'_0(x, y)} \leq \lambda_u^{-1}$$

при всех x, y ($x \neq y$) таких, что $\rho'_0(x, y) < h$, где $h > 0$ достаточно мало, а ρ'_0 – метрика, построенная в § 2.

Действительно, легко видеть, что функция $\rho_0''(x, y) = \min\{\rho_0'(x, y), h\}$ является метрикой, удовлетворяющей всем условиям теорем 1.1 и 1.2'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Если $\tilde{h} < R$ и $\rho_0'(x, y) < \tilde{h}$, то при вычислении $\rho_0'(x, y)$ достаточно ограничиваться рассмотрением цепочек Z , у которых каждое звено $[z_k, z_{k+1}]$, “параллельное” многообразиям W_δ^σ , имеет ρ_σ -длину $\rho_\sigma(z_k, z_{k+1}) < \tilde{h}$. Для достаточно малых $\gamma > 0$ выполнено

$$\rho(x, y) \leq \gamma \Rightarrow \rho(f^{\pm 1}(x), f^{\pm 1}(y)) \leq \delta.$$

Согласно п. г) замечания 1.1 найдется $\nu > 0$ такое, что $W_\delta^\sigma(x) \cap D_\nu(x) \subset W_\gamma^\sigma(x)$ для всех $x \in X$. Значит, если $\rho(x, y) \leq \nu$ и $y \in W_\delta^\sigma(x)$, то $f^{\pm 1}(y) \in W_\delta^\sigma(f^{\pm 1}(x))$. Пусть $\tilde{h} > 0$ столь мало, что

$$\rho_\sigma(x, y) < \tilde{h} \Rightarrow \rho(x, y) \leq \nu$$

(это выполнено, если $\tilde{h} = G_0^\sigma \nu$). Тогда под действием гомеоморфизма $f^{\pm 1}$ цепочка $Z = \{x = z_0, \dots, z_m = y\}$, соединяющая x и y , перейдет в цепочку $f^{\pm 1}(Z) = \{f^{\pm 1}(z_0), \dots, f^{\pm 1}(z_m)\}$, соединяющую $f^{\pm 1}(x)$ и $f^{\pm 1}(y)$. Поэтому если $\rho_0'(x, y) < \tilde{h}$ и $\rho_0'(f(x), f(y)) < \tilde{h}$, то цепочки Z со звеньями ρ_σ -длин меньше $\tilde{h}$, которыми можно ограничиться в определении $\rho_0'(x, y)$, при гомеоморфизме f перейдут в некоторые цепочки $Z' = f(Z)$, соединяющие $x' = f(x)$ и $y' = f(y)$, и, наоборот, цепочки Z' со звеньями ρ_σ -длин меньше $\tilde{h}$, которыми можно ограничиться в определении $\rho_0'(x', y')$, перейдут под действием обратного гомеоморфизма f^{-1} в некоторые цепочки Z , соединяющие x и y . Согласно (3.1) ρ_σ -длина каждого звена $[z_k, z_{k+1}]$ цепочки Z при этом будет иметь относительное изменение в интервале $[\lambda_s, \lambda_u^{-1}]$:

$$\lambda_s \leq \frac{\rho_\sigma(f(z_k), f(z_{k+1}))}{\rho_\sigma(z_k, z_{k+1})} \leq \lambda_u^{-1}.$$

Поэтому $\lambda_s \leq l_\sigma(Z')/l_\sigma(Z) \leq \lambda_u^{-1}$ и в силу неравенств (1.4) имеем

$$\lambda_s \leq \frac{\Phi(l_s(Z'), l_u(Z'))}{\Phi(l_s(Z), l_u(Z))} \leq \lambda_u^{-1}.$$

Отсюда вытекает искомый результат, если число $h > 0$ такое, что $h \leq \tilde{h}$ и $\rho_0'(x, y) < h \Rightarrow \rho_0'(f(x), f(y)) < \tilde{h}$ для любых $x, y \in X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Для гомеоморфизма, обладающего ГС и ЛСП, формула (1.5) дает метрику ρ_0 , для которой выполнено утверждение теоремы 1.2. Чтобы в этом убедиться, надо проверить выполнение неравенств п. а) теоремы 1.2, что легко сделать, используя идеи, высказанные в пп. 5, 6 § 2.

§ 4. Доказательство теоремы 1.3

В дальнейшем ρ – произвольная метрика на X (совместимая с топологией), а локальные устойчивые и неустойчивые многообразия $W_\delta^s(x)$ и $W_\delta^u(x)$ определены относительно некоторой (любой) гиперболической метрики с радиусом $\delta > 0$, удовлетворяющим определению гиперболической структуры.

Если ρ_σ – метрика на локальных многообразиях $W_\delta^\sigma(x)$, $x \in X$, совместимая с топологией на этих многообразиях, индуцированной их вложением в X , то эта метрика равномерно эквивалентна любой метрике на X , совместимой с топологией. Будем рассматривать такие метрики, не предполагая, вообще говоря, что они получаются из каких-то метрик на всем пространстве X ограничением на локальные многообразия или конструкцией, описанной в § 2. Если такая метрика ρ_σ удовлетворяет соответствующему неравенству (1.1), то число $\Lambda_\sigma(\rho_\sigma) \in [0, 1]$ определено корректно, хотя ρ_σ может и не быть метрикой на всем пространстве X . Для рассматриваемых нами метрик ρ_σ будем постулировать справедливость утверждения основной леммы 2.2. Далее утверждение этой леммы будем использовать в несколько ослабленной форме, заменяя (в случае неустойчивых многообразий) условие $y, z \in W_\delta^u(x) \cap D_{\varepsilon/2}(x)$ на условие $y, z \in W_\delta^u(x) \cap D_\varepsilon(x)$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon/2]$ – некоторое число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Метрика на локальных многообразиях $W_\delta^\sigma(x)$ будет называться *согласованной* (на этих многообразиях), если для нее выполнено утверждение основной леммы 2.2.

ЛЕММА 4.1. Пусть для каждого $\sigma = u, s$ метрика ρ_σ на локальных многообразиях $W_\delta^\sigma(x)$ согласована и удовлетворяет соответствующему неравенству (1.1). Тогда найдется гиперболическая метрика ρ_0 на X такая, что $\Lambda_\sigma(\rho_0) = \Lambda_\sigma(\rho_\sigma)$ для $\sigma = u, s$.

СЛЕДСТВИЕ. Для любых $\lambda_s \in (\Lambda_s^*, 1)$ и $\lambda_u \in (\Lambda_u^*, 1)$ найдется метрика ρ_0 такая, что $\Lambda_s(\rho_0) = \lambda_s$ и $\Lambda_u(\rho_0) = \lambda_u$. В частности, существуют метрики ρ_0 , для которых числа $\Lambda_s(\rho_0)$ и $\Lambda_u(\rho_0)$ одновременно оказываются сколь угодно близкими к Λ_s^* и Λ_u^* соответственно. Действительно, выбирая метрики $\rho^{(\sigma)} \in \mathcal{H}$ на X такие, что $\Lambda_\sigma(\rho^{(\sigma)}) \leq \lambda_\sigma$, построим по ним метрики ρ_σ на локальных многообразиях, удовлетворяющие условиям леммы 4.1. Заметим, что здесь достаточно рассматривать случай строгих неравенств $\Lambda_\sigma(\rho^{(\sigma)}) < \lambda_\sigma$, когда построение метрик ρ_σ несколько упрощается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Утверждение леммы непосредственно вытекает из следующего простого наблюдения. Искомая метрика ρ_0 может быть построена по формуле (2.3) исходя из семейств метрик ρ_u и ρ_s на локальных неустойчивых и устойчивых многообразиях. При этом аргументы из § 2 применимы почти без изменений: из справедливости утверждения леммы 2.2 для ρ_σ вытекает лемма 2.4, которая, в свою очередь, гарантирует равенство $\Lambda_\sigma(\rho_0) = \Lambda_\sigma(\rho_\sigma)$.

Единственная сложность заключается в том, что теперь не применимы аргументы, использованные в § 2 для доказательства того факта, что $\rho(x, y) \rightarrow 0$ при $\rho_0(x, y) \rightarrow 0$ равномерно по всем $x, y \in X$, т. е. для всякого $\alpha > 0$ найдется $\beta > 0$ такое, что $\rho(x, y) < \alpha$, если $\rho_0(x, y) < \beta$. (Заметим, что это свойство использовалось и в доказательстве леммы 2.4.) Чтобы установить, что это свойство действительно выполнено, воспользуемся идеями доказательства леммы 2.4. Выбирая $r^{(\sigma)} = r^{(\sigma)}(\nu) > 0$ по $\nu > 0$, как в доказательстве леммы 2.4, получим, что если $Z \subset \overset{\circ}{D}_{r^{(\sigma)}}(x; \rho)$, то $|l^{(\sigma)}(Z^\sigma)/l_\sigma(Z) - 1| < \nu$ для $\sigma = u, s$. Здесь $r^{(\sigma)}(\nu)$ и $l^{(\sigma)}(Z^\sigma)$ означают $r(\nu)$ и $l(Z^\sigma)$, фигурирующие в доказательстве леммы 2.4 для ρ_σ . Поскольку

$$l^{(s)}(Z^s) \geq \rho_s(x, [x, y]), \quad l^{(u)}(Z^u) \geq \rho_u(x, [y, x])$$

(длина цепочки не меньше расстояния между ее концами), то

$$\rho_s(x, [x, y]) + \rho_u(x, [y, x]) \leq (1 + \nu)\tilde{\rho}_0(x, y),$$

где $\tilde{\rho}_0(x, y) = \inf\{l(Z): \text{цепочка } Z \text{ соединяет } x \text{ и } y, \text{ причем } Z \subset \mathring{D}_r(x; \rho)\}$, $r = \min\{r^{(u)}(\nu), r^{(s)}(\nu)\}$, если, конечно, $\tilde{\rho}_0(x, y)$ определено, т. е. цепочка, фигурирующая в определении $\tilde{\rho}_0(x, y)$, существует. Далее, во-первых, согласно условию на локальных многообразиях $W_\delta^\sigma(x)$ метрики ρ_σ равномерно эквивалентны ρ , а во-вторых, точка $y = [v, w]$ непрерывно зависит от ее канонических координат $v = [y, x]$ и $w = [x, y]$, причем $y = x$ только в случае $v = w = x$. Поэтому для всякого $\alpha' > 0$ найдется $\gamma = \gamma(\alpha') > 0$ такое, что $\rho_s(x, w) + \rho_u(x, v) \geq \gamma$, если $\rho(x, y) \geq \alpha'$.

Итак, $\tilde{\rho}_0(x, y) \geq \gamma(1 + \nu)^{-1} = \beta'$ при $\rho(x, y) \geq \alpha'$, если $\tilde{\rho}_0(x, y)$ определено. Отсюда сразу следует искомым результат, если при вычислении $\rho_0(x, y)$ можно ограничиться рассмотрением цепочек Z таких, что $Z \subset \mathring{D}_r(x; \rho)$, и, следовательно, $\rho_0(x, y) = \tilde{\rho}_0(x, y)$. Достаточно показать, что это действительно так, если $\rho_0(x, y) < \beta$, где $\beta > 0$ мало. Если $\rho_0(x, y) < \beta$, то найдется цепочка $Z = \{x = z_0, \dots, z_m = y\}$, соединяющая x и y и имеющая длину $l(Z) < \beta$. Тогда каждое звено $[z_k, z_{k+1}]$ этой цепочки имеет длину $l(z_k, z_{k+1}) < \beta$, т. е. является сколь угодно коротким для малых $\beta > 0$. Не ограничивая общности, будем рассматривать столь малые $\beta > 0$, что $\rho(x, y) < r/2$, если $\rho_\sigma(x, y) < \beta$ для $y \in W_\delta^\sigma(x)$ и некоторого $\sigma = u, s$. Также зафиксируем $\alpha' = r/2$ и найдем по нему $\beta' > 0$. Покажем теперь, что цепочку Z можно разбить на $t \geq 1$ подцепочек $Z_1, \dots, Z_t$, каждая из которых образована последовательными вершинами цепочки Z , таких, что начало каждой следующей подцепочки совпадает с концом предыдущей (начало первой подцепочки совпадает с началом цепочки Z , а конец последней – с концом цепочки Z), причем $Z_p \subset \mathring{D}_r(v_p; \rho)$ при $1 \leq p \leq t$, но $\rho(v_p, w_p) \geq r/2$ при $1 \leq p < t$, где v_p и w_p – начало и конец подцепочки Z_p .

Последовательное построение подцепочек Z_p проводится рекуррентным образом. Если $m = 0$, т. е. цепочка Z состоит из единственной точки $x = y = z_0$, то следует взять $t = 1$ и $Z_1 = Z$. В случае $m > 0$ обозначим через K множество всех таких индексов k , что $\rho(x, z_k) \geq r/2$. Если $K \neq \emptyset$, то пусть k – минимальный элемент K . Тогда $\rho(x, z_k) < r$, поскольку все звенья цепочки Z имеют ρ -длины меньше $r/2$, и мы получаем искомую подцепочку $Z_1 = \{x = z_0, \dots, z_k\}$, а для построения следующих подцепочек следует применить описанную процедуру к оставшейся части $\{z_k, \dots, z_m = y\}$ цепочки Z . Если $K = \emptyset$, то следует взять $t = 1$ и $Z_1 = Z$. Теперь имеем

$$l(Z) \geq l(Z_p) \geq \tilde{\rho}_0(v_p, w_p) \geq \beta' \quad (4.1)$$

для $1 \leq p < t$. Уменьшив, если необходимо, $\beta > 0$, будем считать, что $\beta \leq \beta'$. Тогда получим противоречие с неравенствами (4.1), откуда следует, что $t = 1$ и $Z = Z_1$. Итак, $Z \subset \mathring{D}_r(x; \rho)$. Для всякого $\alpha > 0$, уменьшив, если необходимо, $r > 0$, потребуем, чтобы $r \leq \alpha$. Выбирая теперь $\beta > 0$, как указано выше, добьемся, чтобы условие $\rho_0(x, y) < \beta$ влекло условие $\rho(x, y) < \alpha$, что и требовалось доказать.

Обозначим для краткости через $\tilde{\Xi}_\sigma(\lambda_\sigma)$ множество метрик ρ_σ на локальных многообразиях $W_\delta^\sigma(x)$, для которых $\Lambda_\sigma(\rho_\sigma) = \lambda_\sigma$, а через $\Xi_\sigma(\lambda_\sigma)$ – множество

метрик ρ_σ , для которых выполнен п. а) утверждения теоремы 1.1 с заданным λ_σ , т.е. $\rho_\sigma(fx, fy)/\rho_\sigma(x, y) \rightarrow \lambda_\sigma$ (либо, соответственно, $\rho_u(f^{-1}x, f^{-1}y)/\rho_u(x, y) \rightarrow \lambda_u$) равномерно по всем x, y таким, что $y \in W_\delta^s(x)$ (соответственно, $y \in W_\delta^u(x)$) при $\rho(x, y) \rightarrow 0$. Очевидно, $\Xi_\sigma(\lambda_\sigma) \subset \tilde{\Xi}_\sigma(\lambda_\sigma)$ в силу п. б) замечания 1.1. Если для обоих $\sigma = u, s$ найдутся согласованные метрики $\rho_\sigma \in \tilde{\Xi}_\sigma(\lambda_\sigma)$, то из леммы 4.1 сразу вытекает существование искомой гиперболической метрики $\rho_0 \in \tilde{\Xi}_s(\lambda_s) \cap \tilde{\Xi}_u(\lambda_u)$, что завершает доказательство теоремы 1.3. Оставшаяся часть настоящего параграфа посвящена построению таких метрик $\rho_\sigma = \rho_\sigma^*$ для нетривиального случая $\lambda_\sigma = \Lambda_\sigma^*$. При этом окажется, что $\rho_\sigma^* \in \Xi_\sigma(\Lambda_\sigma^*)$, а это гарантирует дополнительное свойство, что $\rho_0 \in \Xi_s(\lambda_s) \cap \Xi_u(\lambda_u)$ (поскольку для случая $\lambda_\sigma > \Lambda_\sigma^*$ построение из § 2 дает $\rho_\sigma \in \Xi_\sigma(\lambda_\sigma)$).

Для двух метрик $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ (в нашем случае – на локальных устойчивых или неустойчивых многообразиях), совместимых с топологией, будем записывать $\rho^{(1)} \prec \rho^{(2)}$, если $\rho^{(1)}(x, y)/\rho^{(2)}(x, y) \rightarrow 0$ равномерно по всем x, y (для которых эти метрики определены) при $\rho(x, y) \rightarrow 0$. Далее, если $\rho^{(1)} \prec \rho^{(2)}$, то будем записывать $\rho^{(1)} \overset{H}{\prec} \rho^{(2)}$ в случае, когда $\underline{\delta}_C > \bar{\delta}_C^H$ при всех больших $C > 0$, где

$$\begin{aligned} \underline{\delta}_C &= \inf\{\rho^{(2)}(x, y) : C\rho^{(1)}(x, y) \geq \rho^{(2)}(x, y)\} > 0, \\ \bar{\delta}_C &= \sup\{\rho^{(2)}(x, y) : C\rho^{(1)}(x, y) \leq \rho^{(2)}(x, y)\} > 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если $\rho_\sigma^{(i)} \in \Xi_\sigma(\lambda_\sigma^{(i)})$, $i = 1, 2$, причем $\lambda_\sigma^{(1)} < \lambda_\sigma^{(2)}$, то $\rho^{(1)} \prec \rho^{(2)}$. Более того, $\rho^{(1)} \overset{H}{\prec} \rho^{(2)}$ для любого $H > 1$ при дополнительном условии $\lambda_\sigma^{(1)} > 0$. Последнее свойство означает, что в малых масштабах метрики $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ приблизительно “изотропны” друг относительно друга: малый шар каждой метрики в относительной логарифмической шкале для расстояний приблизительно является малым шаром второй метрики с тем же самым центром. Доказательство этих свойств легко вытекает из следующей оценки, сформулированной здесь для $\sigma = u$: если $y \in W_\delta^u(x)$ и $n = n_u(x, y)$ – число, введенное в п. 2 § 2, то $\rho_u^{(i)}(x, y) < C(\lambda_u^{(i)} + \theta)^n$, и если $\lambda_u^{(i)} > 0$, то ввиду п. б) замечания 1.1 имеем $\rho_u^{(i)}(x, y) > C^{-1}(\lambda_u^{(i)} - \theta)^n$, где $\theta > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, а $C \geq 1$ зависит от θ , но не от x, y .

В последующем рассмотрении важную роль будут играть “выпуклые” метрики, для которых неравенство треугольника выполнено в некоторой “сильной” форме. Эти метрики будут задаваться в виде $\rho(x, y) = (\eta(x, y))^\beta$ (сокращенная запись: $\rho = \eta^\beta$), где η – произвольная метрика (в обсуждаемом случае – на локальных многообразиях), а β – любое число такое, что $\beta \in (0, 1)$. Заметим, что если $\eta \in \Xi(\mu_\sigma)$, то $\rho = \eta^\beta \in \Xi(\lambda_\sigma)$ с постоянной $\lambda_\sigma = (\mu_\sigma)^\beta$.

Для любого множества метрик $\{\rho_\sigma^{(n)}\}$ на локальных многообразиях $W_\delta^\sigma(x)$, совместимых с топологией, определим псевдометрику по формуле, аналогичной (2.3):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\sigma\{\rho_\sigma^{(n)}\}(x, y) &= \inf\{l(z_0, z_1) + l(z_1, z_2) + \cdots + l(z_{m-1}, z_m) : \\ z_0 &= x, z_m = y; z_{k+1} \in W_\delta^\sigma(z_k), \exists i : l(z_k, z_{k+1}) = \rho_\sigma^{(i)}(z_k, z_{k+1})\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Это есть наибольшая неотрицательная функция пары точек, являющаяся псевдометрикой и не превосходящая всех функций $\rho_\sigma^{(n)}(\cdot, \cdot)$. К сожалению, даже для двух метрик $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ эта псевдометрика $\mathcal{R}\{\rho^{(1)}, \rho^{(2)}\}$ может вырождаться

(здесь индекс σ опущен). Соответствующий простой пример (где равномерная эквивалентность метрик носит гёльдеров характер) будет приведен в приложении Б. Однако если $\rho^{(1)} \prec \rho^{(2)}$, то $\mathcal{R}\{\rho^{(1)}, \rho^{(2)}\}$ является метрикой. Действительно, легко видеть, что $\rho^{(1)}(x, y) \leq C\rho^{(2)}(x, y)$ с некоторой постоянной $C > 0$ для всех пар (x, y) . Поэтому

$$\min\{1, C^{-1}\}\rho^{(1)}(x, y) \leq \mathcal{R}\{\rho^{(1)}, \rho^{(2)}\}(x, y) \leq \rho^{(1)}(x, y).$$

Кроме того, $\mathcal{R}\{\rho^{(1)}, \rho^{(2)}\}(x, y) = \rho^{(1)}(x, y)$, если $\rho^{(1)}(x, y) \leq \mu$, где $\mu > 0$ настолько мало, что $\rho^{(2)}(x, y) < \mu$ влечет $\rho^{(1)}(x, y) \leq \rho^{(2)}(x, y)$.

Действительно, допустим, что $\mathcal{R}\{\rho^{(1)}, \rho^{(2)}\}(x, y) < \rho^{(1)}(x, y)$. Тогда найдется цепочка $Z = \{x = z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m = y\}$, связывающая точки x, y , такая, что $l(Z) < \rho^{(1)}(x, y)$, где $l(Z) = l(z_0, z_1) + \dots + l(z_{m-1}, z_m)$ – длина цепочки. Здесь $l(z_k, z_{k+1}) = \rho^{(i)}(z_k, z_{k+1})$ с некоторым $i = 1, 2$ для каждого звена $[z_k, z_{k+1}]$ цепочки Z . Не ограничивая общности, в качестве l -длины каждого звена выберем наименьшее из этих двух чисел, поскольку длина всей цепочки $l(Z)$ при этом не увеличится. Тогда найдется звено $[z_k, z_{k+1}]$ такое, что $\rho^{(2)}(z_k, z_{k+1}) < \rho^{(1)}(z_k, z_{k+1})$. Поэтому

$$\rho^{(1)}(x, y) > l(Z) \geq \rho^{(2)}(z_k, z_{k+1}) \geq \mu$$

и, следовательно, $\rho^{(1)}(x, y) > \mu$.

Достаточно описать, как строится искомая метрика $\rho_s = \rho_s^*$ (построение $\rho_u = \rho_u^*$ аналогично). Пусть $\{\lambda_s^{(n)} : n \geq 0\}$ – убывающая последовательность чисел, меньших 1, сходящаяся к Λ_s^* . Искомая метрика ρ_s^* будет определяться рекуррентно:

$$\begin{aligned} \rho_s^*(x, y) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \eta^{(n)}(x, y), \\ \eta^{(0)} &= C^{(0)}\xi^{(0)}, \quad \eta^{(n)} = \mathcal{R}\{\rho^{(n-1)}, C^{(n)}\xi^{(n)}\}, \quad n > 0, \\ \rho^{(n)} &= (\eta^{(n)})^{\beta_n}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $\xi^{(n)} \in \Xi_s(\lambda_s^{(n)})$, $\beta_n \in (0, 1)$, а $C^{(n)}$ – достаточно быстро возрастающая последовательность положительных чисел, выбор которой будет уточнен. Величину константы $C^{(0)}$ для определенности зафиксируем. Относительно последовательности β_n будет только предполагаться сходимость ряда, образованного логарифмами членов этой последовательности. Из неравенств $(\lambda_s^{(n)})^{\beta_n} > \lambda_s^{(n+1)}$ индукцией по n получаем, что $\eta^{(n)}$ – метрики для всех n , причем $\eta^{(n)} \in \Xi_s(\lambda_s^{(n)})$ и $\eta^{(n)}(x, y) = C^{(n)}\xi^{(n)}(x, y)$, если $\rho(x, y)$ достаточно мало. Ниже будет показано, что величина $\rho_s^*(x, y)$ конечна для любых x, y (таких, что $y \in W_\delta^s(x)$). Тогда из формулы, задающей ρ_s^* , легко следует, что ρ_s^* – псевдометрика, поскольку все $\eta^{(n)}$ – псевдометрики. Далее будет установлено, что псевдометрика ρ_s^* является метрикой, совместимой с топологией.

Пусть $\{r_n : n \geq 0\}$ – достаточно быстро убывающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю, выбор которой будет уточнен и заключается в том, что каждое число r_n не превосходит некоторой величины, зависящей только от $n, C^{(0)}, \dots, C^{(n)}$. Пусть константы $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$ и число $r_n > 0$ уже выбраны для данного $n \geq 0$. Тогда найдется $\bar{r}^{(n)} > 0$ такое, что $\eta^{(n)}(v, w) > \bar{r}^{(n)}$ для пар точек

$$(v, w) = (x, y) \quad \text{и} \quad (v, w) = (f(x), f(y)), \quad (4.5)$$

если $\rho(x, y) > r_n$. Рекуррентный выбор $C^{(n+1)}$ будет конкретизироваться при помощи следующей леммы, доказательство которой будет приведено ниже.

ЛЕММА 4.2. Пусть ξ, η – метрики и $\rho = \eta^\beta$, где $0 < \beta < 1$, причем $\xi \stackrel{H}{\prec} \rho$ с некоторым $H > 0$ таким, что $\beta H < 1$. Введем обозначение $\zeta_C = \mathcal{R}\{\rho, C\xi\}$ для любого $C > 0$. Тогда для любых $\bar{r} > 0$ и $\varkappa > 0$ неравенство $\eta(x, y) > \bar{r}$ влечет $\zeta_C(x, y) \geq (1 - \varkappa)\rho(x, y)$, если число C было выбрано достаточно большим, т. е. $C > C(\xi, \eta, \beta, H, \bar{r}, \varkappa)$.

Чтобы применить лемму 4.2, положим $\eta = \eta^{(n)}$, $\beta = \beta_n$, $C = C^{(n+1)}$, $\xi = \xi^{(n+1)}$ (следовательно, $\rho = \rho^{(n)}$), $\bar{r} = \bar{r}^{(n)}$ и $\varkappa = \varkappa^{(n)}$ для $n \geq 0$. Тогда

$$\eta^{(n)}(v, w) > \bar{r}^{(n)} \Rightarrow \eta^{(n+1)}(v, w) \geq (1 - \varkappa^{(n)})\rho^{(n)}(v, w). \quad (4.6)$$

Будем предполагать, что все $\varkappa^{(n)} \in (0, 1)$ и ряд, составленный из $\varkappa^{(n)}$, сходится. Очевидно,

$$\eta^{(n+1)}(v, w) \leq \rho^{(n)}(v, w) \quad \forall v, w. \quad (4.7)$$

Для всякого $a > 0$ обозначим через $N(a)$ наименьшее целое число $n \geq 0$ такое, что $a > r_n$, т. е. $r_N < a \leq r_{N-1}$ для $N > 0$ и $r_0 < a$ для $N = 0$, где $N = N(a)$. Очевидно, $N(a) \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow +0$. Пусть $x \neq y$ и $N = N(\rho(x, y))$. Тогда $\rho(x, y) > r_n$ для всех $n \geq N$. Поэтому для $n \geq N$ и пар точек (4.5) выполнены неравенства (4.6). Применяя последовательно эти неравенства и неравенства (4.7) для убывающих значений $n = m - 1, \dots, M + 1, M$, получим оценки

$$\begin{aligned} & \frac{\eta^{(m)}(v, w)}{(\eta^{(M)}(v, w))^{\beta_{m-1} \dots \beta_M}} \\ & \geq (1 - \varkappa^{(m-1)})(1 - \varkappa^{(m-2)})^{\beta_{m-1}}(1 - \varkappa^{(m-3)})^{\beta_{m-1}\beta_{m-2}} \dots \\ & \dots (1 - \varkappa^{(M)})^{\beta_{m-1} \dots \beta_{M-1}} \geq \prod_{k=M}^{m-1} (1 - \varkappa^{(k)}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

если $m > M \geq N = N(\rho(x, y))$, и оценку

$$\frac{\eta^{(m)}(v, w)}{(\eta^{(M)}(v, w))^{\beta_{m-1} \dots \beta_M}} \leq 1, \quad (4.9)$$

если $m > M \geq 0$. В частности, $\widehat{\varkappa} f(\eta^{(N)}(x, y)) < \eta^{(m)}(x, y) \leq \bar{f}(\eta^{(0)}(x, y))$ для всех $m > N$, где введены функции $f(a) = \min\{a, a^{\hat{\beta}}\}$ и $\bar{f}(a) = \max\{a, a^{\hat{\beta}}\}$ и положительные (в силу сделанных ранее предположений) величины $\widehat{\varkappa} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \varkappa^{(k)})$ и $\hat{\beta} = \prod_{k=0}^{\infty} \beta_k$. Поэтому

$$0 < \widehat{\varkappa} f(\eta^{(N)}(x, y)) \leq \rho_s^*(x, y) \leq \bar{f}(\eta^{(0)}(x, y)),$$

а значит, псевдометрика ρ_s^* определена корректно и оказывается метрикой, равномерно эквивалентной ρ .

Теперь число $r_{N-1} > 0$ следует выбрать так, чтобы величина $\eta^{(N)}(fx, fy)/\eta^{(N)}(x, y)$ при $\rho(x, y) \leq r_{N-1}$ допускала оценку сверху, стремящуюся к Λ_s^* при $N \rightarrow +\infty$. Этого было бы легко добиться, выбирая столь малое $r_{N-1} > 0$, чтобы $\eta^{(N)}(v, w) = C^{(N)}\xi^{(N)}(v, w)$ для пар точек (4.5) и величина $|\xi^{(N)}(fx, fy)/\xi^{(N)}(x, y) - \lambda_s^{(N)}|$ была бы достаточно мала при $\rho(x, y) \leq r_{N-1}$. Однако при

этом величина r_{N-1} окажется зависящей от $C^{(N)}$, что не позволяет осуществить последовательный рекуррентный выбор чисел r_n и коэффициентов $C^{(n)}$. Поэтому выбор r_{N-1} будет осуществлен на основе следующей леммы.

ЛЕММА 4.3. *Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $r = r(n, \varepsilon, C^{(0)}, \dots, C^{(n-1)})$, не зависящее от $C^{(n)}$, что*

$$\frac{\eta^{(n)}(fx, fy)}{\eta^{(n)}(x, y)} \leq (\lambda_s^{(n-1)})^{\beta_{n-1}} + \varepsilon \quad (4.10)$$

при $\rho(x, y) \leq r$.

Пусть $\{\varepsilon^{(n)} : n \geq 0\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Тогда для каждого $n \geq 0$ выберем по лемме 4.3 числа $r_{n-1} \leq r(n, \varepsilon^{(n)}, C^{(0)}, \dots, C^{(n-1)})$, образующие убывающую и стремящуюся к нулю последовательность. Введем также обозначения

$$\widehat{\varkappa}^{(N)} = \prod_{k=N}^{\infty} (1 - \varkappa^{(k)}), \quad \widehat{\beta}^{(N)} = \prod_{k=N}^{\infty} \beta_k.$$

Из неравенств (4.8) и (4.9) для пар точек (4.5) и из неравенства (4.10) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\eta^{(m)}(fx, fy)}{\eta^{(m)}(x, y)} &< \frac{1}{\widehat{\varkappa}^{(N)}} \left(\frac{\eta^{(N)}(fx, fy)}{\eta^{(N)}(x, y)} \right)^{\beta_{m-1} \dots \beta_N} \\ &\leq \frac{1}{\widehat{\varkappa}^{(N)}} ((\lambda_s^{(N-1)})^{\beta_{N-1}} + \varepsilon^{(N)})^{\widehat{\beta}^{(N)}} \stackrel{\text{def}}{=} G_s^{(N)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

для всех $m > N$, если $y \in W_\delta^s(x)$. Здесь предполагалось, с целью небольшого упрощения выражения для $G_s^{(N)}$, что $\varepsilon^{(N)} > 0$ было выбрано столь малым, чтобы $(\lambda_s^{(N-1)})^{\beta_{N-1}} + \varepsilon^{(N)} \leq 1$. Очевидно, $G_s^{(N)} \rightarrow \Lambda_s^*$ при $N \rightarrow +\infty$. Далее, по определению

$$\rho_s^*(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\eta}^{(n)}(x, y),$$

где $\bar{\eta}^{(n)}(x, y) = \sup_{m \geq n} \eta^{(m)}(x, y)$. Из неравенства (4.11) легко следует, что

$$\frac{\bar{\eta}^{(m)}(fx, fy)}{\bar{\eta}^{(m)}(x, y)} \leq G_s^{(N)},$$

если $y \in W_\delta^s(x)$ и $m > N = N(\rho(x, y))$. Переходя к пределу по m , получим

$$\frac{\rho_s^*(fx, fy)}{\rho_s^*(x, y)} \leq G_s^{(N)} \quad (4.12)$$

для $y \in W_\delta^s(x)$, где $N \rightarrow \infty$ равномерно по всем парам точек (x, y) при $\rho(x, y) \rightarrow 0$. Поэтому $\Lambda_s(\rho_s^*) \leq \Lambda_s^*$ в силу п. 6) замечания 1.1. Поскольку $\Lambda_s^* \leq \Lambda_s(\rho_0) = \Lambda_s(\rho_s^*)$ для построенной метрики ρ_0 , то получаем искомое равенство $\Lambda_s(\rho_s^*) = \Lambda_s^*$.

Теперь остается добиться того, чтобы метрика ρ_s^* на локальных устойчивых многообразиях была согласованной. С этой целью будем использовать метрики $\xi^{(n)}$, также удовлетворяющие этому условию.

ЛЕММА 4.4. Каждая метрика $\eta^{(n)}$ является согласованной. При этом соответствующие константы $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^{(n)} > 0$ и функцию $\delta_1 = \delta_1^{(n)}(\nu) > 0$ можно выбрать не зависящими от значений констант $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$ при условии, что последние равномерно отделены от нуля.

Из неравенств (4.8) и (4.9) для пар точек $(v, w) = (y, z)$ и $(v, w) = (y', z')$ следует, что

$$\widehat{\kappa}^{(M)} \leq \frac{\eta^{(m)}(y', z')}{\eta^{(m)}(y, z)} \left/ \left(\frac{\eta^{(M)}(y', z')}{\eta^{(M)}(y, z)} \right)^{\beta_{m-1} \dots \beta_M} \right. \leq \frac{1}{\widehat{\kappa}^{(M)}},$$

если $m > M$, где $M = \max\{N(\rho(y, z)), N(\rho(y', z'))\}$. Если

$$\left| \frac{\eta^{(M)}(y', z')}{\eta^{(M)}(y, z)} - 1 \right| \leq \nu', \quad (4.13)$$

то все числа $\eta^{(m)}(y', z')/\eta^{(m)}(y, z)$, а значит, и число $\rho_s^*(y', z')/\rho_s^*(y, z)$ лежат на отрезке $[\widehat{\kappa}^{(M)}(1 - \nu'), (1 + \nu')/\widehat{\kappa}^{(M)}]$, который принадлежит $[1 - \nu, 1 + \nu]$, когда $\nu' < \nu$, а M – достаточно велико, т. е. $M \geq L$, где L зависит от ν и ν' . Поэтому будем выбирать $\nu' = \nu'(\nu) \in (0, \nu)$ в зависимости только от $\nu > 0$ и потребуем в дальнейшем, чтобы $N(\rho(y, z)) \geq L = L(\nu)$, т. е. $\rho(y, z) \leq r_{L-1}$. Здесь $L(\nu) \rightarrow \infty$ при $\nu \rightarrow +0$. Можно добиться, чтобы функция $\nu'(\nu)$ была возрастающей, а целочисленная функция $L(\nu)$ – невозрастающей. Тогда точки разрыва функции $L(\nu)$ образуют убывающую последовательность $\{\nu^{(k)}\}$, стремящуюся к нулю, и можно также добиться, чтобы величина скачка функции в каждой точке разрыва была равна -1 :

$$L(\nu^{(k)} + 0) - L(\nu^{(k)} - 0) = -1.$$

Теперь индекс k можно “сдвинуть” (изменяя его значения на некоторую постоянную величину) так, что $L(\nu) = k$ при $\nu \in (\nu^{(k+1)}, \nu^{(k)})$. Увеличивая (при необходимости) значения функции $L(\nu)$ в точках разрыва, можно также считать, что $L(\nu) = k$ при $\nu = \nu^{(k)}$.

Согласно лемме 4.4 числа $r_n > 0$ при необходимости могут быть уменьшены без изменения констант $\tilde{\varepsilon}^{(n)}$ и функций $\delta_1^{(n)}(\nu)$. Поэтому можно добиться того, чтобы при всех $n > 0$:

1) из $\rho(y, z) \leq r_n$ следовало $\rho(y', z') \leq r_{n-1}$, а из $\rho(y, z) > r_{n-1}$ следовало $\rho(y', z') > r_n$;

2) было выполнено (4.13) при $M \in \{n, n+1\}$ и $\nu' = \nu'(\nu^{(n+1)})$, если y, z такие, что $\rho(y, z) \leq r_{n-1}$.

Условие 1) гарантирует, что числа $N(\rho(y, z))$ и $N(\rho(y', z'))$ различаются не больше чем на единицу и, значит, $M \in \{N, N+1\}$, где $N = N(\rho(y, z))$. Если теперь $\nu \in (0, \nu^{(0)}]$, то $\nu \in (\nu^{(n+1)}, \nu^{(n)})$ для некоторого $n \geq 0$. Тогда $n = L(\nu)$ и для y, z таких, что $\rho(y, z) \leq r_{n-1}$, выполнено требуемое условие $N = N(\rho(y, z)) \geq L = n$. Тогда по условию 2) для указанных y, z ввиду $\rho(y, z) \leq r_{n-1}$ выполнены неравенства (4.13) при $M \in \{N, N+1\}$ и $\nu' = \nu'(\nu^{(N+1)}) \leq \nu'(\nu^{(n+1)}) \leq \nu'(\nu)$. Итак, метрика ρ_s^* удовлетворяет условию леммы 2.2 с функцией $\delta_1(\nu) = r_{n-1} = r_{L(\nu)-1}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Построенная метрика удовлетворяет утверждению а) теоремы 1.1 для $\lambda_s = \Lambda_s^*$, т. е. $\rho_s^*(fx, fy)/\rho_s^*(x, y) \rightarrow \Lambda_s^*$ равномерно по всем x, y

таким, что $y \in W_\delta^s(x)$ при $\rho(x, y) \rightarrow 0$. Чтобы это установить, необходимо рассмотреть только случай, когда $\Lambda_s^* > 0$. Справедлив следующий усиленный вариант леммы 4.3.

ЛЕММА 4.5. В утверждении леммы 4.3 число r можно выбрать так, что при $\rho(x, y) \leq r$ одновременно с неравенством (4.10) будет выполнено двойственное к нему неравенство

$$\frac{\eta^{(n)}(fx, fy)}{\eta^{(n)}(x, y)} \geq \lambda_s^{(n)} - \varepsilon. \quad (4.14)$$

Полагая, что $\varepsilon^{(N)} > 0$ столь мало, что $\lambda_s^{(N)} - \varepsilon^{(N)} > 0$, получим двойственное к (4.11) неравенство

$$\frac{\eta^{(m)}(fx, fy)}{\eta^{(m)}(x, y)} > \widehat{\kappa}^{(N)} \left(\frac{\eta^{(N)}(fx, fy)}{\eta^{(N)}(x, y)} \right)^{\beta_{m-1} \dots \beta_N} \geq \widehat{\kappa}^{(N)} (\lambda_s^{(N)} - \varepsilon^{(N)}) \stackrel{\text{def}}{=} g_s^{(N)},$$

где $g_s^{(N)} \rightarrow \Lambda_s^*$ при $N \rightarrow +\infty$. Теперь, дословно повторяя приведенные выше рассуждения, получим двойственное к (4.12) неравенство

$$\frac{\rho_s^*(fx, fy)}{\rho_s^*(x, y)} \geq g_s^{(N)}$$

для $y \in W_\delta^s(x)$, которое вместе с (4.12) дает искомое утверждение для устойчивых многообразий.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. На множестве K_σ пар точек (x, y) таких, что $y \in W^\sigma(x)$, где $\sigma = u, s$, введем топологию τ_σ , полагая, что $(x_k, y_k) \xrightarrow{\tau_\sigma} (x, y)$, $k \rightarrow \infty$, если $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y)$, причем последовательность чисел $m_\sigma(x_k, y_k)$ ограничена, где $m_u(x, y)$ (соответственно, $m_s(x, y)$) – наименьшее число $n \geq 0$ такое, что $f^{-n}y \in W_\delta^u(f^{-n}x)$, т. е. $\rho(f^{-k}x, f^{-k}y) \leq \delta$ (соответственно, $f^n y \in W_\delta^s(f^n x)$, т. е. $\rho(f^k x, f^k y) \leq \delta$) для всех $k \geq n$. Иначе говоря, топология τ_σ порождается фильтрациями глобальных многообразий $W^\sigma(x)$, описанными в п. в) замечания 1.1. Пусть $\mathcal{H}_\sigma$ – множество метрик $\rho^{(\sigma)}$ на многообразиях $W^\sigma(x)$, для которых выполнено соответствующее неравенство (1.1) и таких, что $\rho^{(\sigma)}$ непрерывна и ограничена на топологическом пространстве (K_σ, τ_σ) , причем локально относительно топологии τ_σ , т. е. в малых окрестностях этой топологии, ограничение $\rho^{(\sigma)}$ на каждое многообразие $W^\sigma(x)$ порождает топологию, совпадающую с ограничением τ_σ на $W^\sigma(x)$ (или, что эквивалентно в силу локальности, с ограничением на $W^\sigma(x)$ топологии τ пространства X).

Заметим, что глобальный вариант последнего свойства не будет выполнен, поскольку точки на $W^\sigma(x)$, далекие в метрике $\rho^{(\sigma)}$, могут оказаться близкими в топологии τ . Поэтому $\rho^{(\sigma)} \in \mathcal{H}_\sigma$ не является, вообще говоря, метрикой или предметрикой на всем пространстве X , совместимой с его топологией (*предметрикой* мы называем функцию пары точек, удовлетворяющую тем же аксиомам, что и метрика, кроме, может быть, неравенства треугольника; топология, порождаемая предметрикой, определяется аналогично топологии, порождаемой метрикой). Кроме того, по всей видимости, можно построить метрику $\rho^{(\sigma)} \in \mathcal{H}_\sigma$ такую, что некоторые точки, близкие в метрике $\rho^{(\sigma)}$, будут далеки в топологии τ , а значит, и в топологии τ_σ .

Докажем, что $\Lambda_\sigma^*(\mathcal{H}_\sigma) = \Lambda_\sigma^*(\mathcal{H}) = \Lambda_\sigma^*$. Действительно, по любому $\rho^{(\sigma)} \in \mathcal{H}_\sigma$ конструкцией, приведенной в п. 1 § 2, можно построить метрику $\rho_\sigma \in \Xi_\sigma(\lambda_\sigma)$

с произвольным числом $\lambda_\sigma > \Lambda_\sigma(\rho^{(\sigma)})$ (последнее неравенство существенно, поскольку обоснование конструкции из § 2 для случая $\lambda_\sigma = \Lambda_\sigma(\rho^{(\sigma)})$ было основано на предположении, что $\rho^{(\sigma)}$ является гиперболической метрикой на всем пространстве X). Нетрудно видеть, что, во-первых, ограничения $\rho^{(\sigma)}$ на локальные многообразия $W_\delta^\sigma(x)$ равномерно эквивалентны исходной метрике ρ , а во-вторых, метрика ρ_σ удовлетворяет лемме 2.1 (здесь существенно, что функция $\delta_2 = \delta_2(\mu)$ может быть выбрана одинаковой для всех точек). Поэтому метрика ρ_σ согласованна и ее можно применить теперь в построениях доказательства теоремы 1.3, что дает существование метрики $\rho \in \mathcal{H}$ такой, что $\Lambda_\sigma^*(\rho) = \lambda_\sigma$. Отсюда легко следует искомым результат, поскольку, очевидно, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_\sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.5. Заметим, что

$$\begin{aligned} c^{(n)} &\leq C^{(n)}, & c^{(n)}\xi^{(n)}(x, y) &\leq \rho^{(n-1)}(x, y), \\ \eta^{(n)}(x, y) &\leq \bar{f}(\eta^{(0)}(x, y)) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\eta}(x, y) \end{aligned} \quad (4.15)$$

для всех x, y таких, что $y \in W_\delta^s(x)$, где $c^{(n)} > 0$ достаточно мало и может быть выбрано независимо от констант $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$, если последние равномерно отделены от нуля. Действительно, первое неравенство (4.15) очевидно, третье неравенство было получено выше, а второе неравенство следует из тех фактов, что $\xi^{(n)} \prec \rho^{(n-1)}$ и $\rho^{(n-1)}$ не убывает при возрастании каких-либо из коэффициентов $C^{(0)}, \dots, C^{(n-1)}$.

По $\alpha_1 > 0$ выберем $\alpha_2 > 0$ такое, что $\rho(x, y) < \alpha_1$, если $c^{(n)}\xi^{(n)}(x, y) < \alpha_2$, а по $\alpha_2 > 0$ выберем $\alpha_3 > 0$ такое, что $\tilde{\eta}(x, y) < \alpha_2$, если $\rho(x, y) \leq \alpha_3$. Значит, $\alpha_3 = \alpha_3^{(n)}(\alpha_1) > 0$. Итак, если $\rho(x, y) \leq \alpha_3$, то $\eta^{(n)}(x, y) \leq \tilde{\eta}(x, y) < \alpha_2$ и при нахождении $\eta^{(n)}(x, y) = \mathcal{R}\{\rho^{(n-1)}, C^{(n)}\xi^{(n)}\}(x, y)$ можно использовать только цепочки $Z = \{x = z_0, \dots, z_m = y\}$ длины $l(Z) < \alpha_2$, где $l(Z) = l(z_0, z_1) + \dots + l(z_{m-1}, z_m)$, причем $l(z_k, z_{k+1}) = \rho^{(n-1)}(z_k, z_{k+1})$ или $l(z_k, z_{k+1}) = C^{(n)}\xi^{(n)}(z_k, z_{k+1})$ для каждого звена $[z_k, z_{k+1}]$ цепочки Z . Поскольку $c^{(n)}\xi^{(n)}$ -длина $\sum_{k=0}^{m-1} c^{(n)}\xi^{(n)}(z_k, z_{k+1})$ каждой такой цепочки не превосходит $l(Z)$, то $Z \subset \mathring{D}_{\alpha_2}(x; c^{(n)}\xi^{(n)})$ и, следовательно, $Z \subset \mathring{D}_{\alpha_1}(x; \rho)$. Выберем столь малое $\alpha_1 > 0$, зависящее от $\varepsilon, n, C^{(0)}, \dots, C^{(n-1)}$, что если $\rho(x, y) < 2\alpha_1$, то выполнены следующие три условия:

$$\eta^{(n-1)}(v, w) = C^{(n-1)}\xi^{(n-1)}(v, w) \quad (4.16)$$

(и, следовательно, $\rho^{(n-1)}(v, w) = (C^{(n-1)})^{\beta_{n-1}}(\xi^{(n-1)}(v, w))^{\beta_{n-1}}$) для пар точек (4.5),

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\xi^{(n-1)}(fx, fy)}{\xi^{(n-1)}(x, y)} \right)^{\beta_{n-1}} - (\lambda_s^{(n-1)})^{\beta_{n-1}} \right| &\leq \varepsilon, \\ \left| \frac{\xi^{(n)}(fx, fy)}{\xi^{(n)}(x, y)} - \lambda_s^{(n)} \right| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Тогда число $r = \alpha_3$ – искомое. Действительно, для каждого звена $[z_k, z_{k+1}]$ цепочки Z выполнены эти три условия (получаемые подстановкой концов звена z_k, z_{k+1} вместо точек x, y). Тогда под действием f цепочка Z , соединяющая x и y , перейдет в цепочку $Z' = \{x' = z'_0, \dots, z'_m = y'\}$, соединяющую $x' = f(x)$ и $y' = f(y)$, причем

$$\frac{l(Z')}{l(Z)} \leq \max\{(\lambda_s^{(n-1)})^{\beta_{n-1}}, \lambda_s^{(n)}\} + \varepsilon = (\lambda_s^{(n-1)})^{\beta_{n-1}} + \varepsilon.$$

Здесь при нахождении длин каждого звена $[z_k, z_{k+1}]$ и его образа $[z'_k, z'_{k+1}]$ под действием f использовалась одна и та же метрика $\rho^{(n-1)}$ либо $C^{(n)}\xi^{(n)}$. Переходя к $\inf l(Z') \geq \eta^{(n)}(x', y')$, а затем к $\inf l(Z) = \eta^{(n)}(x, y)$, получим искомое неравенство (4.10).

Чтобы добиться выполнения неравенства (4.14), дополнительно потребуем справедливости всех трех условий (4.16), (4.17) для любых точек x, y таких, что $\rho(f(x), f(y)) < 2\alpha_1$. Тогда число $r > 0$ такое, что $r \leq \alpha_3$, причем $\rho(x, y) \leq r$ влечет $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha_3$, будет искомым. Действительно, если $\rho(x, y) \leq r$, то при нахождении $\eta^{(n)}(x', y')$ можно использовать только цепочки Z' такие, что $Z' \subset \overset{\circ}{D}_{\alpha_1}(x'; \rho)$. Однако любая такая цепочка Z' является образом при гомеоморфизме f некоторой цепочки Z , соединяющей x и y , причем

$$\frac{l(Z')}{l(Z)} \geq \min\{(\lambda_s^{(n-1)})^{\beta_{n-1}}, \lambda_s^{(n)}\} - \varepsilon = \lambda_s^{(n)} - \varepsilon.$$

Переходя к $\inf l(Z) \geq \eta^{(n)}(x, y)$, а затем к $\inf l(Z') = \eta^{(n)}(x', y')$, получим искомое неравенство (4.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.4. Для $n = 0$ эта лемма очевидна. Докажем ее по индукции для $n \geq 1$. По предположению индукции утверждение леммы 2.2 выполнено для метрик $\rho^{(n-1)}$ и $\xi^{(n)}$ на локальных устойчивых многообразиях с некоторыми константой $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^{(n-1)} > 0$ и функцией $\delta_1 = \delta_1^{(n-1)} = \delta_1^{(n-1)}(\nu) > 0$, не зависящими от $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots, C^{(n-1)}, C^{(n)}$.

В последующем, согласно условию леммы 2.2, y, z – точки такие, что $y, z \in W_\delta^s(x) \cap D_{\tilde{\varepsilon}}(x)$, а y', z' – их “проекции” на $W_\delta^s(x')$, где $x' \in W_\delta^u(x) \cap D_{\varepsilon/2}(x)$. По $\alpha_1 > 0$ будем выбирать $\alpha_3 = \alpha_3^{(n)}(\alpha_1) > 0$, как указано в доказательстве леммы 4.3. Итак, если $\rho(y, z) \leq \alpha_3$, то при нахождении $\eta^{(n)}(y, z) = \mathcal{R}\{\rho^{(n-1)}, C^{(n)}\xi^{(n)}\}(y, z)$ можно использовать только цепочки $Z = \{y = v_0, \dots, \dots, v_m = z\}$ такие, что $Z \subset \overset{\circ}{D}_{\alpha_1}(y; \rho)$. Возьмем $\tilde{\varepsilon}^{(n)} \in (0, \tilde{\varepsilon}^{(n-1)})$, а $\alpha_1 > 0$ будем выбирать в зависимости от ν столь малым, что $\alpha_1 \leq \delta_1^{(n-1)}/2$ и $\alpha_1 + \tilde{\varepsilon}^{(n)} \leq \tilde{\varepsilon}^{(n-1)}$. Тогда при проектировании на $W_\delta^s(x')$ цепочка Z , соединяющая y и z , перейдет в цепочку $Z' = \{y' = v'_0, \dots, v'_m = z'\}$, соединяющую y' и z' , причем к каждому звену $[v_k, v_{k+1}]$ и его проекции $[v'_k, v'_{k+1}]$ применимо утверждение леммы 2.2, что дает неравенство $l(Z')/l(Z) \leq 1 + \nu$. Здесь при нахождении длин каждого звена и его проекции использовалась одна и та же метрика $\rho^{(n-1)}$ либо $C^{(n)}\xi^{(n)}$. Переходя к $\inf l(Z) = \eta^{(n)}(y, z)$, а затем к $\inf l(Z') \geq \eta^{(n)}(y', z')$, получим $\eta^{(n)}(y', z')/\eta^{(n)}(y, z) \leq 1 + \nu$. Далее, для $\alpha_3 > 0$ найдется $\alpha_4 > 0$ такое, что $\alpha_4 \leq \alpha_3$ и $\rho(y', z') \leq \alpha_3$, если $\rho(y, z) \leq \alpha_4$ (см. доказательство леммы 2.2 в п. 2 § 2). Поэтому в случае $\rho(y, z) \leq \alpha_4$ можно применить приведенные выше аргументы, поменяв местами пары точек (y, z) и (y', z') . Значит,

$$1 - \nu < (1 + \nu)^{-1} \leq \frac{\eta^{(n)}(y', z')}{\eta^{(n)}(y, z)} \leq 1 + \nu,$$

и поэтому можно положить $\delta_1^{(n)} = \alpha_4$, что завершает доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.2. Пусть $\bar{\delta} = \bar{\delta}_C$ и $\underline{\delta} = \underline{\delta}_C$ определены по формулам (4.2) для метрик $\rho^{(1)} = \xi$ и $\rho^{(2)} = \rho$. Покажем, что требуемое свойство будет выполнено, если константа $\bar{\delta} > 0$ достаточно мала.

Пусть

$$\zeta_C(x, y) < (1 - \varkappa)\rho(x, y) \quad (4.18)$$

для некоторых точек x, y . Тогда найдется цепочка $Z = \{x = z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m = y\}$, связывающая точки x, y и такая, что

$$\zeta_C(x, y) < l(Z) < (1 - \varkappa)\rho(x, y),$$

где $l(Z) = l(z_0, z_1) + \dots + l(z_{m-1}, z_m)$ — длина цепочки, причем $l(z_k, z_{k+1}) = \rho(z_k, z_{k+1})$ или $l(z_k, z_{k+1}) = C\xi(z_k, z_{k+1})$ для каждого звена $[z_k, z_{k+1}]$ цепочки Z . Не ограничивая общности, в качестве l -длины каждого звена выберем наименьшее из этих двух чисел. Назовем $C\xi$ -звеньями звенья $[z_k, z_{k+1}]$ такие, что $C\xi(z_k, z_{k+1}) < \rho(z_k, z_{k+1})$, т.е. более короткие в метрике $C\xi$, нежели в метрике ρ . Остальные звенья назовем ρ -звеньями. Тогда ρ -звенья имеют ρ -длины, не меньшие $\underline{\delta} > \bar{\delta}^H$, а $C\xi$ -звенья — ρ -длины, не большие $\bar{\delta}$. Суммарная ρ -длина $C\xi$ -звеньев больше, чем $\varkappa\rho(x, y)$, поскольку только для таких звеньев возможно неравенство $l(z_k, z_{k+1}) \neq \rho(z_k, z_{k+1})$. Если в цепочке подряд идет некоторое количество ρ -звеньев $[z_a, z_{a+1}], \dots, [z_{b-1}, z_b]$, то в силу неравенства треугольника при замене этих звеньев на одно звено $[z_a, z_b]$ длина $l(Z)$ не увеличится. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что такие группы звеньев отсутствуют. Аналогично можно считать, что отсутствуют идущие подряд $C\xi$ -звенья. Итак, цепочка Z состоит из $C\xi$ -звеньев в количестве $K_* \geq [\varkappa\rho(x, y) / \bar{\delta}]$, чередующихся ρ -звеньями. Значит, количество ρ -звеньев отличается от K_* не более чем на единицу.

ЛЕММА 4.6. Для любых положительных $\varkappa, \bar{r}, H$ и $\beta \in (0, 1)$ таких, что $\beta H < 1$, и для всех достаточно малых $\delta > 0$ выполнено следующее условие: если $r \geq \bar{r}$ и $l_i \geq \delta^H$, $1 \leq i \leq K$, — некоторые числа, причем $K \geq [\varkappa r^\beta / \delta^\beta] - 1$ и $\sum_{i=1}^K l_i \geq r - (K + 1)\delta$, то $\sum_{i=1}^K l_i^\beta > (1 - \varkappa)r^\beta$.

Чтобы применить лемму 4.6, введем обозначения $r = \eta(x, y)$, $\bar{\delta} = \delta^\beta$ и предположим, что l_i есть η -длины $\eta(z_k, z_{k+1})$ всех ρ -звеньев, а через l'_j обозначим η -длины всех $C\xi$ -звеньев. Количество K чисел l_i отличается от количества K_* чисел l'_j не более чем на единицу, что и дает неравенство, налагаемое на K в условии леммы 4.6. Тогда $\sum_i l_i \geq r - (K + 1)\delta$, поскольку $\sum_i l_i + \sum_j l'_j \geq r$ (длина цепочки не меньше расстояния между ее концами) и $\sum_j l'_j \leq K_*\delta \leq (K + 1)\delta$.

Итак, все условия леммы 4.6 оказываются выполненными. Значит,

$$l(Z) > \sum_i l_i^\beta > (1 - \varkappa)r^\beta = (1 - \varkappa)\rho(x, y),$$

если $\delta > 0$ достаточно мало, что противоречит неравенству (4.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.6. Достаточно доказать лемму в предположении, что $H > 1$. Для двух положительных величин α и β , зависящих от δ и r , будем записывать $\alpha \sim \beta$, если $\alpha/\beta \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow +0$ равномерно по $r \geq \bar{r}$, и $\alpha \geq \beta$, если $\alpha \geq \beta$ при $\delta \in (0, \delta_0)$ и $r \geq \bar{r}$, где $\delta_0 > 0$ не зависит от r . Заметим, что $K \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow +0$ равномерно по $r \geq \bar{r}$. Если $a = K\delta^H + (K + 1)\delta \geq r$, то множество допустимых наборов $l = (l_1, \dots, l_K)$ является K -мерным прямым

углом $\{(l_1, \dots, l_K) : l_i \geq \delta^H, 1 \leq i \leq K\}$ и $K \geq K_0 \sim r/\delta$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^K l_i^\beta \geq K_0 \delta^{\beta H} \sim r \delta^{\beta H-1} \geq r^\beta,$$

откуда следует искомый результат.

Пусть теперь $a < r$. Тогда множество допустимых наборов $l = (l_1, \dots, l_K)$ представимо как объединение K -мерных прямых углов $\{(l_1, \dots, l_K) : l_i \geq l_i^\circ, 1 \leq i \leq K\}$ с вершинами $(l_1^\circ, \dots, l_K^\circ)$, пробегающими $(K-1)$ -мерный симплекс S , вершины которого $l^{(j)}$, $1 \leq j \leq K$, получаются из точки

$$l^{(1)} = \left(r - (K+1)\delta - (K-1)\delta^H, \underbrace{\delta^H, \dots, \delta^H}_{K-1} \right)$$

перестановками координат. Поэтому достаточно показать, что

$$f(l) \equiv \sum_{i=1}^K l_i^\beta > (1 - \varkappa) r^\beta,$$

когда $l = (l_1, \dots, l_K)$ пробегает этот симплекс. В силу вогнутости функции $l_i \mapsto l_i^\beta$ функция f также вогнута (выпукла вверх) и ее минимум на симплексе S достигается в некоторой вершине последнего (поскольку этот симплекс – выпуклая оболочка множества своих вершин; напомним, что вогнутость функции f на выпуклом подмножестве X линейного пространства означает, что $f(x + \theta(y - x)) > \theta f(y) + (1 - \theta)f(x)$ для любых $\theta \in (0, 1)$ и $x, y \in X$). Итак, минимум равен

$$g = (r - (K+1)\delta - (K-1)\delta^H)^\beta + (K-1)\delta^{\beta H}.$$

Если $K-1 = \varkappa(r^\beta/\delta^\beta)v$, то $v \geq 1 - o(1)$ при $\delta \rightarrow +0$, где o -оценка не зависит от $r \geq \bar{r}$. Вводя $t = \varkappa v$, получим

$$g \geq (r - 2tr^\beta \delta^{1-\beta})^\beta + tr^\beta \delta^{\beta(H-1)} \stackrel{\text{def}}{=} g_0.$$

Если $t \geq \delta^{\beta(1-H)}$, то $g_0 \geq r^\beta$ с учетом только второго слагаемого в выражении для g_0 . Если $t < \delta^{\beta(1-H)}$, то из первого слагаемого получим

$$g_0 > (r - 2r^\beta \delta^{1-\beta H})^\beta = r^\beta (1 - 2r^{\beta-1} \delta^{1-\beta H})^\beta \geq (1 - \varkappa) r^\beta.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Если оба числа λ_s, λ_u равны нулю либо оба больше нуля, то возможно более простое доказательство теоремы 1.3, при котором искомая метрика $\rho_0 \in \Xi_s(\lambda_s) \cap \Xi_u(\lambda_u)$ строится непосредственно (вместо метрик ρ_s, ρ_u). При этом нет необходимости добиваться условия, чтобы метрики ρ_σ были согласованными. Обозначим через $\Xi(\lambda_s, \lambda_u) = \Xi_\Phi(\lambda_s, \lambda_u)$ множество метрик ρ_σ , для которых выполнено утверждение теоремы 1.2' с заданными числами λ_s, λ_u и нормой Φ на плоскости, и заметим, что если $\eta \in \Xi_\Phi(\mu_s, \mu_u)$ и $\beta \in (0, 1)$, то $\eta^\beta \in \Xi_\Psi(\lambda_s, \lambda_u)$ с постоянными $\lambda_\sigma = (\mu_\sigma)^\beta$ и нормой⁴

$$\Psi(a_s, a_u) = (\Phi(|a_s|^{1/\beta}, |a_u|^{1/\beta}))^\beta.$$

⁴Легко доказать, что если Φ – симметричная норма, то Ψ – также симметричная норма. Впрочем, тот факт, что Ψ действительно является нормой, не будет нигде использоваться.

Введем одновременно две убывающие и сходящиеся соответственно к λ_s и λ_u последовательности чисел $\{\lambda_s^{(n)}: n \geq 0\}$ и $\{\lambda_u^{(n)}: n \geq 0\}$, меньших 1, и построим ρ_0 по формулам (4.4), полагая $\xi^{(n)} \in \Xi(\lambda_s^{(n)}, \lambda_u^{(n)})$. Единственная сложность заключается в том, что теперь числа $H > 1$ нельзя, вообще говоря, выбрать близкими к единице. Легко получить, что если $\xi^{(i)} \in \Xi(\lambda_s^{(i)}, \lambda_u^{(i)})$, $i = 1, 2$, причем $\lambda_\sigma^{(1)} < \lambda_\sigma^{(2)}$ для обоих $\sigma = u, s$, то $\xi^{(1)} \stackrel{H}{\prec} \xi^{(2)}$, где $H > \max\{f, f^{-1}\}$,

$$f = \left(\frac{\ln \lambda_u^{(1)}}{\ln \lambda_u^{(2)}} - 1 \right) \left(\frac{\ln \lambda_s^{(1)}}{\ln \lambda_s^{(2)}} - 1 \right)^{-1},$$

и эта оценка неулучшаема. Поэтому $\xi^{(n+1)} \stackrel{H_n}{\prec} \rho^{(n)}$, где $H_n > \max\{f_n, f_n^{-1}\}$, $f_n = (b_u^{(n)} - \beta_n) / (b_s^{(n)} - \beta_n)$, $b_\sigma^{(n)} = \ln \lambda_\sigma^{(n+1)} / \ln \lambda_\sigma^{(n)} > 1$. Если $\lambda_s = \lambda_u = 0$ либо $\lambda_s > 0$, $\lambda_u > 0$, то искомого условия $\beta_n H_n < 1$ для всех n можно добиться, подобрав последовательности $\{\lambda_\sigma^{(n)}\}$ таким образом, что $b_u^{(n)} = b_s^{(n)}$ для всех n . Если же одно из чисел λ_s, λ_u равно нулю, а другое больше нуля, то добиться этого условия нельзя. Действительно, пусть, для определенности, $\lambda_u = 0$, $\lambda_s > 0$. Тогда

$$\prod_{n=0}^{\infty} b_u^{(n)} = \infty, \quad \prod_{n=0}^{\infty} b_s^{(n)} < \infty.$$

В силу условия $\beta_n f_n < \beta_n H_n < 1$ для последовательностей $A_n = b_u^{(n)} - \beta_n$ и $B_n = (b_s^{(n)} - \beta_n) / \beta_n$ получаем следующие противоречащие друг другу свойства: $0 < A_n < B_n$ для всех n , но ряд, составленный из A_n , расходится, а ряд, составленный из B_n , сходится.

ПРОБЛЕМА 4.1. *Можно ли задать искомую метрику формулой*

$$\rho_s^*(x, y) = \mathcal{R}\{C^{(n)}\xi^{(n)}: n \geq 0\}(x, y),$$

или, что эквивалентно, формулой

$$\rho_s^*(x, y) = \inf_{n \geq 0} \eta^{(n)}(x, y) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \eta^{(n)}(x, y),$$

где $\eta^{(0)} = C^{(0)}\xi^{(0)}$ и $\eta^{(n)} = \mathcal{R}\{\eta^{(n-1)}, C^{(n)}\xi^{(n)}\}$ для $n > 0$?

Это соответствует случаю, когда все $\beta_n = 1$. В этой формуле ρ_s^* “линейным” образом выражается через $\xi^{(n)}$. Однако, чтобы применить аргументы, аналогичные изложенным выше, сами метрики $\xi^{(n)} \in \Xi_s(\lambda_s^{(n)})$ следует выбрать выпуклыми: $\xi^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} (\zeta^{(n)})^{\gamma_n}$, где $\zeta^{(n)} \in \Xi_s(\mu_s^{(n)})$, $\lambda_\sigma^{(n)} = (\mu_\sigma^{(n)})^{\gamma_n}$ и $\gamma_n \in (0, 1)$.

ПРОБЛЕМА 4.2. *Можно ли исключить из леммы 4.2 условие выпуклости метрики ρ и условие $\xi \stackrel{H}{\prec} \rho$, заменив их единственным условием $\xi \prec \rho$ или предполагая также, что $\rho \prec \xi^\beta$ для достаточно малого $\beta > 0$?*

Кажется правдоподобным, что этого можно достичь, проведя рассуждения, более тонкие, чем в предложенном доказательстве этой леммы. Причина этого в том, что условие $\xi \prec \rho$ гарантирует некоторую выпуклость метрики ρ : длина цепочки строго больше расстояния между ее концами, если звенья цепочки достаточно коротки по сравнению с расстоянием между концами цепочки. Если

предположения леммы 4.2 действительно допускают такое ослабление, то возможно непосредственное построение метрики ρ_0 , как описано в замечании 4.3.

Приложение А. Конструкции Д. Фрида и К. Сакая гиперболических метрик

Естественным подходом к построению ляпуновской метрики гомеоморфизма, обладающего ГС, является перенос хорошо известной конструкции, используемой для отыскания ляпуновской римановой метрики гиперболического множества или гиперболического линейного расширения гомеоморфизма. Так, Д. Фрид [10] переходит от (некоторой предварительно построенной) гиперболической метрики ρ к ляпуновской метрике

$$\rho_0(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \rho(f^k x, f^k y), \quad (\text{A.1})$$

где $m > 0$ достаточно велико (таково, что метрика ρ – ляпуновская для f^m). Более поздняя конструкция К. Сакая [9] несколько сложнее и больше напоминает построение ляпуновской римановой метрики, для которой величины λ , соответствующие устойчивым и неустойчивым линейным подпространствам, близки к аналогичным величинам для исходной гиперболической римановой метрики (здесь ляпуновская метрика гомеоморфизма строится в два шага, аналогично тому, как ограничения ляпуновской римановой метрики на устойчивые и неустойчивые линейные подпространства задаются разными суммами, отличающимися от суммы вида (A.1) введением в ее слагаемые экспоненциальных множителей; см., например, [20]).

Действительно, незначительно подправив конструкцию К. Сакая, легко добиться того, чтобы $\overset{\circ}{\Lambda}_\sigma(\rho_0) < \Lambda_\sigma(\rho) + \nu$ с произвольным фиксированным $\nu > 0$. Здесь формулы принимают вид

$$\rho_0(x, y) = \sum_{k=0}^{N_s-1} \lambda_s^k \tilde{\rho}(f^{-k}x, f^{-k}y), \quad \tilde{\rho}(x, y) = \sum_{k=0}^{N_u-1} \lambda_u^k \rho(f^k x, f^k y),$$

где $\lambda_s > \Lambda_s(\rho)$, $\lambda_u > \Lambda_u(\rho)$, а положительные N_s, N_u столь велики, что

$$\begin{aligned} \rho(f^{-N_u}x, f^{-N_u}y) &< \lambda_u^{N_u} \rho(x, y), & y \in W_\delta^u(x), \\ \rho(f^{N_s}x, f^{N_s}y) &< \lambda_s^{N_s} \rho(x, y), & y \in W_\delta^s(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho_0(f^{-1}x, f^{-1}y) &< \lambda_u \rho_0(x, y), & f^{N_u-1}y \in W_\delta^u(f^{N_u-1}x), \\ \rho_0(fx, fy) &< \lambda_s \rho_0(x, y), & f^{-(N_s-1)}y \in W_\delta^s(f^{-(N_s-1)}x), \end{aligned}$$

и, значит, $\overset{\circ}{\Lambda}_\sigma(\rho_0) \leq \lambda_\sigma$, что дает искомый результат.

Чтобы построить метрику $\rho_0 \in \mathcal{L} \cap \text{Lip}$, К. Сакай [15] вначале использует конструкцию У. Редди [8] для нахождения метрики $\rho \in \mathcal{H}$, относительно которой гомеоморфизмы f^N и f^{-N} липшицевы при некотором $N > 0$. Затем он, исходя из этой метрики, строит метрику $\rho' \in \mathcal{H} \cap \text{Lip}$, немного модифицируя с этой целью свою прежнюю конструкцию [9], и, наконец, повторно применяет эту конструкцию для построения ρ_0 по ρ' . Легко видеть, что

при этом $\Lambda_\sigma(\rho') \leq \Lambda_\sigma(\rho)$. Поэтому из доказательства К. Сакая следует, что $\mathring{\Lambda}_\sigma^*(\mathcal{L}) = \Lambda_\sigma^*(\mathcal{H})$ и $\mathring{\Lambda}_\sigma^*(\mathcal{L} \cap \text{Lip}) = \Lambda_\sigma^*(\mathcal{H} \cap \text{Lip})$, но, поскольку метрика $\rho \in \mathcal{H}$ строится специальным образом, еще не вытекает равенство $\mathring{\Lambda}_\sigma^*(\mathcal{L} \cap \text{Lip}) = \Lambda_\sigma^*(\mathcal{H})$, справедливое в силу следствия теоремы 1.3. Оценки К. Сакая для констант Липшица гомеоморфизма f и его обратного относительно метрик ρ' и ρ_0 не связаны с $\Lambda_\sigma(\rho)$ и потому далеки от оптимальных, а существование для метрики ρ_0 константы L , также далекой от оптимальной, оказывается простым следствием того, что $\rho_0 \in \mathcal{L} \cap \text{Lip}$.

С другой стороны, Д. Фрид [10] предварительно строит (с использованием марковских разбиений) метрику $\rho \in \mathcal{H} \cap \text{Lip}$, для которой уже выполнено условие (1.1), а затем переходит к искомой метрике ρ_0 . Из этой конструкции также не следует равенство $\mathring{\Lambda}_\sigma^*(\mathcal{L} \cap \text{Lip}) = \Lambda_\sigma^*(\mathcal{H})$, а константа Липшица и постоянная L оказываются не связанными с $\Lambda_\sigma(\rho)$.

Приложение Б. Пример гёльдерово эквивалентных метрик $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$, для которых $\mathcal{R}\{\rho^{(1)}, \rho^{(2)}\} \equiv 0$

Для любого множества метрик $\{\rho^{(n)}\}$ на метризуемом топологическом пространстве X , совместимых с его топологией, определим псевдометрику по формуле, аналогичной (4.3):

$$\mathcal{R}\{\rho^{(n)}\}(x, y) = \inf\{l(z_0, z_1) + l(z_1, z_2) + \dots + l(z_{m-1}, z_m): \\ z_0 = x, z_m = y, \exists i: l(z_k, z_{k+1}) = \rho^{(i)}(z_k, z_{k+1})\}.$$

Это есть наибольшая неотрицательная функция пары точек, являющаяся псевдометрикой и не превосходящая всех функций $\rho^{(n)}(\cdot, \cdot)$.

Пусть $X = [0, 1]$. Введем симметричное подмножество $K \subset X \times X$, состоящее из точек $(\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n})$ и $(\frac{k+1}{4^n}, \frac{k}{4^n})$ таких, что k, n — целые и $n \geq 0, 0 \leq k < 4^n$. Определим симметричные функции $\rho^{(i)}$, $i = 1, 2$, на K такие, что

$$\rho^{(i)}\left(\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}\right) = 2^{((-1)^{i+k}-2)n}.$$

Тогда выполнены неравенства

$$\rho^{(i)}\left(\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}\right) < \sum_{j=0}^3 \rho^{(i)}\left(\frac{4k+j}{4^{n+1}}, \frac{4k+j+1}{4^{n+1}}\right).$$

В качестве следствия легко получить, что

$$\rho^{(i)}(z_0, z_m) \leq \rho^{(i)}(z_0, z_1) + \dots + \rho^{(i)}(z_{m-1}, z_m),$$

если все пары точек (z_0, z_m) и (z_j, z_{j+1}) для $0 \leq j < m$ принадлежат K .

Доопределим $\rho^{(i)}$ до симметричных функций на $X \times X$ следующим образом. Зададим произвольные $0 \leq x \leq y \leq 1$. Если $x = y$, то $\rho^{(i)}(x, y) = 0$. Если $x < y$, то пусть n — наименьшее целое число такое, что $x \leq k/4^n < k'/4^n \leq y$ для некоторых целых $k < k'$. Тогда $4^{-n} \leq |x - y| < 8 \cdot 4^{-n}$. Выберем наименьшее k и наибольшее k' , для которых верны указанные неравенства, и положим

$$\rho^{(i)}\left(\frac{k}{4^n}, \frac{k'}{4^n}\right) = \rho^{(i)}\left(\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}\right) + \dots + \rho^{(i)}\left(\frac{k'-1}{4^n}, \frac{k'}{4^n}\right).$$

Тогда эта сумма меньше $4 \cdot 2^{-n}$, поскольку она образована не более чем тремя слагаемыми, равными 2^{-n} , и не более чем тремя слагаемыми, равными 2^{-3n} , если $n \geq 1$ (если $n = 0$, то имеем случай $k = 0$, $k' = 1$, когда присутствует только одно слагаемое). Предположим, что

$$\rho^{(i)}(x, y) = \rho^{(i)}\left(x, \frac{k}{4^n}\right) + \rho^{(i)}\left(\frac{k}{4^n}, \frac{k'}{4^n}\right) + \rho^{(i)}\left(\frac{k'}{4^n}, y\right),$$

и для нахождения первого и третьего слагаемых применим описанную выше процедуру к парам точек $(x, k/4^n)$ и $(k'/4^n, y)$ вместо (x, y) . Рассмотрим, например, пару точек $(x, k/4^n)$. Пусть n_1 — наименьшее целое число такое, что $x \leq k_1/4^{n_1} < k/4^n$ для некоторого целого k_1 , и выберем наименьшее k_1 , для которого верно указанное неравенство. Тогда $n_1 > n$ и $k/4^n = k_2/4^{n_1}$, где $k_2 = k_1 \cdot 4^{n_1-n}$, причем $1 \leq k_2 - k_1 \leq 3$. Поэтому

$$\rho^{(i)}\left(x, \frac{k}{4^n}\right) = \rho^{(i)}\left(x, \frac{k_1}{4^{n_1}}\right) + \rho^{(i)}\left(\frac{k_1}{4^{n_1}}, \frac{k_2}{4^{n_1}}\right),$$

где второе слагаемое будет меньше $3 \cdot 2^{-n_1}$, поскольку оно само представимо как сумма не более трех слагаемых, не превосходящих 2^{-n_1} . Повторяя рекуррентно описанную процедуру, получим разложение $\rho^{(i)}(x, k/4^n)$ в ряд с положительными членами, мажорируемый сходящимся рядом

$$3 \cdot 2^{-n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots \right) = 3 \cdot 2^{-n}.$$

Аналогичные результаты будут справедливы для $\rho^{(i)}(k/4^n, y)$. Зададим величину $\rho^{(i)}(x, y)$ как сумму представляющего ее ряда. Тогда $2^{-3n} \leq \rho^{(i)}(x, y) < 10 \cdot 2^{-n}$ и, значит, выполнены условия Гёльдера

$$\left(\frac{|x - y|}{8} \right)^{3/2} < \rho^{(i)}(x, y) < 10 \cdot |x - y|^{1/2}.$$

Легко видеть, что $\rho^{(i)}$ будет метрикой на $X = [0, 1]$.

С другой стороны, псевдометрика $\mathcal{R}\{\rho^{(1)}, \rho^{(2)}\}$ тождественно обращается в нуль. Действительно, если $x = k/4^n$, $y = k'/4^n$, то, выбирая цепочку $Z = \{x = z_k, \dots, z_{k'} = y\}$ такую, что $z_j = j/4^n$, получим, что

$$l(Z) \equiv l(z_k, z_{k+1}) + \dots + l(z_{k'-1}, z_{k'}) = |k' - k| \cdot 2^{-3n} = |y - x| \left(\frac{4}{8} \right)^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n,$$

если $l(z_j, z_{j+1})$ равно наименьшему из значений $\rho^{(i)}(z_j, z_{j+1})$ для $i = 1, 2$, т.е. 2^{-3n} . Отсюда следует искомый результат, поскольку любые x, y могут быть приближены числами указанного вида для больших n , а верхняя оценка для $l(Z)$ стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$.

Список литературы

1. Алексеев В. М., "Символическая динамика", *Одиннадцатая математическая школа*, Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1976.
2. Алексеев В. М., Якобсон М. В., "Символическая динамика и гиперболические динамические системы", Р. Боуэн. *Методы символической динамики*, Мир, М., 1979, 196–240.

3. Mañé R., “Expansive homeomorphisms and topological dimension”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **252** (1979), 313–319.
4. Walters P., “On the pseudo-orbit tracing property and its relationship to stability”, *The structure of attractors in dynamical systems*, Proc. Conf., North Dakota State Univ., Fargo, N. D., 1977, Lecture Notes in Math., **668**, Springer-Verlag, Berlin, 1978, 231–244.
5. Якобсон М. В., “О некоторых свойствах марковских разбиений”, *ДАН СССР*, **226**:5 (1976), 1021–1024.
6. Bowen R., “Markov partitions for axiom A diffeomorphisms”, *Amer. J. Math.*, **92**:3 (1970), 725–747.
7. Bowen R., “Topological entropy and axiom A”, *Global Analysis*, Proc. Symp. in Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, 1970, 23–41.
8. Reddy W. L., “Expansive canonical coordinates are hyperbolic”, *Topology Appl.*, **15**:2 (1983), 205–210.
9. Sakai K., “Hyperbolic metrics of expansive homeomorphisms”, *Topology Appl.*, **63**:3 (1995), 263–266.
10. Fried D., “Métriques naturelles sur les espaces de Smale”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **297**:1 (1983), 77–79.
11. Hiraide K., “On homeomorphisms with Markov partitions”, *Tokyo J. Math.*, **8**:1 (1985), 219–229.
12. Ombach J., “Equivalent conditions for hyperbolic coordinates”, *Topology Appl.*, **23**:1 (1986), 87–90.
13. Aoki N., “Topological dynamics”, *Topics in general topology*, North-Holland Math. Library, **41**, North-Holland, Amsterdam, 1989, 625–740.
14. Ruelle D., *Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics*, Encycl. of Math. and its Appl., No. 5, Addison–Wesley Publishing Co., Massachusetts, 1978.
15. Sakai K., “Shadowing properties of $\mathcal{L}$ -hyperbolic homeomorphisms”, *Topology Appl.*, **112**:3 (2001), 229–243.
16. Боуэн Р., “Равновесные состояния и эргодическая теория диффеоморфизмов Аносова”, *Методы символической динамики*, Мир, М., 1979, 9–91.
17. Рокафеллар Р., *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.
18. Довбыш С. А., “Оптимальные ляпуновские метрики гомеоморфизмов, обладающих гиперболической структурой”, *УМН*, **57**:4 (2002), 173–174.
19. Hiraide K., “Expansive homeomorphisms with the pseudo-orbit tracing property of n -tori”, *J. Math. Soc. Japan*, **41**:3 (1989), 357–389.
20. Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M., *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.

С. А. ДОВБЫШ (S. A. DOVBYSH)
Научно-исследовательский институт
механики МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: dovbysh@imec.msu.ru

Поступило в редакцию
22.02.2006