Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Данилов, Г. А. Кошевой, Соответствие Робинсона–Шенстеда–Кнута и биекции коммутативности и ассоциативности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 4, 67–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/im708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:48:48

УДК 512.815.1

В. И. Данилов, Г. А. Кошевой

Соответствие Робинсона–Шенстеда–Кнута и биекции коммутативности и ассоциативности

Биекции ассоциативности и коммутативности, возникающие из симметрий коэффициентов Литтлвуда–Ричардсона, определены в терминах массивов. Показано, что эти биекции совпадают с аналогичными биекциями, определенными в терминах дискретно вогнутых функций с использованием октаэдральной рекурсии, а также с биекциями, определенными в терминах таблиц Юнга. Основным приемом в доказательстве совпадения этих биекций является функциональный вариант соответствия Робинсона–Шенстеда–Кнута.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

Пусть n – фиксированное целое число. *Разбиением* (с n частями) $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, называется набор n убывающих целых неотрицательных чисел. С каждым разбиением λ можно связать так называемый полином Шура s_λ (см. [1]–[3]). Это симметрический полином от n переменных. Полиномы s_λ при различных λ образуют аддитивный базис кольца симметрических многочленов. Поэтому произведение $s_\lambda s_\mu$ двух полиномов Шура линейно выражается через полиномы Шура:

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda, \mu}^{\nu} s_{\nu}.$$

Соответствующие структурные константы $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ (которые на самом деле являются целыми неотрицательными числами) называются *числами (коэффициентами) Литтлвуда–Ричардсона*. Эти числа появляются во многих задачах (разложение тензорных произведений представлений на неприводимые компоненты, умножение в кольце Шуберта, описание спектра суммы эрмитовых операторов; подробнее см. [4]), и изучению их посвящено много публикаций. Поскольку кольцо симметрических функций коммутативно и ассоциативно, коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона связаны тождествами коммутативности

$$c_{\lambda, \mu}^{\nu} = c_{\mu, \lambda}^{\nu} \quad (1)$$

и ассоциативности

$$\sum_{\sigma} c_{\lambda, \mu}^{\sigma} c_{\sigma, \nu}^{\pi} = \sum_{\tau} c_{\mu, \nu}^{\tau} c_{\lambda, \tau}^{\pi}. \quad (2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президента “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-6417.2006.6), РФФИ (гранты 047.011.2004.017-НВО и 05-01-02805-НЦНИЛа).

Из комбинаторики известно, что за целыми числами надо видеть (или искать) конечные множества, а за равенствами чисел – естественные биекции соответствующих множеств. И это в полной мере верно для выписанных выше соотношений.

Дж. Литтлвуд и А. Ричардсон привели (хотя и не доказали¹) комбинаторное правило для нахождения чисел $c'_{\lambda, \mu}$. Тем самым, $c'_{\lambda, \mu}$ интерпретируется как число элементов конечного множества $\text{LR}(\nu \setminus \lambda, \mu)$, состоящего из таблиц Юнга специального вида, так называемых таблиц Литтлвуда–Ричардсона (см. [1] и § 9).

В работах [3], [5], [6] таблицы Юнга были связаны с функциями, определенными на треугольном гриде Δ_n , что позволило интерпретировать $c'_{\lambda, \mu}$ как число целых точек выпуклого многогранника $\text{DC}_n(\lambda, \mu; \nu)$, состоящего из дискретно вогнутых функций (с заданными граничными условиями). Еще один подход предложен в работе [3], где это число интерпретируется как число элементов множества $\text{SP}_{\mathbb{Z}}(\lambda, \mu; \nu)$ так называемых стандартных пар (см. § 4).

Равенство (1) подсказывает, что должна существовать естественная (или каноническая) биекция между множествами $\text{SP}_{\mathbb{Z}}(\lambda, \mu; \nu)$ и $\text{SP}_{\mathbb{Z}}(\mu, \lambda; \nu)$ (и аналогично для DC и LR). В работе [3] мы предложили такую биекцию. Примерно в это же время биекция в терминах функций была построена в [7]. В терминах таблиц Юнга в работе [8] было построено даже несколько таких биекций и был поставлен вопрос об их совпадении.

Аналогично, равенство (2) указывает на существование естественной биекции между множествами

$$\coprod_{\sigma} (\text{SP}_{\mathbb{Z}}(\lambda, \mu; \sigma) \times \text{SP}_{\mathbb{Z}}(\sigma, \nu; \pi)), \quad \coprod_{\tau} (\text{SP}_{\mathbb{Z}}(\mu, \nu; \tau) \times \text{SP}_{\mathbb{Z}}(\lambda, \tau; \pi)).$$

Одна такая биекция была построена в работе [9] в терминах функций, определенных на треугольном гриде, с помощью так называемой октаэдральной рекурсии. Однако роль октаэдральной рекурсии оставалась неясной. В работе [3] мы предложили вариант биекции ассоциативности в терминах массивов, который представляется более естественным и мотивированным, поскольку массивы обладают кристаллической структурой, для них (как и для представлений) определено понятие тензорного произведения, и массивная биекция ассоциативности есть в точности отражение ассоциативности тензорного произведения. Напротив, авторы работы [7] использовали функциональные биекции коммутативности и ассоциативности для определения тензорного произведения в категории HIVES.

В настоящей статье мы доказываем, что биекции (коммутативности и ассоциативности), построенные тремя способами в трех разных терминологиях, совпадают. Конечно, это подразумевает существование естественного отождествления между тремя множествами: SP, DC и LR, что также будет показано. Попутно мы покажем, что октаэдральная рекурсия реализует соответствие Робинсона–Шенстеда–Кнута (RSK) в терминах функций.

¹Поиски различных доказательств этого правила (которых насчитывается сейчас с десятком) оказались очень плодотворными и привели к появлению многих интересных теорий и техник. Используемая далее теория массивов также возникла на этом пути.

Дальнейшее изложение материала построено следующим образом. В § 2 мы напоминаем основные понятия и факты из теории массивов. В § 3 в терминах массивов определяются биекции коммутативности и ассоциативности. В § 4 и § 5 объясняется связь массивов и функций на двумерных и трехмерных решетках. В § 6 с помощью октаэдральной рекурсии определяется биекция ассоциативности и доказывается функциональный вариант соответствия RSK; в § 7 мы доказываем совпадение функциональной и массивной биекций. В § 8 определяем биекцию коммутативности в терминах функций и показываем ее совпадение с массивной. Наконец, в § 9 мы доказываем совпадение этой биекции с двумя фундаментальными симметриями Пака и Валлехо [8].

Предварительную версию настоящей статьи можно найти в [10].

Авторы благодарят А. М. Вершика и И. Пака за полезные обсуждения и рецензента за многочисленные замечания. Г. Кошевой выражает также благодарность за поддержку Фонду содействия отечественной науке.

§ 2. Массивы

Пусть m и n – два целых неотрицательных числа. *Массивом* (форматом $n \times m$) называется семейство $a = (a(i, j))$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, неотрицательных чисел; i -й *столбцовый суммой* массива называется $\sum_j a(i, j)$, j -й *строчной суммой* – $\sum_i a(i, j)$. Можно, конечно, понимать массив как матрицу, но мы никогда не будем перемножать массивы. Продуктивнее рассматривать их как массы, расположенные в точках (i, j) плоскости.

Приведем необходимые для дальнейшего факты о массивах из работы [3].

1. Для любых $j = 1, \dots, m - 1$ и $t > 0$ имеются операции D_j^t на множестве массивов. Эти операции зависят только от строк j и $j + 1$, и D_j^t опускает некоторую массу (в количестве не более t) из $(j+1)$ -й строки в j -ю. Более точно, рассмотрим последовательность чисел $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, где $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = a(1, j+1)$ и

$$\beta_i = a(1, j+1) + \dots + a(i, j+1) - a(1, j) - \dots - a(i-1, j)$$

при $1 < i \leq n$. Пусть i^* – индекс первого максимума в последовательности $\beta_1, \dots, \beta_n$. Если t достаточно мало (точнее, $t \leq \beta_{i^*} - \max(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{i^*-1})$), то операция D_j^t уменьшает $a(i^*, j+1)$ на t , увеличивает $a(i^*, j)$ на t и не меняет остальные компоненты массива. Для произвольного t действие D_j^t определяется из полугруппового закона

$$D_j^t D_j^s = D_j^{t+s}.$$

Из определения видно, что операции D_j^t не меняют столбцовые суммы. Кроме того, при достаточно большом t (зависящем от массива a) массивы $D_j^t(a)$ стабилизируются. Обозначим через $\mathbf{D}_j$ операцию D_j в достаточно большой степени. Наконец, если массив a был целочисленным (т.е. все числа $a(i, j)$ целые), то массив $\mathbf{D}_j a$ также целый.

2. Если операция $\mathbf{D}_j$ действует на массив a тривиально (т.е. $\mathbf{D}_j a = a$, или, что то же самое, $D_j^t(a) = a$ для некоторого $t > 0$), то массив a называется $\mathbf{D}_j$ -плотным. Конечно, это означает, что все $\beta_i \leq 0$, т.е. что

$$a(1, j+1) + \dots + a(i, j+1) \leq a(1, j) + \dots + a(i-1, j) \quad (3)$$

для любого i .

Если массив a является $\mathbf{D}_j$ -плотным для любого $j = 1, \dots, m-1$, он называется **D-плотным**. Из неравенств (3) видно, что элементы такого массива равны нулю выше диагонали, т. е. $a(i, j) = 0$ при $j > i$. Делая подходящие уплотнения (т. е. действуя операторами $\mathbf{D}_j$), можно любой массив a перевести в **D-плотный**. Этот **D-плотный** массив определен однозначно [3, предложение 5.9] и обозначается $\mathbf{D}a$. Столбцовые суммы массивов a и $\mathbf{D}a$ совпадают. Строчные суммы массива $\mathbf{D}a$ в силу (3) образуют невозрастающую последовательность $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$. Этот набор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ называется **D-формой** массива a .

3. Для массива a обозначим через $*a$ центрально-симметричный массив (с тем же форматом):

$$*a(i, j) = a(n+1-i, m+1-j).$$

Пользуясь этой инволюцией, можно определить операции U_j^t по формуле

$$U_j^t(a) = *(D_{m-j}^t(*a)).$$

Операции U_j^t и D_j^t почти обратны друг к другу. Более точно, если $D_j^{t'}(a)$ отлично от $D_j^t(a)$ для всех $t' < t$, то $U_j^t D_j^t(a) = a$ [3, предложение 3.5], и аналогично для D_j^t и U_j^t .

Как и выше, можно определить оператор $\mathbf{U}$ уплотнения вверх. Тогда $\mathbf{D}\mathbf{U}a = \mathbf{D}a$.

4. Транспонируя массивы, можно определить операции L_i^t , R_i^t и операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ уплотнения влево и вправо. Набор столбцовых сумм массива $\mathbf{L}a$ называется **L-формой** массива a .

Центральный факт теории массивов состоит в том, что операции L_i^t и D_j^s (а следовательно, и операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{D}$) коммутируют [3, теорема 4.2]. Следствием его является то, что для всякого массива a его **D-форма** и **L-форма** совпадают и они являются формой (диагонального) массива $\mathbf{D}\mathbf{L}a = \mathbf{L}\mathbf{D}a$. Это позволяет говорить просто о *форме* массива a ; она обозначается через $\text{sh}(a)$.

5. Другим важным следствием теоремы о коммутировании является теорема о биекции (или модифицированное соответствие RSK [3, теорема 6.2]). Пусть имеются **D-плотный** массив d и **L-плотный** массив l , причем их формы совпадают ($\mathbf{D}l = \mathbf{L}d$). Тогда существует единственный массив a такой, что $d = \mathbf{D}a$ и $l = \mathbf{L}a$.

§ 3. Массивные биекции ассоциативности и коммутативности

Как во введении, фиксируем n . Для двух массивов a и b форматом $n \times n$ мы обозначаем через $a \otimes b$ массив форматом $2n \times n$, заданный формулой

$$(a \otimes b)(i, j) = \begin{cases} a(i, j), & \text{если } i = 1, \dots, n, \\ b(i - n, j), & \text{если } i = n + 1, \dots, 2n, \end{cases}$$

т. е. массивы a и b просто приставлены друг к другу: сначала стоит массив a , а за ним – массив b .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Стандартной парой* называется пара массивов (a, b) форматом $n \times n$ такая, что:

- 1) массивы a и b **L**-плотные;
- 2) массив $a \otimes b$ **D**-плотный (тогда, конечно, массив a также **D**-плотный).

Форма $\text{sh}(a)$ называется *начальной*, $\text{sh}(b)$ – *средней*, а $\text{sh}(a \otimes b)$ – *финальной формой* этой пары. Заметим, что в силу 2) форма $\text{sh}(a \otimes b)$ совпадает со строчным весом (вектором строчных сумм) массива $a \otimes b$. Множество всех стандартных пар с заданной тройкой форм λ , μ и ν обозначается как $\text{SP}(\lambda, \mu; \nu)$. Множество целочисленных стандартных пар снабжается индексом $\mathbb{Z}$; множество $\text{SP}_{\mathbb{Z}}(\lambda, \mu; \nu)$ конечно, и число его элементов равно числу Литтлвуда–Ричардсона $c'_{\lambda, \mu}$ (см. [3, п. 12.4]).

При определении биекции коммутативности (между $\text{SP}(\lambda, \mu; \nu)$ и $\text{SP}(\mu, \lambda; \nu)$) удобно использовать немного другую пару, а именно *антистандартную пару*. Так мы называем пару (a, b) массивов, в которой:

- 1) массив a **R**-плотный, массив b **L**-плотный;
- 2) массив $a \otimes b$ **D**-плотный.

Формы такой пары определяются, как и раньше. Множество антистандартных пар обозначается $\text{ASP}(\lambda, \mu; \nu)$. Имеется каноническая биекция

$$\text{SP}(\lambda, \mu; \nu) \xrightarrow{\sim} \text{ASP}(\lambda, \mu; \nu), \quad (a, b) \mapsto (\mathbf{R}a, b);$$

обратное к ней отображение есть $(a, b) \mapsto (\mathbf{L}a, b)$.

Определим теперь биекцию коммутативности (*комзютор*)

$$\text{Com}: \text{ASP}(\lambda, \mu; \nu) \rightarrow \text{ASP}(\mu, \lambda; \nu)$$

по следующему правилу. Пусть $(a, b) \in \text{ASP}(\lambda, \mu; \nu)$ – антистандартная пара. Тогда $\text{Com}(a, b) = \mathbf{D}(*a \otimes b) = \mathbf{D}(*b \otimes *a)$.

Легко понять, что пара $(b', a') = \mathbf{D}(*b \otimes *a)$ антистандартная и нужного типа. Действительно, $b' = \mathbf{D}(*b)$. Так как массив b был **L**-плотным, $b = \mathbf{L}b$, то $*b = \mathbf{R}(*b)$ – **R**-плотный. В силу коммутирования операторов **D** и **R** массив b' тоже **R**-плотный. Форма b' равна форме массива $*b$ и форме массива b , т. е. $\text{sh}(*b) = \mu$. Аналогично, средняя форма имеет вид $\text{sh}(*a) = \text{sh}(a) = \lambda$. И наконец, финальная форма имеет вид $\text{sh}(*a \otimes b) = \text{sh}(a \otimes b) = \nu$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующий составной массив (a, b) :

0	0	0	1	2	1
0	0	2	1	2	0
0	2	1	3	0	0

Он является антистандартной парой с формами $\lambda = (3, 2, 0)$, $\mu = (5, 4, 1)$ и $\nu = (6, 5, 4)$. Перевернутый массив $*a \otimes b = *b \otimes *a$ имеет вид

0	0	3	1	2	0
0	2	1	2	0	0
1	2	1	0	0	0

Его $\mathbf{D}$ -уплотнение, как нетрудно проверить, имеет вид

0	0	1	1	2	0
0	1	3	1	0	0
1	3	1	1	0	0

Если мы перевернем этот массив и уплотним его вниз, мы получим, как легко проверить, исходный массив

0	0	0	1	2	1
0	0	2	1	2	0
0	2	1	3	0	0

Конечно, это не случайно, и верно следующее общее утверждение.

ЛЕММА 1. *Компьютор Com инволютивен, т. е. композиция*

$$\text{ASP}(\lambda, \mu; \nu) \xrightarrow{\text{Com}} \text{ASP}(\mu, \lambda; \nu) \xrightarrow{\text{Com}} \text{ASP}(\lambda, \mu; \nu)$$

является тождественным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть $(b', a') = \text{Com}(a, b) = \mathbf{D}(*(a \otimes b))$. Тогда

$$\text{Com}(b', a') = \mathbf{D}(*(b' \otimes a')) = \mathbf{D}(*\mathbf{D}(*(a \otimes b))) = \mathbf{D}(\mathbf{U}(a \otimes b)).$$

Согласно [3, п. 5.10] (см. также § 2, п. 3) последнее равно $\mathbf{D}(a \otimes b)$ и равно $a \otimes b$ в силу $\mathbf{D}$ -плотности массива $a \otimes b$.

Из леммы 1 видно, что Com является биекцией (сохраняющей целочисленность). Соответствующую биекцию между $\text{SP}(\lambda, \mu; \nu)$ и $\text{SP}(\mu, \lambda; \nu)$ также будем называть *компьютором*.

Для определения биекции ассоциативности удобно ввести стандартные тройки массивов. Тройка (a, b, c) называется *стандартной*, если:

- 1) a, b и c $\mathbf{L}$ -плотные;
- 2) составной массив $a \otimes b \otimes c$ $\mathbf{D}$ -плотный.

С каждой стандартной тройкой можно связать две стандартные пары, причем сделать это можно двумя разными способами.

Первый способ: взять пары (a, b) и $(\mathbf{L}(a \otimes b), c)$. Стандартность этих пар очевидна. Очевидно также, что *финальная форма первой пары совпадает с начальной формой второй пары*.

Второй способ: взять пару $(a, \mathbf{L}(b, c))$ и такую пару (b', c') , что $b' \otimes c' = \mathbf{D}(b, c)$. Стандартность первой пары $(a, \mathbf{L}(b, c))$ очевидна. Для второй пары $\mathbf{L}$ -плотность b' и c' следует из $\mathbf{L}$ -плотности b и c и коммутирования $\mathbf{D}$ с $\mathbf{L}_i$, $\mathbf{D}$ -плотность массива $a \otimes \mathbf{L}(b, c)$ следует из того же коммутирования. Кроме того, *средняя форма первой пары, т. е. $\text{sh}(\mathbf{L}(b \otimes c))$, совпадает с финальной формой второй пары, т. е. с $\text{sh}(\mathbf{D}(b \otimes c))$.*

Оба способа дают взаимно обратные отображения. Для первого способа это очевидно. Проверим это для второго способа. Пусть даны две стандартные пары (a, l) и (b', c') , причем форма l совпадает с формой $b' \otimes c'$. Последнее

означает, что $\mathbf{D}l = \mathbf{L}(b' \otimes c')$. Согласно теореме о биекции (см. § 2, п. 5) существуют массивы b и c такие, что $l = \mathbf{L}(b \otimes c)$ и $b' \otimes c' = \mathbf{D}(b \otimes c)$.

Всё вместе и даёт биекцию ассоциативности

$$\coprod_{\sigma} (\mathrm{SP}(\lambda, \mu; \sigma) \times \mathrm{SP}(\sigma, \nu; \pi)) \rightarrow \coprod_{\tau} (\mathrm{SP}(\mu, \nu; \tau) \times \mathrm{SP}(\lambda, \tau; \pi)). \quad (4)$$

Остается лишь заметить, что целочисленность массивов сохраняется при этой биекции. Связь предыдущих конструкций с теорией представлений объясняется в [3].

§ 4. Связь массивов с функциями

Объясним теперь связь массивов с функциями.

Пусть a – массив форматом $n \times m$. Свяжем с ним функцию $f = f_a$, определенную на *прямоугольном гриде* $\{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, m\}$ по правилу

$$f_a(i, j) = \sum_{i' \leq i, j' \leq j} a(i', j').$$

Это суммарная масса, расположенная левее и ниже точки (i, j) . По этой причине функция f_a символически обозначается $\iint a$. На нижней и левой границе прямоугольника данная функция равна нулю. Для остальных значений (i, j) мы имеем очевидное соотношение

$$f(i, j) - f(i - 1, j) - f(i, j - 1) + f(i - 1, j - 1) = a(i, j),$$

откуда видно, что $a(i, j)$ – это что-то вроде смешанной производной ($a = \partial\partial f$) функции f . Так как $a(i, j) \geq 0$, функция $\iint a$ супермодулярна. Напомним, что функция f называется *супермодулярной*, если для всех i, j выполнены неравенства

$$f(i, j) - f(i - 1, j) - f(i, j - 1) + f(i - 1, j - 1) \geq 0. \quad (5)$$

На правой стороне прямоугольника, т.е. в точках (n, j) , значение функции $\iint a$ равно сумме строчных сумм массива a по строкам $1, \dots, j$. Для краткости мы говорим, что приращения функции $\iint a$ на правой стороне прямоугольника равны строчным суммам. Аналогично, для верхней грани прямоугольника приращения функции $\iint a$ равны столбцовым суммам.

Предположим теперь, что массив a **D**-плотный. Это эквивалентно выполнению неравенств (3), или, в терминах функции $f = \iint a$, выполнению неравенств

$$f(i - 1, j) + f(i, j) - f(i - 1, j - 1) - f(i, j + 1) \geq 0 \quad (6)$$

для всех i, j . Аналогичные неравенства

$$f(i, j) + f(i, j + 1) - f(i - 1, j) - f(i + 1, j + 1) \geq 0 \quad (7)$$

для всех i, j описывают функции $f = \iint a$, связанные с **L**-плотными массивами a .

Чтобы более единообразно описывать эти неравенства, удобно сделать следующее. Расчертим прямоугольник $[0, n] \times [0, m]$ тремя сериями прямых линий вида $x = i$, $y = j$, $x - y = k$, где i , j и k – целые. В результате он разобьется на единичные треугольники с вершинами в целых точках. Соседние треугольники группируются в единичные ромбы, представленные на рис. 1.

Рис. 1

Теперь три неравенства (5)–(7) можно трактовать как выполнение *ромбических неравенств*: для каждого ромба на рис. 1 сумма значений в двух точках нарисованной диагонали не меньше суммы значений в двух других точках ромба. Неравенства супермодулярности (5) соответствуют левому квадрату на рис. 1, неравенства **D**-плотности (6) соответствуют срединному ромбу, а неравенства **L**-плотности (7) – правому ромбу.

Сделаем еще один шаг к наглядному пониманию. Для этого мы продолжим функцию f , заданную на прямоугольном гриде, до функции $\tilde{f}$, заданной на всем прямоугольнике $[0, n] \times [0, m]$. Продолжение очень простое – по аффинности на каждом единичном треугольнике. Тогда каждое ромбическое неравенство означает, что ограничение функции $\tilde{f}$ на соответствующий ромб является вогнутой функцией. Если выполнены неравенства (5) и (6), мы получаем, что функция $\tilde{f}$ является вогнутой на каждой вертикальной полосе шириной 1. В этом случае функция f называется *вертикально-полосно вогнутой* (VS-вогнутой). Аналогично, если выполнены неравенства (5) и (7), функция $\tilde{f}$ вогнута на каждой горизонтальной полосе шириной 1, и функция f называется *горизонтально-полосно вогнутой* (HS-вогнутой). Ясно, что VS-вогнутые функции тесно связаны с **D**-плотными массивами, а HS-вогнутые – с **L**-плотными. Наконец, если выполнены неравенства (5)–(7), то функция $\tilde{f}$ вогнута на всем прямоугольнике $[0, n] \times [0, m]$. В этом случае функция f называется *дискретно вогнутой*.

По причинам, которые вскоре станут понятными, мы интересуемся также функциями, заданными на *треугольных гридах* (размером n). Так мы называем множество целых точек треугольника с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, n)$ и (n, n) ; такой грид размером n обозначается через Δ_n (рис. 2).

Функция f на гриде Δ_n называется *дискретно вогнутой*, если выполнены ромбические неравенства (5)–(7) для каждого единичного ромба в этом треугольнике.

Пусть функция f на гриде Δ_n дискретно вогнута. Тогда ее ограничения на левую сторону, верхнее основание и гипотенузу (конечно, на целые точки этих сторон) являются дискретно вогнутыми в том смысле, что последовательные

Рис. 2

приращения убывают. Более точно, *приращениями* на левой стороне называется набор n чисел

$$\lambda(1) = f(0, 1) - f(0, 0), \lambda(2) = f(0, 2) - f(0, 1), \dots, \lambda(n) = f(0, n) - f(0, n - 1),$$

и для них выполнено соотношение

$$\lambda(1) \geq \lambda(2) \geq \dots \geq \lambda(n).$$

Аналогично определяются наборы n чисел μ (где $\mu(i) = f(i, n) - f(i - 1, n)$ для $i = 1, \dots, n$) и ν (где $\nu(k) = f(k, k) - f(k - 1, k - 1)$ для $k = 1, \dots, n$); они тоже монотонны. Эти наборы мы называем *приращениями* функции f на соответствующих сторонах треугольного грида (или просто треугольника). Прибавление константы к f не меняет эти приращения, поэтому мы обычно нормируем функцию f , требуя обращения в нуль ее значения в нижней вершине.

Множество дискретно вогнутых функций на треугольном гриде Δ_n с приращениями λ, μ, ν мы обозначаем $DC_n(\lambda, \mu; \nu)$. Это выпуклый многогранник (в пространстве всех функций на Δ_n). Дискретно вогнутые функции, заданные на треугольных гридах, играют важную роль при исследовании спектров эрмитовых матриц (см. [6], [11]). Для наших целей важно то, что рассмотренные ранее множества SP естественно отождествляются с DC_n . Объясним это подробнее.

Пусть (a, b) является стандартной парой массивов. Рассмотрим функцию $f = \iint (a \otimes b)$, заданную на прямоугольном гриде $\{0, \dots, 2n\} \times \{0, \dots, n\}$, т. е. на решетке целых точек прямоугольника $[0, 2n] \times [0, n]$.

Поскольку массив $a \otimes b$ **D**-плотный, функция f **VS**-вогнута на всем прямоугольнике $OBDE$ (рис. 3). Так как массив b **L**-плотный, то функция f **HS**-вогнута на квадрате $ACDE$. Поэтому на этом квадрате функция f дискретно вогнута. В частности, ее ограничение на треугольный грид ACD также дискретно вогнуто.

Проследим теперь за приращениями этой функции на трех сторонах треугольника ACD . Приращения на стороне AC – это строчные суммы массива a , т. е. начальная форма пары (a, b) . Приращения на стороне CD – это столбцовые суммы массива b , которые в силу **L**-плотности b равны форме b , т. е. средней форме пары (a, b) . Приращения на стороне ED равны форме массива $a \otimes b$, т. е. финальной форме пары (a, b) . Остается заметить, что в силу **L**-плотности

Рис. 3

массива b ниже диагонали в этом массиве стоят нули. Поэтому приращения на стороне ED равны приращениям на гипотенузе AD . Следовательно, на треугольном гриде ACD (где и расположена определяющая часть функции f) функция f дискретно вогнута и имеет приращения $\text{sh}(a)$, $\text{sh}(b)$ и $\text{sh}(a \otimes b)$. Тем самым мы построили отображение

$$\text{SP}(\lambda, \mu; \nu) \rightarrow \text{DC}_n(\lambda, \mu; \nu).$$

Оно, очевидно, линейное и переводит целые массивы в целозначные функции. Кроме того, оно обратимо. В самом деле, если f — функция из $\text{DC}_n(\lambda, \mu; \nu)$, то в качестве массива b надо взять $\partial \partial f$, а в качестве a взять диагональный массив $\text{diag}(\lambda)$. Тем самым мы доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Построенное отображение $\text{SP}(\lambda, \mu; \nu) \rightarrow \text{DC}_n(\lambda, \mu; \nu)$ является биекцией (называемой канонической).

Именно это каноническое отождествление будет использовано далее для доказательства совпадения массивной и функциональной биекций ассоциативности и коммутативности. Для этого необходимо объяснить, как строятся функциональные биекции. Основную роль при их построении играет так называемая *октаэдральная рекурсия*. Эта рекурсия определяется уже в трехмерном пространстве. Поэтому нам придется обратиться к функциям, заданным в точках трехмерной решетки $\mathbb{Z}^3$.

§ 5. Функции на трехмерной решетке

Здесь мы рассматриваем функции, определенные в точках трехмерной решетки $\mathbb{Z}^3$. Рассечем пространство $\mathbb{R}^3$ четырьмя сериями “модулярных” плоскостей вида $x = i$, $y = j$, $z = k$ и $x + y + z = l$, где $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$. В результате пространство разрежется на тетраэдры и октаэдры единичного размера. Все октаэдры устроены аналогично и получаются друг из друга целыми сдвигами. В каждом октаэдре есть три диагонали, параллельные векторам $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$ и $(-1, 1, 1)$, и соответственно три пары противоположных вершин.

Диагональ, параллельную вектору $(-1, 1, 1)$, назовем *главной*, а сам вектор $(-1, 1, 1)$ — *вектором пропагации*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция F , определенная на трехмерной решетке, называется *поляризованной*, если для любого единичного октаэдра сумма значений F в вершинах главной диагонали равна максимуму из сумм значений F

в вершинах двух других диагоналей, т. е. если

$$\begin{aligned} & F(i, j, k) + F(i + 1, j - 1, k - 1) \\ & = \max(F(i, j - 1, k) + F(i + 1, j, k - 1), F(i, j, k - 1) + F(i + 1, j - 1, k)) \end{aligned} \quad (8)$$

для любых i, j, k .

Понятие поляризованности имеет смысл и для функций, определенных в целых точках любого выпуклого многогранника, составленного из тетраэдров и октаэдров единичного размера, в частности множества $\Delta_n(OXYZ)$ целых точек (x, y, z) в тетраэдре размером n , заданном неравенствами $x, y, z \geq 0$, $x + y + z \leq n$ (рис. 4)

Рис. 4

Легко понять, что поляризованная функция F на гриде $\Delta_n(OXYZ)$ однозначно определяется своими значениями на *полу* $\Delta_n(OXY)$ и на *передней стенке* $\Delta_n(OXZ)$. В самом деле, рассмотрим точку грида, имеющую вид $(i, 1, 1)$. Она входит в единичный октаэдр с вершинами $(i, 1, 1)$, $(i, 0, 1)$, $(i, 1, 0)$, $(i + 1, 0, 1)$, $(i + 1, 1, 0)$ и $(i + 1, 0, 0)$. Все эти вершины, кроме точки $(i, 1, 1)$, лежат либо на полу, либо на передней стенке, поэтому значения функции F определены. Так как функция F поляризована, то

$$F(i, 1, 1) + F(i + 1, 0, 0) = \max(F(i, 0, 1) + F(i + 1, 1, 0), F(i, 1, 0) + F(i + 1, 0, 1)),$$

поэтому значение в точке $(i, 1, 1)$ тоже определено. Повторяя это рассуждение для точек вида $(i, 2, 1)$, $0 \leq i \leq n - 3$, мы получаем значения функции в этих точках, аналогично и в точках вида $(i, j, 1)$, $i + j \leq n - 1$. Следовательно, значения функции определены во всех точках при $k = 1$. Остается повторить это рассуждение для $k = 2, 3, \dots$

Мы видим, что можно произвольно задать значение функции на полу и передней стенке, и затем, пользуясь соотношениями поляризованности (8), продолжить эти значения во все точки грида $\Delta_n(OXYZ)$. Распространение функции указанным способом получило название *октаэдральной рекурсии* (ОР). В каком-то смысле это тропикализация метода вычисления определителей, предложенного Ч. А. Доджсоном и К. Г. Я. Якоби (см. [9], [12], [13]).

Мы же хотели бы обратить внимание на то, что условие поляризованности можно рассматривать как некое требование вогнутости функции F на единичных октаэдрах. На рис. 5 представлен такой единичный октаэдр с вершина-

Рис. 5

ми 0 , a , a' , b , b' и 1 . Вершины 0 и 1 – это вершины главной диагонали. Условие поляризованности (8) означает, что

$$F(1) + F(0) = \max(F(a) + F(a'), F(b) + F(b')).$$

Предположим, что максимум достигается на $F(b) + F(b')$. Тогда выполнено равенство $F(0) + F(1) = F(b) + F(b')$ и мы можем продолжить функцию F до аффинной функции на полуоктаэдре $a01bb'$, а также до аффинной функции на полуоктаэдре $a'01bb'$. Полученная таким образом кусочно линейная функция $\tilde{F}$ на всем октаэдре будет, как легко понять, вогнутой.

Таким образом, условие поляризованности означает, что функция F продолжается до функции, вогнутой на каждом единичном октаэдре, причем она должна быть аффинной на одном из двух ромбов, содержащих главную диагональ (вектор пропагации). Отсюда видно, что прибавление к F линейной функции не меняет поляризованность F . Более того, к F можно прибавлять любую функцию вида $\alpha(x) + \beta(y) + \gamma(z) + \delta(x + y + z)$.

Если мы продолжим поляризованную функцию кусочно линейно на единичные октаэдры, как сказано выше, и на все единичные тетраэдры по аффинности, мы получим продолжение F до $\tilde{F}$ на всем симплексе $OXYZ$. Требование вогнутости этого продолжения $\tilde{F}$ можно понимать как некое требование дискретной вогнутости функции F . Легко понять, как это требование переформулировать в терминах исходной функции F . Вспомним, что при определении дискретной вогнутости двумерной функции мы использовали три серии ромбических неравенств. Аналогично можно поступить и здесь. Только теперь мы имеем четыре серии “модулярных” плоскостей ($x = i$, $y = j$, $z = k$, $x + y + z = l$) и на каждой плоскости – ромбы трех сортов. Таким образом, для каждого такого ромба должно выполняться соответствующее ромбическое неравенство: сумма значений функции на “короткой” диагонали ромба должна быть не меньше суммы значений функции на “длинной” диагонали.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция F на трехмерном гриде $\Delta_n(OXYZ)$ называется *поляризованной дискретно вогнутой* функцией, если она поляризована и выполнены ромбические неравенства для всех “модулярных” ромбов в симплексе $OXYZ$.

ТЕОРЕМА 1. *Если ограничения поляризованной функции F , заданной на гриде $\Delta_n(OXYZ)$, на пол $\Delta_n(OXY)$ и переднюю стенку $\Delta_n(OXZ)$ являются дискретно вогнутыми, то F – поляризованная дискретно вогнутая функция.*

Мы докажем теорему 1 в дополнении (см. §10). Впрочем, эта теорема эквивалентна следствию 1 (доказанному также в [7]).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если поляризованная функция дискретно вогнута на полу и передней стенке тетраэдра, то она дискретно вогнута и на двух других стенках.*

В самом деле, любой ромб на этих стенках является ромбом в трехмерном гриде $\Delta_n(OXYZ)$, и поэтому для него выполнено соответствующее ромбическое неравенство.

Добавляя подходящие сепарабельные функции, получим приведенные ниже следствия 2–4 (которые, впрочем, далее не используются).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если поляризованная функция F дискретно вогнута на полу и HS-вогнута на передней стенке, то она HS-вогнута на двух других треугольниках.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если поляризованная функция F на передней стенке VS-вогнута, а на полу HS-вогнута (где горизонталью считается отрезок XY), то и на задней стенке $\Delta(OYZ)$ она VS-вогнута.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если поляризованная функция F дискретно вогнута на полу и VS-вогнута на передней стенке, то она дискретно вогнута на задней стенке.*

Нам понадобится также вариант ОР, определенный для функций на призме $\Delta_n(OXY) \times \{0, 1, \dots, t\}$. Назовем функцию F , определенную в целых точках этой призмы, *поляризованной*, если она удовлетворяет условию поляризованности на всех единичных октаэдрах, лежащих в призме, и является сепарабельной (от переменных x и z) на “немодулярной” стенке $\Delta_n(XY) \times \{0, 1, \dots, t\}$. Иначе говоря, для каждого единичного квадрата на этой стенке суммы значений функции на двух диагоналях равны:

$$F(i, j, k) + F(i + 1, j - 1, k + 1) = F(i + 1, j - 1, k) + F(i, j, k + 1).$$

Такая функция называется *поляризованной дискретно вогнутой функцией*, если выполняются ромбические неравенства для всех ромбов, лежащих в призме.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если ограничения поляризованной функции F (заданной на призме $\Delta_n(OXY) \times \{0, 1, \dots, t\}$) на пол $\Delta_n(OXY) \times \{0\}$ и переднюю стенку $\Delta_n(OX) \times \{0, 1, \dots, t\}$ являются дискретно вогнутыми, то F – поляризованная дискретно вогнутая функция (и, в частности, она дискретно вогнута на задней стенке $\Delta_n(OY) \times \{0, 1, \dots, t\}$ и на потолке $\Delta_n(OXY) \times \{t\}$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко понять, что можно ограничиться рассмотрением случая $t = 2$. Но для начала мы рассмотрим случай $t = 1$. Идея состоит в том, чтобы расширить основание до размера $n + 1$, т. е. мы добавляем новые точки $(n + 1, 0, 0), \dots, (0, n + 1, 0)$. Если мы доопределим значения функции F

в этих точках достаточно малыми числами, мы получим, что продолженная функция дискретно вогнута на “расширенном” полу $\Delta_{n+1}(OXY) \times \{0\}$ и “расширенной” передней стенке. Обозначим через $\tilde{F}$ поляризованную функцию с такими начальными данными. В силу теоремы 1 функция $\tilde{F}$ является поляризованной дискретно вогнутой. Мы утверждаем, что ограничение ее на призму также является поляризованной функцией. Для этого нужно убедиться в том, что она совпадает с F на немодулярной стенке $\Delta_n(XY) \times \{0, 1\}$, но это следует из того, что значения $\tilde{F}$ в новых точках достаточно малы. Поэтому F и $\tilde{F}$ совпадают на нашей призме. Однако $\tilde{F}$ дискретно вогнута, значит, и F дискретно вогнута.

Рассмотрим теперь случай $m = 2$. Нужно проверить ромбические неравенства для всех ромбов в нашей призме. Рассмотрим сначала ромбы с вертикальным размером 2. Такой ромб, как легко понять, лежит в тетраэдре размером $n + 1$. Но тогда соответствующее ромбическое неравенство следует из того, что оно выполнено для функции $\tilde{F}$. Остальные ромбы лежат либо в призме $\Delta_n(OXY) \times \{0, 1\}$, либо в призме $\Delta_n(OXY) \times \{1, 2\}$. Если ромб лежит в первой “нижней” призме, то выполнение ромбических неравенств следует из рассмотренного выше случая $m = 1$. В частности, функция F на треугольнике $\Delta_n(OXY) \times \{1\}$ дискретно вогнута, но тогда снова из случая $m = 1$, примененного к призме $\Delta_n(OXY) \times \{1, 2\}$, ромбические неравенства выполнены и для ромбов в этой призме.

§ 6. Функциональная форма биекции ассоциативности

Рассмотрим трехмерный грид $\Delta_n(OXYZ)$. Предположим, что на полу $\Delta_n(OXY)$ и на передней стенке $\Delta_n(OXZ)$ заданы некоторые функции F_Z и F_Y , причем их ограничения на ребро $\Delta_n(OX)$ совпадают. Рассмотрим поляризованное продолжение функции F на весь трехмерный грид; выше было сказано, что такое продолжение существует и единственно. Обозначим через F_X и F_O ограничения F на заднюю стенку $\Delta_n(OYZ)$ и наклонную стенку $\Delta_n(XYZ)$. Мы снова получаем две функции, согласованные на ребре $\Delta_n(YZ)$. (Конечно, эта операция обратима: можно начинать с функций F_X и F_O и получать F_Z и F_Y .)

Это преобразование позволяет определить функциональную биекцию ассоциативности. А именно, расположим на полу $\Delta_n(OXY)$ дискретно вогнутую функцию с приращениями λ , μ и σ , как показано на рис. 6, а на передней стенке $\Delta_n(OXZ)$ – дискретно вогнутую функцию с приращениями σ , ν и π . В силу совпадения приращений на ребре $\Delta_n(OX)$ можно считать, что эти функции совпадают на нем. Из теоремы 1 (точнее, следствия 1) мы получаем на двух других гранях дискретно вогнутые функции с приращениями μ , ν и τ и приращениями λ , τ и π , и наоборот. Таким образом мы получаем *функциональную биекцию ассоциативности*

$$\coprod_{\sigma} \text{DC}(\lambda, \mu; \sigma) \times \text{DC}(\sigma, \nu; \pi) \rightarrow \coprod_{\tau} \text{DC}(\mu, \nu; \tau) \times \text{DC}(\lambda, \tau; \pi). \quad (9)$$

Именно эта биекция и была построена в [9].

Рис. 6

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что при каноническом отождествлении DC с SP эта биекция становится массивной биекцией ассоциативности, рассмотренной в § 3. Учитывая, как строилось это отождествление и биекция ассоциативности, мы приходим к задаче сравнения условия поляризованности с массивными операциями уплотнения.

По некоторым причинам нам будет удобно рассматривать призму $OAECBD$, изображенную на рис. 7, и целые точки внутри этой призмы. Модулярные

Рис. 7

плоскости параллельны плоскостям $x = 0$, $z = 0$, $x = y$ и $z = y$. Отметим, что грань $OEDC$ призмы расположена на немодулярной плоскости $y = 0$. Вектор пропагации $(1, 0, 1)$ лежит именно в этой немодулярной плоскости, как и должно быть. Чтобы перейти к предыдущим обозначениям, надо в качестве базиса взять векторы $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ и $(1, 1, 0)$. Тогда вектор пропагации будет равен $(1, 0, 1) = -(0, 1, 0) + (0, 0, 1) + (1, 1, 0)$, а условие (8) переписывается следующим образом:

$$F(x, y, z) + F(x + 1, y, z + 1) = \max(F(x, y, z + 1) + F(x + 1, y, z), F(x, y - 1, z) + F(x + 1, y + 1, z + 1)). \quad (10)$$

Начальные данные будут задаваться на треугольнике OAE и наклонном прямоугольнике $OABC$. На немодулярный прямоугольник эти данные распространяются по сепарабельности, т.е. мы считаем, что значение функции в точке $(i, 0, k)$ равно сумме значений в точках $(i, 0, 0)$ и $(0, 0, k)$. Пользуясь

ОР, мы распространяем эти начальные данные последовательно во все целые точки призмы и, в частности, получаем выходные данные на верхнем прямоугольнике $EABD$ и правом треугольнике CDB .

Пусть теперь задан массив a форматом $n \times m$. На треугольнике OAE (конечно, в целых точках этого треугольника) задаем нулевую функцию, на наклонном прямоугольнике $OABC$ – функцию $\iint a$; более точно, в точке (i, j, j) мы задаем значение функции $\iint a(i, j)$. (В силу этого на немодулярном прямоугольнике $OEDC$ функция равна нулю.) Проведем ОР; в результате мы получим функции на верхнем прямоугольнике $EABD$ и на правом треугольнике CDB . Из следствия 5 видно, что на верхнем прямоугольнике получается VS-вогнутая функция, а на треугольнике CDB – HS-вогнутая функция. Мы утверждаем, что на верхнем прямоугольнике получается функция $\iint \mathbf{D}a$, а на правом треугольнике – функция $\iint \mathbf{L}a$ (точнее, ее ограничение на этот треугольник).

Более точно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – поляризованная функция, определенная на призме $OAECBD$, равная нулю на треугольнике OEA и равная $\iint a$ на $OABC$ (т. е. $F(i, j, j) = (\iint a)(i, j)$). Тогда $F(i, j, m) = (\iint \mathbf{D}a)(i, j)$ для всех i, j и $F(n, j, k) = (\iint \mathbf{L}a)(j, k)$ для $0 \leq j \leq k \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай двухстрочного массива, когда $m = 2$. В нижней строке стоят числа $a(i, 1)$, в верхней – $a(i, 2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} f(i, 0) &= 0, \\ f(i, 1) &= a(1, 1) + \dots + a(i, 1), \\ f(i, 2) &= f(i, 1) + a(1, 2) + \dots + a(i, 2). \end{aligned}$$

Это функция $\iint a$. Обозначим $a' = \mathbf{D}a$ и $f' = \iint a'$. Функция f' совпадает с f на нижней границе (где они обе равны нулю) и на верхней границе при $j = 2$. Изменения происходят только при $j = 1$ за счет того, что некоторая масса перемещается из второго слоя в первый. В [3, формула (***)] получено, что $f'(i, 1) = f(i, 1) + \max(\beta_1, \dots, \beta_i)$, где

$$\begin{aligned} \beta_i &= a(1, 2) + \dots + a(i, 2) - a(1, 1) - \dots - a(i - 1, 1) \\ &= f(i, 2) - f(i, 1) - f(i - 1, 1) + f(i - 1, 0). \end{aligned}$$

Учитывая, что $f(i, 2) = f'(i, 2)$, $\max(\beta_1, \dots, \beta_i) = \max(\max(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}), \beta_i)$ и

$$\max(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}) = f'(i - 1, 1) - f(i - 1, 1),$$

мы получаем

$$\begin{aligned} f'(i, 1) &= f(i, 1) + \max[f'(i - 1, 1) - f(i - 1, 1), f'(i, 2) \\ &\quad - f(i, 1) - f(i - 1, 1) + f(i - 1, 0)] \\ &= \max[f'(i - 1, 1) + f(i, 1), f'(i, 2) + f(i - 1, 0)] - f(i - 1, 1). \end{aligned}$$

Но это как раз и есть формула (10) для ОР, так как $F(i, 1, 1) = f(i, 1)$, а $F(i, 1, 2) = f'(i, 1)$.

Теперь мы по индукции получаем, что на k -м уровне (т.е. на высоте $z = k$ в призме $OEACDB$) находится функция $\iint \mathbf{D}(a_k)$, где массив a_k получен из массива a выбрасыванием верхних строк с номерами $k + 1, \dots, m$.

В самом деле, пусть это верно для k ; проверим для $k+1$. К этому моменту мы имеем $\mathbf{D}$ -плотный массив $d_k = \mathbf{D}(a_k)$ и над ним строку $a(\cdot, k+1)$ из старого массива. Проведение октаэдральной рекурсии на этом уровне соответствует проведению произведения операций $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_k$. Но формула из [3, п. 6.5] как раз это и дает. В конце концов на верхнем основании мы получаем функцию $\iint \mathbf{D}a$. Это доказывает первую часть теоремы.

Осталось показать, что на правой стороне мы получаем $\iint \mathbf{L}a$. Но мы уже только что видели, что на отрезке $(n, \cdot, k)$ мы имеем значение функции $\iint d_k = \iint \mathbf{D}(a_k)$, т.е. $\int d_k$ – интеграл от формы массива d_k (интеграл от последовательности чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ равен последовательности $(0, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots)$), или, что то же самое, интеграл от формы массива a_k (см. [3, п. 5.10]). Но форма a_k та же, что у $\mathbf{L}(a_k) = \mathbf{L}(a)_k$, а для $\mathbf{L}$ -плотного массива форма совпадает с последовательностью столбцовых сумм. Это доказывает второе утверждение теоремы.

В следующих параграфах приведем применения теоремы 2 к биекциям ассоциативности и коммутативности.

§ 7. Совпадение биекций ассоциативности

ТЕОРЕМА 3. При отождествлении SP с DC биекция ассоциативности (4) совпадает с биекцией ассоциативности (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем стандартную пару массивов (b, c) и соответствующую функцию $\iint b \otimes c$, определенную на прямоугольном гриде размером $2n \times n$. Этот грид мы помещаем на наклонный прямоугольник $OABC$ призмы $OAECBD$ (рис. 8) и тем самым определяем функцию на $OABC$.

Рис. 8

В первую очередь нас будут интересовать ограничения поляризованной функции на треугольники $C'D'B'$, $D'B'B$, $B'BC'$ и $BC'D'$, т.е. на грани тет-

раздра $C'D'B'B$. Дело в том, что октаэдральная рекурсия в определении биекции (9) происходит как раз на этом тетраэдре (и с тем же самым вектором пропагации).

На первой грани – треугольнике $C'D'B'$ – по теореме 2 эта поляризованная функция равна $\iint \mathbf{L}b = b$.

На второй грани $D'B'B$ она совпадает с ограничением на этот треугольник (или квадрат $D'B'BD$) функции $\iint (b' \otimes c')$, для краткости мы обозначили $\mathbf{D}(b \otimes c)$ как $b' \otimes c'$, т. е. с точностью до прибавления функции $\int b'$ от переменной y это ограничение равно $\iint c'$.

На третьей (наклонной) грани $B'BC'$ тетраэдра она равна ограничению функции $\iint (b \otimes c)$ на этот кусок наклонного прямоугольника. Как и в предыдущем случае, легко понять, что эта функция равна сумме функции $\iint c$ и одномерной функции – интегралу от строчного веса b . Для дальнейшего полезно заметить, что строчный вес b есть разность строчного веса $a \otimes b$ и строчного веса a , или разность формы $\mathbf{L}(a, b)$ и формы a .

На четвертой грани $BC'D'$ тетраэдра $C'D'B'B$ эта поляризованная функция наиболее неочевидна. Ответ о ее строении дает следующее утверждение: *функция на грани $BC'D'$ по существу совпадает с функцией на грани BCD , т. е. с $\iint \mathbf{L}(b \otimes c)$. Точнее, значение этой функции в точке $(n + i, i, k)$ равно значению функции $\iint \mathbf{L}(b \otimes c)$ в точке (i, k) .*

Мы отложим временно проверку этого вспомогательного утверждения (установим его ниже, в конце доказательства теоремы) и закончим сравнение полученной функции и функции, получающейся из биекции ассоциативности (9). На первой и третьей гранях мы имеем начальные данные, функцию $\iint b$ на первой грани и функцию $\iint c$ (с точностью до одномерной добавки) на третьей грани, а на второй и четвертой гранях функция равна $\iint c' + \int b'$ и $\iint \mathbf{L}(b \otimes c)$ соответственно. Это фактически те же функции, что и в (9).

Чтобы получить в точности те же функции, нужно к нашей поляризованной трехмерной функции на призме $OEACDB$ прибавить функцию от третьей (вертикальной) координаты, равную $\int a$ или $\int \lambda$. В результате на первой грани мы получим дискретно вогнутую функцию $\int \lambda + \iint b$ с граничными приращениями λ , μ и σ , где σ – форма массива $a \otimes b$. На третьей грани мы получаем функцию $\iint c + (\int l - \int a) + \int a = \iint c + \int l$. Так как $l = \mathbf{L}(a \otimes b)$, то $\int l = \int \sigma$. Поэтому на третьей грани наша функция является дискретно вогнутой с граничными приращениями σ , ν и π , где π – форма массива (a, b, c) . На второй грани функция имеет вид $\iint c' + \int b' = \iint c' + \int \mu$ (потому что $b' = \mathbf{D}b$ имеет форму μ), т. е. является дискретно вогнутой с граничными приращениями μ , ν и τ , где τ – форма массива $b \otimes c$. Наконец, на четвертой грани функция равна $\iint \mathbf{L}(b \otimes c) + \int \lambda$, т. е. является дискретно вогнутой функцией, соответствующей стандартной паре $(a, \mathbf{L}(b \otimes c))$ с граничными приращениями λ , τ и π .

Остается заметить, что прибавление функции $\int \lambda$, зависящей от вертикальной координаты, не влияет на октаэдральную рекурсию, поэтому мы получаем совпадение биекции (4) с биекцией (9).

Осталось доказать наше вспомогательное утверждение. Для этого заметим, что (после прибавления $\int \lambda$) трехмерная функция является поляризованной

дискретно вогнутой на пирамиде $C'D'DCB$ (следствие 5). Кроме того, она постоянна на каждом отрезке основания пирамиды, параллельном оси x , поэтому она постоянна и на любом отрезке, параллельном оси x . Теорема доказана.

§ 8. Функциональная форма биекции коммутативности

В этом параграфе мы покажем, какой вид имеет биекция коммутативности в функциональной терминологии. После этого будет понятно, что она совпадает с биекцией коммутативности, построенной в [7].

В § 3 была построена биекция коммутативности

$$\text{Com}: \text{ASP}(\lambda, \mu; \nu) \rightarrow \text{ASP}(\mu, \lambda; \nu).$$

Пользуясь каноническими отождествлениями ASP с SP и последних – с DC , мы получаем биекцию

$$\text{Com}' : \text{DC}_n(\lambda, \mu; \nu) \rightarrow \text{DC}_n(\mu, \lambda; \nu).$$

Пусть f – дискретно вогнутая функция с граничными приращениями λ, μ, ν . Мы строим по ней $\mathbf{L}$ -плотный массив $b = \partial\partial f$ (расположенный выше диагонали); вектор его столбцовых сумм (I -вес) равен μ , вектор строчных сумм (J -вес) равен $\nu - \lambda$. Кроме того, мы строим (исключительно по λ) единственный $\mathbf{DR}$ -плотный массив $a = \mathbf{R}(\text{diag}(\lambda))$ формы λ . Полученная (антистандартная) пара (a, b) как раз и соответствует функции f .

Теперь мы должны определить биекцию Com в терминах ASP . Для этого мы образуем (антистандартную) пару $(b', a') = \mathbf{D}(*b \otimes *a)$. (Мы даже знаем, как устроен b' : это единственный $\mathbf{DR}$ -плотный массив формы μ . Знаем и столбцовый вес массива a' , который равен столбцовому весу массива $*a$. Вес массива a был $\lambda^{\text{op}} = (\lambda_n, \dots, \lambda_1)$, поэтому вес массива $*a$ равен λ . Впрочем, это можно получить иначе: массив $*a$ $\mathbf{L}$ -плотный, поэтому его столбцовый вес равен форме массива $*a$, которая равна форме массива a , т. е. λ .) И снова мы должны по этой паре построить функцию, т. е. по определению

$$\text{Com}'(f) = \iint a' + \int \mu.$$

Из теоремы 2 мы знаем, как устроено уплотнение вниз в терминах функций. Нужно взять функцию g , соответствующую массиву $*b \otimes *a$, поместить ее на наклонную грань $OABC$ (рис. 9), задать нулевые значения на гранях OEA и $OEDC$ и провести октаэдральную рекурсию. Тогда на верхнем основании $EABD$ мы получим интересующую нас функцию. Точнее, функция $\text{Com}'(f)$ будет расположена (определена) в точности на треугольнике $D'B'B$ (именно в этом порядке). Тип ее будет определен граничными приращениями μ, λ, ν .

Возникает вопрос: как задать функцию $g = \iint(*b \otimes *a)$? Ясно, что она должна быть просто связана с исходной функцией f . Точнее, мы установим связь ее с функцией $\iint(a \otimes b)$ на удвоенном прямоугольнике $2n \times n$. Так как

Рис. 9

ограничение функции g на треугольник $C'B'B$ равно f , функцию $\int\int(a \otimes b)$ мы также будем обозначать через f . Ее граничные приращения показаны на рис. 10.

Рис. 10

“Перевернем” теперь функцию f , т.е. рассмотрим функцию $*f$ на том же прямоугольнике, заданную соотношением $(*f)(i, j) = f(2n - i, n - j)$. Мы получим почти функцию g . Точнее, функции $*f$ и g имеют одни и те же $\partial\partial$, но разные граничные приращения (и значения в точке $(0, 0)$), как видно из рис. 11, где представлена функция $*f$.

Рис. 11

Эти граничные условия легко исправить за счет добавления подходящей сепарабельной функции (от переменных x и $z = y$), и мы получаем

$$g = *f + \int_x (\mu^{\text{op}}, \lambda) + \int_z \nu^{\text{op}} - f(0, 0) = *f + \int_x (\mu^{\text{op}}, \lambda) + \int_z \nu^{\text{op}} - |\nu|.$$

Здесь $(\mu^{\text{op}}, \lambda) = (\mu_n, \dots, \mu_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$.

Для дальнейшего отметим, что функция g (рис. 12) постоянна на отрезках $[(n+j, j), (2n, j)]$, потому что в соответствующих клетках массив $*a$ пустой (нулевой).

Рис. 12

Итак, мы помещаем на наклонном прямоугольнике $OABC$ (см. рис. 9) функцию g и проводим октаэдральную рекурсию, получая на призме трехмерную функцию G . Интересующая нас функция $\text{Com}'(f)$ определена в целых точках треугольника $D'B'B$. Ее граничные приращения равны μ , λ , ν , как нетрудно убедиться из рассмотрения $\mathbf{D}$ -плотного массива $\mathbf{D}(*b \otimes *a)$.

По причинам, которые вскоре станут понятны, мы интересуемся также значением функции G на вертикальной стенке $C'D'B'$. Мы знаем, что на этой стенке задана функция $\iint \mathbf{L}(*b)$ с граничными приращениями 0 , μ и $\nu^{\text{op}} - \lambda^{\text{op}} = (\nu - \lambda)^{\text{op}}$. Добавим к ней “одномерную” функцию $\int_z (-\nu^{\text{op}})$. Положим

$$h = \iint \mathbf{L}(*b) - \int_z \nu^{\text{op}} + |\nu|. \quad (11)$$

Мы видим, что эта функция имеет приращения $-\nu^{\text{op}}$, μ и $-\lambda^{\text{op}}$.

Связь этой промежуточной функции h (рис. 13) с интересующей нас функцией $\text{Com}'(f)$ определяется в следующем утверждении.

Рис. 13

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1) Октаэдральная рекурсия на четвертинке октаэдра (конструкция Энрикеса–Камницера [7]) превращает функцию $*f$ на $OB'C'$ в h , т. е. $h = \text{HK}(*f)$ с точностью до прибавления константы.

2) Функция h фактически совпадает с $\text{Com}'(f)$. Более точно, если мы рассматриваем $\text{Com}'(f)$ как функцию на треугольнике $D'B'B$, то $h(i, j) = \text{Com}'(f)(n - j, n - j + i, n)$.

Иначе говоря, чтобы получить функцию $\text{Com}'(f)$, необходимо функцию h “повернуть против часовой стрелки на треть полного оборота”, как показано на рис. 14.

Рис. 14

СЛЕДСТВИЕ 6. В терминах дискретно вогнутых функций комьютор Com' совпадает с комьютором Энрикеса–Камницера.

В самом деле, А. Энрикес и Ж. Камницер в [7, замечание 4.5] утверждают, что для получения их комьютора необходимо провести октаэдральную рекурсию на четвертинке октаэдра и затем повернуть картинку на треть, в точности как показано на рис. 14.

ПРИМЕР 2. Продемонстрируем действие комьютора на примере 1 из § 3. Достаточно легко понять, что функция g , соответствующая массиву (которую мы задаем на наклонной грани призмы), имеет значения

0	1	5	10	13	15	15
0	1	5	7	9	9	9
0	1	3	4	4	4	4
0	0	0	0	0	0	0

После проведения октаэдральной рекурсии на верхней площадке призмы мы получаем функцию со значениями

0	1	5	10	13	15	15
0	1	5	9	11	11	11
0	1	4	5	6	6	6
0	0	0	0	0	0	0

и, в частности, получаем $\text{Com}'(f)$:

10	13	15	15
9	11	11	
5	6		
0			

Кроме того, на треугольнике $C'D'B'$ мы получаем функцию со значениями

0	5	9	10
0	5	7	
0	4		
0			

которая после прибавления по вертикали функции $-\int \nu + |\nu|$ становится функцией h :

0	5	9	10
6	11	13	
11	15		
15			

Видно, что h совпадает с $\text{Com}'(f)$ после поворота на треть полного оборота.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. 1) Функция $\iint \mathbf{L}(*b)$ получается из (начального куска) функции g с помощью ОР. Но ОР коммутирует с прибавлением сепарабельной функции (от переменных x и z). Поэтому мы и вычтем из g сепарабельную функцию $\int_x (\mu^{\text{op}}, \lambda) + \int_z \nu^{\text{op}} - |\nu|$. Тогда на наклонном прямоугольнике мы получим $*f$, а на стенке $C'D'B'$ (см. рис. 8) из $\iint \mathbf{L}(*b)$ вычитается та же функция, т. е. $\int_z \nu^{\text{op}}$ (с точностью до константы). В результате получим функцию h .

Таким образом, ОР на четверти октаэдра преобразует $*f$ в h .

2) Функция на верхнем основании, в частности $\text{Com}'(f)$, получается с помощью ОР из функции g . Если мы добавим к G функцию $-\int_z \nu^{\text{op}} + |\nu|$, мы ничего не изменим на верхней площадке $EABD$.

Рассмотрим теперь ограничение трехмерной функции $G - \int_z \nu^{\text{op}} + |\nu|$ на тетраэдр $C'D'B'B$ (см. рис. 8). Во-первых, это поляризованная функция. Во-вторых, значение ее $\iint \mathbf{L}(*b) - \int_z \nu^{\text{op}} + |\nu| = h$ на стенке $C'D'B'$ является дискретно вогнутой функцией. В самом деле, с точностью до аффинной функции она совпадает с функцией, соответствующей стандартной паре $(-\nu^{\text{op}}, \mathbf{L}(*b))$, а поэтому дискретно вогнута. В-третьих, на грани $C'B'B$ она тоже дискретно вогнута и, кроме того, на ребре $C'B$ равна константе $|\nu|$. Проверим последнее утверждение.

Рассмотрим функцию g на квадрате $C'B'BC$ (см. рис. 8). Она равна сумме функции $\iint (*a)$ и функции $\int_z (\nu^{\text{op}} - \lambda^{\text{op}})$. Нас интересует функция $g - \int_z \nu^{\text{op}}$, и она равна, по сказанному выше, $\iint (*a) - \int_z \lambda^{\text{op}}$. Остается воспользоваться явным видом массива $*a$ или a , а именно тем, что массив a **DR**-плотный, т. е. массив $*a$ **LU**-плотный.

Можно считать, что λ имеет очень специальный вид, а именно $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = (1^k, 0^{n-k})$. Но в этом случае функцию $\iint (*a) - \int_z \lambda^{\text{op}}$ можно явно выписать и убедиться в том, что она равна $\min(k + i - j, 0)$. Утверждение о дискретной вогнутости теперь очевидно. Значения этой функции на отрезке $C'B'$, т. е. значения при $i = j$, суть $\min(k, 0) = 0$, так как $k \geq 0$.

Итак, поляризованная функция $G - \int_z \nu^{\text{op}} + |\nu|$ принимает дискретно вогнутые значения на гранях $C'D'B'$ и $C'B'B$ тетраэдра $C'D'B'B$. По теореме 1 эта функция поляризованная дискретно вогнутая. Так как на отрезке $C'B'$ она постоянна, то она постоянна на любом отрезке внутри тетраэдра, параллельном $C'B'$, т. е. параллельном вектору $(1, 1, 1)$. В частности, значение этой функции в точке (n, i, j) равно значению в точке $(n, i, j) + (n - j)(1, 1, 1) = (2n - j, n + i - j, n)$, что и утверждается в п. 2).

§ 9. Сравнение комьютора с фундаментальными симметриями Пака и Валлехо

В работе [8], изложенной в терминах полустандартных таблиц Юнга (далее просто таблиц), было построено несколько биекций, которые авторы называют *фундаментальными симметриями*. Это биекции между множествами $LR(\nu \setminus \lambda, \mu)$ и $LR(\nu \setminus \mu, \lambda)$. Здесь λ , μ и ν – разбиения с n частями, т. е. наборы n неубывающих целых неотрицательных чисел, а $LR(\nu \setminus \lambda, \mu)$ – множество таблиц Литтлвуда–Ричардсона с косой формой $\nu \setminus \lambda$ и весом μ (см. [1]–[3]).

Мы утверждаем, что фундаментальные симметрии ρ_1 и ρ_2 Пака и Валлехо совпадают с комьютором. Более точно, мы пользуемся здесь естественным отождествлением (биекцией) между SP и LR.

Объясним кратко, как устроена эта биекция (более подробно связи между массивами и таблицами Юнга рассматриваются в [3, § 9]). Пусть a – целочисленный массив, имеющий m строк; тогда по нему канонически строится “таблица”. В j -й строке “таблицы” мы помещаем сначала $a(1, j)$ символов 1, $a(2, j)$ символов 2 и т. д. В результате мы получаем “таблицу” неправильной формы. Однако если исходный массив a был **D**-плотным, то получается полустандартная таблица Юнга; форма этой таблицы совпадает с формой массива a . И наоборот, любая полустандартная таблица сворачивается в **D**-плотный массив.

Пусть теперь (a, b) – стандартная пара целочисленных массивов форматом $n \times n$; λ , μ и ν обозначают соответственно начальную, среднюю и финальную формы этой пары. Так как массив $a \otimes b$ **D**-плотный, он дает полустандартную таблицу формы ν . Кроме того, **D**-плотный массив a определяет подтаблицу формы μ . Оставшаяся часть диаграммы (косой формы $\nu \setminus \lambda$) заполнена косой таблицей весом μ , которая в силу **L**-плотности массива b дает доминирующее слово (или слово Яманучи) (см. [3, пп. 9.6, 9.7]), т. е. мы получаем таблицу Литтлвуда–Ричардсона. Обращение этой конструкции очевидно. Пусть задана косая таблица формы $\nu \setminus \lambda$. Заполним пустой кусок формы λ канонической таблицей (в первой строке стоит λ_1 единиц, во второй – λ_2 двоек и т. д.; при этом алфавит заполнения косой таблицы сдвигается на n). В результате мы получаем прямую таблицу Юнга, что дает **D**-плотный массив $a \otimes b$. Массив a соответствует канонической таблице и потому **L**-плотный. Если исходная таблица была таблицей Литтлвуда–Ричардсона, то соответствующее слово $w(b)$ является доминирующим и массив b также **L**-плотный.

ПРИМЕР 3. Для пары (a, b) из примера 1 (см. § 3), точнее – для стандартной пары $(L(a), b)$, мы имеем соответствующую таблицу

4	5	5	6		
2	2	4	5	5	
1	1	1	4	4	4

Отметим, что слово $w(b) = 4556455444$ действительно является словом Яманучи (в алфавите $\{4, 5, 6\}$).

Напомним теперь, что в [8] первая фундаментальная симметрия ρ_1 определяется с помощью алгоритма переключения таблиц. В нашем примере мы должны “прогнать” символы 1, 2 и 3 через символы 4, 5, 6. В результате мы получим таблицу (в которой порядок символов уже такой: $4 < 5 < 6 < 1 < 2 < 3$)

6	1	2	2
5	5	5	5
4	4	4	4

Отметим, что эта таблица в точности соответствует паре (b', a') из примера 2, приведенного в § 8.

То, что в результате получилась пара (b', a') , не является случайным совпадением. Мы утверждаем, что так будет всегда, т. е. верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *При отождествлении $\text{SP}_{\mathbb{Z}}(\lambda, \mu; \nu)$ с $\text{LR}(\nu \setminus \lambda, \mu)$ комьютор Com совпадает с первой фундаментальной симметрией ρ_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, в [8, п. 3.1] приведена формула для алгоритма переключения таблиц как композиция трех инволюций Шютценберже $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_{12}, \mathbf{S}_1$, т. е., начиная со стандартной пары (a, b) , мы сначала применяем инволюцию Шютценберже $\mathbf{S}$ к массиву a , затем $\mathbf{S}$ к массиву $\mathbf{S}a \otimes b$, а затем еще раз $\mathbf{S}$ к первой части полученного массива.

Выясним, что такое $\mathbf{S}a$. По определению из [3] это $\mathbf{D}(*a)$. Массив a был **DL**-плотный, поэтому $*a$ – **R**-плотный. Следовательно, $\mathbf{D}(*a)$ – (единственный) **DR**-плотный массив формы λ . Массив $\mathbf{R}a$ тоже **DR**-плотный формы λ . Так что в данном случае $\mathbf{S}a = \mathbf{D}(*a) = \mathbf{R}a$, т. е. мы получили переход от стандартной пары к антистандартной.

Теперь мы применяем инволюцию $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{12}$ к массиву $\mathbf{R}a \otimes b$, но это совпадает с $\mathbf{D}*(\mathbf{R}a \otimes b)$, как в нашем комьютере Com. Следующее применение $\mathbf{S}_1$ – это переход от ASP к SP.

Скажем теперь (уже кратко) о совпадении комьютора со второй фундаментальной симметрией ρ_2 Пака и Валлехо. Она (а точнее, отображение ρ'_2) определяется как композиция отображений (см. [8]):

$$\text{LR}(\nu \setminus \lambda, \mu) \xrightarrow{\tau} T(\mu, \nu - \lambda) \xrightarrow{\mathbf{S}} T(\mu, (\nu - \lambda)^{\text{op}}) \xrightarrow{\gamma^{-1}} \text{LR}(\nu \setminus \mu, \lambda). \quad (12)$$

Здесь $T(\mu, \alpha)$ – множество таблиц Юнга формой μ и весом α . Перейдем к рассмотрению композиции (12) в терминах массивов. Как уже говорилось, элемент из $\text{LR}(\nu \setminus \lambda, \mu)$ интерпретируется как **L**-плотный массив b такой, что $\text{diag}(\lambda) \otimes b$ является **D**-плотным. Отображение τ транспонирует массив b , превращая его в **D**-плотный массив b^T ; $\mathbf{S}$ – инволюция Шютценберже, она переводит b^T в $\mathbf{D}(*b^T)$. Если теперь снова транспонировать последний массив, мы получим **L**-плотный массив $\mathbf{D}(*b^T)^T = \mathbf{L}(*b^{TT}) = \mathbf{L}(*b)$. Отметим, что такой массив нам уже встречался (см. (11)). Подставив к нему слева диагональный массив $-\nu^{\text{op}}$, получим **D**-плотный массив $\text{diag}(-\nu^{\text{op}}) \otimes \mathbf{L}(*b)$. Напомним также, что $h = \iint \mathbf{L}(*b) - \int \nu^{\text{op}} + |\nu|$.

Массив $a' = \text{Com}(b)$ задает функцию $\tilde{h} = \text{Com}'(f) = \iint a' + \int \mu$. Из предложения 2 следует, что эта функция связана с функцией h простым пересчетом: $h(i, j) = \tilde{h}(n - j, n - j + i)$, и нам остается понять, как выражается массив $a' = \partial\partial\tilde{h}$ в терминах массива $\tilde{b} = \text{Com}(b) = \partial\partial h$. Точнее, мы выразим $\tilde{b}$ через a' . По определению имеем

$$\tilde{b}(i, j) = h(i, j) - h(i - 1, j) - h(i, j - 1) + h(i - 1, j - 1).$$

Выражая h через $\tilde{h}$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{b}(i, j) &= \tilde{h}(n - j, n - j + i) - \tilde{h}(n - j, n - j + i + 1) \\ &\quad - \tilde{h}(n - j + 1, n - j + i + 1) + \tilde{h}(n - j + 1, n - j + i). \end{aligned}$$

Первые два слагаемых в этом выражении суть

$$\mu_{n-j+i} + a'(1, n - j + i) + a'(2, n - j + i) + \dots + a'(n - j, n - j + i).$$

Аналогично выражается разность третьего и четвертого слагаемых. Окончательно мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{b}(i, j) &= [\mu_{n-j+i} + a'(1, n - j + i) + a'(2, n - j + i) + \dots + a'(n - j, n - j + i)] \\ &\quad - [\mu_{n-j+i+1} + a'(1, n - j + i + 1) + a'(2, n - j + i + 1) + \dots \\ &\quad \dots + a'(n - j + 1, n - j + i + 1)]. \end{aligned}$$

Именно эта формула участвует при определении отображения γ в [8], и мы получаем, что наш комьютор Com (после отождествления множеств $\text{LR}(\nu \setminus \lambda, \mu)$ и $\text{SP}_{\mathbb{Z}}(\lambda, \mu; \nu)$) совпадает с отображением ρ'_2 . Поскольку согласно лемме 1 комьютор инволютивен, он совпадает со своим обратным. Но обратный к ρ'_2 , как показано в [8], равен ρ_2 . Поэтому отображение ρ_2 равно ρ'_2 и тоже совпадает с нашим комьютором. Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 4. *Комьютор совпадает с фундаментальными симметриями ρ_1 , ρ_2 и ρ'_2 Пака и Валлехо.*

§ 10. Дополнение. Доказательство теоремы 1

При доказательстве теоремы 1 нам удобнее будет считать, что начальные данные заданы на полу и наклонной стенке симплекса $\Delta_n(XYZ)$; соответственно вектор пропагации равен $(-1, -1, 1)$. Доказательство не содержит каких-то идейных соображений и представляет собой довольно бесхитростные манипуляции с неравенствами. Прежде чем переходить к общему случаю, полезно рассмотреть два простых случая.

Случай $n = 2$. Пусть F – поляризованная функция на $\Delta_2(OXYZ)$. Проверим справедливость всех ромбических неравенств. Здесь все ромбы лежат в точности на гранях тетраэдра. Если они лежат на полу или наклонной стенке, соответствующие ромбические неравенства выполнены по определению. Поэтому нужно рассматривать только ромбы на вертикальных стенках. Так как обе стенки симметричны, достаточно рассмотреть ромбы только на стенке OXZ

Рис. 15

(рис. 15). На этой стенке имеются только три ромба: ромб $000, 001, 101, 100$, ромб $200, 100, 001, 101$ и ромб $002, 001, 100, 101$. Два последних устроены аналогично, поэтому рассмотрим только два первых ромба.

Для первого ромба нам нужно показать, что

$$F(001) + F(100) \geq F(101) + F(000). \quad (13)$$

Так как 001 и 110 образуют главную диагональ октаэдра, то из условия поляризованности мы имеем неравенство

$$F(001) + F(110) \geq F(101) + F(010). \quad (14)$$

В силу ромбического неравенства для ромба $000, 100, 110, 010$, расположенного на полу, мы имеем

$$F(100) + F(010) \geq F(000) + F(110). \quad (15)$$

Суммируя неравенства (14) и (15), мы получаем (13).

Для второго ромба нам нужно показать, что

$$F(100) + F(101) \geq F(200) + F(001). \quad (16)$$

Из условия поляризованности выполнено либо равенство

$$F(001) + F(110) = F(101) + F(010), \quad (17)$$

либо равенство

$$F(001) + F(110) = F(100) + F(010). \quad (18)$$

Пусть выполнено равенство (17). Тогда из ромба $200, 110, 010, 100$, расположенного на полу, мы имеем неравенство

$$F(010) + F(200) \leq F(110) + F(100). \quad (19)$$

Суммируя (19) и (17), получаем нужное неравенство (16). Пусть выполнено равенство (18). Тогда ромб 200, 110, 010, 101, расположенный на наклонной стенке, дает неравенство

$$F(200) + F(010) \leq F(110) + F(101). \quad (20)$$

Суммируя (20) с равенством (18), мы получаем нужное неравенство (16).

Таким образом, случай $n = 2$ проверен.

Случай $n = 3$. Здесь мы рассмотрим усеченную пирамиду высотой 1, изображенную на рис. 16. Мы предполагаем, что ромбические неравенства вы-

Рис. 16

полнены для ромбов, лежащих на полу и наклонной стенке. Покажем, что нужные неравенства выполнены для ромбов верхнего основания. На верхней площадке расположены два существенно различных ромба: 001, 101, 111, 011 и 021, 111, 101, 011. И мы должны проверить два ромбических неравенства:

$$F(011) + F(101) \geq F(001) + F(111), \quad (21)$$

$$F(011) + F(111) \geq F(021) + F(101). \quad (22)$$

Докажем неравенство (21). Поскольку точка 001 является вершиной главной диагонали $\{001, 110\}$, то сумма $F(001) + F(110)$ равна либо $F(011) + F(100)$, либо $F(101) + F(010)$. Допустим, что $F(001) + F(110) = F(101) + F(010)$. Так как точка 011 и точка 120 образуют главную диагональ октаэдра, то $F(011) + F(120) \geq F(020) + F(111)$. Наконец, ромб 110, 120, 020, 010, расположенный на полу, дает неравенство $F(020) + F(110) \geq F(010) + F(120)$. Суммируя эти два неравенства с равенством $F(101) + F(010) = F(011) + F(110)$, мы получаем (21). Случай $F(001) + F(110) = F(011) + F(100)$ разбирается симметрично.

Установим теперь неравенство (22). Поскольку точки 011 и 120 являются вершинами главной диагонали октаэдра, мы имеем неравенство поляризации

$$F(011) + F(120) \geq F(021) + F(110).$$

С другой стороны, точки 101 и 210 образуют диагональ октаэдра. Поэтому мы имеем одно из равенств: либо а) $F(101) + F(210) = F(200) + F(111)$, либо б) $F(101) + F(210) = F(110) + F(201)$.

а) $F(200) + F(111) = F(101) + F(210)$. Для ромба, расположенного на полу, мы имеем $F(110) + F(210) \geq F(120) + F(200)$. Суммируя $F(011) + F(120) \geq F(021) + F(110)$, $F(200) + F(111) = F(101) + F(210)$ и $F(110) + F(210) \geq F(120) + F(200)$, мы получаем (22).

б) $F(110) + F(201) = F(101) + F(210)$. Здесь нам понадобится ромбическое неравенство для ромба, расположенного на наклонной стенке, а именно $F(210) + F(111) \geq F(120) + F(201)$. Поскольку точки 011 и 120 являются вершинами главной диагонали октаэдра, имеет место неравенство поляризации $F(011) + F(120) \geq F(021) + F(110)$. Суммируя последние два неравенства с равенством б), мы получаем (22).

Итак, случай $n = 3$ разобран.

Из разобранных выше случаев получается следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть поляризованная функция F дискретно вогнута при ограничении на пол и наклонную стенку. Тогда она дискретно вогнута при ограничении на любую плоскость, параллельную полу или этой наклонной стенке.

Из случая $n = 3$ мы видим, что выполнены ромбические неравенства для любого горизонтального ромба на высоте 1, который касается наклонной стенки. Симметрично выполнены неравенства для любого ромба, лежащего в плоскости $x + y + z = n - 1$ и касающегося пола. Из случая $n = 3$, примененного к меньшему тетраэдру Δ_{n-1} , мы получаем ромбические неравенства для горизонтальных ромбов на высоте 1, касающихся стенки $x + y + z = n - 1$, и так далее. Мы получаем в конце концов, что неравенства выполнены для любого горизонтального ромба на высоте 1. Симметрично они выполнены для любого ромба, лежащего в плоскости $x + y + z = n - 1$. Но теперь наша поляризованная функция F дискретно вогнута не только на стенке $x + y + z = n$, но и на стенке $x + y + z = n - 1$. По индукции она дискретно вогнута на любой плоскости вида $x + y + z = k$, $1 \leq k \leq n$. Аналогично, она дискретно вогнута на любой горизонтальной плоскости.

Теперь можно приступить к доказательству теоремы 1 в общем случае. Рассмотрим любой ромб внутри тетраэдра $\Delta_n(OXYZ)$ и опишем вокруг него тетраэдр размером 2. Так как по лемме 2 на полу и наклонной стенке этого тетраэдра поляризованная функция F дискретно вогнута, то из случая $n = 2$ мы получаем, что она дискретно вогнута в этом тетраэдре, и поэтому выполнено соответствующее ромбическое неравенство.

Список литературы

1. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1979.
2. W. Fulton, *Young tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

3. В. И. Данилов, Г. А. Кошевой, “Массивы и комбинаторика таблиц Юнга”, *УМН*, **60**:2 (2005), 79–142; англ. пер.: V. I. Danilov, G. A. Koshevoi, “Arrays and the combinatorics of Young tableaux”, *Russian Math. Surveys*, **60**:2 (2005), 269–334.
4. W. Fulton, “Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus”, *Bull. Amer. Math. Soc.* (2), **37**:3 (2000), 209–249.
5. A. S. Buch, “The saturation conjecture (after A. Knutson and T. Tao)”, *Enseign. Math.* (2), **46**:1–2 (2000), 43–60.
6. A. Knutson, T. Tao, “The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products. I: Proof of the saturation conjecture”, *J. Amer. Math. Soc.*, **12**:4 (1999), 1055–1090.
7. A. Henriques, J. Kamnitzer, “The octahedron recurrence and gl_n crystals”, *Adv. Math.*, **206**:1 (2006), 211–249.
8. I. Pak, E. Vallejo, *Reductions of Young tableau bijections*, [arXiv:math.CO/0408171](https://arxiv.org/abs/math/0408171).
9. A. Knutson, T. Tao, C. Woodward, “A positive proof of the Littlewood–Richardson rule using the octahedron recurrence”, *Electron. J. Combin.*, **11**:1 (2004), 61; [arXiv:math.CO/0306274](https://arxiv.org/abs/math/0306274).
10. V. Danilov, G. Koshevoy, *Arrays and octahedron recurrence*, [arXiv:math.CO/0504299](https://arxiv.org/abs/math/0504299).
11. В. И. Данилов, Г. А. Кошевой, “Дискретная выпуклость и эрмитовы матрицы”, Тр. МИАН, **241**, Наука, М., 2003, 68–89; англ. пер.: V. I. Danilov, G. A. Koshevoi, “Discrete convexity and Hermitian matrices”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **241** (2003), 58–78.
12. D. E. Speyer, “Perfect matchings and the octahedron recurrence”, *J. Algebraic Combin.*, **25**:3 (2007), 309–348; [arXiv:math.CO/0402452](https://arxiv.org/abs/math/0402452).
13. S. Fomin, A. Zelevinsky, “The Laurent phenomenon”, *Adv. in Appl. Math.*, **28**:2 (2002), 119–144; [arXiv:math.CO/0104241](https://arxiv.org/abs/math/0104241).

В. И. ДАНИЛОВ (V. I. DANILOV)
 Центральный экономико-математический институт РАН
E-mail: vdanilov43@mail.ru

Поступило в редакцию
 01.04.2005
 15.05.2007

Г. А. КОШЕВОЙ (G. A. KOSHEVOY)
 Центральный экономико-математический институт РАН
E-mail: koshevoy@cemi.rssi.ru