Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Желобенко, Дифференциальные операторы в градуированных алгебрах,
Изв. РАН. Сер. матем., 1996, том 60, выпуск 2, 49–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/im71>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:03:44

УДК 519.46

Д. П. Желобенко

Дифференциальные операторы в градуированных алгебрах

В статье рассматриваются общие вопросы, связанные с определением и исследованием абстрактных дифференциальных операторов в ассоциативных градуированных алгебрах. Исследуются связи между специальными классами таких операторов. Доказываются некоторые структурные теоремы и некоторые аналоги теоремы плотности для алгебры дифференциальных операторов. Рассматриваются в качестве иллюстрации классические и квантовые алгебры Серра.

Библиография: 14 наименований.

Понятие дифференциального оператора на алгебраическом многообразии относится к числу основных понятий алгебраической геометрии. Дифференциальные операторы на многообразии M суть линейные операторы, действующие в алгебре $A(M)$ регулярных функций на M и связанные некоторыми соотношениями нильпотентности с операторами умножения на функции из $A(M)$. При этом существенна коммутативность структурной алгебры $A(M)$.

Изложенная конструкция допускает двойное обобщение, в духе общей программы развития “некоммутативной алгебраической геометрии”, намеченной, например, во введении к книге [2]. С одной стороны, речь по-прежнему идет об исследовании линейных операторов, действующих в некоторой алгебре A , причем эта алгебра предполагается ассоциативной, но не обязательно коммутативной. Отказ от коммутативности в известной степени компенсируется другими ограничениями, которые в нашем контексте сводятся к наличию некоторой специальной градуировки относительно аддитивной упорядоченной группы (например, группы $\mathbb{Z}$). С другой стороны, как подсказывает недавнее развитие теории квантовых групп, в ситуации, связанной с градуированными алгебрами, естественно рассматривать некоторые “подкрученные” дифференциальные операторы, определение которых основано на надлежащем обобщении понятия коммутатора в градуированных алгебрах. Впрочем, этот подход широко используется в частном случае $\mathbb{Z}_2$ -градуированных алгебр (супералгебр), в том числе в их известных приложениях к задачам алгебраической топологии (см., например, [13]).

Содержание статьи сводится к следующему. В § 1 изложены предварительные сведения и основные определения. Дается определение алгебры дифференциальных операторов $D(A)$, ассоциированной с градуированной алгеброй A . Алгебра $D(A)$ порождается своей подалгеброй A и некоторой дуальной подалгеброй D , причем выполняются следующие соотношения: $D(A) = AD = DA$. В § 2 изложены вспомогательные результаты, связанные с рассмотрением некоторых билинейных форм в алгебре $D(A)$. Здесь же вводятся три специальных класса алгебр A

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант 95-01-0233).

(регулярные, вполне дифференцируемые, невырожденные), основные результаты для которых собраны в § 3. Остановимся на кратком обзоре этих результатов.

(А) *Регулярные алгебры* A (см. п. 2.1) характеризуются наличием двойственности между векторными пространствами A , D , что сводится к наличию достаточно большого запаса дифференциальных операторов в алгебре A . Существенный смысл этого понятия раскрывается в теореме 3.1, основное содержание которой представляет собой градуированный аналог теоремы плотности для алгебры $D(A)$. В частности, алгебра $D(A)$ оказывается плотной в $\text{End } A$ (относительно поточечной сходимости).

(В) *Вполне дифференцируемые алгебры* A (см. п. 2.3) обладают достаточно большим запасом операторов первого порядка. Для этих алгебр существуют простые критерии регулярности и невырожденности (теорема 3.4).

(С) *Невырожденные алгебры* A (см. п. 2.8) допускают полное описание в терминах образующих и соотношений между ними. В этом случае алгебра $D(A)$ порождается операторами первого порядка. Более того, в этом случае двойственность между алгебрами A , D становится симметричной (инволютивной), так что алгебры A , D сопряжены друг другу относительно некоторой инволюции алгебры $D(A)$ (теорема 3.6).

В § 4 приводится иллюстрация этих результатов на примере классических и квантовых алгебр Серра. Следует отметить, что алгебры Серра представляют собой естественный объект некоммутативной алгебраической геометрии. С одной стороны, эти алгебры в известном смысле близки к коммутативным. С другой стороны, хорошо известна роль этих алгебр в структурной теории и теории представлений других алгебраических структур (редуктивные алгебры Ли, алгебры Каца–Мули, алгебры Дринфельда–Джимбо). Например, каждая алгебра Дринфельда–Джимбо может быть реализована (см. п. 4.9) посредством дифференциальных операторов, действующих в борелевской оболочке соответствующей квантовой алгебры Серра.

Интересно отметить, что классические алгебры Серра $X(a)$ вырождаются в смысле п. 2.8 (см. п. 3.10), в то время как их квантовые аналоги $X_q(a)$ невырождены (см. п. 4.6). Впрочем, это соответствует известному принципу квантовой теории, согласно которому “квантование снимает вырождение”.

В § 5 описаны все невырожденные алгебры в терминах образующих и структурных коэффициентов (предложение 5.5).

Наконец, в § 6 определяются некоторые аналоги псевдодифференциальных операторов в алгебре A . Показано (теорема 6.4), что в невырожденном случае алгебра псевдодифференциальных операторов достаточно велика, что также может рассматриваться как некоторый вариант теоремы плотности в терминах формальных рядов над алгеброй $D(A)$.

Изложение в этой статье носит в основном элементарный характер. Исключение составляет лишь § 4, в котором используются несколько более специальные сведения, относящиеся к алгебрам Серра. Более детальное исследование алгебр $D(A)$ предполагается изложить в отдельной статье.

Элементы алгебры $D(A)$ допускают естественную “квантовую” трактовку в терминах (обобщенных) операторов рождения и уничтожения. В этом смысле построение алгебры $D(A)$ можно рассматривать как восстановление полной алгебры наблюдаемых по ее подалгебре, образующие которой интерпретируются как операторы рождения. При этом существенно, что $D(A)$ действует в A (обобщенное

представление Фока).

Содержание этой статьи может также рассматриваться в рамках общей теории контрагredientных алгебр (см., например, [6], [7]). Во всяком случае, если алгебра A невырождена, то $D(A)$ есть невырожденная контрагredientная алгебра в смысле [7] и пространство A есть универсальный модуль Верма над алгеброй $D(A)$.

§ 1. Основные определения

1.1. Пусть A – ассоциативная алгебра с единицей над полем F , градуированная подпространствами A_α , $\alpha \in \Gamma$, где Γ – некоторая аддитивная группа. Иначе говоря, имеем

$$A = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha, \quad A_\alpha A_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$$

для всех $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Элементы $x \in A_\alpha$ называются *однородными степени α* , с обозначением $\deg x = \alpha$ (так что символ $\deg x$ однозначно определен при $0 \neq x \in A_\alpha$). Подпространство $B \subset A$ называется *градуированным* (или Γ -*градуированным*), если оно совпадает с суммой своих однородных компонент $B_\alpha = B \cap A_\alpha$.

Заметим также, что A_0 есть подалгебра с единицей алгебры A (здесь 0 – нейтральный элемент группы Γ).

1.2. Элемент $a \in \text{End } A$ называется *однородным степени α* , если $aA_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$ для всех $\beta \in \Gamma$. Однородные элементы степени α образуют подпространство $E(A)_\alpha \subset \text{End } A$. Легко видеть, что эти подпространства линейно независимы. Их прямая сумма

$$E(A) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} E(A)_\alpha$$

есть Γ -градуированная алгебра (подалгебра в $\text{End } A$). Элементы $a \in E(A)$ называются *градуированными* (или Γ -*градуированными*) *операторами* в алгебре A .

В частности, для каждого $a \in A$ оператор левого умножения $l(a)x = ax$, где $x \in A$, градуирован. Отображение $a \mapsto l(a)$ инъективно (поскольку A содержит единицу) и определяет вложение градуированных алгебр $A \rightarrow E(A)$.

В дальнейшем мы отождествляем элементы $a, l(a)$, т.е. рассматриваем A как подалгебру в $E(A)$.

1.3. Числовая функция $\varepsilon: \Gamma \times \Gamma \rightarrow F$ называется *мультипликатором* (или *бихарактером*) *группы Γ* , если каждая из функций $\varepsilon(\alpha, \cdot)$, $\varepsilon(\cdot, \beta)$ есть характер группы Γ . В частности, $\varepsilon(\alpha, 0) = \varepsilon(0, \beta) = 1$ для всех $\alpha, \beta \in \Gamma$. Полагая

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon(\alpha, \beta) \quad \text{при} \quad \deg x = \alpha, \quad \deg y = \beta, \quad (1.1)$$

получаем новую функцию ε , определенную на декартовых произведениях $A_\alpha \times A_\beta$ и мультипликативную по каждому аргументу, т.е.

$$\varepsilon(xy, z) = \varepsilon(x, z)\varepsilon(y, z), \quad \varepsilon(x, yz) = \varepsilon(x, y)\varepsilon(x, z) \quad (1.2)$$

для всех однородных $x, y, z \in A$. Помимо этого имеем $\varepsilon(x, z) = \varepsilon(z, y) = 1$ для всех однородных $x, y \in A$ и всех $z \in A_0$. Выражение

$$[x, y]_\varepsilon = xy - \varepsilon(x, y)yx \quad (1.3)$$

билинейно на каждом декартовом произведении $A_\alpha \times A_\beta$ и потому продолжается по билинейности до операции умножения, называемой ε -коммутатором элементов $x, y \in A$.

Используя соотношения мультипликативности (1.2), находим

$$[xy, z]_\varepsilon = x[y, z]_\varepsilon + \varepsilon(y, z)[x, z]_\varepsilon y, \quad (1.4)$$

$$[x, yz]_\varepsilon = [x, y]_\varepsilon z + \varepsilon(x, y)y[x, z]_\varepsilon \quad (1.5)$$

для всех однородных $x, y, z \in A$.

Числовая функция (1.1) называется *структурным коэффициентом алгебры* A . Мы будем иногда использовать обозначения (A, ε) , $E(A, \varepsilon)$ вместо A , $E(A)$ (соответственно) в том случае, когда в данной алгебре фиксирован структурный коэффициент (1.1).

1.4. Однородный элемент $a \in \text{End } A$ называется *дифференцированием* (или ε -дифференцированием) алгебры A , если

$$a(xy) = a(x)y + \varepsilon(a, x)xa(y) \quad (1.6)$$

для всех однородных $x, y \in A$. Здесь функция ε рассматривается как структурный коэффициент алгебры $E(A, \varepsilon)$. Соотношение (1.6) остается справедливым для всех $y \in A$ и поэтому может быть записано в виде

$$[a, x]_\varepsilon = a(x), \quad (1.7)$$

где элементы x , $a(x)$ рассматриваются как операторы левого умножения в алгебре A .

Полагая $x = y = 1$ в равенстве (1.6), находим $a(1) = 0$, при условии $\text{char } F \neq 2$.

Заметим, что функция $\varepsilon = 1$ (т.е. $\varepsilon(\alpha, \beta) = 1$ для всех $\alpha, \beta \in \Gamma$) есть мультипликатор группы Γ . Соотношения (1.3), (1.6) в этом случае сводятся к обычным определениям коммутатора и дифференцирования в алгебре A .

1.5. Алгебра A называется *стандартной*, если она обладает системой однородных образующих x_i ($i \in I$), для которых элементы $\alpha_i = \deg x_i$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_+$, т.е. равенство $\sum_i n_i \alpha_i = 0$, где $n_i \in \mathbb{Z}_+$, возможно только при $n_i = 0$ для всех $i \in I$. В этом (и только этом) случае отношение $\alpha \geq \beta$ при $\alpha - \beta \in \Gamma_+$, где $\Gamma_+ = \sum_i \mathbb{Z}_+ \alpha_i$, наделяет группу Γ структурой упорядоченной группы, при которой $\alpha_i > 0$ для всех $i \in I$.

Заменяя группу Γ соответствующей подгруппой, будем считать, не ограничивая общности, что Γ порождается элементами α_i ($i \in I$).

Если алгебра A стандартна, то $A_\alpha = 0$ при $\alpha \notin \Gamma_+$ (т.е. A обладает Γ_+ -градуировкой), $A_0 = F \cdot 1$. Отсюда

$$A = F \oplus \sum_i x_i A, \quad (1.8)$$

где $A_0 = F \cdot 1$ отождествляется с полем F .

Очевидно, каждая Γ_+ -градуированная алгебра A обладает более грубой $\mathbb{Z}_+$ -градуировкой A_n ($n \in \mathbb{Z}_+$), определяемой степенями $|\alpha| = \sum_i n_i$ при $\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$. Иначе говоря, A_n есть сумма компонент A_α при $|\alpha| = n$.

Если алгебра A стандартна, то будем считать, что элементы x_i ($i \in I$) линейно независимы, т.е. образуют базис в A_1 . Нетрудно видеть (из соображений градуировки), что x_i ($i \in I$) есть минимальная система $\mathbb{Z}$ -однородных образующих алгебры A . Более того, эта система единственна с точностью до автоморфизма $\mathbb{Z}$ -градуированной алгебры A (поскольку A_1 есть наименьшее градуированное подпространство, порождающее алгебру A). То же верно в терминах Γ -градуировки, если элементы α_i ($i \in I$) просты (т.е. их невозможно представить в виде $\alpha + \beta$, где $0 \neq \alpha, \beta \in \Gamma_+$).

Алгебра A называется алгеброй *конечного типа*, если $\dim A_\alpha < \infty$ для всех $\alpha \in \Gamma$. Если A – стандартная конечнопорожденная алгебра ($\text{card } I < \infty$), то A есть алгебра конечного типа даже в смысле $\mathbb{Z}_+$ -градуировки, т.е. $\dim A_n < \infty$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

ПРИМЕР. Пусть A – свободная алгебра с образующими x_i ($i \in I$), и пусть Γ – аддитивная группа с образующими α_i ($i \in I$). В этом случае существует единственная Γ -градуировка алгебры A , определяемая на образующих по правилу $\deg x_i = \alpha_i$ ($i \in I$).

1.6. Пусть (A, ε) есть стандартная алгебра. Определим подпространство $D \subset E(A)$ как наибольшее подпространство, удовлетворяющее следующим условиям:

- (α) $D_{-\alpha} = 0$ при $\alpha \notin \Gamma_+$;
- (β) $D_0 = F$;
- (γ) $[D, x_i]_\varepsilon \subset D$ для всех $i \in I$.

Из этого определения следует, что подпространство D градуировано. Действительно, пусть $\bar{D}$ – прямая сумма компонент D_α ($\alpha \in \Gamma$). Нетрудно видеть, что $\bar{D}$ удовлетворяет условиям (α), (β), (γ), откуда $\bar{D} = D$. С другой стороны, пусть $\tilde{D}$ – подалгебра алгебры $E(A)$, порожденная элементами $a \in D$. Применяя правило коммутирования (1.4) к одночленам от этих элементов, находим, что $\tilde{D}$ удовлетворяет условиям (α), (β), (γ), откуда $\tilde{D} = D$. Таким образом, D есть градуированная подалгебра алгебры $E(A)$.

Согласно (β), (γ) однородные компоненты $D_{-\alpha}$ ($\alpha \in \Gamma_+$) определяются рекуррентно следующим образом: $D_{-\alpha}$ есть множество всех элементов $a \in E(A)_{-\alpha}$, удовлетворяющих соотношениям

$$(\delta) \quad [a, x_i]_\varepsilon \in D_{-\alpha+\alpha_i} \quad \text{для всех } i \in I.$$

С другой стороны, имеем

$$(\varepsilon) \quad a(A_\beta) = 0 \text{ при } \beta < \alpha$$

(поскольку это верно для всех элементов $a \in E(A)_{-\alpha}$).

Легко проверить, что соотношение $\deg a = -\alpha$ вытекает из условий (δ), (ε). Поэтому $D_{-\alpha}$ можно определить как множество всех элементов $a \in E(A)$, удовлетворяющих соотношениям (δ), (ε).

1.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A есть стандартная алгебра (см. п. 1.5), и пусть $D(A)$ – подалгебра в $E(A)$, порожденная подалгебрами A , D (см. п. 1.6). Тогда имеем:

- (i) коммутатор $[D_{-\alpha}, A_\beta]_\varepsilon$, $\alpha, \beta \in \Gamma_+$, содержится в подпространстве

$$C_{\alpha\beta} = \sum A_\gamma D_{-\delta} = \sum D_{-\delta} A_\gamma, \quad (1.9)$$

где сумма берется по индексам $\gamma < \beta$, $\delta < \alpha$;

(ii) в алгебре $D(A)$ выполняются соотношения

$$D(A) = AD = DA; \quad (1.10)$$

(iii) алгебра $D(A)$ обладает Γ_+ -фильтрацией $D_\alpha(A)$, определяемой как сумма подпространств $AD_{-\beta}$ при $\beta \leq \alpha$.

Таким образом,

$$D(A) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_+} D_\alpha(A), \quad D_\alpha(A)D_\beta(A) \subset D_{\alpha+\beta}(A)$$

для всех $\alpha, \beta \in \Gamma_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Утверждение очевидно при $\beta = 0$. В общем случае – индукция по $|\beta|$. Заметим вначале, что равенство двух сумм в определении (1.9) вытекает из допущения индукции по $|\beta|$. Для проведения дальнейшей индукции достаточно заменить A_β на $x_i A_\beta$, где $i \in I$. Используя правило коммутирования (1.5), условие (γ) и допущение индукции для индекса β , находим

$$[D_{-\alpha}, x_i A_\beta]_\varepsilon \subset [D_{-\alpha}, x_i]_\varepsilon A_\beta + x_i [D_{-\alpha}, A_\beta]_\varepsilon \subset D_{-\alpha+\alpha_i} A_\beta + x_i C_{\alpha\beta} \subset C_{\alpha, \beta+\alpha_i},$$

откуда следует (i) для всех $\alpha, \beta \in \Gamma_+$.

(ii) Применяя правило (i), находим, что каждый одночлен от образующих, лежащих в $A \cup D$, содержится в AD (аналогично в DA).

(iii) Применяя правило (i), находим $D_{-\beta}A \subset D_\alpha(A)$ для всех $\beta \leq \alpha$, откуда вытекают соотношения мультипликативности для подпространств $D_\alpha(A)$.

1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементы алгебры $D(A)$ называются *дифференциальными операторами в алгебре $A = (A, \varepsilon)$* . Элементы $a \in D_\alpha(A)$ называются *операторами порядка $\leq \alpha$* , с обозначением $\text{ord } a \leq \alpha$.

Условимся также использовать обозначение $D_n(A)$ для соответствующей $\mathbb{Z}_+$ -фильтрации алгебры $D(A)$. Элементы $a \in D_n(A)$ называются *операторами порядка $\leq n$* , с обозначением $\text{ord } a \leq n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определение алгебры $D(A)$ инвариантно в терминах $\mathbb{Z}$ -градуировки, поскольку условие (γ) может быть записано в виде $[D, A_1] \subset D$ (см. также п. 1.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Элементы алгебры D можно интерпретировать как дифференциальные операторы “с постоянными коэффициентами” в алгебре A .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Определение алгебры $D(A)$ естественно обобщается на случай Γ_+ -градуированной алгебры A . Более того, пусть $D(\Phi)$ – аналог алгебры D , получаемый заменой условия (β) условием $D_0 = \Phi$, где Φ – фиксированная подалгебра в A_0 . Согласно (α) , (γ) это определение корректно только при $\Phi \subset Z(A)$, где $Z(A)$ – центр алгебры A .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $A = Z(A)_0$, то $D(A)$ совпадает с известной алгеброй дифференциальных операторов в коммутативной (тривиально градуированной) алгебре A .

1.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Каждый оператор $a \in D_{-\alpha}$ однозначно определяется своими значениями на подпространстве A_α . Иначе говоря, если $a = b$ на A_α для элементов $a, b \in D_{-\alpha}$, то $a = b$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что равенство $a = 0$ на A_α влечет $a = 0$. При $\alpha = 0$ это очевидно. Полагая $\alpha \neq 0$, заметим, что $[a, x_i]_\varepsilon = 0$ на $A_{\alpha-\alpha_i}$ для всех $i \in I$, откуда $[a, x_i]_\varepsilon = 0$ (допущение индукции по $|\alpha|$). Следовательно, $[a, x]_\varepsilon = 0$ для всех $x \in A$. В частности, $ax = \lambda xa$ для всех однородных $x \in A$, где $\lambda = \varepsilon(a, x)$. Применяя это операторное равенство к элементу $1 \in A$ и учитывая, что $a(1) = 0$ (условие (ε) при $\beta = 0$), получаем $a(x) = 0$ для всех $x \in A$, т.е. $a = 0$.

1.10. Приведем описание алгебры $D(A)$ в случае, когда A – свободная конечно-порожденная алгебра с образующими x_i ($i \in I$), наделенная $\mathbb{Z}$ -градуировкой по правилу $\deg x_i = 1$ ($i \in I$). Достаточно построить базисы векторных пространств D_{-n} , где $n \in \mathbb{Z}_+$.

Напомним, что $D_0 = F$. Пространство D_{-1} содержит базис из элементов ∂_i ($i \in I$), определяемых соотношениями

$$[\partial_i, x_j]_\varepsilon = \delta_{ij}, \quad (1.11)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Заметим, что операторы ∂_i можно также определить как ε -дифференцирования алгебры A , определяемые на образующих следующим образом:

$$\partial_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (1.12)$$

где $i, j \in I$.

Допустим, что искомый базис a_p ($p \in P$) в пространстве D_{-n} уже построен. Соотношение $[a, x_j]_\varepsilon = \delta_{ij}a_p$ для всех $j \in I$ наряду с условием (ε) , т.е. $a(A_m) = 0$ при $m < n$, однозначно определяет оператор $a = a_{ip} \in D_{-n-1}$. Нетрудно видеть, что эти операторы образуют базис в D_{-n-1} .

Отсюда, полагая $c = \text{card } I$, находим $\dim D_{-n-1} = c^n = \dim A_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

§ 2. Билинейные формы

2.1. Всюду в этом параграфе $A = (A, \varepsilon)$ есть стандартная алгебра (см. п. 1.5). Мы будем рассматривать следующую билинейную форму в алгебре $E(A)$:

$$\langle x, y \rangle = \delta_{\alpha\beta}xy(1) \quad \text{при } x \in E(A)_{-\alpha}, \quad y \in E(A)_\beta. \quad (2.1)$$

Иначе говоря, равенство (2.1) однозначно определяет форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $E(A) \times E(A)$, причем $\langle x, y \rangle = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\langle x, y \rangle = xy(1) \in F$ при $\alpha = \beta$.

Билинейная форма (2.1) принимает следующий вид на декартовом произведении $E(A) \times A$:

$$\langle x, y \rangle = \delta_{\alpha\beta}x(y) \quad \text{при } x \in E(A)_{-\alpha}, \quad y \in A_\beta. \quad (2.2)$$

Заметим, что форма (2.2) невырождена слева на $D \times A$, т.е. равенство $\langle x, A \rangle = 0$ для элементов $x \in D$ влечет $x = 0$. Действительно, достаточно рассматривать однородные элементы $x \in D_{-\alpha}$ ($\alpha \in \Gamma_+$), для которых равенство $\langle x, A_\alpha \rangle = 0$ влечет $x = 0$ (предложение 1.9).

Алгебра A называется *регулярной*, если форма (2.2) невырождена справа, т.е. равенство $\langle D, y \rangle = 0$ для элементов $y \in A$ влечет $y = 0$. В этом случае форма (2.2) определяет двойственность векторных пространств D, A (невырожденную на $D_{-\alpha} \times A_\alpha$, где $\alpha \in \Gamma_+$).

Соответственно алгебра $D(A) = AD = DA$ (см. п. 1.7) называется *двойственной оболочкой алгебры A* .

2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Регулярность алгебры A равносильна выполнению хотя бы одного из следующих двух условий:*

(α) *для каждого $\alpha \in \Gamma_+$ и каждого $y \in A_\alpha$ из равенства $D_{-\alpha}(y) = 0$ следует $y = 0$;*

(β) *для каждого $y \in A$ из равенства $D_+(y) = 0$, где $D_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_+} D_{-\alpha}$, следует $y \in F$.*

Если A конечного типа, то регулярность алгебры A равносильна также следующему условию:

(γ) $\dim D_{-\alpha} = \dim A_\alpha$ *для всех $\alpha \in \Gamma_+$.*

Действительно, критерий (α) очевиден ввиду биортогональности семейств $D_{-\alpha}, A_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma_+$). Ясно также, что (α) влечет (β). Обратно, допустим, что (β) выполняется, и докажем (α) индукцией по $|\alpha|$. Утверждение очевидно при $\alpha = 0$. Полагая $\alpha \neq 0$, заметим, что элементы $z \in D_{-\beta}(y)$ содержатся в $A_{\alpha-\beta}$, и поэтому могут быть отличны от нуля только при $\alpha \geq \beta$. Полагая $\beta \neq 0$, находим в этом случае $|\alpha - \beta| < |\alpha|$, $D_{\beta-\alpha}(z) = 0$, откуда ввиду допущения индукции следует $z = 0$. Таким образом, равенство $D_{-\alpha}(y) = 0$ влечет $D_+(y) = 0$, т.е. $y \in F$. Однако $F \cap A_\alpha = 0$ при $\alpha \neq 0$, т.е. $y = 0$.

Если A конечного типа, то условие (γ) необходимо для двойственности между D и A . С другой стороны, если (γ) выполняется, то из левой невырожденности формы (2.2) (см. п. 2.1) следует ее невырожденность (поскольку форма (2.2) имеет ненулевой дискриминант).

ПРИМЕР. Каждая свободная конечнопорожденная алгебра A регулярна (см. п. 1.10).

Ниже будут получены другие критерии регулярности алгебры A в терминах операторов первого порядка, определенных в алгебре A (см. пп. 2.4, 3.4).

2.3. Алгебра A называется *вполне дифференцируемой*, если в ней определены операторы ∂_i ($i \in I$), удовлетворяющие соотношениям (1.11) с добавочным условием $\partial_i(1) = 0$. Согласно п. 1.4, 1.5 имеем $\partial_i \in D_{-\alpha_i}$ для всех $i \in I$.

Заметим, что алгебра A может быть представлена в виде B/C , где B – свободная алгебра с образующими x_i ($i \in I$), наделенная Γ -градуировкой по правилу $\deg x_i = \alpha_i$ ($i \in I$), C – ее градуированный идеал, не содержащий элементов $1, x_i$ ($i \in I$). Очевидно, алгебра B вполне дифференцируема. Если $\partial_i C \subset C$ для всех $i \in I$, то каждый оператор $\partial_i \in \text{End } B$ может также рассматриваться как элемент $\text{End } A$, т.е. алгебра A вполне дифференцируема.

Обратно, если операторы $\partial_i \in \text{End } A$ существуют, то из равенства (1.11) следует, что их действие совпадает с действием одноименных операторов $\partial_i \in \text{End } B$ на каждом одночлене от образующих x_i ($i \in I$). При этом элементы $x \in C$ удовлетворяют соотношениям $\partial_i x = 0$, где $\partial_i \in \text{End } A$. Следовательно, $\partial_i C \subset C$ для элементов $\partial_i \in \text{End } B$.

Таким образом, алгебра $A = B/C$ вполне дифференцируема тогда и только тогда, когда $\partial_i C \subset C$ для элементов $\partial_i \in \text{End } B$.

2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть алгебра A вполне дифференцируема, и пусть выполняется следующее условие:

$$\bigcap_{i \in I} \ker \partial_i = F \quad (2.3)$$

(т.е. элементы $x \in F$ суть единственные решения системы уравнений $\partial_i x = 0$, где $i \in I$). Тогда алгебра A регулярна.

Действительно, равенство (2.3) влечет выполнение условия (β) предложения 2.2, т.е. алгебра A регулярна.

2.5. Предположим, что алгебра A вполне дифференцируема, и пусть $\Delta(A)$ – подалгебра с единицей в $D(A)$, порожденная элементами x_i, ∂_i ($i \in I$). Заметим, что условие (1.11) переписывается следующим образом:

$$\partial_i x_j - \varepsilon_{ij} x_j \partial_i = \delta_{ij}, \quad (2.4)$$

где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon(\partial_i, x_j)$. Используя эти соотношения, находим

$$\Delta(A) = A\Delta = \Delta A, \quad (2.5)$$

где Δ – подалгебра с единицей, порожденная элементами ∂_i ($i \in I$).

Интересно выяснить, когда $D(A) = \Delta(A)$, т.е. алгебра $D(A)$ порождается операторами порядка ≤ 1 . Частичный ответ на этот вопрос будет получен в п. 3.4.

ПРИМЕР. Алгебра $A = (A, 1) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ вполне дифференцируема. В этом случае $D(A)$ есть алгебра Вейля с образующими x_i, ∂_i ($i = 1, \dots, n$).

2.6. Билинейная форма $(\cdot, \cdot)$ в алгебре A называется *контравариантной*, если

$$(x_i f, g) = (f, \partial_i g), \quad (\partial_i f, g) = (f, x_i g) \quad (2.6)$$

для всех $i \in I$ и всех $f, g \in A$.

Пусть $x \mapsto x'$ – формальное сопряжение, определяемое на одночленах $x = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ по правилу $x' = \partial_{i_n} \dots \partial_{i_1}$. Используя последовательно соотношения (2.6), находим

$$(x, y) = (y, x) = \pi(x' y) \cdot (1, 1) \quad (2.7)$$

для всех $y \in A$, где $\pi: A \rightarrow F$ – проекция, определяемая равенством (1.8). Соотношение (2.7) выполняется также для всех $x, y \in A$ при каждом (неоднозначном) продолжении операции $x \mapsto x'$ на многочлены $x \in A$.

Из равенства (2.7) следует, что если в алгебре A существует контравариантная форма, то она симметрична и единственна с точностью до множителя $(1, 1) \in F$. Более того, градуировка алгебры A ортогональна относительно этой формы. Действительно, пусть $x \in A_\alpha, y \in A_\beta$. Если $\alpha \neq \beta$, то можем считать, не ограничивая общности, что α не меньше β , т.е. $\beta - \alpha \notin \Gamma_+$. Но тогда $x' y = 0$, т.е. $(x, y) = 0$.

Ясно также, что $x' y = \pi(x' y) \in F$ для элементов $x, y \in A_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma_+$). В результате получаем

$$(x, y) = (y, x) = \langle x', y \rangle \cdot (1, 1) \quad (2.8)$$

для всех $x, y \in A$. Отсюда следует, что ненулевая форма (2.8) определена в алгебре A тогда и только тогда, когда отображение $x \mapsto x'$ однозначно определено в алгебре A .

2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть алгебра A вполне дифференцируема. Тогда в ней существует единственная контравариантная форма $(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющая условию нормировки $(1, 1) = 1$. Более того, эта форма симметрична, т.е. $(x, y) = (y, x)$ для всех $x, y \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A – свободная алгебра с образующими x_i ($i \in I$), то равенство (2.8) однозначно определяет искомую форму на базисных одночленах от образующих алгебры A .

В общем случае положим $A = B/C$ в обозначениях п. 2.3, так что в алгебре B искомая форма (2.8) существует. Заметим, что равенство (2.8) для однородных элементов может быть переписано следующим образом:

$$(x, y) = x'(y) = y'(x). \quad (2.9)$$

Напомним (см. п. 2.3), что $\partial_i C \subset C$ для элементов $\partial_i \in \text{End } B$. Поэтому $x'C \subset C$ для всех $x \in B$. Полагая $x \in B_\alpha$, $y \in C_\alpha$, находим $x'(y) \in C_0 = 0$, т.е. $(B_\alpha, C_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \Gamma_+$. В результате $(B, C) = 0$, т.е. C содержится в ядре формы (2.8).

Отсюда заключаем, что форма (2.8) может рассматриваться как контравариантная форма в алгебре $A = B/C$. Согласно п. 2.6 эта форма единственна при условии $(1, 1) = 1$.

2.8. Контравариантная форма (2.8), нормированная условием $(1, 1) = 1$, называется *канонической билинейной формой* в алгебре $A = (A, \varepsilon)$.

Алгебра A называется *невыврожденной*, если ее каноническая билинейная форма невырождена. В этом случае отображение $x \mapsto x'$ для элементов $x \in \text{End } A$ определено единственным образом как инволюция (сопряжение) относительно невырожденной формы (2.8).

Если алгебра A невырождена, то равенство (2.8) определяет двойственность векторных пространств A' , A относительно формы (2.2). Тем более это верно для пары D , A (поскольку $A' \subset D$). Таким образом, из невырожденности алгебры A следует ее регулярность.

Если алгебра A невырождена, то $\Delta(A)$ есть алгебра с инволюцией. В этом случае матрица ε_{ij} в соотношениях (2.4) должна быть симметричной. Действительно, применяя инволюцию к соотношениям (2.4), находим $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji})x_j \partial_i = 0$. Применяя этот оператор к элементу x_i , находим $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji})x_j = 0$, т.е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

ПРИМЕР. Если выполнено условие (2.3), то алгебра A невырождена (см. доказательство теоремы 3, 4, импликация $(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$).

2.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Ядро N билинейной формы (2.8) есть наибольший градуированный подмодуль $\Delta(A)$ -модуля A , не содержащий элемента 1 (т.е. $N_0 = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что N содержится в семействе S всех градуированных подмодулей $K \subset A$, для которых $K_0 = 0$. С другой стороны, семейство S содержит наибольший подмодуль M (определяемый как сумма всех подмодулей $K \in S$). Таким образом, $N \subset M$.

Предположим, что $N \neq M$, и пусть n – наименьшее из чисел $m \in \mathbb{Z}_+$, для которых $N_m \neq M_m$. Напомним, что $\deg \partial_i = -1$ ($i \in I$). Поэтому $\partial_i M_n \subset N$ для всех $i \in I$. Отсюда

$$(M_n, x_i A) = (\partial_i M_n, A) = 0,$$

т.е. M_n ортогонально A_m при $m \neq 0$. Поскольку $n \neq 0$, имеем также $(M_n, A) = 0$, т.е. $M_n \subset N$. Полученное противоречие означает, что $N = M$.

2.10. СЛЕДСТВИЕ. В условиях предложения 2.9 имеем:

- (i) пространство A/N есть простой объект в категории Γ_+ -градуированных ($\mathbb{Z}_+$ -градуированных) $\Delta(A)$ -модулей;
- (ii) алгебра A невырождена тогда и только тогда, когда A есть простой объект в категории Γ_+ -градуированных ($\mathbb{Z}_+$ -градуированных) $\Delta(A)$ -модулей.

Ниже будет показано (см. п. 3.6), что для алгебр конечного типа условие градуированности в (ii) можно отбросить (т.е. рассматривать A в категории всех $\Delta(A)$ -модулей).

2.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Содержание пп. 2.6–2.10 имеет очевидную аналогию с теорией контрагredientных алгебр (см., например, [6], [7]). В частности, если A невырождена, то $D(A)$ есть невырожденная контрагredientная алгебра в терминологии [7].

Заметим также, что из равенства $\Delta(A) = A\Delta$ следует $\Delta(A) = A \oplus L$, где L – левый идеал алгебры $\Delta(A)$, порожденный элементами ∂_i ($i \in I$). (Тот факт, что сумма прямая, следует из условий $\partial_i(1) = 0$.) Если алгебра A невырождена, то пространство $A \approx \Delta(A)/L$ совпадает с универсальным модулем Верма над алгеброй $\Delta(A)$ в терминологии [6], [7].

§ 3. Алгебры конечного типа

3.1. ТЕОРЕМА. Пусть A есть регулярная алгебра конечного типа, и пусть $A_{(\alpha)} = \bigoplus_{\beta \leq \alpha} A_\beta$. Тогда имеем:

- (i) для каждой линейно независимой системы $\xi_i \in A_{(\alpha)}$ ($i = 1, \dots, n$) и каждого набора $\eta_i \in A$ ($i = 1, \dots, n$) существует оператор $a \in D_\alpha(A)$ такой, что $a\xi_i = \eta_i$ для всех $i = 1, \dots, n$;
- (ii) каждое из разложений $D(A) = AD = DA$ свободно, т.е. изоморфно тензорному произведению своих компонент, относительно отображений вида $a \otimes b \mapsto ab$;
- (iii) A есть простой $D(A)$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Достаточно рассматривать случай, когда элементы ξ_i однородны. Пусть δ_i ($i = 1, \dots, n$) – дуальная система в пространстве $D_{(\alpha)} = \bigoplus_{\beta \leq \alpha} D_{-\beta}$ (существование этой системы следует из невырожденности формы (2.2) в конечномерных пространствах $D_{-\beta} \times A_\beta$). Таким образом, $\langle \delta_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Полагая $\delta_i \in D_{-\beta}$, $\xi_j \in A_\gamma$, находим $\delta_i(\xi_j) = 0$ при $\beta > \gamma$, $\delta_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ при $\beta = \gamma$. Поэтому нумерация $i = 1, \dots, n$ может быть выбрана таким образом, чтобы $\delta_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ при $i \leq j$.

Применяя к элементам δ_i процесс ортогонализации, получаем операторы $a_i \in D_\alpha(A)$, удовлетворяющие соотношениям $a_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. А именно операторы a_i ($i = 1, \dots, n$) определяются рекуррентно следующим образом:

$$a_i = \delta_i - \sum_{k < i} x_{ik} a_k, \quad (3.1)$$

где $x_{ij} = \delta_{ij}(\xi_j)$ при $i > j$. Заметим, что $\deg \delta_i = -\deg \xi_i$, поэтому из равенства (3.1) получаем (рекуррентно) $\deg a_i = \deg \delta_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Искомый

оператор $a \in D_\alpha(A)$ определяется теперь следующим образом:

$$a = \sum_{i=1}^n \eta_i a_i. \quad (3.2)$$

(ii) Пусть ξ_i ($i \in J$) – однородный базис пространства A , и пусть δ_i ($i \in J$) – дуальный базис пространства D , т.е. $\langle \delta_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}$ для всех $i, j \in J$. Из равенства $D(A) = AD$ следует, что $D(A)$ натянута на элементы $\xi_i \delta_j$ ($i, j \in J$). Положим

$$\sum_{i,j} c_{ij} \xi_i \delta_j = 0 \quad (3.3)$$

с коэффициентами $c_{ij} \in F$, и пусть n_0 – наименьшее из чисел $n \in \mathbb{Z}_+$, для которых $c_{ij} \neq 0$ при некоторых $\xi_i \in A_m$, $\delta_j \in D_{-n}$. Применяя операторное равенство (3.3) к элементу $\xi_j \in D_{-n_0}$, заметим, что $\delta_k(\xi_j) = \delta_{kj}$ для всех операторов δ_k , входящих в (3.3) с ненулевыми коэффициентами. Поэтому $\sum_i c_{ij} \xi_i = 0$, т.е. $c_{ij} = 0$ для всех $i \in J$.

Полученное противоречие означает, что $c_{ij} = 0$ для всех $i, j \in J$, т.е. элементы $\xi_i \delta_j$ образуют базис пространства $D(A)$. Таким образом, $D(A) \approx A \otimes D$, т.е. разложение $D(A) = AD$ свободно.

С другой стороны, из равенства $D(A) = DA$ следует, что $D(A)$ натянута на элементы $\delta_i \xi_j$ ($i, j \in J$). Положим

$$\sum_{i,j} c_{ij} \delta_i \xi_j = 0, \quad (3.4)$$

и пусть n_0 – наибольшее из чисел $n \in \mathbb{Z}_+$, для которых $c_{ij} \neq 0$ при некоторых $\delta_i \in D_{-k}$, $\xi_j \in A_m$, $k + m = n$. Применяя предложение 1.7, (i), перепишем равенство (3.4) следующим образом:

$$\sum_{i,j} c_{ij} \xi_j \delta_i + \sum_{i,j} \sigma_{ij} = 0, \quad (3.5)$$

где σ_{ij} содержит слагаемые вида (3.3) при $k + m < n_0$. Отсюда по аналогии с (3.3) заключаем, что $c_{ij} = 0$ при $k + m = n_0$. Полученное противоречие означает, что $c_{ij} = 0$ для всех $i, j \in J$, т.е. разложение $D(A) = DA$ свободно.

(iii) Согласно (i) при $n = 1$ модуль A совпадает с каждым циклическим подмодулем $D(A)\xi_0$, где $0 \neq \xi_0 \in A$. Но тогда модуль A совпадает с каждым своим ненулевым подмодулем, т.е. A есть простой $D(A)$ -модуль.

3.2. СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 3.1 имеем:

- (i) алгебра $D(A)$ как векторное пространство обладает биградуировкой $A_\alpha D_{-\beta}$ (аналогично $D_{-\beta} A_\alpha$), где $\alpha, \beta \in \Gamma_+$;
- (ii) каждый элемент $a \in D_\alpha(A)$ записывается в виде (3.2) с коэффициентами $\eta_i = a(\xi_i)$, где $\xi_i \in A_{(\alpha)}$;
- (iii) подпространство $AD_{-\alpha}$ совпадает с множеством всех $a \in D_\alpha(A)$ таких, что $a(A_\beta) = 0$ при $\beta < \alpha$.

Действительно, (i) вытекает непосредственно из теоремы 3.1, (ii). Для доказательства (ii) достаточно использовать (3.1) в инверсной форме для элементов δ_j , входящих в линейные комбинации типа (3.3). Наконец, для доказательства (iii) достаточно рассматривать элементы (3.2), лежащие в сумме компонент $AD_{-\beta}$ при $\beta < \alpha$. В этом случае условие $a(A_\beta) = 0$ для всех $\beta < \alpha$ влечет $\eta_i = 0$ для всех i , т.е. $a = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно (i) можно дать определение строгого порядка $\text{ord } a = \alpha$ при $a \in AD_{-\alpha}$, которое согласуется с оценкой $\text{ord } a \leq \alpha$, определенной в п. 1.8.

3.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3.1 означает, что алгебра A обладает “достаточно большим” запасом дифференциальных операторов. В частности, алгебра $D(A)$ плотна в $\text{End } A$ относительно поточечной сходимости в пространстве A .

Последнее утверждение есть частный случай известной теоремы плотности (см., например, [2]), справедливой для простых ассоциативных модулей. Теорема 3.1, (i) содержит также уточнение этого результата для алгебры $D(A)$, относящееся к порядкам аппроксимирующих операторов ($\text{ord } a \leq \alpha$).

Другое уточнение теоремы плотности в терминах формальных рядов над алгеброй $D(A)$ будет отмечено в § 5 (теорема 5.4).

3.4. ТЕОРЕМА. Пусть A есть вполне дифференцируемая алгебра конечного типа (см. п. 2.3). В этом случае следующие утверждения эквивалентны:

- (α) алгебра A невырождена;
- (β) алгебра A регулярна и $D(A) = \Delta(A)$;
- (γ) алгебра A есть простой $\Delta(A)$ -модуль;
- (δ) $\bigcap_{i \in I} \ker \partial_i = F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A невырождена, то она регулярна (см. п. 2.8), откуда $\dim D_{-\alpha} = \dim A_{\alpha}$ для всех $\alpha \in \Gamma_+$ (см. п. 2.2). С другой стороны, $D_{-\alpha}$ содержит подпространство $\Delta_{-\alpha} = A'_{\alpha}$, изоморфное A_{α} , откуда $D_{-\alpha} = \Delta_{-\alpha}$ для всех $\alpha \in \Gamma_+$, т.е. $D = \Delta$, $D(A) = \Delta(A)$, что доказывает импликацию (α) $\Rightarrow$ (β).

Импликация (β) $\Rightarrow$ (γ) вытекает непосредственно из теоремы 3.1, (iii). Заметим также, что левая часть (δ) есть градуированное подпространство в A . Если в этом подпространстве содержится ненулевой элемент $x_0 \in A_{\alpha}$ при $\alpha \neq 0$, то циклический подмодуль $\Delta(A)x_0 = Ax_0$ не содержит 1, что противоречит (γ). Отсюда получаем импликацию (γ) $\Rightarrow$ (δ).

Предположим теперь, что (δ) выполняется, и покажем индукцией по $n \in \mathbb{Z}_+$, что $\ker \Delta_{-n} = 0$ в A_n . При $n = 0$ это очевидно. Допустим, что это уже доказано при данном $n \in \mathbb{Z}_+$. Полагая $x \in A_{n+1}$, $\Delta_{-n-1}(x) = 0$, находим $\Delta_{-n}(\Delta_{-1}(x)) = 0$, откуда $\Delta_{-1}(x) = 0$. Но тогда из условия (δ) следует $x = 0$ (поскольку $F \cap A_{n+1} = 0$). Таким образом, форма $(\cdot, \cdot)$ определяет двойственность векторных пространств Δ , A . Согласно равенству (2.8) отсюда следует (α).

3.5. ЗАМЕЧАНИЕ 1. Равенство $D(A) = \Delta(A)$ равносильно $D = \Delta$. Действительно, записывая элемент $a \in D_{-n}$ в виде суммы элементов $a_p \in A_p \Delta_{-n-p}$ ($p \geq 0$), заметим, что $a = a_0$ в A_n , откуда $a = a_0$ (предложение 1.9). Таким образом, равенство $D(A) = \Delta(A)$ влечет $D = \Delta$. Обратное очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Равенство $D(A) = \Delta(A)$ в условии (β) равносильно каждому из следующих трех условий:

- (i) $D = \Delta$;
- (ii) отображение $x \mapsto x'$ инъективно в алгебре A ;
- (iii) отображение $x \mapsto x'$ определяет инволюцию алгебры $\Delta(A)$.

Действительно, каждое из этих условий вытекает из (α) и влечет соотношение $D(A) = \Delta(A)$, если A регулярна (импликация (α) $\Rightarrow$ (β) в доказательстве теоремы 3.4).

Заметим также, что равенство $D = \Delta$ влечет $D_+ = D(A)\Delta_{-1}$ (в обозначениях п. 2.2). Поэтому импликация $(\beta) \Rightarrow (\delta)$ вытекает непосредственно из предложения 2.2.

3.6. ТЕОРЕМА. Пусть A есть невырожденная алгебра конечного типа. Тогда имеем:

- (i) алгебра $D(A)$ порождается элементами x_i, ∂_i ($i \in I$), т.е. $D(A) = \Delta(A)$;
- (ii) алгебра $D(A)$ обладает инволюцией $x \mapsto x'$ (см. п. 2.8);
- (iii) система определяющих соотношений алгебры $D(A)$ имеет следующий вид:

$$\partial_i x_j - \varepsilon_{ij} x_j \partial_i = \delta_{ij}, \quad y_p = y'_p = 0, \quad (3.6)$$

где $i, j \in I$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \varepsilon(\partial_i, x_j)$, $y_p = 0$ ($p \in P$) – система определяющих соотношений алгебры A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) доказано в п. 3.4 (условие (β)). Утверждение (ii) следует из (i) и общего определения инволюции $x \mapsto x'$ (см. п. 2.8). Докажем (iii).

Пусть $\tilde{D}(A)$ – ассоциативная алгебра с единицей, порожденная элементами x_i, ∂_i ($i \in I$) и определяющими соотношениями (3.6). Поскольку в алгебре $D(A)$ эти соотношения выполняются, $\tilde{D}(A)$ накрывает $D(A)$, т.е.

$$D(A) = \tilde{D}(A)/Z,$$

где Z – градуированный идеал алгебры $\tilde{D}(A)$ (с градуировкой $\deg x_i = -\deg \partial_i = \alpha_i$, определенной в $\tilde{D}(A)$). Используя первую часть соотношений (3.6), находим $\tilde{D}(A) = \tilde{A}\tilde{D}$, где $\tilde{A}$ (соответственно $\tilde{D}$) – подалгебра с единицей, порожденная элементами x_i (соответственно ∂_i). Очевидно, $\tilde{A}$ накрывает A , т.е.

$$A = \tilde{A}/Z \cap \tilde{A}.$$

В частности, $\dim A_\alpha \leq \dim \tilde{A}_\alpha$ для всех $\alpha \in \Gamma_+$. Поскольку в алгебре A выполняются определяющие соотношения алгебры $\tilde{A}$, имеют место также обратные неравенства, откуда $A = \tilde{A}$ (т.е. $Z \cap \tilde{A} = 0$). Аналогично $D = \tilde{D}$.

Поскольку разложение AD свободно в $D(A)$, оно тем более свободно в $\tilde{D}(A)$, т.е. каждое из этих пространств изоморфно $A \otimes D$. В результате $D(A) = \tilde{D}(A)$.

3.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\varepsilon_{ij} = 1$ для всех $i, j \in I$, то алгебра $D(A)$ обладает инволюцией $x \mapsto \tilde{x}$, определяемой на образующих по правилу $\tilde{x}_i = x_i$, $\tilde{\partial}_i = -\partial_i$ ($i \in I$). В этом случае разложения $D(A) = AD = DA$ сводятся друг к другу посредством инволюции $x \mapsto \tilde{x}$.

Остановимся подробнее на случае $\varepsilon = 1$. Как видно из следующего результата, этот случай в известном смысле вырожден. Примеры невырожденных алгебр при $\varepsilon \neq 1$ будут рассмотрены в § 4.

3.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A = (A, 1)$ – вполне дифференцируемая алгебра, и пусть $\text{char } F = 0$. Тогда имеем:

- (i) алгебра Δ коммутативна, т.е. $[\partial_i, \partial_j] = 0$ для всех $i, j \in I$;
- (ii) ядро N билинейной формы $(\cdot, \cdot)$ есть идеал алгебры A , порожденный элементами $[x_i, x_j]$, где $i, j \in I$;
- (iii) факторалгебра A/N изоморфна симметрической алгебре от переменных x_i ($i \in I$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Полагая $\partial_{ij} = [\partial_i, \partial_j]$, находим $[\partial_{ij}, x_k] = 0$ для всех $i, j, k \in I$, откуда $[\partial_{ij}, x] = 0$ для всех $x \in A$. В частности, $\partial_{ij}x = \lambda x \partial_{ij}$ для однородных $x \in A$, где $\lambda = \varepsilon(\partial_{ij}, x)$. Отсюда $\partial_{ij}(x) = \lambda x \partial_{ij}(1) = 0$, т.е. $\partial_{ij} = 0$ в пространстве A для всех $i, j \in I$.

(ii) Пусть N_0 – идеал алгебры A , порожденный элементами $x_{ij} = [x_i, x_j]$. Согласно (i) имеем $N_0 \subset N$. С другой стороны, фиксируем линейный порядок во множестве I , и пусть

$$x(k) = \prod_i x_i^{k_i} \quad (3.7)$$

(относительно данного порядка), где $k = (k_i) \in \mathbb{Z}_+^I$ – финитный мультииндекс ($k_i = 0$, за исключением конечного числа элементов $i \in I$). Очевидно, одночлены (3.7) порождают базис в A/N_0 . Из легко проверяемого равенства

$$(x(k), x(r)) = (1, \partial(k)x(r)) = k! \delta_{kr}, \quad (3.8)$$

где $k! = \prod_i (k_i)!$, $\partial(k)$ – одночлен от операторов ∂_i ($i \in I$), следует, что форма $(\cdot, \cdot)$ невырождена в A/N_0 , откуда $N_0 = N$.

(iii) Согласно (ii) факторалгебра A/N коммутативна. Более того, одночлены (3.7) образуют базис в A/N , т.е. A/N есть симметрическая алгебра от элементов x_i ($i \in I$).

3.9. СЛЕДСТВИЕ. Алгебра $A = (A, 1)$ невырождена тогда и только тогда, когда она изоморфна симметрической алгебре от переменных x_i ($i \in I$).

§ 4. Алгебры Серра

4.1. Пусть $a = (a_{ij})$, где $i, j \in I$, – обобщенная матрица Картана [8], т.е. $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ для всех $i, j \in I$; $a_{ii} = 2$; $a_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$; $a_{ij} = 0$ влечет $a_{ji} = 0$. В дальнейшем мы предполагаем, что матрица a симметризуема, т.е.

$$a_{ij} = \langle h_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \quad (4.1)$$

где $h_i \in \mathfrak{h}$, $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{h}^*$ – конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническая билинейная форма в $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$, $(\cdot, \cdot)$ – ассоциированное скалярное произведение в $\mathfrak{h}^*$, нормированное так, чтобы $(\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbb{Z}$ для всех $i \in I$.

Матрица (4.1) называется *матрицей Картана*, если она положительно определена над $\mathbb{Z}$ и невырождена ($\det a \neq 0$). В этом случае $a_{ij} = 0, -1, -2, -3$ при $i \neq j$. Более того, скалярное произведение в $\mathfrak{h}^*$ можно нормировать так, чтобы $(\alpha_i, \alpha_i) = 1, 2, 3$ для всех $i \in I$.

Матрица (4.1) называется *простой* (или *связной*), если ее невозможно представить в виде нетривиальной суммы $a' \oplus a''$ двух матриц вида (4.1) посредством

разбиения множества I в сумму $I' \cup I''$. Каждая матрица (4.1) есть прямая сумма простых матриц вида (4.1) [8].

В частности, каждая простая матрица Картана относится к одному из картановских типов A_n ($n \geq 1$), B_n ($n \geq 2$), C_n ($n \geq 3$), D_n ($n \geq 4$), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 (см., например, [1]). Здесь нижний индекс n означает $\text{card } I$ (ранг или размерность матрицы (4.1)).

ПРИМЕР. Все простые матрицы Картана ранга 2 относятся к одному из типов A_2, B_2, G_2 .

4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $X = X(a)$ – ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{C}$, порожденная элементами x_i ($i \in I$) и определяющими соотношениями следующего вида:

$$(\text{ad } x_i)^{1-a_{ij}} x_j = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad (4.2)$$

где $(\text{ad } x)y = [x, y]$ – коммутатор в алгебре X .

Соотношения (4.2) обычно называют *условиями Серра* [3], [14]. Соответственно будем говорить, что X есть *алгебра Серра*, ассоциированная с матрицей (4.1).

Положим $x_i^{(n)} = x_i^n / n!$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_i^{(n)} = 0$ при $n < 0$. Положим

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_n (-1)^n x_i^{(b-n)} x_j x_i^{(n)}, \quad (4.3)$$

где $b = 1 - a_{ij}$. Легко проверить, что левая часть соотношения (4.2) есть $b! \sigma_{ij}(x)$.

Таким образом, условия Серра могут быть записаны в виде

$$\sigma_{ij}(x) = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Заметим также, что алгебра X изоморфна универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{n})$, где $\mathfrak{n}$ – алгебра Ли с образующими x_i ($i \in I$) и определяющими (лиевскими) соотношениями (4.2).

ПРИМЕР 1. Условия Серра при $a_{ij} = 0$ сводятся к условиям перестановочности элементов x_i, x_j .

ПРИМЕР 2. Условия Серра для алгебры типа A_2 имеют следующий вид:

$$x^2 y - 2xyx + yx^2 = 0,$$

где $x = x_i, y = x_j$ при $i \neq j$ ($i, j = 1, 2$).

Пусть Q – решетка (аддитивная подгруппа) в $\mathfrak{h}^*$, порожденная элементами α_i ($i \in I$). Полагая $\deg x_i = \alpha_i$ ($i \in I$), заметим, что условия Серра (4.2) однородны относительно этой градуировки. Поэтому $X = X(a)$ есть стандартная Q_+ -градуированная алгебра, где $Q_+ = \sum_i \mathbb{Z}_+ \alpha_i$.

4.3. Пусть $F = \mathbb{C}(q)$ – поле комплексных рациональных функций от независимой переменной q . Положим

$$\begin{aligned} q_i &= q^{(\alpha_i, \alpha_i)} & \theta_i &= q_i - q_i^{-1}, \\ [n]_i &= \theta_i^{-1}(q_i^n - q_i^{-n}) & [n]_i! &= [1]_i \dots [n]_i, \end{aligned}$$

где $i \in I$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что $[n]_i \equiv n \pmod{(q-1)R}$, где $R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Элементы $[n]_i$ называются *квантовыми целыми числами* (соответственно $[n]_i!$ – *квантовый факториал*).

Пусть $\tau_{ij}(x)$ – аналог многочлена (4.3), в котором $x_i^{(n)} = x_i^n / [n]_i!$ при $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда имеем

$$\tau_{ij}(x) \equiv \sigma_{ij}(x) \pmod{(q-1)R[x]},$$

где $R[x]$ – кольцо многочленов от переменных $x = (x_i)$ с коэффициентами из R .

4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $X = X_q(a)$ – ассоциативная алгебра с единицей над полем F , порожденная элементами x_i ($i \in I$) и определяющими соотношениями следующего вида:

$$\tau_{ij}(x) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \quad (4.4)$$

Соотношения (4.4) обычно называются *квантовыми условиями Серра* (см., например, [3]). Соответственно будем говорить, что X есть *квантовая алгебра Серра*, ассоциированная с матрицей (4.1).

Полагая $\deg x_i = \alpha_i$ и повторяя рассуждения, приведенные в конце п. 4.2, найдем, что $X = X_q(a)$ есть стандартная Q_+ -градуированная алгебра. Ясно также, что $2(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha, \beta \in Q$ (см. п. 4.1). Поэтому функция

$$\varepsilon_n(\alpha, \beta) = q^{2n(\alpha, \beta)} \quad \text{при} \quad \alpha, \beta \in Q, \quad (4.5)$$

где $n \in \mathbb{Z}$, есть мультипликатор группы Q со значениями в кольце $R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Легко проверить, что левая часть (4.2) при $(\text{ad } x)y = [x, y]_\varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon_{\pm 1}$, есть $b! \tau_{ij}(x)$. Поэтому квантовые условия Серра записываются в виде (4.2) при $\varepsilon = \varepsilon_{\pm 1}$.

Пусть $Y_q(a)$ – аналог алгебры $X_q(a)$, получаемый при замене поля F кольцом R . Тогда имеем

$$X(a) = Y_q(a) / (q-1)Y_q(a).$$

В этом смысле $X(a)$ есть специализация алгебры $X_q(a)$ (или $Y_q(a)$) в точке $q = 1$.

Соответственно алгебра $X_q(a)$ (или $Y_q(a)$) называется *квантовой деформацией алгебры $X(a)$* .

4.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Алгебра $X = (X, \varepsilon)$ вполне дифференцируема при $\varepsilon = 1$ в случае $X = X(a)$ и при $\varepsilon = \varepsilon_{\pm 1}$ в случае $X = X_q(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $X = B/C$ в обозначениях п. 2.3. Легко проверить следующие тождества:

$$[\partial_i, [x_j, f]] = [x_j, [\partial_i, f]],$$

$$[[f, x_j], \partial_i] = [[f, \partial_i], x_j],$$

где $i, j \in I$, $f \in B$ и символ $[\cdot, \cdot]$ означает ε -коммутатор в алгебре $E(B)$. Применяя эти тождества последовательно, находим

$$[\partial_i, \tau_{jk}(x)] = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, k,$$

$$[\partial_j, \tau_{jk}(x)] = [\tau_{jk}(x), \partial_k] = 0.$$

Применяя полученные тождества к элементу $1 \in B$, находим $\partial_i(\tau_{jk}(x)) = 0$ для всех $i, j, k \in I$ ($j \neq k$). Поэтому $\partial_i C \subset C$ для всех $i \in I$, т.е. алгебра X вполне дифференцируема (см. п. 2.3).

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко проверить, что алгебра (X, ε) , где $X = X_q(a)$, $\varepsilon = \varepsilon_n$, вполне дифференцируема только при $n = \pm 1$.

4.6. ЛЕММА [9]. Алгебра $X_q(a)$ невырождена.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство этой леммы, приведенное в [9] (см. также [3]), основано на теории представлений алгебры $U_q(\mathfrak{g})$ (см. п. 4.9). Ниже будет отмечено (см. п. 4.10) другое доказательство, пригодное для матриц Картана (4.1) и основанное на явном вычислении соотношений биортогональности в алгебре $X_q(a)$ (см. [4], [5]).

4.7. ТЕОРЕМА. Алгебра $D(X)$, где $X = X_q(a)$, есть ассоциативная алгебра с единицей, порожденная элементами x_i, ∂_i ($i \in I$) и определяющими соотношениями следующего вида:

$$[\partial_i, x_j]_\varepsilon = \delta_{ij}, \quad (4.6)$$

$$\tau_{ij}(x) = \tau_{ij}(\partial) = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad (4.7)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{\pm 1}$ (структурный коэффициент алгебры $E(X)$), $\tau_{ij}(\partial)$ – результат подстановки $x_i \mapsto \partial_i$ ($i \in I$) в многочлен $\tau_{ij}(x)$. Алгебра $D(X)$ обладает инволюцией $x \mapsto x'$, определяемой на образующих по правилу $x'_i = \partial_i, \partial'_i = x_i$ ($i \in I$).

Действительно, это утверждение есть частный случай теоремы 3.6 при $A = X$. Следует только отметить, что $\tau_{ij}(x)' = c_{ij}\tau_{ij}(\partial)$, где $0 \neq c_{ij} \in F$. Поэтому структурные соотношения (3.6) записываются в виде (4.6), (4.7) для алгебры $D(X)$.

4.8. СЛЕДСТВИЕ. Алгебра $D(X)$ изоморфна алгебре “квантовых бозонов” $B_q(\mathfrak{g})$, определенной в [9] (см. также [3]) при $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Таким образом, алгебра $B_q(\mathfrak{g})$ может быть охарактеризована как полная алгебра дифференциальных операторов в алгебре X в смысле определения 1.8.

ЗАМЕЧАНИЕ. Алгебра X обладает автоморфизмом $x \mapsto \bar{x}$, определяемым по правилу $\bar{x}_i = x_i$ ($i \in I$), $\bar{q} = q^{-1}$. Соответственно алгебры $D^\pm(X) = D(X)$ при $\varepsilon = \varepsilon_{\pm 1}$ сопряжены друг другу относительно индуцированного автоморфизма алгебры $\text{End } X$:

$$\overline{D^\pm(X)} = D^\mp(X).$$

Здесь $a \mapsto \bar{a}$ – автоморфизм алгебры $\text{End } X$, определяемый по правилу $\bar{a}(\bar{x}) = \overline{ax}$, где $x \in X$. Для образующих алгебры $D(X)$ этот автоморфизм определяется по правилу $\bar{x}_i = x_i, \bar{\partial}_i = \partial_i, \bar{q} = q^{-1}$.

В [9] показано также, что X есть простой $B_q(\mathfrak{g})$ -модуль. В нашем контексте этот результат есть следствие теоремы 3.1, (iii).

В заключение этого параграфа остановимся несколько подробнее на некоторых специальных свойствах алгебр $X = X(a), X_q(a)$.

4.9. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(a)$ – симметризуемая алгебра Каца–Мули, ассоциированная с матрицей (4.1), $A = U_q(\mathfrak{g})$ – ее квантовая оболочка, т.е. алгебра Дринфельда–Джимбо, ассоциированная с $\mathfrak{g}$ (см., например, [3]). Как известно, алгебра A допускает следующее “треугольное разложение”:

$$A = XHY \approx X \otimes N \otimes Y, \quad (4.8)$$

где H – коммутативная подалгебра с единицей, $X \approx Y \approx X_q(a)$ – квантовые алгебры Серра. При этом подалгебра $B(X) = XH = HX$ (борелевская оболочка алгебры X) восстанавливается по алгебре X как тензорное произведение $X \otimes H$, наделенное следующим законом умножения:

$$hx = xh_\alpha \text{ при } h \in H, x \in X_\alpha,$$

где $h \mapsto h_\alpha$ ($\alpha \in Q_+$) – автоморфизм алгебры H , определенный в [3]. Как показано в [3], алгебра A также восстанавливается по своей компоненте Серра $X = X_q(a)$ как некоторая подалгебра $T(X) \subset \text{End } B(X)$. А именно алгебра $T(X)$ порождается подалгеброй $B(X)$ и операторами y_i ($i \in I$), порождающими Y и определяемыми следующим образом: $y_i = a_i \otimes 1$ в $X \otimes H$, где

$$a_i = \theta_i^{-1}(t_i \partial_i - \bar{t}_i \bar{\partial}_i).$$

Здесь $t_i, \bar{t}_i$ – образующие подалгебры H , ∂_i (соответственно $\bar{\partial}_i$) – образующие подалгебры $D^+(X)$ (соответственно $D^-(X)$).

Универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ получается из $U_q(\mathfrak{g})$ посредством специализации $q = 1$, $t_i = 1$ для всех $i \in I$ (см., например, [3]). При этом алгебра $U(\mathfrak{g})$ также имеет вид (4.8), где $X \approx Y \approx X(a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогия между алгебрами $D(X)$, $T(X)$ превращается в асимптотическое соответствие в “кристаллическом пределе” $q = 0$ [9] (см. также [3]).

4.10. В частности, пусть a есть матрица Картана, Φ – система корней алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(a)$, $\Phi_+ \subset \Phi$ – подсистема положительных корней с простыми корнями α_i ($i \in I$). Как показано в [10] (см. также [3]), алгебра $X = X_q(a)$ обладает “базисом Люстига” из одночленов следующего вида:

$$f(k) = f_{\alpha(1)}^{(k_1)} \dots f_{\alpha(m)}^{(k_m)}, \quad (4.9)$$

где $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, элементы $\alpha(1), \dots, \alpha(m)$ образуют так называемый нормальный порядок системы Φ_+ [3], f_α ($\alpha \in \Phi_+$) – обобщенные корневые векторы алгебры X и символ $f_\alpha^{(n)}$ определяется по аналогии с частным случаем $f_\alpha = x_i$ при $\alpha = \alpha_i$ (см. п. 4.3).

Как показано в [5], базис Люстига (4.9) биортогонален сопряженному базису $\bar{f}(k) = \bar{f}(k)$, т.е.

$$(\bar{f}(k), f(r)) = c(k) \delta_{kr}, \quad (4.10)$$

где $0 \neq c(k) \in F$. Отсюда непосредственно вытекает невырожденность формы $(\cdot, \cdot)$, т.е. лемма 4.6 справедлива для алгебры $X_q(a)$.

В [4], [5] показано также, что $c(k)$ есть одночлен от элементов $\theta_i q_i^2$ ($i \in I$).

ЗАМЕЧАНИЕ. В предельном случае $q = 1$ форма $(\cdot, \cdot)$ вырождается, что соответствует общему правилу п. 3.10, т.е. алгебра $X = X(a)$ вырождена в смысле п. 2.8. Этот факт легко проверить непосредственно, исходя из равенства (4.10), где $c(k) \neq 0$ при $q = 1$ лишь в том случае, когда $k_i = 0$ для всех непростых $\alpha(i)$, т.е. (4.9) есть одночлен от образующих x_i ($i \in I$) алгебры X .

§ 5. Невырожденные алгебры

5.1. Пусть A – градуированная алгебра со структурным коэффициентом ε . Определим умножение в $A \otimes A$ по правилу

$$(a \otimes b)(x \otimes y) = \varepsilon(b, x)^{-1}(ax \otimes by)$$

для однородных элементов алгебры A . Легко проверить, что это умножение ассоциативно. Аналогично, равенство

$$(a \otimes b \otimes c)(x \otimes y \otimes z) = \varepsilon(b, x)^{-1}\varepsilon(c, xy)^{-1}(ax \otimes by \otimes cz)$$

определяет умножение в $A \otimes A \otimes A$.

В частности, пусть A – вполне дифференцируемая алгебра. Каноническая билинейная форма в алгебре A переносится на тензорный квадрат $A \otimes A$ по обычному правилу

$$(a \otimes b, x \otimes y) = (a, x)(b, y), \quad (5.1)$$

где $a, b, x, y \in A$.

5.2. ЛЕММА. Пусть $A = (A, \varepsilon)$ – свободная алгебра (см. п. 2.3), и пусть $\delta: A \rightarrow A \otimes A$ – единственный гомоморфизм, определяемый на образующих по правилу

$$\delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i, \quad (5.2)$$

с добавочным условием $\delta(1) = 1 \otimes 1$. Тогда отображение δ сопряжено умножению в алгебре A относительно формы (5.1), т.е.

$$(\delta(a), x \otimes y) = (a, xy) \quad (5.3)$$

для всех $a, x, y \in A$.

Действительно, (5.3) очевидно при $a = 1$. В общем случае достаточно использовать индуктивный переход $a \mapsto x_i a$, где $i \in I$. Заметим вначале, что форма (5.2) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$((u \otimes v)f, x \otimes y) = \varepsilon(v, u'x)^{-1}(f, u'x \otimes v'y) \quad (5.4)$$

для элементов $f \in A \otimes A$ и однородных элементов $u, v, x, y \in A$. Здесь $u \mapsto u'$ – операция сопряжения в алгебре A , определяемая по правилу $x_i \mapsto \partial_i$ (см. п. 2.6). Действительно, (5.4) легко проверяется для элементов вида $f = a \otimes b$, где a, b – однородные элементы алгебры A . Полагая $\varepsilon_i = \varepsilon(\partial_i, x) = \varepsilon(x_i, x)^{-1}$ и используя (5.4), находим для каждого $i \in I$

$$\begin{aligned} (\delta(x_i a), x \otimes y) &= ((x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i)\delta(a), x \otimes y) = (\delta(a), \partial_i x \otimes y + \varepsilon_i x \otimes \partial_i y) \\ &= (a, \partial_i x \cdot y + \varepsilon_i x \cdot \partial_i y) = (a, \partial_i(xy)) = (x_i a, xy) \end{aligned}$$

согласно индуктивному предположению (5.3). Таким образом, (5.3) доказано для всех $a, x, y \in A$.

5.3. СЛЕДСТВИЕ. *Ядро N канонической билинейной формы в алгебре A есть идеал алгебры A .*

Действительно, пусть $z = xy$, где $x \in N$ либо $y \in N$. Согласно (5.3) имеем

$$(a, z) = (\delta(a), x \otimes y) = \sum_i (a_i, x)(a^i, y) = 0$$

для каждого $a \in A$, где положено $\delta(a) = \sum_i a_i \otimes a^i$. В результате $z \in N$, т.е. N есть идеал алгебры A .

5.4. СЛЕДСТВИЕ. *Факторалгебра A/N невырождена.*

Заметим также, что A есть биалгебра с коумножением δ , определенным в п. 5.2, и коединицей $\eta(a) = a_0$ (проекция на $F = A_0$ в алгебре A). Поскольку $\delta(N) = \eta(N) = 0$, все эти структуры переносятся в A/N .

5.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Алгебра A/N , определенная в п. 5.4, есть единственная, с точностью до изоморфизма, невырожденная алгебра с образующими x_i ($i \in I$) и структурным коэффициентом ε .*

Действительно, все такие алгебры могут быть представлены, с точностью до изоморфизма, в виде A/C , где C – идеал алгебры A , содержащийся в N (см. п. 2.7, где свободная алгебра обозначена символом B). С другой стороны, из невырожденности алгебры A/N следует $N \subset C$. Таким образом, $C = N$.

5.6. ПРИМЕР. Квантовая алгебра Серра $X = X_q(a)$ есть единственная, с точностью до изоморфизма, невырожденная алгебра со структурным коэффициентом $\varepsilon = \varepsilon_n$ (см. п. 4.4), где $0 \neq n \in \mathbb{Z}$.

При $n = \pm 1$ это вытекает непосредственно из предложения 5.5. В общем случае достаточно использовать автоморфизм основного поля $\mathbb{C}(q)$, определяемый по правилу $q \mapsto q^n$.

5.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Квантовые условия Серра можно вывести непосредственно из условия невырожденности канонической билинейной формы в алгебре X .

§ 6. Алгебра $\Pi(A)$

6.1. Пусть A – конечнопорожденная (для простоты изложения) стандартная алгебра (см. п. 1.5). Рассмотрим следующее семейство векторных пространств, ассоциированных с алгеброй $D(A)$:

$$P_n(A) = D(A)/D_+(n), \quad (6.1)$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$, $D_+(n)$ – сумма подпространств $D(A)D_{-k}$ при $k \geq n+1$.

Очевидно, семейство (6.1) возрастает с ростом n , т.е. $P_n(A)$ можно рассматривать как факторпространство пространства $P_m(A)$ при $n \leq m$. Соответственно в этом случае определена каноническая проекция $\pi_{nm}: P_m(A) \rightarrow P_n(A)$. Положим

$$P(A) = \varprojlim_n P_n(A) \quad (6.2)$$

(проективный предел пространств $P_n(A)$). Элементы $a \in P(A)$ суть согласованные последовательности вида $a = (a_n)$, где $a_n \in P_n(A)$. Согласованность последовательности $a = (a_n)$ означает, что $a_n = \pi_{nm}(a_m)$ при $n \leq m$.

Предположим, что пространства AD_{-n} ($n \in \mathbb{Z}_+$) линейно независимы (например, это верно, если алгебра A регулярна). В этом случае $P_n(A)$ естественно отождествляется с прямой суммой $AD_0 \oplus \dots \oplus AD_{-n}$, так что

$$P_n(A) = P_{n-1}(A) \oplus AD_{-n}, \quad (6.3)$$

где $P_{-1}(A) = 0$. Соответственно $P(A)$ можно рассматривать как пространство формальных рядов вида $a = \sum_n \delta a_n$ с компонентами $\delta a_n = a_n - a_{n-1}$ (так что $\delta a_0 = a_0$).

В частности, пусть $AD \approx A \otimes D$ (что верно, если A регулярна). В этом случае мы будем записывать элементы $a \in P(A)$ в виде следующих формальных рядов:

$$a = \sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \delta_j, \quad (6.4)$$

где $\xi_i \in A$, $\delta_i \in D$ ($i = 0, 1, \dots$) – однородные базисы, $\xi_0 = \delta_0 = 1$, с коэффициентами $a_{ij} \in F$. Заметим, что $a_0 = \pi(a)$, где π – проекция $P(A)$ на F параллельно сумме подпространств $A_m D_{-n}$ при $m + n \neq 0$.

Элементы $a \in P(A)$ допускают естественную интерпретацию как линейные операторы в пространстве A . Действительно, из равенства $D_+(n)A_{(n)} = 0$ следует, что каждому элементу $a_n \in P_n(A)$ можно сопоставить одноименный оператор $a_n: A_{(n)} \rightarrow A$, причем $a_n = a_m$ на $A_{(n)}$ при $n \leq m$. Поэтому равенство $a = a_n$ на $A_{(n)}$ однозначно определяет линейный оператор a во всем пространстве A .

Если A регулярна, то при помощи 3.2,(ii) находим, что отображение $P(A) \rightarrow \text{End } A$ инъективно, т.е. $P(A)$ вкладывается в $\text{End } A$.

Элемент $a = (a_n) \in P_n(A)$ называется *однородным степени $\alpha \in \Gamma$* , если $\deg a_n = \alpha$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Положим

$$\Pi(A) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \Pi(A)_\alpha, \quad (6.5)$$

где $\Pi(A)_\alpha$ – подпространство в $P(A)$, состоящее из формальных рядов степени α .

Заметим, что $\Pi(A)$ есть также сумма подпространств $\Pi(A)_n$, где $n \in \mathbb{Z}_+$. Элементы $a \in \Pi(A)$ суть формальные ряды (5.4) с дополнительным условием $|n_i - m_j| \leq \text{const}$, где $n_i = \deg \xi_i$, $m_i = -\deg \delta_i$ (так что $n_i, m_i \in \mathbb{Z}_+$).

6.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $AD \approx A \otimes D$, и пусть π_n – каноническая проекция $P(A)$ на $P_n(A)$, где $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда имеем:

(i) для каждой пары элементов $a = (a_n)$, $b = (b_n) \in \Pi(A)$ последовательность $\pi_n(a_k b_l)$ стационарна при $k, l \rightarrow \infty$, т.е. не зависит от k, l при $k \geq k_0$, $l \geq l_0$;

(ii) последовательность $c_n = \lim_{k,l} \pi_n(a_k b_l)$ согласована, т.е. определяет элемент $c = ab \in \Pi(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассматривать $\mathbb{Z}$ -однородные элементы $a, b \in \Pi(A)$, для которых $\deg a = p$, $\deg b = q$ ($p, q \in \mathbb{Z}$). Соответствующие элементы $\delta a_k \in AD_{-k}$, $\delta b_l \in AD_{-l}$ содержатся в компонентах $A_s D_{-k}$, $A_r D_{-l}$ соответственно при $s - k = p$, $r - l = q$. Приводя произведение этих элементов к стандартному виду AD (путем перестановки элементов, входящих в $D_{-k} A_r$), находим, что это произведение может внести ненулевой вклад в $A_m D_{-n}$ только при $s \leq m$, $l \leq n$. Отсюда $k \leq m + p$, $r \leq n + q$. Таким образом, лишь конечное число произведений $\delta a_k \cdot \delta b_l$ может внести ненулевой вклад в AD_{-n} , т.е. последовательность $\pi_n(a_k b_l)$ стационарна. Отсюда следует также согласованность последовательности c_n , определенной в (ii).

6.3. СЛЕДСТВИЕ. Векторное пространство $\Pi(A)$ есть Γ -градуированная ($\mathbb{Z}$ -градуированная) алгебра относительно умножения формальных рядов (6.4).

Элементы алгебры $\Pi(A)$ мы называем псевдодифференциальными операторами в алгебре A .

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение алгебры $\Pi(A)$ легко переносится на алгебры конечного типа, если в определении (6.2) рассматривать пределы по направленности, определяемой элементами $\alpha \in \Gamma_+$. Более того, условие конечности типа можно отбросить, если рассматривать ряды (6.4), имеющие лишь конечное число ненулевых слагаемых, выделяемых условиями однородности $\deg \delta_j = \text{const}$ (см. аналогичную конструкцию для контрагredientных алгебр, изложенную в [7]).

6.4. ТЕОРЕМА. Пусть A есть конечнопорожденная невырожденная алгебра. Тогда имеем $\Pi(A) = E(A)$. Иначе говоря, каждый градуированный оператор $a \in \text{End } A$ есть псевдодифференциальный оператор в алгебре A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E^n(A)$ – множество всех элементов $a \in E(A)$, удовлетворяющих условиям $a(A_m) = 0$ при $m \leq n$. Согласно теореме 3.1, (i) для каждого $a \in E^{n-1}(A)$ существует оператор $b \in D_n(A)$ такой, что $a - b \in E^n(A)$. Согласно следствию 3.2 имеем также $b \in AD_{-n}$. Предположим теперь, что $a \in E(A)$. Применяя последовательно изложенную выше конструкцию, находим

$$a = \delta a_0 + \dots + \delta a_n + a_n, \quad (6.6)$$

где $\delta a_i \in AD_{-i}$, $a_n \in E^n(A)$. Отсюда заключаем, что $a = \sum_n \delta a_n \in P(A)$. Ясно также, что конструкция ряда (6.6) сохраняет степень однородности, т.е. $a \in \Pi(A)$.

6.5. СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 6.4 каждый оператор $a \in E(A)$ записывается в виде

$$a = \sum a_{i_1 \dots i_n} \delta_{i_1} \dots \delta_{i_n} \quad (6.7)$$

с коэффициентами $a_{i_1 \dots i_n} \in A$ (где сумма берется по всем конечным наборам индексов $i_1, \dots, i_n$).

При этом условие $\mathbb{Z}$ -градуированности оператора (6.7) означает, что $|\deg a_{i_1 \dots i_n} - n| \leq \text{const}$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ (с константой, зависящей от оператора a).

6.6. ПРИМЕР. Пусть $A = (A, 1) = \mathbb{C}[x]$, т.е. $D(A)$ есть алгебра Вейля с образующими x, δ и определяющим соотношением $[\delta, x] = 1$. В этом случае элементы (6.7) принимают следующий вид:

$$a = \sum_{m,n} c_{mn} x^m \delta^n$$

с коэффициентами $c_{mn} \in \mathbb{C}$, где $|m - n| \leq \text{const}$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

6.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты этой статьи легко обобщаются на Γ_+ -градуированные алгебры с центральными компонентами A_0 (т.е. $A_0 \subset Z(A)$). В действительности можно рассматривать также более общие алгебры картановского типа [7] с “почти центральными” компонентами A_0 .

Возможны также другие обобщения алгебры $D(A)$, связанные с рассмотрением более сложных коммутационных соотношений в алгебре $\text{End } A$. Примеры такого рода встречаются в теории квантовых групп (см., например, [12]).

Список литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1982.
2. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1977.
3. Желобенко Д. П. Представления редуктивных алгебр Ли. М.: Наука, 1994.
4. Желобенко Д. П. Алгебра квантовых бозонов, фильтрация Шуберта и базисы Люстига // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 6. С. 3–32.
5. Желобенко Д. П. Фильтрация Шуберта и квазидифференцирования в квантовых алгебрах Серра // Вестн. РУДН. 1995. Т. 2. № 2. С. 3–11.
6. Zhelobenko D. P. Contragredient algebras // J. on Group Theory in Physics. 1993. V. 1. № 1. P. 201–233.
7. Желобенко Д. П. Алгебры картановского типа // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 4. С. 442–445.
8. Кац В. Г. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
9. Kashiwara M. Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebras // Comm. Math. Phys. 1990. V. 122. P. 249–260.
10. Lusztig G. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras // J. of Amer. Math. Soc. 1990. V. 3. P. 447–498.
11. Manin Yu. I. Quantum groups and non-commutative geometry. Montreal: CRM Univ., 1988.
12. Noumi M., Umeda I., Wakayama M. A quantum analogue of the Capelly identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$. Preprint / Univ. of Tokyo, 1991.
13. Омичик А. Л. Топология транзитивных групп преобразований. М.: Наука, 1995.
14. Серр Ж.-П. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1969.

Поступило в редакцию
31.VIII.95