Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О когомологиях вещественных четырехмерных триквадрик, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 5, 73–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 08:04:12

УДК 512.7

В. А. Краснов

О когомологиях вещественных четырехмерных триквадрик

Рассмотрены неособые пересечения трех вещественных шестимерных квадрик (такие многообразия мы для краткости называем вещественными четырехмерными триквадриками). Вычислены размерности пространств когомологий вещественных четырехмерных триквадрик с коэффициентами в поле из двух элементов.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: триквадрика, спектральная кривая, спектральное расслоение, индекс-функция, индекс-ориентация.

Введение

Сначала приведем несколько обозначений и определений. Если A – вещественное алгебраическое многообразие, то его множество вещественных точек обозначается через $\mathbb{R}A$.

Пусть даны линейно независимые квадратичные формы с вещественными коэффициентами

$$q_1(X_0, \dots, X_7) = q_1(X), \quad q_2(X_0, \dots, X_7) = q_2(X), \quad q_3(X_0, \dots, X_7) = q_3(X). \quad (0.1)$$

Тогда можно рассмотреть связку квадрик в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^7$

$$\lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X) = 0. \quad (0.2)$$

Пусть M_1, M_2, M_3 – матрицы квадратичных форм (0.1). Тогда рассмотрим уравнение

$$\det(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3) = 0. \quad (0.3)$$

Будем предполагать, что уравнение (0.3) задает неособую кривую C на комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с однородными координатами $(\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3)$. Тогда система уравнений

$$q_1(X_0, \dots, X_7) = 0, \quad q_2(X_0, \dots, X_7) = 0, \quad q_3(X_0, \dots, X_7) = 0$$

определяет неособое четырехмерное комплексное многообразие $V \subset \mathbb{P}^7$, инвариантное относительно инволюции комплексного сопряжения $\tau: \mathbb{P}^7 \rightarrow \mathbb{P}^7$. Такое многообразие будем называть *вещественной триквадрикой*, а кривая C в работе [1] называется *спектральной* кривой триквадрики V . Заметим, что по триквадрике V восстанавливается связка квадрик (0.2) и спектральная кривая C . Связка квадрик (0.2) состоит из квадрик, проходящих через триквадрику V . Эти квадрики образуют плоскость $\mathbb{P}_V^2$ в проективном пространстве

квадрик $\mathbb{P}(S^2(\mathbb{R}^8)) = \mathbb{P}^{35}$. Спектральная кривая $C = C_V$ лежит на плоскости $\mathbb{P}_V^2$ и состоит из особых квадрик, проходящих через триквадрику V .

В настоящей работе мы вычисляем размерности пространств когомологий $H^i(\mathbb{R}V, \mathbb{F}_2)$, где V – четырехмерная вещественная триквадрика. Далее все группы гомологий и когомологий рассматриваются с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$, поэтому коэффициенты выписывать не будем. Размерность пространства $H^i(\mathbb{R}V)$ обозначим через $h^i(\mathbb{R}V)$. В силу двойственности Пуанкаре достаточно вычислять числа $h^0(\mathbb{R}V)$, $h^1(\mathbb{R}V)$, $h^2(\mathbb{R}V)$. Кроме того, мы будем вычислять инвариант $\ell(V)$, который в случае непустого множества $\mathbb{R}V$ равен максимальному числу i , при котором не равен нулю гомоморфизм ограничения

$$H^i(\mathbb{R}\mathbb{P}^7) \rightarrow H^i(\mathbb{R}V).$$

Если множество $\mathbb{R}V$ пустое, то инвариант $\ell(V)$ по определению равен -1 .

Спектральная кривая $C \subset \mathbb{P}^2$ вещественная, ее степень равна 8. Все компоненты связности топологической кривой $\mathbb{R}C \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ двусторонние, они называются *овалами*, будем их обозначать через $C_1, \dots, C_s$.

Заметим, что вещественная схема неособой непустой кривой степени 8 может иметь следующий вид (см., например, [2]):

$$\begin{aligned} &\langle a \rangle, \quad \langle a \sqcup 1\langle b \rangle \rangle, \quad \langle a \sqcup 1\langle b \rangle \sqcup 1\langle c \rangle \rangle, \\ &\langle a \sqcup 1\langle b \rangle \sqcup 1\langle c \rangle \sqcup 1\langle d \rangle \rangle, \quad \langle 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle, \\ &\langle a \sqcup 1\langle b \sqcup 1\langle c \rangle \rangle \rangle, \quad \langle 1\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle \rangle. \end{aligned}$$

В настоящий момент не известны все запреты на значения переменных a, b, c, d для этих схем. Заметим, что схема $\langle 0 \rangle$ реализуется как вещественная схема спектральной кривой четырехмерной триквадрики (см. §3). В этом случае определено вещественное четырехмерное расслоение F_+ на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданной уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Это расслоение определяется следующим образом. Если $\lambda \in S^2$, то слой $(F_+)_\lambda$ равен линейной оболочке собственных векторов в пространстве $\mathbb{R}^8$ матрицы

$$M(\lambda) = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3,$$

отвечающих положительным собственным значениям. Заметим, что расслоение F_+ определено с использованием координат в $\mathbb{R}^8$. Поскольку собственные значения и собственные векторы квадратичной формы на векторном пространстве определены только после фиксирования координат на этом пространстве или определенной квадратичной формы, инвариантно определить векторное расслоение F_+ невозможно. Однако при изменении координат получается изоморфное расслоение.

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть спектральная кривая C вещественной триквадрики V не имеет вещественных точек. Тогда справедливы утверждения:

1) если расслоение F_+ тривиально, то $\ell(V) = 3$, в противном случае $\ell(V) = 1$;

2) если $\ell(V) = 3$, то выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = h^2(\mathbb{R}V) = 2,$$

в противном случае

$$h^0(\mathbb{R}V) = h^1(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 0.$$

Еще не решен вопрос о существовании триквадрики с пустым множеством вещественных точек спектральной кривой, для которых расслоение F_+ нетривиально. Случай, когда расслоение F_+ тривиально, реализуется (см. §3).

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть спектральная кривая C вещественной триквадрики V имеет вещественную схему $\langle a \rangle$, где $a > 0$. Тогда выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = h^1(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2a, \quad \ell(V) = 2.$$

На сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданной уравнением $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, определена целочисленная функция $I(\lambda) = I_V(\lambda)$, равная отрицательному индексу инерции квадратичной формы

$$q_\lambda(X) = \lambda_1 q_1(X) + \lambda_2 q_2(X) + \lambda_3 q_3(X). \quad (0.4)$$

Эта функция называется *индекс-функцией* триквадрики V . Индекс-функция может быть определена инвариантным образом на двулистном накрытии S_V^2 проективной плоскости $\mathbb{RP}_V^2$. В общем случае индекс-функция $I(\lambda)$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq I(\lambda) \leq 8$. По нашему предположению спектральная кривая C неособая. Поэтому индекс-функция $I(\lambda)$ имеет точки разрыва на гладкой кривой $\Gamma = \Gamma_V \subset S^2$, равной прообразу вещественной части $\mathbb{R}C$ спектральной кривой C при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Функция $I(\lambda)$ также удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) полунепрерывна снизу;
- 2) при переходе через компоненты связности кривой Γ ее значения изменяются на ± 1 ;
- 3) в точках непрерывности выполняется равенство $I(-\lambda) = 8 - I(\lambda)$;
- 4) в точках разрыва выполняется равенство $I(-\lambda) = 7 - I(\lambda)$.

Одна из компонент связности открытого множества $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{R}C$ неориентируемая, и прообраз ее при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ будет связным открытым множеством, обозначим его через U . Из свойства 3) индекс-функции $I(\lambda)$ следует, что ее значения на области U равны 4. Если множество $\mathbb{R}C$ пустое, то область U совпадает со сферой S^2 . Обозначим через $I_{\min} = I_{\min}(V)$ минимальное значение индекс-функции $I_V(\lambda)$. Число $I_{\min}$ может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4.

Если вещественная схема спектральной кривой C имеет вид

$$\langle a \sqcup 1\langle b \rangle \rangle, \quad (0.5)$$

$$\langle a \sqcup 1\langle b \rangle \sqcup 1\langle c \rangle \rangle, \quad (0.6)$$

$$\langle a \sqcup 1\langle b \rangle \sqcup 1\langle c \rangle \sqcup 1\langle d \rangle \rangle, \quad (0.7)$$

$$\langle 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle, \quad (0.8)$$

то $I_{\min}$ может принимать значения 2, 3.

ТЕОРЕМА 0.3. Пусть $I_{\min}$ принимает значение 2. Тогда справедливы утверждения:

- 1) если вещественная схема спектральной кривой C триквადрики V имеет вид или (0.5), или (0.6), или (0.7), или (0.8), то выполняются равенства $h^0(\mathbb{R}V) = \ell(V) = 1$;
- 2) если вещественная схема спектральной кривой C триквадрики V имеет вид (0.5), то выполняются равенства $h^1(\mathbb{R}V) = b$, $h^2(\mathbb{R}V) = 2a$;
- 3) если вещественная схема спектральной кривой C триквадрики V имеет вид (0.6), то выполняются равенства $h^1(\mathbb{R}V) = b + c$, $h^2(\mathbb{R}V) = 2a + 2$;
- 4) если вещественная схема спектральной кривой C триквадрики V имеет вид (0.7), то выполняются равенства $h^1(\mathbb{R}V) = b + c + d$, $h^2(\mathbb{R}V) = 2a + 4$;
- 5) если вещественная схема спектральной кривой C триквадрики V имеет вид (0.8), то выполняются равенства $h^1(\mathbb{R}V) = 4$, $h^2(\mathbb{R}V) = 6$.

Если $I_{\min}$ принимает значение 3, то для формулировки аналога теоремы 0.3 необходимо ввести новое понятие. На спектральной кривой C определено вещественное линейное расслоение $L = L_V$, называемое *спектральным расслоением* триквадрики V . Если $\lambda \in C$, то слой L_λ равен ядру квадратичной формы (0.4) в пространстве $\mathbb{C}^8$. (Поскольку мы предполагаем, что спектральная кривая C неособая, ядро квадратичной формы $q_\lambda(X)$ – одномерное подпространство $\mathbb{C}^8$; см. [1].) Положим $\varepsilon_i = \varepsilon(C_i) = 0$, $i = 1, \dots, s$, если расслоение $\mathbb{R}L$ тривиально на овале C_i , в противном случае $\varepsilon_i = \varepsilon(C_i) = 1$, причем числа 0, 1 рассматриваются как элементы поля $\mathbb{F}_2$. Числа $\varepsilon(C_1), \dots, \varepsilon(C_s)$ будем называть *спектральными числами* триквадрики.

ТЕОРЕМА 0.4. Пусть $I_{\min}$ принимает значение 3. Тогда справедливы утверждения:

- 1) если вещественная схема спектральной кривой C триквадрики V имеет вид или (0.5), или (0.6), или (0.7), или (0.8), то выполняется равенство $h^0(\mathbb{R}V) = 1$;
- 2) если вещественная схема спектральной кривой C триквадрики V имеет вид или (0.5), или (0.6), или (0.7), или (0.8), то $\ell(V) = 2$ в случае, когда расслоение $\mathbb{R}L$ тривиально на внутренних овалах кривой $\mathbb{R}C$, в противном случае $\ell(V) = 1$;
- 3) если вещественная схема спектральной кривой C триквадрики V имеет вид (0.5), то выполняются равенства $h^1(\mathbb{R}V) = b + 1$, $h^2(\mathbb{R}V) = 2a + 2$ в случае $\ell(V) = 2$, в противном случае $h^1(\mathbb{R}V) = b$, $h^2(\mathbb{R}V) = 2a$;
- 4) если вещественная схема спектральной кривой C триквадрики V имеет вид (0.6), то выполняются равенства $h^1(\mathbb{R}V) = b + c + 1$, $h^2(\mathbb{R}V) = 2a + 4$ в случае $\ell(V) = 2$, в противном случае $h^1(\mathbb{R}V) = b + c$, $h^2(\mathbb{R}V) = 2a + 2$;
- 5) если вещественная схема спектральной кривой C триквадрики V имеет вид (0.7), то выполняются равенства $h^1(\mathbb{R}V) = b + c + d + 1$, $h^2(\mathbb{R}V) = 2a + 6$ в случае $\ell(V) = 2$, в противном случае $h^1(\mathbb{R}V) = b + c + d$, $h^2(\mathbb{R}V) = 2a + 4$;
- 6) если вещественная схема спектральной кривой C триквадрики V имеет вид (0.8), то выполняются равенства $h^1(\mathbb{R}V) = 5$, $h^2(\mathbb{R}V) = 8$ в случае $\ell(V) = 2$, в противном случае $h^1(\mathbb{R}V) = 4$, $h^2(\mathbb{R}V) = 6$.

Для формулировки следующих теорем потребуются дополнительные понятия. Заметим, что индекс-функция $I(\lambda)$ дает возможность ориентировать овалы кривой Γ . Если при переходе овала кривой Γ по направлению нормали значения индекс-функции возрастают, то нормаль с таким направлением называется *индекс-ориентированной*. Зафиксируем ориентацию сферы $S^2 = S_V^2$; тогда индекс-ориентированные нормали к овалам определяют на них ориентацию, если полагать, что базис, состоящий из касательного вектора к овалу, направленного в соответствии с ориентацией овала, и нормального индекс-ориентированного вектора, задает ориентацию сферы. Эта ориентация кривой Γ называется *индекс-ориентацией*. Она определена с точностью до ее замены на противоположную на всех овалах. Такая замена происходит при изменении ориентации сферы S_V^2 .

Для каждого овала C_i , $i = 1, \dots, s$, кривой $\mathbb{RC}$ определена внутренность на плоскости $\mathbb{RP}^2$. Она равна компоненте множества $\mathbb{RP}^2 \setminus C_i$, которая гомеоморфна диску. Прообраз овала C_i при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ состоит из двух антиподальных овалов Γ'_i, Γ''_i . Следовательно, для каждого из антиподальных овалов Γ'_i, Γ''_i кривой Γ определена внутренность на сфере S^2 , если считать, что она проектируется во внутренность овала C_i . Определенные таким образом внутренности овалов кривой Γ дают возможность сравнивать индекс-ориентации этих овалов. Заметим, что на двух антиподальных овалах индекс-ориентации различны. Поскольку антиподальная инволюция сферы меняет ее ориентацию, проекция $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ отображает индекс-ориентированные антиподальные овалы кривой Γ в один овал кривой $\mathbb{RC}$, индуцируя на нем одинаковые ориентации. Таким образом, получаем ориентацию кривой $\mathbb{RC}$, она также называется *индекс-ориентацией*. Индекс-функция $I(\lambda)$ восстанавливается по индекс-ориентации, так как на компоненте U значения индекс-функции известны, они равны 4. Если изменить индекс-ориентацию на противоположную, то восстановленная по ней индекс-функция равна $I(-\lambda)$.

Рис. 1

С помощью индекс-ориентации кривой $\mathbb{RC}$ ее не внешние овалы разделяются на положительные и отрицательные. А именно, рассмотрим кольцо на $\mathbb{RP}^2$, граница которого состоит из данного не внешнего овала и охватывающего его

внешнего овала. Если граничные овалы на этом кольце одинаково ориентированы, то данный не внешний овал называется *положительным*, в противном случае он называется *отрицательным*. (Заметим, что такое разделение овалов на положительные и отрицательные противоположно разделению в работе [3].)

Пусть теперь спектральная кривая C триквადрики V имеет вещественную схему $\langle a \sqcup 1 \langle b \sqcup 1 \langle c \rangle \rangle \rangle$, она изображена на рис. 1; далее используем обозначения овалов, представленных на этом рисунке. Тогда число $I_{\min}$ может принимать значения 1, 2, 3.

ТЕОРЕМА 0.5. Пусть вещественная схема спектральной кривой триквадрики V имеет вид $\langle a \sqcup 1 \langle b \sqcup 1 \langle c \rangle \rangle \rangle$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если единственный непустой овал глубины 2 положительный и существует хотя бы один положительный овал глубины 3, то выполняются равенства

$$I_{\min} = 1, \quad h^0(\mathbb{R}V) = c, \quad h^1(\mathbb{R}V) = b, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2a, \quad \ell(V) = 0;$$

2) если единственный непустой овал глубины 2 положительный, но не существует положительного овала глубины 3, то $I_{\min} = 2$, а инвариант $\ell(V)$ равен 1 только в том случае, когда расслоение $\mathbb{R}L$ тривиально на всех самых внутренних овалах, т.е. имеющих глубину 3; в этом случае выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = c + 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = b + 1, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2a,$$

в противном случае

$$\ell(V) = 0, \quad h^0(\mathbb{R}V) = c, \quad h^1(\mathbb{R}V) = b, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2a;$$

3) если единственный непустой овал глубины 2 отрицательный и существует хотя бы один положительный пустой овал глубины 2, то выполняются равенства

$$I_{\min} = 2, \quad h^0(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = b + 1, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2(a + c), \quad \ell(V) = 1;$$

4) если все овалы глубины 2 отрицательные, то $I_{\min} = 3$, а $\ell(V) = 2$ только в том случае, когда

$$\varepsilon(C_i) = 0, \quad i = a + 2, \dots, a + b + 3, \quad \varepsilon(C_{a+b+4}) + \dots + \varepsilon(C_s) = 0,$$

в этом случае выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = b + 2, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2(a + c + 1),$$

в противном случае

$$\ell(V) = 1, \quad h^0(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = b + 1, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2(a + c).$$

Вещественная схема спектральной кривой $\langle 1 \langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle \rangle$ изображена на рис. 2, далее используем обозначения овалов, представленных на этом рисунке. Благодаря индекс-ориентации овалы C_2, C_3, C_4 разбиваются на положительные и отрицательные.

Рис. 2

ТЕОРЕМА 0.6. Пусть спектральная кривая триквადрики V имеет вещественную схему $\langle 1\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если все овалы положительные или отрицателен только овал C_4 , то $\mathbb{R}V = \emptyset$;

2) если отрицателен только овал C_3 или отрицательны только овалы C_3, C_4 , то инвариант $\ell(V)$ равен 1 только тогда, когда $\varepsilon(C_3) + \varepsilon(C_4) = 0$, в этом случае выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = h^1(\mathbb{R}V) = 2, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 0,$$

в противном случае

$$\ell(V) = 0, \quad h^0(\mathbb{R}V) = h^1(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 0;$$

3) если отрицателен только овал C_2 или все овалы отрицательны, то выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = h^2(\mathbb{R}V) = 2, \quad \ell(V) = 1;$$

4) если отрицательны только овалы C_2, C_4 или C_2, C_3 , то инвариант $\ell(V)$ равен 2 только тогда, когда $\varepsilon(C_2) + \varepsilon(C_3) = 0, \varepsilon(C_4) = 0$, в этом случае выполняются равенства

$$h^0(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = 3, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 4,$$

в противном случае

$$\ell(V) = 1, \quad h^0(\mathbb{R}V) = 1, \quad h^1(\mathbb{R}V) = 2, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2.$$

Сделаем несколько общих замечаний о содержании статьи и о методах доказательства теорем. Кроме введения, статья содержит три параграфа. В § 1 рассматривается инвариант $\ell(V)$, где V – вещественная четырехмерная триквадрика. Здесь доказано несколько предложений, в которых указываются значения этого инварианта в зависимости от числа $I_{\min}$ и одномерного класса когомологий, который строится для семейства векторных пространств на

сфере S^2 в некоторых случаях. Это семейство векторных пространств обозначается через F_+ и определяется аналогично расслоению F_+ в случае пустого множества $\mathbb{R}C$. Класс когомологий семейства, рассматриваемый в настоящей статье, аналогичен классу когомологий, введенному в работе [4], где последний называется характеристическим классом семейства векторных пространств. (Вполне возможно, что это название неудачное.) В §2 приведены доказательства теорем 0.1–0.6. В основе доказательств этих теорем лежит спектральная последовательность А. А. Аграчева (см. [1], [5], [6]). В §3 обсуждается вопрос о существовании триквадрик, удовлетворяющих условиям из утверждений теорем 0.1–0.6. Поскольку вещественные кривые степени 8 полностью еще не изучены, на данный вопрос нельзя пока дать полный ответ. Кроме того, обсуждается вопрос о возможном числе компонент связности вещественной части четырехмерной триквадрики. Оказывается, что число компонент может быть любым от 0 до 18. Заметим, в работе [1] доказано, что не существует четырехмерных триквадрик, вещественная часть которых имеет больше 19 компонент связности. Таким образом, остается открытым вопрос о существовании четырехмерных триквадрик, вещественная часть которых имеет 19 компонент. Чтобы получить ответ на этот вопрос, необходимы дополнительные знания о кривых степени 8.

§ 1. Инвариант $\ell(V)$ для триквадрик

ЛЕММА 1.1. *Для каждой вещественной триквадрики V выполняется неравенство $\ell(V) < I_{\min}(V)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В связке квадрик (0.2) существует неособая вещественная квадрика Q_λ , заданная уравнением $q_\lambda(X) = 0$, где вещественная квадратичная форма $q_\lambda(X)$ имеет отрицательный индекс инерции, равный $I_{\min}(V)$. Для этой квадрики выполняется равенство $\ell(Q_\lambda) = I_{\min}(V) - 1$ (см., например, [7]). Осталось рассмотреть композицию гомоморфизмов ограничения

$$H^i(\mathbb{R}P^7) \rightarrow H^i(\mathbb{R}Q_\lambda) \rightarrow H^i(\mathbb{R}V).$$

Лемма доказана.

Если для триквадрики V выполняется равенство $I_{\min} = 1$ и множество $\mathbb{R}V$ непустое, то из леммы 1.1 вытекает равенство $\ell(V) = 0$. Заметим, что в статье [6] указан критерий пустоты множества $\mathbb{R}V$, где V – вещественная триквадрика положительной размерности. А именно, пусть Ω_i – множество на сфере S^2 , заданное неравенством $I(\lambda) \leq i$; тогда множество $\mathbb{R}V$ пустое только в том случае, когда $H^1(\Omega_1 \setminus \Omega_0) \neq 0$. Далее в этом параграфе предполагаем, что $I_{\min} > 1$.

Для триквадрики V рассмотрим на сфере S^2 семейство векторных пространств $F_+ = F_+(V)$, которое устроено следующим образом. Если $\lambda \in S^2$, то слой $(F_+)_\lambda$ равен линейной оболочке собственных векторов в пространстве $\mathbb{R}^8$ матрицы

$$M(\lambda) = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3,$$

отвечающих положительным собственным значениям. Определение семейства векторных пространств было введено в [8]. Нетрудно проверить, что подмножество $F_+ \subset S^2 \times \mathbb{R}^8$ с индуцированной топологией и проекцией $\pi: S^2 \times \mathbb{R}^8 \rightarrow S^2$ действительно является семейством векторных пространств на S^2 .

Пусть $\mathbb{P}(F_+) \subset S^2 \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^8)$ – проективизация семейства векторных пространств F_+ . Тогда существует гомотопическая эквивалентность пространства $\mathbb{P}(F_+)$ с многообразием $\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V$. Она строится следующим образом. Пусть L_+ – открытое подмножество произведения $S^2 \times \mathbb{RP}^7$, заданное неравенством

$$L_+ = \{(\lambda, x) \in S^2 \times \mathbb{RP}^7 \mid q_\lambda(x) > 0\}.$$

Тогда проекция

$$p: S^2 \times \mathbb{RP}^7 \rightarrow \mathbb{RP}^7$$

индуцирует гомотопическую эквивалентность $p: L_+ \rightarrow \mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V$ (см. [1]). С другой стороны, отображение вложения $\mathbb{P}(F_+) \hookrightarrow L_+$ также индуцирует гомотопическую эквивалентность. Спектральная последовательность Лере проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+) \rightarrow S^2$ имеет вид (см. [1])

$$E_2^{i,j} = H^i(\Omega_{7-j}) \Rightarrow H^{i+j}(\mathbb{P}(F_+)) = H^{i+j}(L_+) = H^{i+j}(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V). \quad (1.1)$$

Если $I_{\min}(V) = 2$, то из спектральной последовательности (1.1) вытекает равенство $H^6(\mathbb{P}(F_+)) = H^1(\Omega_2)$. Поэтому если t – базисный элемент одномерного пространства $H^1(\mathbb{RP}^7)$, то элемент $p^*(t^6)$ принадлежит пространству $H^1(\Omega_2)$. Этот элемент будем обозначать через $\kappa(F_+)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть для триквадрики V выполняется равенство $I_{\min}(V) = 2$. Тогда $\ell(V) = 1$, если и только если $\kappa(F_+(V)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной гомологической последовательности пары $(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V)$

$$\cdots \rightarrow H_1(\mathbb{R}V) \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) \rightarrow \cdots$$

получаем, что $\ell(V) = 1$ тогда и только тогда, когда гомоморфизм

$$H_1(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V)$$

равен нулю. Применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца; тогда получим, что $\ell(V) = 1$, если и только если гомоморфизм ограничения

$$H^6(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^6(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V) \quad (1.2)$$

равен нулю. Теперь заметим, что образ элемента t^6 при гомоморфизме (1.2) равен элементу $p^*(t^6) \in H^6(\mathbb{P}(F_+))$, если использовать равенство $H^6(\mathbb{P}(F_+)) = H^6(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V)$. Предложение доказано.

Из предложения 1.2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть для триквадрики V имеют место равенства $I_{\min}(V) = 2$ и $H^1(\Omega_2) = 0$. Тогда выполняется равенство $\ell(V) = 1$.

Заметим, что ограничение семейства векторных пространств F_+ на замкнутое множество Ω_2 не является векторным расслоением, но ограничение его на внутренность $\mathring{\Omega}_2$ будет векторным расслоением. Обозначим через $\mathring{\Omega}_2$ внутренность множества Ω_2 . Тогда вложение $\mathring{\Omega}_2 \subset \Omega_2$ индуцирует изоморфизм пространств когомологий

$$H^1(\Omega_2) = H^1(\mathring{\Omega}_2).$$

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть для триквადрики V выполняется равенство $I_{\min}(V) = 2$. Тогда $\ell(V) = 1$, если и только если

$$w_1(F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_2}) = 0,$$

где $w_1(F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_2})$ – первый характеристический класс Штифеля–Уитни векторного расслоения $F_+(V)|_{\mathring{\Omega}_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм ограничения спектральной последовательности Лере для проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+) \rightarrow S^2$ в спектральную последовательность Лере для проекции $\pi: \mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_2}) \rightarrow \mathring{\Omega}_2$. Тогда получим равенства

$$H^6(\mathbb{P}(F_+)) = H^6(\mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_2})) = H^1(\mathring{\Omega}_2) = H^1(\Omega_2).$$

Осталось заметить, что класс когомологий $p^*(t^6) \in H^6(\mathbb{P}(F_+|_{\mathring{\Omega}_2})) = H^1(\mathring{\Omega}_2)$ равен обычному первому характеристическому классу Штифеля–Уитни векторного расслоения $F_+|_{\mathring{\Omega}_2}$. Следствие доказано.

Далее мы предполагаем, что $I_{\min}(V) = 3$. Покажем, что тогда выполняются равенство $h^1(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) = 0$ и неравенство $\ell(V) \geq 1$. Действительно, из равенства $I_{\min}(V) = 3$ вытекают равенства

$$h^0(\Omega_1) = h^1(\Omega_2) = h^2(\Omega_3) = 0.$$

Применим теперь спектральную последовательность (1.1); тогда получаем равенство $h^6(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V) = 0$. Применим двойственность Пуанкаре–Лефшеца; тогда получим равенство $h^1(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) = 0$. Следовательно, из длинной точной последовательности пары $(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V)$ вытекает, что гомоморфизм ограничения

$$H^1(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^1(\mathbb{R}V)$$

не равен нулю.

Если теперь применить лемму 1.1, то в случае $I_{\min} = 3$ получаем двойное неравенство $1 \leq \ell(V) \leq 2$. Из спектральной последовательности (1.1) в случае, когда $I_{\min}(V) = 3$, вытекает равенство $H^5(\mathbb{P}(F_+)) = H^1(\Omega_3)$. Поэтому если t – базисный элемент одномерного пространства $H^1(\mathbb{RP}^7)$, то элемент $p^*(t^5)$ принадлежит пространству $H^1(\Omega_3)$. Этот элемент будем обозначать через $\kappa(F_+)$. Аналогично доказательству предложения 1.2 и следствий 1.3, 1.4 доказываются следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть для триквадрики V выполняется равенство $I_{\min}(V) = 3$. Тогда $\ell(V) = 2$, если и только если $\kappa(F_+(V)) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Пусть для триквадрики V имеют место равенства $I_{\min}(V) = 3$ и $H^1(\Omega_3) = 0$. Тогда выполняется равенство $\ell(V) = 2$.

СЛЕДСТВИЕ 1.7. Пусть для триквадрики V выполняется равенство $I_{\min}(V) = 3$. Тогда $\ell(V) = 2$, если и только если

$$w_1(F_+(V)|_{\dot{\Omega}_3}) = 0,$$

где $w_1(F_+(V)|_{\dot{\Omega}_3})$ – первый характеристический класс Штифеля–Уитни векторного расслоения $F_+(V)|_{\dot{\Omega}_3}$.

Наконец покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Пусть для триквадрики V выполняется равенство $I_{\min} = 3$. Тогда $\ell(V) = 2$, если дифференциал

$$d_2^{0,3}: E_2^{0,3} = H^0(\Omega_4) \rightarrow E_2^{2,2} = H^2(\Omega_5) \quad (1.3)$$

в спектральной последовательности (1.1) равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее через p, n обозначаются числа четных и нечетных овалов кривой $\mathbb{R}C$. Из равенств

$$h^0(\Omega_1) = h^0(\Omega_2) = h^1(\Omega_2) = h^2(\Omega_3) = h^2(\Omega_4) = 0, \quad h^1(\Omega_3) = n$$

и спектральной последовательности (1.1) получаем равенства

$$h^6(\mathbb{R}P^7 \setminus \mathbb{R}V) = 0, \quad h^5(\mathbb{R}P^7 \setminus \mathbb{R}V) = n.$$

Применяя двойственность Пуанкаре–Лефшеца, получим

$$h^1(\mathbb{R}P^7, \mathbb{R}V) = 0, \quad h^2(\mathbb{R}P^7, \mathbb{R}V) = n. \quad (1.4)$$

Из равенств

$$h^0(\Omega_3) = p,$$

$$h^1(\Omega_4) = h^0(S^2 \setminus \Omega_4) - 1 = h^0(\Omega_5 \setminus \Omega_4) - 1 = h^0(\Omega_3) - 1 = p - 1, \quad h^2(\Omega_5) = 1$$

и спектральной последовательности (1.1) следует, что если дифференциал (1.3) равен нулю, то выполняется равенство

$$h^4(\mathbb{R}P^7 \setminus \mathbb{R}V) = 2p,$$

в противном случае

$$h^4(\mathbb{R}P^7 \setminus \mathbb{R}V) = 2p - 1.$$

Применяя двойственность Пуанкаре–Лефшеца, получим, что если дифференциал (1.3) равен нулю, то выполняется равенство

$$h^3(\mathbb{R}P^7, \mathbb{R}V) = 2p, \quad (1.5)$$

в противном случае

$$h^3(\mathbb{R}P^7, \mathbb{R}V) = 2p - 1. \quad (1.6)$$

Из леммы 1.1 следует, что гомоморфизм ограничения

$$H^3(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^3(\mathbb{R}V)$$

равен нулю. Применяя равенство $h^1(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) = 0$, из длинной точной последовательности когомологий пары $(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V)$ получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^1(\mathbb{R}V) \rightarrow H^2(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) \\ \rightarrow H^2(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^2(\mathbb{R}V) \rightarrow H^3(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) \rightarrow H^3(\mathbb{RP}^7) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Рассмотрим гомоморфизм ограничения

$$H^2(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^2(\mathbb{R}V). \quad (1.8)$$

Из равенств (1.4)–(1.6) и точной последовательности (1.7) вытекает, что формально могут реализоваться следующие случаи:

1) гомоморфизм (1.8) ненулевой, а дифференциал (1.3) равен нулю, тогда выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V) = n + 1, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2p;$$

2) гомоморфизм (1.8) ненулевой и дифференциал (1.3) не равен нулю, тогда выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V) = n + 1, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2p - 1;$$

3) гомоморфизм (1.8) нулевой и дифференциал (1.3) равен нулю, тогда выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V) = n, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2p - 1;$$

4) гомоморфизм (1.8) нулевой, а дифференциал (1.3) не равен нулю, тогда выполняются равенства

$$h^1(\mathbb{R}V) = n, \quad h^2(\mathbb{R}V) = 2p - 2.$$

Поскольку выполняются равенство

$$\sum_{i \geq 0} h^i(V) = 48$$

и сравнение

$$\sum_{i \geq 0} h^i(\mathbb{R}V) \equiv \sum_{i \geq 0} h^i(V) \pmod{2},$$

случаи 2) и 3) не реализуются. Предложение доказано.

Перейдем к случаю, когда $I_{\min} = 4$. Тогда множество $\mathbb{R}C$ пустое, а семейство векторных пространств F_+ является четырехмерным векторным расслоением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пусть для триквадрики V выполняется равенство $I_{\min} = 4$. Тогда если расслоение F_+ тривиально, то $\ell(V) = 3$, в противном случае $\ell(V) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $I_{\min} = 4$, выполняется двойное неравенство $1 \leq \ell(V) \leq 3$. Доказательство этого двойного неравенства аналогично доказательству двойного неравенства $1 \leq \ell(V) \leq 2$ в случае $I_{\min} = 3$. Векторное расслоение F_+ на сфере S^2 тривиально тогда и только тогда, когда $w_2(F_+) = 0$. Из общей теоремы о векторных расслоениях получаем, что классы когомологий (см., например, [9])

$$1, p^*(t), p^*(t^2), p^*(t^3) \in H^*(\mathbb{P}(F_+))$$

образуют базис $H^*(S^2)$ -модуля $H^*(\mathbb{P}(F_+))$, а для класса когомологий $p^*(t^4)$ выполнено равенство $p^*(t^4) = p^*(t^2)w_2(F_+) + p^*(t^3)w_1(F_+)$. Поскольку $w_1(F_+) = 0$, класс когомологий $p^*(t^4)$ равен произведению $p^*(t^2)w_2(F_+)$. Следовательно, элемент $p^*(t^4)$ равен нулю тогда и только тогда, когда расслоение F_+ тривиально. Поэтому гомоморфизм ограничения

$$H^4(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^4(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V)$$

равен нулю тогда и только тогда, когда расслоение F_+ тривиально. Следовательно, $\ell(V) = 3$ тогда и только тогда, когда расслоение F_+ тривиально.

Если векторное расслоение F_+ нетривиально, то характеристический класс $w_2(F_+)$ не равен нулю, поэтому произведение $p^*(t^3)w_2(F_+)$ не равно нулю, так как классы когомологий $1, p^*(t), p^*(t^2), p^*(t^3)$ образуют базис $H^*(S^2)$ -модуля $H^*(\mathbb{P}(F_+))$. Из равенства $p^*(t^4) = p^*(t^2)w_2(F_+)$ получаем $p^*(t^5) = p^*(t^3)w_2(F_+)$. Поэтому класс когомологий $p^*(t^5)$ не равен нулю. Получаем, что инвариант $\ell(V)$ не может быть равен 2. Предложение доказано.

§ 2. Доказательство теорем 0.1–0.6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. Утверждение 1) теоремы совпадает с предложением 1.9. Докажем утверждение 2). Поскольку множество $\mathbb{R}V$ непустое, длинная точная когомологическая последовательность для пары пространств $(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V)$ имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^0(\mathbb{R}V) \rightarrow H^1(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) \\ &\rightarrow H^1(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^1(\mathbb{R}V) \rightarrow H^2(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) \rightarrow H^2(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^2(\mathbb{R}V) \\ &\rightarrow H^3(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) \rightarrow H^3(\mathbb{RP}^7) \rightarrow H^3(\mathbb{R}V) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Применяя двойственность Пуанкаре–Лefшеца, получим равенства

$$H^i(\mathbb{RP}^7, \mathbb{R}V) = H^{7-i}(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V), \quad i = 1, 2, 3.$$

Чтобы вычислить пространства когомологий $H^j(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V)$, $j = 4, 5, 6$, применим спектральную последовательность (1.1). Поскольку F_+ – векторное расслоение, эта спектральная последовательность вырождается. Из нее получаем равенства

$$h^6(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V) = 0, \quad h^5(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V) = 1, \quad h^4(\mathbb{RP}^7 \setminus \mathbb{R}V) = 1.$$

Для окончания доказательства утверждения 2) остается применить точную последовательность (2.1) и утверждение 1) теоремы. Теорема доказана.

Прежде чем доказывать теоремы 0.2–0.6, мы докажем несколько лемм.

ЛЕММА 2.1. Пусть для вещественной триквადрики V с непустым множеством $\mathbb{R}V$ справедливо равенство $I_{\min} = 1$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{R}V) &= h^0(\Omega_1) + h^1(\Omega_2), & h^1(\mathbb{R}V) &= h^0(\Omega_2) + h^1(\Omega_3) - 1, \\ h^2(\mathbb{R}V) &= h^0(\Omega_3) + h^1(\Omega_4) - 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим спектральную последовательность (1.1) и двойственность Пуанкаре–Лефшеца; тогда получим равенства

$$\begin{aligned} h^1(\mathbb{R}P^7, \mathbb{R}V) &= h^0(\Omega_1) + h^1(\Omega_2), & h^2(\mathbb{R}P^7, \mathbb{R}V) &= h^0(\Omega_2) + h^1(\Omega_3), \\ h^3(\mathbb{R}P^7, \mathbb{R}V) &= h^0(\Omega_3) + h^1(\Omega_4). \end{aligned}$$

Поскольку $I_{\min} = 1$, а множество $\mathbb{R}V$ непустое, из леммы 1.1 следует равенство $\ell(V) = 0$. Остается применить точную последовательность (2.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть для вещественной триквадрики V справедливо равенство $I_{\min} = 2$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{R}V) &= h^1(\Omega_2) + \ell(V), & h^1(\mathbb{R}V) &= h^0(\Omega_2) + h^1(\Omega_3) + \ell(V) - 1, \\ h^2(\mathbb{R}V) &= h^0(\Omega_3) + h^1(\Omega_4) - 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что из леммы 1.1 следует $\ell(V) = 0, 1$. Затем повторим рассуждения, использованные при доказательстве леммы 2.1, т. е. применим спектральную последовательность (1.1) и точную последовательность (2.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть для вещественной триквадрики V справедливо равенство $I_{\min} = 3$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{R}V) &= 1, & h^1(\mathbb{R}V) &= h^1(\Omega_3) + \ell(V) - 1 = n + \ell(V) - 1, \\ h^2(\mathbb{R}V) &= 2(h^0(\Omega_3) + \ell(V) - 2) = 2(p + \ell(V) - 2), \end{aligned}$$

где p – число четных овалов кривой $\mathbb{R}C$, а n – число нечетных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим спектральную последовательность (1.1), точную последовательность (2.1), предложение 1.8 и равенство $h^1(\Omega_4) = h^0(\Omega_3) - 1$. Лемма доказана. (Заметим, что эта лемма фактически была доказана при доказательстве предложения 1.8.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Отметим, что из условий теоремы следует равенство $I_{\min} = 3$, причем множество Ω_3 состоит из дисков. Поэтому для доказательства теоремы нужно применить лемму 2.3 и следствие 1.6. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3. Если вещественная схема спектральной кривой C триквадрики V имеет вид (0.5), или (0.6), или (0.7), или (0.8),

а $I_{\min} = 2$, то множество Ω_2 состоит из дисков. Следовательно, $H^1(\Omega_2) = 0$. Применяя следствие 1.3, получим равенство $\ell(V) = 1$. Остается применить лемму 2.2 для всех возможных индекс-функций с $I_{\min} = 2$. Соответствующие рутинные вычисления не приводим. Теорема доказана.

Для доказательства остальных теорем нам потребуются дополнительные обозначения. Разность $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{RC}$ состоит из $s + 1$ областей, одна из которых неориентируемая. Для ориентируемых областей введем следующие обозначения. Ориентируемая область, для которой внешней границей является овал C_i , будет обозначаться через D_i . Прообраз области D_i при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ состоит из двух областей, которые мы будем обозначать через D'_i, D''_i . Прообраз овала C_i при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ состоит из двух овалов, которые мы обозначили через Γ'_i, Γ''_i . Мы можем считать, что овал Γ'_i является внешней границей области D'_i , а овал Γ''_i – внешней границей области D''_i .

Ограничения семейства векторных пространств F_+ на области D'_i, D''_i являются векторными подрасслоениями тривиального расслоения $\mathbb{R}^8$. Все эти подрасслоения однозначно продолжаютс до подрасслоений тривиального расслоения $\mathbb{R}^8$ на замкнутые области $\bar{D}'_i, \bar{D}''_i$. Обозначим их через F'_i, F''_i соответственно. Если $a: S^2 \rightarrow S^2$ – антиподальная инволюция, то расслоение F''_i является ортогональным дополнением расслоения $a^*(F'_i)$ в $\mathbb{R}^8$.

Через $\mathcal{N}_i$ обозначим множество номеров овалов, которые входят во внутреннюю границу области D_i . Если $j \in \mathcal{N}_i$, то через $\mathcal{N}_{ij}$ обозначим подмножество множества индексов $k \in \{1, \dots, s\}$ таких, что овал C_k содержится во внутренности овала C_j . Для всех индексов $i = 1, \dots, s, j \in \mathcal{N}_i$ рассмотрим число $S(i, j) \in \mathbb{F}_2$, равное сумме чисел $\varepsilon(C_k)$, где $k \in \mathcal{N}_{ij}$.

ЛЕММА 2.4. *Выполняются равенства*

$$w_1(F'_i)[\Gamma'_j] = S(i, j) + \varepsilon(C_j), \quad (2.2)$$

$$w_1(F''_i)[\Gamma''_j] = S(i, j) + \varepsilon(C_j), \quad (2.3)$$

где $j \in \mathcal{N}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить равенство (2.2), так как равенство (2.3) доказывается аналогично. Определим ранг $r(C_j)$, который равен числу r , если существует гнездо из r овалов, содержащееся в овале C_j , но не существует такого гнезда из $r + 1$ овалов. В частности, ранг пустого овала равен нулю. Если $j \in \mathcal{N}_i$ и $r(C_j) = 0$, то расслоение F'_j тривиально. Следовательно, в этом случае выполняется равенство $S(i, j) = 0$. Через $\mathcal{L}$ обозначим линейное расслоение на кривой Γ , равное $\pi^*(\mathbb{R}L)$. Поскольку имеет место одно из равенств для расслоений на овале Γ'_j

$$F'_i|_{\Gamma'_j} = F'_j|_{\Gamma'_j} \oplus \mathcal{L}|_{\Gamma'_j}, \quad F'_i|_{\Gamma'_j} = F'_i|_{\Gamma'_j} \oplus \mathcal{L}|_{\Gamma'_j}, \quad (2.4)$$

выполняется равенство $w_1(F'_i)[\Gamma'_j] = \varepsilon(C_j)$. Поэтому равенство (2.2) также выполняется. Будем предполагать, что равенство (2.2) выполняется для всех пар индексов (i, j) , где $j \in \mathcal{N}_i$ и $r(C_j) \leq \varrho$. Покажем, что для каждой пары индексов (i, j) , где $j \in \mathcal{N}_i$ и $r(C_j) = \varrho + 1$, равенство (2.2) также выполняется.

Пусть $\mathcal{N}_j = \{k_1, \dots, k_a\}$. Тогда $r(C_{k_1}) \leq \varrho, \dots, r(C_{k_a}) \leq \varrho$. Следовательно, имеют место равенства

$$w_1(F'_j)([\Gamma'_{k_1}]) = S(j, k_1) + \varepsilon(C_{k_1}), \dots, w_1(F'_j)([\Gamma'_{k_a}]) = S(j, k_a) + \varepsilon(C_{k_a}).$$

Отсюда имеем

$$w_1(F'_j)([\Gamma'_j]) = S(j, k_1) + \dots + S(j, k_a) + \varepsilon(C_{k_1}) + \dots + \varepsilon(C_{k_a}) = S(j, j).$$

Поскольку имеет место одно из равенств (2.4), выполняется равенство

$$w_1(F'_i)([\Gamma'_j]) = w_1(F'_j)([\Gamma'_j]) + \varepsilon(C_j),$$

применяя к которому равенство $w_1(F'_j)([\Gamma'_j]) = S(j, j)$, получим (2.2). Лемма доказана.

Из доказательства леммы 2.4 видно, что эта лемма справедлива для триквადрик произвольной размерности. С помощью леммы 2.4 получаем следующие переформулировки следствий 1.4, 1.7.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть для триквადрики V выполняются равенства

$$I_{\min}(V) = 2, \quad \mathring{\Omega}_2 = D'_{i_1} \cup \dots \cup D'_{i_p} \cup D''_{i_{p+1}} \cup \dots \cup D''_{i_q}.$$

Тогда $\ell(V) = 1$, если и только если выполняются равенства

$$S(i_1, j_1) + \varepsilon(C_{j_1}) = 0, \dots, S(i_q, j_q) + \varepsilon(C_{j_q}) = 0$$

для всех $j_1 \in \mathcal{N}_{i_1}, \dots, j_q \in \mathcal{N}_{i_q}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть для триквадрики V выполняются равенства

$$I_{\min}(V) = 3, \quad \mathring{\Omega}_3 = D'_{i_1} \cup \dots \cup D'_{i_p} \cup D''_{i_{p+1}} \cup \dots \cup D''_{i_q}.$$

Тогда $\ell(V) = 2$, если и только если выполняются равенства

$$S(i_1, j_1) + \varepsilon(C_{j_1}) = 0, \dots, S(i_q, j_q) + \varepsilon(C_{j_q}) = 0$$

для всех $j_1 \in \mathcal{N}_{i_1}, \dots, j_q \in \mathcal{N}_{i_q}$.

Выберем на неориентируемой компоненте множества $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{RC}$ односторонний контур γ , прообраз которого при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ обозначим через Γ_0 . Кривая Γ_0 связная, она разбивает сферу S^2 на две части, которые мы обозначим через $S' = S'_V$, $S'' = S''_V$. Заметим, что эти половинки гомеоморфны диску, поэтому мы будем далее их изображать дисками на плоскости $\mathbb{R}^2$. При обозначении этих половинок сферы мы придерживаемся следующего правила. При переходе через некоторые внешние непустые овалы по направлению внешней нормали значения индекс-функции возрастают, а при переходе других – убывают. На S' первых овалов должно быть не меньше, чем вторых. Граничные окружности дисков S' , S'' обозначаем через Γ'_0 , Γ''_0 соответственно, они изображаются на рис. 3, a, b пунктирными линиями. Прообраз каждого овала C_i , $i = 1, \dots, s$, при проекции $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ состоит из двух компонент связности, одна из которых содержится в половинке S' , ее обозначим через Γ'_i ,

а другая компонента содержится в половине S'' , ее обозначим через Γ_i'' . Из равенства $I(-\lambda) = 8 - I(\lambda)$ в точках непрерывности индекс-функции $I(\lambda)$ и равенства $I(-\lambda) = 7 - I(\lambda)$ в точках разрыва следует, что значения индекс-функции на половине S'' восстанавливаются по значениям на половине S' . Заметим, что разбиение сферы S^2 на половины S' , S'' определено неоднозначно, так как контур γ нельзя выбрать однозначно.

Рис. 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.4. Мы рассмотрим только случай, когда вещественная схема спектральной кривой имеет вид (0.5). В остальных случаях рассуждения аналогичны. На рис. 3 изображены диски S' (см. рис. 3, а), S'' (см. рис. 3, б) со значениями индекс-функции на них в случае, когда вещественная схема спектральной кривой имеет вид (0.5). Утверждение об инварианте $\ell(V)$ вытекает из следствия 2.6. Применяя теперь лемму 2.3, получим равенства для размерностей пространств когомологий. Теорема доказана.

Рис. 4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.5. Утверждение 1) теоремы вытекает из леммы 2.1. Действительно, на рис. 4 изображены диски S' (см. рис. 4, *a*), S'' (см. рис. 4, *b*) со значениями индекс-функции на них в случае, когда выполняются условия утверждения. Поскольку $I_{\min} = 1$, остается применить формулы для размерностей пространств когомологий из леммы 2.1.

Рис. 5

Докажем утверждение 2). На рис. 5 изображены диски S' (см. рис. 5, *a*), S'' (см. рис. 5, *b*) со значениями индекс-функции на них в случае, когда выполняются условия утверждения. Заметим, что в этом случае имеет место равенство $I_{\min} = 2$. Утверждение об инварианте $\ell(V)$ вытекает из следствия 2.5. Чтобы закончить доказательство утверждения 2), необходимо применить лемму 2.2.

Рис. 6

Докажем утверждение 3). На рис. 6 изображены диски S' (см. рис. 6, *a*), S'' (см. рис. 6, *b*) со значениями индекс-функции на них в случае, когда выполняются условия утверждения. Поскольку $I_{\min} = 2$, а множество Ω_2 состоит из дисков, то из следствия 1.3 получаем равенство $\ell(V) = 1$. Остается применить лемму 2.2.

Рис. 7

Теперь докажем утверждение 4). На рис. 7 изображены диски S' (см. рис. 7, *a*), S'' (см. рис. 7, *b*) со значениями индекс-функции на них в случае, когда выполняются условия утверждения. Заметим, что $I_{\min} = 3$. Чтобы вычислить инвариант $\ell(V)$, будем применять следствие 1.7. Тогда получим, что справедливо начало утверждения 4): $\ell(V) = 2$ только в том случае, когда

$$\varepsilon(C_i) = 0, \quad i = a + 2, \dots, a + b + 3, \quad \varepsilon(C_{a+b+4}) + \dots + \varepsilon(C_s) = 0.$$

Чтобы закончить доказательство утверждения 4) необходимо применить лемму 2.3. Теорема полностью доказана.

Рис. 8

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.6. Из условий утверждения 1) вытекает неравенство $H^1(\Omega_1 \setminus \Omega_0) \neq 0$, поэтому множество $\mathbb{R}V$ пустое (см. [6]).

Рис. 9

Утверждение 2) докажем лишь в случае, когда отрицателен только овал C_3 , так как второй случай доказывается аналогично. На рис. 8 изображены диски S' (см. рис. 8, *a*), S'' (см. рис. 8, *b*) со значениями индекс-функции на них в случае, когда отрицателен только овал C_3 . Поскольку $I_{\min} = 2$, для доказательства утверждения необходимо применять следствие 2.5. Чтобы вычислить размерности пространств когомологий, нужно применить лемму 2.2.

Докажем утверждение 3) в случае, когда отрицателен только овал C_2 , так как второй случай доказывается аналогично. На рис. 9 изображены диски S' (см. рис. 9, *a*), S'' (см. рис. 9, *b*) со значениями индекс-функции на них в случае, когда отрицателен только овал C_2 . В этом случае $I_{\min} = 2$ и множество Ω_2 является диском. Применяя следствие 1.3, получим равенство $\ell(V) = 1$. Чтобы вычислить размерности пространств когомологий, необходимо применить лемму 2.2.

Рис. 10

Теперь докажем утверждение 4) в случае, когда отрицательны только овалы C_2, C_4 , так как второй случай доказывается аналогично. На рис. 10 изображены диски S' (см. рис. 10, *a*), S'' (см. рис. 10, *b*) со значениями индекс-функции на них в случае, когда отрицательны только овалы C_2, C_4 . В этом случае $I_{\min} = 3$, поэтому нужно применять следствие 1.7 для доказательства утверждения об инварианте $\ell(V)$. Для вычисления размерностей пространств когомологий, необходимо применить лемму 2.3. Таким образом, теорема полностью доказана.

§ 3. О существовании триквадрик

После того как доказаны теоремы 0.1–0.6, возникает вопрос: реализуются ли условия утверждений в этих теоремах? Сначала обсудим теорему 0.1. В работе [1] предполагается, что спектральная кривая имеет вещественные точки. Поэтому мы не можем прямо использовать теорему о существовании вещественных триквадрик из [1], которая является аналогом теоремы из [10]. Проблема состоит в том, что на плоской кривой без вещественных точек может не существовать неэффективного вещественного дивизора, линейный класс которого является тэта-характеристикой. Однако если род кривой нечетный, то после малого возмущения можно добиться существования такого дивизора (см. [1], [11]). Тогда рассуждения из работы [1] можно применять. Род кривой степени 8 равен 21. Следовательно, существует вещественная триквадрика, спектральная кривая которой не имеет вещественных точек. Однако в теореме 0.1 рассматриваются два случая: расслоение F_+ тривиальное или нетривиальное. Покажем, что случай тривиального расслоения F_+ реализуется.

Пусть A_1, A_2, A_3 – матрицы нульмерной триквадрики, спектральная кривая степени 4 для которой не имеет вещественных точек. Тогда рассмотрим матрицы

$$M_i = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Четырехмерная триквадрика с такими матрицами будет иметь спектральную кривую без вещественных точек. Расслоение F_+ тривиально, так как равно удвоенному двумерному расслоению. Эта триквадрика может иметь особые точки, но можно избавиться от них после малого возмущения матриц M_i , $i = 1, 2, 3$. Тогда получится требуемая неособая вещественная четырехмерная триквадрика.

Для обсуждения теорем 0.2–0.6 сначала приведем общие утверждения о существовании триквадрик, причем ограничимся только четной размерностью. С помощью конструкции Диксона (см. [1], [10]) в [1] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть дана неособая вещественная плоская проективная кривая степени $2n + 4$, на вещественной части которой задана произвольная ориентация. Тогда с помощью малого вещественного возмущения эту кривую можно сделать спектральной кривой вещественной триквадрики размерности $2n$, причем такой триквадрики, что индекс-ориентация спектральной кривой совпадет с заданной ориентацией.*

Из предложения 3.1 следует, что для реализации условий в теореме 0.2 необходимо, чтобы схему $\langle a \rangle$ можно было реализовать кривой степени 8. Заметим, что в теореме 0.3 от индекс-функции требуется только выполнение равенства $I_{\min} = 2$. Будем предполагать, что данная схема овалов реализуется кривой степени 8. Тогда из предложения 3.1 вытекает, что условия в утверждениях теоремы 0.3 реализуются. Аналогично, условия в утверждениях 1), 3) теорем 0.5, 0.6 также реализуются, если подлежащие схемы овалов реализуются кривыми степени 8.

С остальными утверждениями теорем 0.5, 0.6 и утверждениями теоремы 0.4 ситуация более сложная. Заметим, что в этих утверждениях имеются условия, налагаемые на спектральное расслоение. Возникает вопрос: реализуются ли в совокупности данная индекс-ориентация и приведенные условия для спектрального расслоения? Этот вопрос исследовался в работе [4]. Ответ зависит от типа рассматриваемой схемы овалов. Напомним, что схема овалов имеет тип I, если любая вещественная кривая данной степени, реализующая эту схему, имеет тип I, т.е. является разделяющей кривой. Заметим, что любая M -схема имеет тип I и схема, представляющая собой гнездо максимальной глубины, также имеет тип I (см., например, [3]). С другой стороны, в работе [4] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – неособая вещественная кривая степени $2n+4$, на вещественной части $\mathbb{R}C = C_1 \cup \dots \cup C_s$ которой задана произвольная ориентация, а также задан набор чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \in \mathbb{F}_2$, удовлетворяющий условию

$$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s = n \pmod{2}. \quad (3.1)$$

Если кривая C не имеет тип I, то с помощью малого вещественного возмущения эту кривую можно сделать спектральной кривой вещественной трикватрики размерности $2n$, причем такой трикватрики, что индекс-ориентация спектральной кривой совпадет с заданной ориентацией, а спектральные числа $\varepsilon(C_1), \dots, \varepsilon(C_s)$ совпадут с числами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$.

Заметим, что выполнение равенства (3.1) является необходимым условием, а также необходимым условием для схемы типа I является сравнение

$$s \equiv n \pmod{2}. \quad (3.2)$$

Из предложения 3.2 вытекает, что если в утверждениях 2)–5) теоремы 0.4 рассматриваемая схема не имеет тип I, например не выполняется сравнение (3.2), то условия этих утверждений реализуются. Аналогично для утверждений 2), 4) теоремы 0.5. Однако для утверждения 6) теоремы 0.4 и для утверждений 2), 4) теоремы 0.6 предложение 3.2 неприменимо, так рассматриваемые в них схемы имеют тип I (см., например, [3]). Для них нужно применять другой результат из работы [4]. Чтобы его сформулировать, необходимо сначала ввести дополнительные обозначения и понятия.

Пусть C – вещественная неособая кривая рода $g > 0$. Будем предполагать, что кривая C имеет тип I. Тогда на вещественной части $\mathbb{R}C = C_1 \cup \dots \cup C_s$ определена комплексная ориентация (см. [3]). Для произвольной ориентации от

кривой $\mathbb{R}C$ определим набор чисел $\delta_{\text{ор}}(C_1), \dots, \delta_{\text{ор}}(C_s) \in \mathbb{F}_2$, полагая $\delta_{\text{ор}}(C_i) = 0$, если на овале C_i комплексная ориентация совпадает с ориентацией ор , в противном случае $\delta_{\text{ор}}(C_i) = 1$. Для произвольного вещественного линейного расслоения L на кривой C определим набор чисел $\varepsilon_L(C_1), \dots, \varepsilon_L(C_s) \in \mathbb{F}_2$, полагая $\varepsilon_L(C_i) = 0$, если расслоение $\mathbb{R}L$ тривиально на овале C_i , в противном случае положим $\varepsilon_L(C_i) = 1$. Тогда введем инвариант

$$A(\text{ор}, L) = \sum_{i=1}^s (1 + \varepsilon_L(C_i)) \delta_{\text{ор}}(C_i).$$

В случае, когда C – спектральная кривая вещественной триквадрики, ор – индекс-ориентация, а L – соответствующее спектральное расслоение, выполняется равенство $A(\text{ор}, L) = 0$ (см. [4]). В работе [4] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – неособая вещественная кривая степени $2n + 4$ и типа I, на вещественной части $\mathbb{R}C = C_1 \cup \dots \cup C_s$ задана произвольная ориентация ор , а также задан набор чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \in \mathbb{F}_2$, удовлетворяющий условию (3.1). Малое вещественное возмущение кривой C такое, что кривая C станет спектральной кривой вещественной триквадрики размерности $2n$, причем такой триквадрики, что индекс-ориентация спектральной кривой совпадет с заданной ориентацией ор , спектральные числа $\varepsilon(C_1), \dots, \varepsilon(C_s)$ совпадут с числами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$, существует тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^s (1 + \varepsilon_i) \delta_{\text{ор}}(C_i) = 0.$$

Мы не будем исследовать реализуемость утверждения б) теоремы 0.4, а перейдем к исследованию утверждений 2), 4) теоремы 0.6. Схема $\langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$ имеет тип I. Из формулы Рохлина о комплексных ориентациях следует (см. [3]), что для комплексной ориентации кривой степени 8 с вещественной схемой $\langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$ овалы C_2, C_3, C_4 положительные (если использовать наше разделение не внешних овалов на положительные и отрицательные). Мы можем считать, что на внешнем овале C_1 комплексная ориентация совпадает с индекс-ориентацией. Поэтому должно выполняться равенство

$$(1 + \varepsilon_2) \delta_2 + (1 + \varepsilon_3) \delta_3 + (1 + \varepsilon_4) \delta_4 = 0.$$

Из этого равенства получаем утверждения:

- а) если для индекс-ориентации отрицателен только овал C_i , $i = 2, 3, 4$, то должно выполняться равенство $\varepsilon_i = 1$;
- б) если для индекс-ориентации отрицательны только овалы C_i, C_j , $2 \leq i, j \leq 4$, то должно выполняться равенство $\varepsilon_i + \varepsilon_j = 0$;
- с) если для индекс-ориентации отрицательны все не внешние овалы, то должно выполняться равенство $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 1$.

Если теперь применим предложение 3.3, то получим

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть вещественная схема спектральной кривой триквадрики имеет вид $\langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$. Тогда справедливы утверждения:

- 1) существуют триквадрики с отрицательным овалом C_3 и положительными овалами C_2, C_4 для индекс-ориентации как для $\ell = 0$, так и для $\ell = 1$;
- 2) существуют такие триквадрики с отрицательными овалами C_3, C_4 и положительным овалом C_2 для индекс-ориентации, что $\ell = 1$, но не существуют такие триквадрики для $\ell = 0$;
- 3) существуют триквадрики с отрицательными овалами C_2, C_4 или C_2, C_3 и положительным оставшимся овалом как для $\ell = 1$, так и для $\ell = 2$.

Теперь мы хотим получить ответ на следующий вопрос: сколько компонент связности может иметь вещественная часть четырехмерной триквадрики?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Существуют четырехмерные триквадрики с любым числом компонент связности вещественной части от 0 до 18.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку триквадрику без вещественных точек легко построить, необходимо показать, что существуют четырехмерные триквадрики с любым числом компонент связности вещественной части от 1 до 18. Сначала будем применять утверждение 1) теоремы 0.5 и предложение 3.1. Из них вытекает, что если существует вещественная алгебраическая кривая степени 8 с вещественной схемой $\langle a \sqcup 1 \langle b \sqcup 1 \langle c \rangle \rangle \rangle$, то существует триквадрика V , для которой $h^0(\mathbb{R}V) = c$. В работе [12] приведена полная таблица всех вещественных схем псевдоголоморфных M -кривых степени 8. В этой таблице, в частности, указаны схемы, для которых была найдена в то время алгебраическая реализация. Таким образом, в [12] было доказано, что существуют вещественные алгебраические M -кривые степени 8 с вещественной схемой $\langle a \sqcup 1 \langle b \sqcup 1 \langle c \rangle \rangle \rangle$, где число c принимает значения от 1 до 17, исключая 14. Следовательно, остается показать, что существуют триквадрики, для которых число $h^0(\mathbb{R}V)$ принимает значения 14 и 18. Для доказательства существования таких триквадрик будем применять утверждение 2) теоремы 0.5 и предложение 3.3.

Существуют вещественные алгебраические M -кривые степени 8 с вещественными схемами (см., например, [12])

$$\langle 1 \sqcup 1 \langle 6 \sqcup 1 \langle 13 \rangle \rangle \rangle, \quad \langle 1 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 17 \rangle \rangle \rangle.$$

Покажем, что существует триквадрика, для которой вещественная схема спектральной кривой имеет вид $\langle 1 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 17 \rangle \rangle \rangle$, а число $h^0(\mathbb{R}V)$ равно 18. Если применить утверждение 2) теоремы 0.5, то получим, что числа $\varepsilon_6, \dots, \varepsilon_{22}$ равны нулю. Мы будем полагать, что все числа $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{22}$ равны нулю. Заметим, что условие (3.1) тогда выполняется. В качестве индекс-ориентации овалов $C_1, \dots, C_{22}$ выберем такую ориентацию, что $I_{\min} = 2$, овалы $C_3, \dots, C_5$ положительные, а остальные 17 овалов отрицательные. На рис. 11 изображена индекс-функция, для которой индекс-ориентация удовлетворяет этим условиям. Применяя теперь предложение 3.3, получим, что если равенство $\delta_2 + \dots + \delta_{22} = 0$ выполняется, то существует триквадрика с данной индекс-функцией и нулевыми спектральными числами.

Если первоначально равенство $\delta_2 + \dots + \delta_{22} = 0$ не выполняется, то изменим ориентацию овала C_3 на отрицательную, тогда равенство $\delta_2 + \dots + \delta_{22} = 0$ будет выполняться. Соответствующая индекс-функция изображена на рис. 12.

Рис. 11

Следовательно, из предложения 3.3 будет вытекать, что существует триквадрика с измененной индекс-функцией и нулевыми спектральными числами. Таким образом, в каждом из этих случаев выполняются условия утверждения 2) теоремы 0.5. Поэтому для построенной триквадрики имеет место равенство $h^0(\mathbb{R}V) = 18$.

Рис. 12

Аналогично доказывается, что существует триквадрика, для которой выполняется равенство $h^0(\mathbb{R}V) = 14$. В этом случае применяется кривая с вещественной схемой $\langle 1 \sqcup 1 \langle 6 \sqcup 1 \langle 13 \rangle \rangle \rangle$. Предложение доказано.

В работе [1] доказано, что не существует четырехмерных триквадрик, вещественная часть которых имеет больше 19 компонент связности. Таким образом, остается нерешенным вопрос о существовании четырехмерных триквадрик, вещественная часть которых имеет 19 компонент.

Список литературы

1. A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *On the number of components of a complete intersection of real quadrics*, arXiv: 0806.4077v2.
2. О. Я. Виро, “Плоские вещественные кривые степеней 7 и 8: новые запреты”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:5 (1983), 1135–1150; англ. пер.: O. Ja. Viro, “Plane real curves of degrees 7 and 8: New restrictions”, *Math. USSR-Izv.*, **23**:2 (1984), 409–422.
3. В. А. Рохлин, “Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых”, *УМН*, **33**:5 (1978), 77–89; англ. пер.: V. A. Rokhlin, “Complex topological characteristics of real algebraic curves”, *Russian Math. Surveys*, **33**:5 (1978), 85–98.
4. В. А. Краснов, “Когомологии вещественных трехмерных триквадрик”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:1 (2012), 121–148; англ. пер.: V. A. Krasnov, “Cohomology of real three-dimensional triquadrics”, *Izv. Math.*, **76**:1 (2012), 113–138.
5. А. А. Аграчев, “Гомологии пересечений вещественных квадрик”, *Докл. АН СССР*, **299**:5 (1988), 1033–1036; англ. пер.: A. A. Agrachev, “Homology of intersections of real quadrics”, *Soviet Math. Dokl.*, **37**:2 (1988), 493–496.
6. А. А. Аграчев, “Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений”, *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.*, **26**, ВИНТИ, М., 1988, 85–124; англ. пер.: A. A. Agrachev, “Topology of quadratic maps and hessians of smooth maps”, *J. Soviet Math.*, **49**:3 (1990), 990–1013.
7. В. А. Краснов, “О числе компонент трехмерного максимального пересечения трех вещественных квадрик”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:3 (2011), 147–160; англ. пер.: V. A. Krasnov, “On the number of components of a three-dimensional maximal intersection of three real quadrics”, *Izv. Math.*, **75**:3 (2011), 589–602.
8. М. Атья, *Лекции по K-теории*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: M. F. Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1967.
9. Д. Хьюзмоллер, *Расслоенные пространства*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: D. Husemoller, *Fibre bundles*, McGraw-Hill, New York–London–Sydney, 1966.
10. А. С. Диксон, “Note on the reduction of a ternary quantic to a symmetrical determinant”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **5** (1902), 350–351.
11. В. Н. Гросс, Дж. Харрис, “Real algebraic curves”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **14**:2 (1981), 157–182.
12. S. Yu. Orevkov, “Classification of flexible M -curves of degree 8 up to isotopy”, *Geom. Funct. Anal.*, **12**:4 (2002), 723–755.

В. А. КРАСНОВ (V. A. KRASNOV)
 Ярославский государственный университет
 им. П. Г. Демидова
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
 14.02.2011