Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Довгошей, О. Мартио, Взаимно сингулярные функции и вычисление длин кривых, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 4, 53–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/im715>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:15:30

УДК 517.52+517.98

А. А. Довгошей, О. Мартио

Взаимно сингулярные функции и вычисление длин кривых

Изучаются спрямляемые кривые в конечномерных нормированных пространствах, задаваемые взаимно сингулярными координатными функциями. Получено описание таких кривых в терминах поведения аппроксимативной касательной и найдена простая формула для вычисления их длин. Как следствие, установлены новые необходимые и достаточные условия взаимной сингулярности конечного числа функций ограниченной вариации.

Библиография: 20 наименований.

§ 1. Введение

Пусть $(V^n, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$ с нормой $\|\cdot\|$ и размерностью $n < \infty$. Кривую в пространстве $(V^n, \|\cdot\|)$ мы будем понимать как непрерывное отображение $f: [a, b] \rightarrow V^n$, где $[a, b]$ – замкнутый интервал в $\mathbb{R}$. Напомним, что f спрямляема и имеет длину $L_a^b(f)$, если

$$\sup \sum_{i=0}^m \|f(t_{i+1} - t_i)\| := L_a^b(f) = L(f) < \infty, \quad (1)$$

где супремум берется по всем возможным разбиениям $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{m+1} = b$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ – нормированный базис пространства V^n , $\|e_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$; тогда кривая $f: [a, b] \rightarrow V^n$ имеет представление

$$f(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)e_i, \quad (2)$$

где при любом $t \in [a, b]$ числа $x_1(t), \dots, x_n(t)$ являются координатами вектора $f(t)$ относительно базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$. Легко видеть, что кривая f спрямляема тогда и только тогда, когда все x_i – функции конечной вариации на отрезке $[a, b]$.

Основным объектом исследования в настоящей работе являются спрямляемые кривые, для которых координатные функции x_i из формулы (2) взаимно сингулярны. Множество таких кривых, зависящее от выбранного базиса

Работа выполнена при частичной поддержке Академии Финляндии и Фонда ДФФД Украины (грант № 01.07/00241).

$\{e_i\}_{i=1}^n$, обозначим через Γ_s . В случае обычной евклидовой нормы и ортонормированного базиса кривая f принадлежит Γ_s тогда и только тогда, когда

$$L_a^b(f) = \sum_{i=1}^n \text{Var}_a^b(x_i), \quad (3)$$

где $\text{Var}_a^b(x_i)$ – полная вариация функции x_i на $[a, b]$. Однако в случае произвольной нормы последнее равенство не эквивалентно принадлежности $f \in \Gamma_s$, и мы будем обозначать множество спрямляемых кривых, для которых равенство (3) выполняется, через Γ_v . В § 2 классы Γ_v и Γ_s охарактеризованы в терминах аппроксимативных касательных к множеству $f([a, b])$ (теоремы 1 и 2), что позволяет установить включение $\Gamma_s \subseteq \Gamma_v$ и описать случай равенства $\Gamma_s = \Gamma_v$ (теорема 3). В теореме 4 описаны пары норм $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$, для которых совпадение длин кривой f относительно $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ эквивалентно принадлежности $f \in \Gamma_s$. В § 3 доказано, что для любой нормы $\|\cdot\|$ в пространстве V^n найдется базис, для которого $\Gamma_s = \Gamma_v$, и это равенство выполняется для любого базиса тогда и только тогда, когда норма $\|\cdot\|$ строго выпукла (теорема 5). В заключительном § 4 рассматриваются простые кривые. Найдена формула, позволяющая вычислять $\mathcal{H}^1$ -меры “сингулярных частей” этих кривых с помощью декомпозиции Лебега мер, соответствующих вариациям координатных функций x_i . Отдельно рассматривается случай плоских кривых.

Напомним некоторые определения.

1.1. Взаимно сингулярные функции. Пусть $\mathcal{F}$ – семейство непрерывных функций ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$. Для любой функции $\eta \in \mathcal{F}$ существует единственная регулярная конечная мера Бореля μ_η с носителем на $[a, b]$, для которой

$$\text{Var}_a^z(\eta) = \int_{[a, z]} d\mu_\eta, \quad z \in [a, b], \quad (4)$$

где $\text{Var}_a^z(\eta)$ – вариация функции η на $[a, z]$. Будем говорить, что функции семейства $\mathcal{F}$ *взаимно сингулярны*, если для любых различных η и θ из $\mathcal{F}$ существуют непересекающиеся борелевские множества A_η и A_θ , для которых

$$\mu_\eta([a, b]) = \mu_\eta(A_\eta), \quad \mu_\theta([a, b]) = \mu_\theta(A_\theta), \quad (5)$$

т. е. $\mu_\eta \perp \mu_\theta$.

Отметим, что для спрямляемых кривых вида

$$f(t) = te_1 + g(t)e_2, \quad a \leq t \leq b,$$

где $\{e_1, e_2\}$ – ортонормированный базис на плоскости, из результатов Пеллинга [1] следует, что g сингулярна (т. е. $g'(t) = 0$ почти всюду на $[a, b]$) тогда и только тогда, когда

$$L_a^b(f) = |a - b| + \text{Var}_a^b(g).$$

Это равенство – частный случай (3), а сингулярность g равносильна принадлежности $f \in \Gamma_s$. Свойства взаимно сингулярных функций изучались в [2, § 47] (см. также [3]–[6]).

1.2. $\mathcal{H}^1$ -мера Хаусдорфа. Для подмножества $A \subseteq (V^n, \|\cdot\|)$ одномерная мера Хаусдорфа $\mathcal{H}^1(A)$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{H}^1(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \mathcal{H}_\delta^1(A),$$

где при $\delta > 0$

$$\mathcal{H}_\delta^1(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam } B_i : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \text{diam } B_i \leq \delta \right\}.$$

(Основные свойства меры Хаусдорфа и близких к ней мер см. в [7, гл. 2].)

1.3. Аппроксимативные касательные векторы. Пусть E – подмножество пространства $(V^n, \|\cdot\|)$, $a \in V^n$ и $L = L(a, u)$ – прямая, проходящая через точку a и имеющая направляющий вектор u . Будем говорить, что u – *аппроксимативный касательный* (а.к.) *вектор*, а $L(a, u)$ – *аппроксимативная касательная* к E в точке a , если для любого $\beta > 0$ множество точек из E , не попадающих в “сектор”

$$S(a, L, \beta) = \{x \in V^n : \text{dist}(x, L) \leq \beta \|x - a\|\},$$

имеет в точке a 1-плотность, равную нулю, т.е.

$$\lim_{r \rightarrow 0+} r^{-1} \mathcal{H}^1(E \cap B(a, r) \setminus S(a, L, \beta)) = 0,$$

где $B(a, r) = \{x \in V^n : \|x - a\| \leq r\}$ – единичный шар с центром в точке $a \in V^n$ и радиусом $r > 0$. Будем обозначать через $\text{Tan}(E, a)$ множество нормированных а.к. векторов к E в точке a . Легко видеть что, если в a верхняя 1-плотность множества E положительна и существует а.к. вектор, то он единствен с точностью до числового множителя. Таким образом, в этом случае

$$\text{Tan}(E, a) = \{-m, m\}, \quad m \in \mathbb{S}^{n-1} := \{x \in V^n : \|x\| = 1\}.$$

Приведенное выше определение а.к. векторов соответствует определению, данному в [7, п. 3.2.16], приложения к задачам теории спрямляемых множеств можно найти также в [8, § 15].

§ 2. Спрямляемые кривые со взаимно сингулярными координатными функциями

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество, состоящее из векторов нормированного базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ и противоположных им векторов:

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} \cup \{-e_1, \dots, -e_n\},$$

через $\widehat{\mathcal{E}}$ – выпуклую оболочку множества $\mathcal{E}$, $\widehat{\mathcal{E}} := \text{conv } \mathcal{E}$, а через $\partial \widehat{\mathcal{E}}$ – границу множества $\widehat{\mathcal{E}}$. Для спрямляемой кривой $f: [a, b] \rightarrow V^n$ положим

$$\gamma = \gamma^f := f([a, b]),$$

$$\gamma_{rv} := \{x \in \gamma : \emptyset \neq \text{Tan}(\gamma, x) \subseteq \partial \widehat{\mathcal{E}}\}, \quad \gamma_{iv} := \gamma \setminus \gamma_{rv}, \quad (6)$$

$$\gamma_{rs} := \{x \in \gamma : \emptyset \neq \text{Tan}(\gamma, x) \subseteq \mathcal{E}\}, \quad \gamma_{is} := \gamma \setminus \gamma_{rs}. \quad (7)$$

Следующие три теоремы являются основными результатами настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: [a, b] \rightarrow V^n$ – спрямляемая кривая. Тогда $f \in \Gamma_s$ в том и только в том случае, если

$$\mathcal{H}^1(\gamma_{is}) = 0. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f: [a, b] \rightarrow V^n$ – спрямляемая кривая. Тогда $f \in \Gamma_v$ в том и только в том случае, если

$$\mathcal{H}^1(\gamma_{iv}) = 0. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 3. Имеет место включение $\Gamma_s \subseteq \Gamma_v$. Равенство

$$\Gamma_s = \Gamma_v \quad (10)$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{S}^{n-1} \cap (\partial \widehat{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}. \quad (11)$$

Множество всех спрямляемых кривых совпадает с Γ_v тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{S}^{n-1} = \partial \widehat{\mathcal{E}}. \quad (12)$$

Теорема 1 показывает, что взаимная сингулярность координатных функций эквивалентна тому, что $\mathcal{H}^1$ -п. в. аппроксимативные касательные к γ параллельны координатным осям.

Сформулируем теперь леммы, необходимые для доказательства теорем 1–3.

ЛЕММА 1. Пусть $f: [a, b] \rightarrow (V^n, \|\cdot\|)$ – спрямляемая кривая. Если f – липшицева функция, то

$$L_a^b(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Лемма 1, дающая классический метод вычисления длины липшицевой кривой, справедлива и для кривых в метрических пространствах (см. [9, гл. 4, § 4.1, теорема 4.1.6]).

Будем говорить, что $\psi: [0, l] \rightarrow (V^n, \|\cdot\|)$ – спрямляемая кривая с натуральной параметризацией, если для любого $x \in [0, l]$

$$L_0^x(\psi) = x. \quad (13)$$

Известно (см., например, [7, п. 2.5.16]), что для любой спрямляемой кривой $f: [a, b] \rightarrow (V^n, \|\cdot\|)$ существует натуральная перепараметризация $\psi_f: [0, L(f)] \rightarrow (V^n, \|\cdot\|)$, для которой

$$\psi_f(L_a^x(f)) = f(x) \quad (14)$$

при всех $x \in [a, b]$.

ЛЕММА 2. Пусть $\psi: [0, l] \rightarrow (V^n, \|\cdot\|)$ – спрямляемая кривая с натуральной параметризацией. Тогда:

(i) отображение ψ липшицево, а именно

$$\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq |x - y| \quad (15)$$

при всех $x, y \in [0, l]$;

(ii) для нормы производной функции ψ равенство

$$\|\psi'(x)\| = 1 \quad (16)$$

выполнено для п. в. $x \in [0, l]$;

(iii) отображение ψ обладает N - и (N^{-1}) -свойствами, т. е. для произвольных $A \subseteq [0, l]$ и $B \subseteq \gamma$ истинны импликации

$$(m_1(A) = 0) \implies (\mathcal{H}^1(\psi(A)) = 0), \quad (17)$$

$$(\mathcal{H}^1(B) = 0) \implies (m_1(\psi^{-1}(B)) = 0), \quad (18)$$

где m_1 и $\mathcal{H}^1$ – одномерные меры Лебега и Хаусдорфа в $\mathbb{R}$ и $(V^n, \|\cdot\|)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) следует непосредственно из (13) и формулы (1), определяющей длину кривой.

Докажем утверждение (ii). Поскольку $\psi \in \text{Lip}([0, l])$, то равенство (16) выполнено п. в. для так называемой “метрической” производной [9, гл. 4, § 4.2, теорема 4.2.1], которая в точках дифференцируемости функции ψ совпадает с $\|\psi'\|$ (см. [9, гл. 4, § 4.1, пример 4.1.4]). Осталось заметить, что по теореме Радемахера любая липшицева функция дифференцируема п. в.

Утверждение (iii) докажем для случая евклидовой нормы, этого достаточно, так как различные нормы в конечномерном пространстве эквивалентны, что влечет взаимную абсолютную непрерывность соответствующих $\mathcal{H}^1$ -мер. Из неравенства (15) и элементарных оценок меры Хаусдорфа [11, § 2.4, теорема 1] получаем

$$\mathcal{H}^1(A) \geq \mathcal{H}^1(\psi(A)), \quad A \subseteq [0, l].$$

Последнее неравенство влечет импликацию (17), так как одномерные меры Хаусдорфа и Лебега совпадают в $\mathbb{R}$. Пусть теперь $B \subseteq \gamma$, $\mathcal{H}^1(B) = 0$. Из определения меры $\mathcal{H}^1$ следует, что найдется G_δ -множество $B_1 \supseteq B$ такое, что

$$\mathcal{H}^1(B_1) = 0. \quad (19)$$

Достаточно доказать, что $m_1(\psi^{-1}(B_1)) = 0$. Множество $\psi^{-1}(B_1)$ имеет тип G_δ и, следовательно, измеримо. Используя “формулу площадей” (см., например, [7, теорема 3.2.3] или [11, п. 3.3.2, теорема 1]) и учитывая, что в случае евклидовой нормы и натуральной параметризации одномерный якобиан отображения п. в. равен 1, получаем

$$m_1(\psi^{-1}(B_1)) = \int_{B_1} N(\psi, y) d\mathcal{H}^1(y),$$

где $N(\psi, y)$ – кратность значения y функции ψ . Последний интеграл равен нулю в силу (19).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно показать, что функция кратности $y \rightarrow N(f, y)$ полунепрерывна снизу (см., например, [10, § II.3, теорема 3]) и, следовательно, $\mathcal{H}^1$ -измерима.

Из эквивалентности различных норм в конечномерном пространстве легко следует

ЛЕММА 3. Пусть в линейном пространстве V^n заданы две нормы $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$. Если $f: [a, b] \rightarrow V^n$ — спрямляемая кривая, то через $L_x^y(f, \alpha)$ и $L_x^y(f, \beta)$ обозначим длины кривой $f|_{[x, y]}$, $a \leq x \leq y \leq b$ в $(V^n, \|\cdot\|_\alpha)$ и $(V^n, \|\cdot\|_\beta)$ соответственно. Тогда найдется постоянная $c > 0$, зависящая только от $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$, для которой

$$L_x^y(f, \beta) \leq c L_x^y(f, \alpha).$$

ЛЕММА 4. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — нормированный базис пространства $(V^n, \|\cdot\|)$, $f: [a, b] \rightarrow V^n$ — спрямляемая кривая. Если $\gamma = \gamma^f$ имеет в точке $x \in \gamma$ единственную аппроксимативную касательную $L(x, u)$ с а. к. вектором $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, то $x \in \gamma_{rv}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|}{\|u\|} = 1. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению имеем $x \in \gamma_{rv}$ тогда и только тогда, когда $u/\|u\| \in \partial\hat{\mathcal{E}} \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Легко видеть, что произвольный вектор $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ принадлежит $\hat{\mathcal{E}}$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^n |\beta_i| \leq 1$. Отсюда имеем

$$(y \in \partial\hat{\mathcal{E}}) \iff \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1 \right). \quad (21)$$

Положив $y = u/\|u\|$, получаем, что (20) $\Leftrightarrow (x \in \gamma_{rv})$.

ЛЕММА 5. Пусть $f: [a, b] \rightarrow V^n$ — спрямляемая кривая. Если в точке $t_0 \in [a, b]$ существует производная $f'(t_0) \neq 0$, а в точке $x_0 = f(t_0)$ множество γ^f имеет аппроксимативную касательную $L(x_0, u)$, то

$$\text{Tan}(\gamma^f, x_0) = \left\{ \frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}, -\frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f'(t_0) \neq 0$, то γ^f — невырожденный континуум. Так как для любого связного A имеем $\mathcal{H}^1(A) \geq \text{diam}(A)$ (см. [7, 2.10.2]), то верхняя 1-плотность множества γ^f в точке x_0 положительна и, следовательно, аппроксимативная касательная $L(x_0, u)$ единственна. Рассмотрим прямую L_f , проходящую через точку x_0 и имеющую направляющий вектор $f'(x_0)$. Из определения производной следует, что при любом $\beta > 0$ пересечение множества γ^f и сектора $\{x \in V^n: \text{dist}(x_0, L_f) \leq \beta\|x - x_0\|\}$ содержит невырожденную дугу, проходящую через x_0 . Последнее возможно только при $L_f = L(x_0, u)$, что доказывает лемму.

Доказательство основных теорем удобно начать с доказательства теоремы 2. Заметим, что для произвольной спрямляемой кривой $f: [a, b] \rightarrow V^n$ и ее натуральной перепараметризации ψ_f равны вариации соответствующих координатных функций, $\gamma^f = \gamma^{\psi_f}$, и совпадают длины, следовательно,

$$(f \in \Gamma_v) \iff (\psi_f \in \Gamma_v). \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В соответствии с (22) рассматриваем только случай спрямляемой кривой $\psi: [0, l] \rightarrow (V^n, \|\cdot\|)$ с натуральной параметризацией, $\psi(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)e_i$. Используя заданный нормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, введем в пространстве V^n новую норму $\|\cdot\|_\beta$ по следующему правилу:

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_\beta := \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (23)$$

Непосредственно из формулы (1) следует, что относительно нормы $\|\cdot\|_\beta$ кривая ψ имеет длину

$$l_\beta = \sum_{i=1}^n \text{Var}_0^l(x_i).$$

Таким образом, $\psi \in \Gamma_v$ тогда и только тогда, когда

$$l_\beta = l. \quad (24)$$

Из неравенства (15), леммы 3 и очевидного неравенства

$$\|\psi(x) - \psi(y)\|_\beta \leq L_x^y(\psi, \beta)$$

(где использованы обозначения из леммы 3) следует, что отображение $[0, l] \xrightarrow{\psi} (V^n, \|\cdot\|_\beta)$ является липшицевым. Тогда в соответствии с леммой 1 получаем

$$l_\beta = \int_0^l \|\psi'(t)\|_\beta dt. \quad (25)$$

Предположим, что выполнено равенство (9), и докажем (24). Положим

$$A = \psi^{-1}(\gamma_{rv}) \cap \{t \in [0, l]: \psi \text{ дифференцируемо в } t \text{ и } \|\psi'(t)\| = 1\}.$$

В силу импликации (18) и утверждения (ii) леммы 2 имеем

$$m_1(A) = l. \quad (26)$$

В соответствии с леммой 5 получаем

$$\forall t \in A: \text{Tan}(\gamma, \psi(t)) = \{-\psi'(t), \psi'(t)\}. \quad (27)$$

Поскольку при $t \in A$ значение $\psi(t) \in \gamma_{rv}$, то из соотношений (27) и (20) имеем

$$\forall t \in A: \sum_{i=1}^n |x'_i(t)| = 1. \quad (28)$$

Учитывая, что $\|\psi'(t)\|_\beta = \sum_{i=1}^n |x'_i(t)|$, из формул (25), (26), (28) получаем равенство (24).

Предположим теперь, что (24) выполнено; проверим, выполнено ли равенство (9). Из неравенства треугольника и утверждения (ii) леммы 2 следует, что для п. в. $t \in [0, l]$

$$1 = \|\psi'(t)\| \leq \|\psi'(t)\|_\beta.$$

Значит, если равенство (24) выполнено, то для п. в. $t \in [0, l]$

$$1 = \|\psi'(t)\|_\beta = \frac{\sum_{i=1}^n |x'_i(t)|}{\|\psi'(t)\|}. \quad (29)$$

Известно, что $\mathcal{H}^1$ -мера множества точек, в которых γ не имеет аппроксимативной касательной, равна нулю (это частный случай общего результата об а.к. плоскостях; см. [8, теорема 15.19]). Выделим из отрезка $[0, l]$ “исключительное” подмножество

$$F := \{t \in [0, l] : (\psi \text{ не дифференцируема в } t) \vee (\exists \psi'(t), \text{ но (29) ложно}) \vee (\text{Tan}(\gamma, \psi(t)) = \emptyset)\}.$$

Положим $\widehat{F} = \psi^{-1}(\psi(F))$. Комбинируя N - и (N^{-1}) -свойства отображения ψ , видим, что

$$m_1(\widehat{F}) = \mathcal{H}^1(\psi(\widehat{F})) = 0. \quad (30)$$

В силу лемм 4 и 5 имеем $\psi([0, l] \setminus \widehat{F}) \subseteq \gamma_{rv}$, а так как $\psi(\widehat{F}) \cap \psi([0, l] \setminus \widehat{F}) = \emptyset$, то из равенств (30) следует (9).

При доказательстве теоремы 1 ограничимся случаем натуральной параметризации, так как для произвольной спрямляемой кривой $f: [a, b] \rightarrow V^n$ и ее натуральной перепараметризации ψ_f имеет место эквивалентность

$$(f \in \Gamma_s) \iff (\psi_f \in \Gamma_s).$$

Действительно, пусть $\varphi(x) := L_a^x(f)$ при $x \in [a, b]$. Функция φ непрерывна, и в силу равенства (14) имеем $f = \psi_f \circ \varphi$. Пусть η, θ – различные координатные функции кривой f и μ_η, μ_θ – соответствующие им меры (см. (4)), обозначим через $\eta^*, \theta^*, \mu_\eta^*, \mu_\theta^*$ аналогичные функции и меры для ψ_f . Тогда

$$\eta = \eta^* \circ \varphi, \quad \theta = \theta^* \circ \varphi. \quad (31)$$

Если A_θ^*, A_η^* – непересекающиеся борелевские подмножества $[0, L(f)]$, на которых сосредоточены меры μ_θ^* и μ_η^* , то положим $A_\theta = \varphi^{-1}(A_\theta^*)$, $A_\eta = \varphi^{-1}(A_\eta^*)$. Множества A_θ и A_η являются борелевскими (так как функция φ непрерывна) и не пересекаются. Из равенств (31) следует, что μ_η сосредоточена на A_η , а μ_θ – на A_θ . Таким образом,

$$(\mu_\theta^* \perp \mu_\eta^*) \implies (\mu_\theta \perp \mu_\eta). \quad (32)$$

Для доказательства обратной импликации покажем, что можно выбрать непересекающиеся борелевские множества A_η, A_θ , на которых сосредоточены меры μ_η и μ_θ таким образом, чтобы

$$\varphi(A_\eta) \cap \varphi(A_\theta) = \emptyset, \quad (33)$$

и проверим, что образ любого борелевского множества при монотонном непрерывном отображении – борелевское множество (последнее, как известно, не верно при произвольном непрерывном отображении). Сформулированные утверждения тривиальны, если функция φ строго возрастает на отрезке $[a, b]$. В противном случае положим

$$S := \{s \in [0, L(f)] : N(\varphi, s) > 1\},$$

где $N(\varphi, s)$ – кратность значения s функции φ . В силу непрерывности и монотонности φ имеем:

- (i) для каждого $s \in S$ множество $\varphi^{-1}(s)$ – замкнутый интервал;
- (ii) S не более чем счетно;
- (iii) ограничение φ на $[a, b] \setminus \varphi^{-1}(S)$ является строго возрастающим и непрерывным.

Из соотношения (4) легко получить равенства

$$\mu_\theta(\varphi^{-1}(S)) = \mu_\eta(\varphi^{-1}(S)) = 0,$$

что дает возможность выбрать борелевские множества A_η и A_θ , для которых выполнены равенства (5) и (33). Кроме того, если A – борелевское подмножество $[a, b]$, то

$$\varphi(A) = \varphi(A \setminus \varphi^{-1}(S)) \cup \varphi(A \cap \varphi^{-1}(S)),$$

где первое множество справа является борелевским в соответствии с утверждением (iii), а второе – с утверждением (ii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассматриваем кривую $\psi: [0, l] \rightarrow (V^n, \|\cdot\|)$ с натуральной параметризацией, $\psi(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)e_i$. Предположим, что $\mathcal{H}^1(\gamma_{is}) = 0$, и докажем взаимную сингулярность координатных функций x_i . Определим подмножества $A_1, \dots, A_n$ отрезка $[0, l]$ по правилу:

(d) точка $t \in A_i$, если γ имеет аппроксимативную касательную в точке $\psi(t)$, функция ψ дифференцируема в t , и выполняются следующая альтернатива: или $\psi'(t) = e_i$, или $\psi'(t) = -e_i$.

Очевидно, множества $A_1, \dots, A_n$ попарно не пересекаются. Покажем теперь, что из (8) следует равенство

$$m_1(A_1 \cup \dots \cup A_n) = l, \quad (34)$$

где m_1 – мера Лебега на $\mathbb{R}$. Действительно, функция ψ дифференцируема п. в. на $[0, l]$, и в соответствии с утверждением (ii) леммы 2 $\|\psi'(t)\| = 1$ п. в. Кроме того, в силу равенства (8) и в соответствии с (N^{-1}) -свойством отображения ψ имеем

$$m_1(\psi^{-1}(\gamma_{rs})) = l.$$

Наконец, если $t \in \psi^{-1}(\gamma_{rs})$, функция ψ дифференцируема в точке t и $\|\psi'(t)\| = 1$, то в силу (7) и леммы 5 найдется базисный вектор e_i , для которого $\psi'(t) = e_i$ или $\psi'(t) = -e_i$. Таким образом, равенство (34) установлено.

Поскольку $\psi \in \text{Lip}([0, l])$, то координатные функции x_i абсолютно непрерывны, а значит,

$$\text{Var}_0^t(x_i) = \int_0^t |x'_i(s)| ds, \quad t \in [0, l]. \quad (35)$$

Каждое из множеств A_i , $1 \leq i \leq n$, можно считать борелевским (см. далее замечание 2). Таким образом, для доказательства принадлежности $\psi \in \Gamma_s$ достаточно проверить, выполнено ли равенство

$$\text{Var}_0^l(x_i) = \int_{A_i} |x'_i(s)| ds \quad (36)$$

при $i = 1, \dots, n$. Очевидно,

$$\text{Var}_0^l(x_i) \geq \int_{A_i} |x'_i(s)| ds, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (37)$$

Предположим, что какое-нибудь из этих неравенств строгое:

$$\text{Var}_0^l(x_{i_0}) > \int_{A_{i_0}} |x'_{i_0}(s)| ds. \quad (38)$$

Поскольку $\gamma_{is} \supseteq \gamma_{iv}$, то из равенства (8) следует $\mathcal{H}^1(\gamma_{iv}) = 0$, но тогда из теоремы 2, утверждения (ii) леммы 2 и (34) получаем

$$\sum_{i=1}^n \text{Var}_0^l(x_i) = \int_0^l \|\psi'(s)\| ds = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \|\psi'(s)\| ds.$$

Из определения (d) следует, что $\psi'(s) = x'_i(s)e_i$ при $s \in A_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Таким образом, используя нормированность базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$, получим

$$\sum_{i=1}^n \text{Var}_0^l(x_i) = \sum_{i=1}^n \|e_i\| \int_{A_i} |x'_i(s)| ds = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} |x'_i(s)| ds.$$

В силу (37) последнее невозможно, если выполнено неравенство (38). Взаимная сингулярность координатных функций x_i доказана.

Покажем теперь, что $(\psi \in \Gamma_s) \implies (8)$. Предположим, что координатные функции в представлении $\psi(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)e_i$ являются взаимно сингулярными. Ранее отмечалось, что все x_i абсолютно непрерывны и для них выполнено равенство (35). В силу единственности борелевских мер, соответствующих вариациям (см. (4)), взаимная сингулярность x_i , $1 \leq i \leq n$, эквивалентна следующему: существуют непересекающиеся борелевские множества A_i , для которых выполнены (34) и (36) при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. (Последнее утверждение следует из равенств (5) при $n = 2$, а в общем случае может быть доказано индукцией по n .) Теперь (36) влечет равенство

$$x'_i(s) = 0 \quad \text{п. в. на} \quad [0, l] \setminus A_i$$

при любом $i \in \{1, \dots, n\}$. Поскольку п. в. на $[0, l]$ функция ψ дифференцируема и $\|\psi'(t)\| = 1$, то можно выбрать измеримые по Лебегу множества B_i такие, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ при $t \in B_i$

$$x'_i(t) \neq 0, \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |x'_j(t)| = 0.$$

Функция ψ дифференцируема в каждой точке $t \in \bigcup_{i=1}^n B_i$; $B_i \subseteq A_i$ и $m_1(B_i) = m_1(A_i)$. Кроме того, так как $\mathcal{H}^1$ -п. в. на γ существуют и единственны аппроксимативные касательные, то, используя свойство (18), выбираем B_i так, что γ имеет аппроксимативную касательную в точке $\psi(t)$ для любого $t \in \bigcup_{i=1}^n B_i$.

Положим $F = [0, l] \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i$ и $\widehat{F} = \psi^{-1}(\psi(F))$. Тогда, как при доказательстве теоремы 2, получим соотношение (30) и вложение $\psi([0, l] \setminus \widehat{F}) \subseteq \gamma_{rs}$, откуда следует равенство (8).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку функция ψ непрерывна, то каждая из производных Дини любой из координатных функций x_i есть функция 2-го класса Бэра

[12, гл. IV, теорема 2.2]. Функции Бэра являются измеримыми по Борелю, следовательно, множества $\{t: \psi'(t) = \pm e_i\}$ – борелевские. Как и при доказательстве (18), из равенства $\mathcal{H}^1(\gamma_{is}) = 0$ следует, что для некоторого G_δ -множества $A \supseteq \psi^{-1}(\gamma_{is})$ имеем $m_1(A) = 0$. Таким образом, все A_i в формуле (34) можно считать борелевскими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Включение $\Gamma_s \subseteq \Gamma_v$ следует из теорем 1 и 2, так как в силу определений (6), (7) имеем $\gamma_{is} \supseteq \gamma_{iv}$ для любой спрямляемой кривой.

Докажем эквивалентность (10) $\iff$ (11). Пусть выполнено равенство (11). Тогда $\gamma_{is} = \gamma_{iv}$ для любой спрямляемой кривой i , следовательно, (8) равносильно (9). В силу теорем 1 и 2 получаем (10).

Обратно, предположим, что (11) ложно. Тогда найдется

$$x \in (\mathbb{S}^{n-1} \cap \partial \widehat{\mathcal{E}}) \setminus \mathcal{E}. \quad (39)$$

Рассмотрим кривую $f_x(t) = tx$, $t \in [0, 1]$. Для любой точки $a \in \gamma^{f_x}$ имеем $\text{Tan}(a, \gamma^{f_x}) = \{x, -x\} \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \cap \partial \widehat{\mathcal{E}}$. Следовательно, $\gamma_{iv} = \emptyset$, и по теореме 2 $f_x \in \Gamma_v$. Осталось заметить, что $f_x \notin \Gamma_s$. Действительно, в силу формулы (39) у вектора x найдется хотя бы две отличные от нуля координаты x_i, x_j , но меры, соответствующие одноименным координатным функциям, взаимно абсолютно непрерывны и не равны нулю. Таким образом, если (11) ложно, то $\Gamma_s \neq \Gamma_v$.

Предположим, что равенство (12) выполнено. Тогда $\gamma_{iv} = \{x \in \gamma: \gamma \text{ не имеет в } x \text{ аппроксимативной касательной}\}$. Как отмечалось ранее, последнее множество имеет $\mathcal{H}^1$ -меру нуль. Следовательно, по теореме 2 в этом случае если кривая f спрямляемая, то $f \in \Gamma_v$.

Обратно, предположим, что любая спрямляемая кривая f принадлежит Γ_v . Пусть $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ – произвольный вектор из V^n . Рассмотрим кривую $f_x: [0, 1] \rightarrow V^n$, $f_x(t) = \sum_{i=1}^n t x_i e_i$. Легко видеть, что $L_0^1(f_x) = \|x\|$, а сумма вариаций координатных функций есть $\sum_{i=1}^n |x_i|$. По предположению имеем $f_x \in \Gamma_v$, следовательно, выполнено равенство

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

откуда в силу эквивалентности (21) получаем (12). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В частном случае простых кривых $[a, b] \xrightarrow{f} V^n$, т. е. при инъективности отображения $f|_{(a,b)}$, теорема 3 доказана в работе [13] без использования теорем 1 и 2.

В следующей теореме мы используем обозначения из леммы 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в пространстве V^n заданы две нормы $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$ и существует базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, для которого

$$\mathbb{S}_\alpha^{n-1} \cap \mathbb{S}_\beta^{n-1} = \mathcal{E}, \quad (40)$$

где $\mathbb{S}_\alpha^{n-1}$ и $\mathbb{S}_\beta^{n-1}$ – единичные сферы в $(V^n, \|\cdot\|_\alpha)$ и $(V^n, \|\cdot\|_\beta)$ соответственно. Тогда спрямляемая кривая $f: [a, b] \rightarrow V^n$, $f(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) e_i$, принадлежит Γ_s тогда и только тогда, когда

$$L_a^b(f, \alpha) = L_a^b(f, \beta). \quad (41)$$

Обратно, если в V^n найдется (не обязательно нормированный) базис $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$, относительно которого произвольная спрямляемая кривая f попадает в Γ_s тогда и только тогда, когда выполнено равенство (41), то существует базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, для которого имеет место (40).

Для доказательства теоремы 4 понадобится следующая

ЛЕММА 6. Пусть в V^n заданы две нормы $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ и существует базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, для которого выполнено (40). Тогда или $\mathbb{B}_\alpha^n \subseteq \mathbb{B}_\beta^n$, или $\mathbb{B}_\beta^n \subseteq \mathbb{B}_\alpha^n$, где $\mathbb{B}_\alpha^n$ и $\mathbb{B}_\beta^n$ – единичные шары с центром в нуле из $(V^n, \|\cdot\|_\alpha)$ и $(V^n, \|\cdot\|_\beta)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма тривиальна при $n = 1$. Поэтому рассмотрим случай $n \geq 2$. Пусть $\mathbb{S}_{\alpha\beta}$ – граница выпуклого тела $\mathbb{B}_\alpha^n \cap \mathbb{B}_\beta^n$. На каждом луче l_x , выходящем из начала координат, лежит ровно по одной точке поверхностей $\mathbb{S}_\alpha^{n-1}$, $\mathbb{S}_\beta^{n-1}$ и $\mathbb{S}_{\alpha\beta}$. Обозначим эти точки через x_α , x_β и $x_{\alpha\beta}$ соответственно. Легко убедиться в том, что $x_{\alpha\beta} = x_\alpha$ или $x_{\alpha\beta} = x_\beta$. Положим

$$A_\alpha := \{x_{\alpha\beta} \in \mathbb{S}_{\alpha\beta} : x_{\alpha\beta} = x_\alpha \neq x_\beta\}, \quad A_\beta := \{x_{\alpha\beta} \in \mathbb{S}_{\alpha\beta} : x_{\alpha\beta} = x_\beta \neq x_\alpha\}.$$

Тогда в силу (40) имеем $\mathbb{S}_{\alpha\beta} = A_\alpha \cup A_\beta \cup \mathcal{E}$ и, очевидно,

$$A_\alpha \cap A_\beta = A_\alpha \cap \mathcal{E} = A_\beta \cap \mathcal{E} = \emptyset.$$

Если $A_\beta = \emptyset$, то $\mathbb{B}_\alpha^n \subseteq \mathbb{B}_\beta^n$, а при $A_\alpha = \emptyset$ имеем $\mathbb{B}_\beta^n \subseteq \mathbb{B}_\alpha^n$. Предположим, что $A_\beta \neq \emptyset \neq A_\alpha$. Из элементарных соображений, связанных с непрерывностью функций $x \rightarrow \|x\|_\beta$, $x \rightarrow \|x\|_\alpha$, следует, что A_α и A_β – открытые подмножества $\mathbb{S}_{\alpha\beta}$, но тогда $\mathbb{S}_{\alpha\beta} \setminus \mathcal{E}$ не является связным, что невозможно, так как граница $\mathbb{S}_{\alpha\beta}$ гомеоморфна евклидовой сфере в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Докажем первую часть теоремы. Предположим, что $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис, для которого выполнено (40), а f – произвольная кривая, принадлежащая Γ_s относительно этого базиса. В силу равенства (40) базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ является нормированным как в $(V^n, \|\cdot\|_\alpha)$, так и в $(V^n, \|\cdot\|_\beta)$. Тогда по теореме 3 имеем $f \in \Gamma_v$ для любой из норм $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$. Следовательно,

$$L_a^b(f, \alpha) = \sum_{i=1}^n \text{Var}_a^b(x_i) = L_a^b(f, \beta).$$

Предположим теперь, что выполнено равенство (41), и докажем принадлежность $f \in \Gamma_s$. В силу леммы 5 можно считать, что

$$\mathbb{B}_\alpha^n \subseteq \mathbb{B}_\beta^n. \quad (42)$$

Пусть $\psi_\alpha : [0, l_\alpha] \rightarrow (V^n, \|\cdot\|_\alpha)$ – натуральная перепараметризация кривой f относительно нормы $\|\cdot\|_\alpha$. В соответствии с леммой 1 перепишем (41) в виде

$$\int_0^{l_\alpha} (\|\psi'_\alpha(t)\|_\beta - \|\psi'_\alpha(t)\|_\alpha) dt = 0. \quad (43)$$

Используя включение (42), легко показать, что во всех точках дифференцируемости функции ψ_α имеет место неравенство

$$\|\psi'_\alpha(t)\|_\beta \leq \|\psi'_\alpha(t)\|_\alpha.$$

Поскольку ψ_α дифференцируема п.в. и в силу равенства (16) почти всюду имеем $\|\psi'_\alpha(t)\|_\alpha = 1$, то из соотношения (43) вытекает, что почти всюду $\|\psi'_\alpha(t)\|_\beta = 1$, а значит,

$$\psi'_\alpha(t) \in \mathbb{S}_\alpha^{n-1} \cap \mathbb{S}_\beta^{n-1} \quad \text{для п.в. } t \in [0, l_\alpha].$$

Следовательно, в соответствии с равенством (40) имеем $\psi'_\alpha(t) \in \mathcal{E}$ для п.в. $t \in [0, l_\alpha]$.

Теперь, как и при доказательстве теоремы 1, видим, что а.к. векторы к множеству $\gamma = \gamma^f = \gamma^{\psi_\alpha}$ для $\mathcal{H}^1$ -п.в. точек из γ коллинеарны векторам базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$. По теореме 1 имеем $f \in \Gamma_s$.

Докажем вторую часть теоремы. Предположим, что в пространстве V^n существует базис $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ такой, что для произвольной спрямляемой кривой f имеем

$$(f \in \Gamma_s) \iff (41).$$

Установим существование базиса, для которого выполнено равенство (40). Действительно, при любом $i \in \{1, \dots, n\}$ кривая $f_i(t) = t\tilde{e}_i$, $0 \leq t \leq 1$, принадлежит Γ_s . В соответствии с (41) для любого i

$$\|\tilde{e}_i\|_\alpha = L_0^1(f_i, \beta) = \|\tilde{e}_i\|_\beta.$$

Положим $e_i = \tilde{e}_i / \|\tilde{e}_i\|_\alpha$. Тогда для базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ получим

$$\mathbb{S}_\alpha^{n-1} \cap \mathbb{S}_\beta^{n-1} \supseteq \mathcal{E}.$$

Если включение строгое, то возьмем произвольную точку $\tilde{e} \in (\mathbb{S}_\alpha^{n-1} \cap \mathbb{S}_\beta^{n-1}) \setminus \mathcal{E}$. Для кривой $f(t) = t\tilde{e}$, $0 \leq t \leq 1$, выполнено (41), но, очевидно, $f \notin \Gamma_s$. Следовательно,

$$(\mathbb{S}_\alpha^{n-1} \cap \mathbb{S}_\beta^{n-1}) \setminus \mathcal{E} = \emptyset,$$

что влечет равенство (40) для базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$. Теорема доказана.

Проиллюстрируем доказанные теоремы на примере пространств ℓ_p^n с элементами $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, базисом $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ и нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad p = \infty.$$

Равенство (11) выполнено при $1 < p \leq \infty$, а при $p = 1$ выполнено (12). Таким образом, в ℓ_1^n любая спрямляемая кривая принадлежит Γ_v , а при $1 < p \leq \infty$ имеем $\Gamma_v = \Gamma_s$. В частности, для $p = 2$ и $n = 2$ получаем упомянутый в §1 результат Пеллинга. Кроме того, анализируя условия достижимости равенства в неравенстве

$$\|x\|_{p_1} \leq \|x\|_{p_2},$$

справедливом при $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, видим, что при $p_1 < p_2$ пересечение единичных сфер в $\ell_{p_1}^n$ и $\ell_{p_2}^n$ состоит из векторов базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ и им противоположных. Отсюда, по теореме 4 получаем, что спрямляемая кривая принадлежит Γ_s тогда и только тогда, когда она имеет равные длины в ℓ_p^n для различных p .

§ 3. Крайние точки шара, выбор базиса и взаимная сингулярность

В теоремах 1–3 предполагалось наличие в пространстве $(V^n, \|\cdot\|)$ фиксированного нормированного базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$. Рассмотрим теперь в $(V^n, \|\cdot\|)$ множество $\mathcal{B}$ всех возможных нормированных базисов. Напомним, что линейное нормированное пространство $(V^n, \|\cdot\|)$ называется *строго выпуклым*, если

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| < 1 \quad (44)$$

для любых двух различных $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ и любого $\alpha \in (0, 1)$, или, что эквивалентно, если любая точка $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ является крайней точкой единичного шара $\mathbb{B}^n = \{x \in V^n : \|x\| = 1\}$.

ТЕОРЕМА 5. *Какой бы нормой $\|\cdot\|$ ни было наделено пространство V^n , найдется базис $\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{B}$ такой, что $\Gamma_s = \Gamma_v$. Это равенство имеет место для любого $\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда пространство $(V^n, \|\cdot\|)$ строго выпукло. Для того чтобы в $(V^n, \|\cdot\|)$ существовал базис $\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{B}$, для которого любая спрямляемая кривая принадлежит Γ_v , необходимо и достаточно, чтобы шар $\mathbb{B}^n$ имел ровно $2n$ крайних точек.*

Для доказательства теоремы 5 понадобится дополнительная информация о строении $\mathbb{S}^{n-1}$ в случае произвольной нормы.

Назовем подмножество A множества $\mathbb{S}^{n-1}$ *максимальным выпуклым множеством* (м. в. м.), если A – выпуклое множество и для любого выпуклого B выполнено

$$(B \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \ \& \ B \supseteq A) \implies (B = A).$$

Из приведенного определения следует, что любое м. в. м. A не пусто и замкнуто. Стандартное применение леммы Куратовского–Цорна показывает, что для любого выпуклого $B \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ найдется м. в. м. $A \supseteq B$. Легко видеть, что пространство строго выпукло тогда и только тогда, когда м. в. м. совпадают с однотоочечными множествами $\{x\}$, $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. В этом случае различные м. в. м. не пересекаются. Примеры единичных сфер в ℓ_1^n и ℓ_∞^n показывают, что различные м. в. м. могут иметь общие элементы, однако их “внутренности” дизъюнкты.

ЛЕММА 7. *Если A – м. в. м., то выполнено равенство*

$$A \cap (-A) = \emptyset, \quad (45)$$

где

$$-A = \{x \in V^n : -x \in A\}. \quad (46)$$

Кроме того, если B – максимально выпуклое множество, отличное от A , то

$$\overset{\circ}{B} \cap A = \emptyset, \quad (47)$$

где $\overset{\circ}{B}$ – алгебраическая внутренность множества B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство (47). В соответствии с геометрической формой теоремы Хана–Банаха найдется гиперплоскость H_A , содержащая A и не пересекающаяся с $\{x \in V^n : \|x\| < 1\}$. Пусть l_B – аффинное подпространство, порожденное множеством B . Если $l_B \subseteq H_A$, то выпуклая оболочка

$\text{conv}(A, B)$ лежит на H_A и, следовательно, $\text{conv}(A, B) \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$, что противоречит максимальности A и B . Следовательно,

$$l_B \not\subseteq H_A. \quad (48)$$

Предположим теперь, что

$$\overset{\circ}{B} \cap A \neq \emptyset. \quad (49)$$

Элементарные геометрические построения показывают, что из (48) и (49) следует непустота пересечения $\overset{\circ}{B}$ с каждым из открытых полупространств, на которые H_A делит V^n . Последнее противоречит тому, что H_A – опорная гиперплоскость множества $\mathbb{B}^n$. Таким образом, $\overset{\circ}{B} \cap A = \emptyset$.

Для доказательства (45) заметим, что $-A \subseteq -H_A$, и проверим пустоту $H_A \cap (-H_A)$. Действительно, если H_A задается уравнением

$$\langle x, \beta \rangle = b,$$

где β – линейный функционал на V^n , а $b \in \mathbb{R}$, то гиперплоскость $(-H_A)$ задается уравнением

$$\langle x, \beta \rangle = -b.$$

Последние два уравнения могут иметь общее решение только при $b = 0$, что невозможно, так как H_A отделяет A от нуля.

В следующей лемме использованы обозначения из леммы 7.

ЛЕММА 8. Для любой нормы $\|\cdot\|$ найдется нормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ такой, что существует семейство м.в.м. $\{A_i\}_{i=1}^n$, для которого $e_i \in A_i$ при любом i и $A_j \neq A_i \neq -A_j$ при $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a – крайняя точка шара $\mathbb{B}^n$. Будем искать базисные векторы e_i , $1 \leq i \leq n$, в некоторой окрестности $V(a)$ точки a . Проверим прежде всего, что если окрестность $V(a)$ мала,

$$e_i \in V(a) \cap A_i \quad \text{и} \quad (i \neq j) \implies (A_i \neq A_j), \quad (50)$$

то $A_i \neq -A_j$ при $i \neq j$. Для этого достаточно установить, что

$$\exists V(a): \forall \text{ м.в.м. } A \quad (A \cap V(a) \neq \emptyset) \implies ((-A) \cap V(a) = \emptyset). \quad (51)$$

Если последнее ложно, то найдется последовательность м.в.м. $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ и последовательности точек $\{y_j\}_{j=1}^\infty$, $\{z_j\}_{j=1}^\infty$, для которых $y_j \in A_j$, $z_j \in -A_j$ и $\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = \lim_{j \rightarrow \infty} z_j = a$. Выберем из последовательности $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ сходящуюся подпоследовательность $\{A_{j_k}\}_{k=1}^\infty$. (Рассматриваем множества A_j как элементы из $2^{\mathbb{S}^{n-1}}$ – пространства замкнутых подмножеств сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ – и наделяем это пространство метрикой Хаусдорфа. Бикомпактность $2^{\mathbb{S}^{n-1}}$ следует из бикомпактности $\mathbb{S}^{n-1}$ [14, гл. 5. § 5, следствие 5.2].) Пусть $E = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{j_k}$. Тогда легко видеть, что $-E = \lim_{k \rightarrow \infty} (-A_{j_k})$ и E , $-E$ – замкнутые выпуклые подмножества $\mathbb{S}^{n-1}$, $a \in (-E) \cap E$. Переходя к м.в.м., содержащему E , получаем противоречие с (45). Заметим далее, что если существует базис $\{e_i\}_{i=1}^n$, для которого выполнено соотношение (50), то найдется базис $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ такой, что

$$\tilde{e}_i \in \overset{\circ}{A}_i \cap V(a), \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (52)$$

Действительно, $\overset{\circ}{A}_i$ – плотное подмножество в A_i при любом i , следовательно, можно выбрать $\tilde{e}_i$ так, что выполнено (52) и определитель, составленный из координат векторов $\tilde{e}_i$ (в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$), будет сколь угодно близок к единице. Выберем теперь окрестность $V(a)$ крайней точки a так, что выполнено (51). Будем строить базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ индукцией по n . При $n = 1$ построение тривиально. Предположим, что это построение выполнено для размерности $n - 1$. Пусть L – линейное подпространство пространства V^n такое, что $\dim L = n - 1$ и $a \in L$. Используя предположение индукции, найдем в пересечении $L \cap \mathbb{S}^{n-1} \cap V(a)$ базис $\{e_i(L)\}_{i=1}^{n-1}$ такой, что

$$e_i(L) \in A_i(L) \cap V(a), \quad i \in \{1, \dots, n - 1\},$$

где $A_i(L)$ – различные м.в.м. на $\mathbb{S}^{n-1} \cap L$. Пусть B_i – м.в.м. на $\mathbb{S}^{n-1}$, для которых $B_i \supseteq A_i(L)$, $i = 1, \dots, n - 1$. Тогда несложно заметить, что $B_i \neq B_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$. Действительно, если, например, $B_1 = B_2$, то $\text{conv}(A_1(L), A_2(L))$ – выпуклая оболочка множества $A_1(L) \cup A_2(L)$ – лежит в $B_1 \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$. Кроме того, очевидно, $\text{conv}(A_1(L), A_2(L)) \subseteq L$. Таким образом, $\text{conv}(A_1(L), A_2(L))$ – выпуклое подмножество множества $L \cap \mathbb{S}^{n-1}$, что противоречит выбору $A_1(L)$, $A_2(L)$. Пусть

$$\tilde{B} := \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i. \quad (53)$$

Предположим, что множество $V(a) \setminus (L \cup \tilde{B})$ не пусто. Пусть x – произвольный элемент этого множества, а B_n – м.в.м. на $\mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $B_n \ni x$. Тогда $B_n \neq B_i$ при $i = 1, \dots, n - 1$, а так как $x \notin L$, то x дополняет $\{e_i(L)\}_{i=1}^{n-1}$ до искомого базиса и построение закончено.

Покажем теперь, что равенство

$$V(a) \setminus (L \cup \tilde{B}) = \emptyset \quad (54)$$

противоречит тому, что a – крайняя точка шара $\mathbb{B}^n$. Из (54) следует включение

$$\tilde{B} \supseteq V(a) \setminus L.$$

Поскольку $V(a) \setminus L$ – плотное подмножество в $V(a)$, а $\tilde{B}$ – замкнутое подмножество, то это включение влечет

$$\tilde{B} \supseteq V(a). \quad (55)$$

Рассмотрим ось l_a из нуля в точку $a \in \mathbb{S}^{n-1}$. Уменьшая, если необходимо, окрестность $V(a)$, можно утверждать, что любая прямая l_{ax} , параллельная l_a и проходящая через точку $x \in V(a)$, не имеет с $V(a)$ общих точек, отличных от x (см. [15, гл. 1, §1, теорема 1.12]). Пусть $H(a)$ – опорная гиперплоскость шара $\mathbb{B}^n$ в точке a . Обозначим через h_x единственную точку пересечения прямой l_{ax} с гиперплоскостью $H(a)$. В соответствии со сказанным выше определено отображение $\Phi: V(a) \rightarrow H(a)$, $\Phi(x) = h_x$, которое является непрерывным, инъективным и сохраняет выпуклость (как сужение аффинного отображения проектирования на гиперплоскость $H(a)$ в направлении оси l_a).

Пусть $U(a, r) = \{x \in V^n : \|x - a\| < r\}$ – открытый шар радиуса r с центром в a . Если r достаточно мало, то $\mathbb{S}^{n-1} \cap U(a, r) \subseteq V(a)$. Положим

$$O_i = B_i \cap U(a, r), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (56)$$

где B_i – м. в. м. из соотношения (53). В соответствии с равенством (55) имеем

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} O_i = V(a) \cap U(a, r).$$

Поскольку a – крайняя точка $\mathbb{B}^n$, то для любого из выпуклых множеств O_i выполняется альтернатива:

$$\text{или } (a \notin O_i), \text{ или } (a \text{ – крайняя точка } O_i). \quad (57)$$

Каждое из отображений $O_i \xrightarrow{\Phi} \Phi(O_i)$ является гомеоморфизмом, причем обратное отображение тоже сохраняет выпуклость (в отличие от обратного к отображению $V(a) \xrightarrow{\Phi} \Phi(V(a))$). Следовательно, из (57) получаем

$$\forall i = 1, \dots, n-1, \quad \forall x, y \in \Phi(O_i) \quad (x \neq y) \implies \left(\Phi(a) \neq \frac{1}{2}(x + y) \right). \quad (58)$$

Введем на $H(a)$ евклидову норму $\|\cdot\|_2$, которая будет порождать на $H(a)$ ту же топологию, что и исходная норма $\|\cdot\|$. Поскольку гиперплоскость $H(a)$ гомеоморфна $\mathbb{R}^{n-1}$, а $\mathbb{S}^{n-1}$ локально гомеоморфна $\mathbb{R}^{n-1}$, то в силу теоремы Брауэра о сохранении области при гомеоморфизмах множество $\Phi(U)$ открыто в $H(a)$ для любого открытого $U \subseteq V(a)$. Следовательно, множество $\bigcup_{i=1}^{n-1} \Phi(O_i)$ содержит некоторый евклидов шар

$$D = D(\Phi(a), r) = \{x \in H(a) : \|x - \Phi(a)\|_2 \leq r\},$$

если r – достаточно малое положительное число. Обозначим через ∂D границу шара $D(\Phi(a), r)$. Поскольку $D \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} \Phi(O_i)$, то и $\partial D \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} \Phi(O_i)$, причем, как следует из равенства (56), пересечение $\partial D \cap \Phi(O_i)$ замкнуто в ∂D . Следовательно, по теореме Борсука об антиподах (см., например, [16, § 1]) по крайней мере одно из множеств $\Phi(O_i)$ содержит пару x, y диаметрально противоположных точек ∂D . В таком случае $\Phi(a) = \frac{1}{2}(x + y)$, что противоречит (58). Лемма доказана.

Следующая лемма представляет собой вариант известной теоремы Каратеодори [17], [18].

ЛЕММА 9. *Для любой нормы $\|\cdot\|$ на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ лежит не менее $2n$ крайних точек шара $\mathbb{B}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Докажем, что $\Gamma_s = \Gamma_v$ относительно базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$, существование которого установлено в лемме 8. В соответствии с теоремой 3 для этого достаточно проверить (11). Из (21) следует, что для доказательства (11) достаточно установить неравенство (44) для любого $\alpha \in (0, 1)$ и любых x, y , принадлежащих различным множествам системы $\{\overset{\circ}{A}_1, \dots, \overset{\circ}{A}_n, -\overset{\circ}{A}_1, \dots, -\overset{\circ}{A}_n\}$. Рассмотрим открытый интервал

$$I_{x,y} = \{z \in V^n : z = \alpha y + (1 - \alpha)x, \alpha \in (0, 1)\}.$$

Легко видеть, что имеет место следующая альтернатива: либо

$$\forall z \in I_{x,y}: \|z\| < 1, \quad (59)$$

либо

$$\forall z \in I_{x,y}: \|z\| = 1. \quad (60)$$

Докажем, что второе невозможно.

Прежде всего заметим, что система $\{A_1, \dots, A_n, -A_1, \dots, -A_n\}$ состоит из различных м.в.м. Действительно, множества $-A_j$, определенные формулой (46), являются м.в.м. в силу симметрии $\mathbb{S}^{n-1}$ относительно нуля. Кроме того, в соответствии с леммой 8 $A_i \neq A_j$ и $A_i \neq -A_j$ при $i \neq j$, а из (45) следует, что $A_i \neq -A_i$.

Предположим, что выполнено (60); тогда $I_{x,y}$ – выпуклое подмножество на $\mathbb{S}^{n-1}$ и, следовательно, найдется м.в.м. $A \supseteq I_{x,y}$. В силу замкнутости имеем $\{x, y\} \subseteq A$. Отсюда вытекает, что A не совпадает ни с одним из множеств системы $\{A_1, \dots, A_n, -A_1, \dots, -A_n\}$. Выберем из этой системы элемент B , для которого $\overset{\circ}{B} \ni x$. Тогда $\overset{\circ}{B} \cap A \neq \emptyset$, что противоречит (47). Следовательно, имеет место (59), что и требовалось доказать.

Проверим, что если пространство $(V^n, \|\cdot\|)$ строго выпукло, то для любого $\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{B}$ имеем $\Gamma_s = \Gamma_v$. Действительно, в этом случае множества $A_i = \{e_i\}$ являются м.в.м. и $\overset{\circ}{A}_i = A_i$. Тогда, как и в доказательстве первой части теоремы, получаем (11). Отсюда по теореме 3 имеем $\Gamma_s = \Gamma_v$.

Предположим теперь, что $\Gamma_s = \Gamma_v$ для любого $\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{B}$. Проверим, что $(V^n, \|\cdot\|)$ строго выпукло. Если $(V^n, \|\cdot\|)$ не является строго выпуклым, то найдутся точки $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$, $x \neq y$, для которых имеет место (60). Положим $e_1 = x$, $e_2 = y$ и дополним множество $\{e_1, e_2\}$ до базиса $\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{B}$. В соответствии с (60) получаем $I_{x,y} \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \partial \hat{\mathcal{E}}$, но, очевидно, $I_{x,y} \notin \mathcal{E}$. Следовательно, по теореме 3 имеем $\Gamma_s \neq \Gamma_v$, что противоречит принятому допущению.

Докажем последнее утверждение теоремы. Предположим, что существует базис $\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{B}$, относительно которого любая спрямляемая кривая попадает в Γ_v . Тогда в соответствии с теоремой 3 для этого базиса выполнено $\mathbb{S}^{n-1} = \partial \hat{\mathcal{E}}$. В этом случае согласно (21) ни одна из точек множества $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \mathcal{E}$ не может быть крайней. Тогда все крайние точки $\mathbb{B}^n$ лежат в $\mathcal{E}$, но $\text{card}(\mathcal{E}) = 2n$, а значит, по лемме 9 множество $\mathcal{E}$ совпадает с множеством крайних точек. В частности, множество крайних точек содержит ровно $2n$ элементов.

Обратно, предположим, что шар $\mathbb{B}^n$ имеет ровно $2n$ крайних точек. В этом случае найдется базис $\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{B}$, для которого множество $\mathcal{E}$ совпадает с множеством крайних точек шара $\mathbb{B}^n$. Действительно, по теореме Крейна–Мильмана $\mathbb{B}^n$ совпадает с замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек. Поскольку линейная оболочка любого множества содержит его выпуклую оболочку, то существует базис $\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{B}$, составленный из крайних точек шара $\mathbb{B}^n$. В силу центральной симметричности шара множество $\{-e_i\}_{i=1}^n$ тоже состоит из крайних точек и они, очевидно, различны. Кроме того, для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ имеем $e_i \neq -e_j$, так как в противном случае $e_i + e_j = 0$, что противоречит линейной независимости базисных векторов. Таким образом, множество $\mathcal{E}\{e_1, \dots, e_n, -e_1, \dots, -e_n\}$ составлено из крайних точек шара $\mathbb{B}^n$. В этом случае $\hat{\mathcal{E}} = \mathbb{B}^n$ и, следовательно, $\partial \hat{\mathcal{E}} = \mathbb{S}^{n-1}$. В силу теоремы 3 последнее равенство равносильно тому, что любая спрямляемая кривая принадлежит Γ_v .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Используя известные связи между единственностью решения в проблеме геодезических и строением шара $\mathbb{B}^n$ (см., например, [9, упражнения 4.1.4, 4.1.7 и теорема 4.4.20]), можно утверждать, что для любого базиса $\{e_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{B}$ равенство $\Gamma_s = \Gamma_v$ выполняется тогда и только тогда, когда для любых двух точек $x, y \in (V^n, \|\cdot\|)$ $\mathcal{H}^1$ -мера континуума, содержащего x и y и не совпадающего с отрезком $\{z \in V^n: z = tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\}$, строго больше $\|x - y\|$.

§ 4. Декомпозиция Лебега и вычисление одномерной меры Хаусдорфа

Пусть $f: [a, b] \rightarrow (V^n, \|\cdot\|)$ – спрямляемая кривая, а $x_1, \dots, x_n$ – ее координатные функции относительно базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$,

$$f(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)e_i, \quad t \in [a, b].$$

Обозначим через μ_i положительные конечные меры Бореля на отрезке $[a, b]$, для которых

$$\text{Var}_a^t(x_i) = \int_{[a,t]} d\mu_i, \quad a \leq t \leq b, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Если $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, то для лебеговой декомпозиции μ_i относительно μ_j мы пишем

$$\mu_i = \mu_{ai}^j + \mu_{si}^j,$$

где μ_{ai}^j и μ_{si}^j являются соответственно абсолютно непрерывной и сингулярной частями μ_i относительно μ_j . Будем обозначать через ν_i наибольшую миноранту мер μ_{si}^j , $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$,

$$\nu_i = \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_{si}^j.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Существование наибольшей миноранты для двух мер легко доказать, используя теорему Хана о декомпозиции (см., например, [19, гл. XI, § 3]). Общий случай может быть получен индукцией по числу мер.

Далее, как и в § 2, считаем, что $\{e_i\}_{i=1}^n$ – некоторый нормированный базис пространства $(V^n, \|\cdot\|)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f: [a, b] \rightarrow (V^n, \|\cdot\|)$ – простая спрямляемая кривая, $f(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)e_i$. Тогда

$$\mathcal{H}^1(\gamma_{rs}) = \sum_{i=1}^n \int dv_i, \quad (61)$$

где γ_{rs} определено формулой (7).

В двумерном случае связь между декомпозицией $\gamma = \gamma_{rs} \cup \gamma_{is}$ и декомпозицией Лебега мер μ_1 , μ_2 более проста и полна. Для упрощения обозначений положим

$$\mu_{xs} := \mu_{s1}^2, \quad \mu_{xa} := \mu_{a1}^2, \quad \mu_{ys} := \mu_{s2}^1, \quad \mu_{ya} := \mu_{a2}^1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f: [a, b] \rightarrow (V^2, \|\cdot\|)$ – простая спрямляемая кривая на плоскости V^2 . Тогда

$$\mathcal{H}^1(\gamma_{rs}) = \int d\mu_{xs} + \int d\mu_{ys}. \quad (62)$$

Кроме того, меры μ_{xa} и μ_{ya} взаимно абсолютно непрерывны, и если

$$\|xe_1 + ye_2\| = \|-xe_1 + ye_2\| \quad (63)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$, то

$$\mathcal{H}^1(\gamma_{is}) = \int \left\| e_1 + \frac{d\mu_{ya}}{d\mu_{xa}} e_2 \right\| d\mu_{xa}, \quad (64)$$

где $\frac{d\mu_{ya}}{d\mu_{xa}}$ – производная Радона–Никодима меры μ_{ya} относительно μ_{xa} .

На плоскости l_p^2 условие (63) выполняется и мы имеем следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть f – простая спрямляемая кривая на плоскости l_p^2 . Тогда равенство

$$\mathcal{H}^1(\gamma_{is}) = \int \left(1 + \left(\frac{d\mu_{ya}}{d\mu_{xa}} \right)^p \right)^{1/p} d\mu_{xa}$$

выполнено при $1 \leq p < \infty$, а при $p = \infty$ имеем

$$\mathcal{H}^1(\gamma_{is}) = \int \max \left(1, \frac{d\mu_{ya}}{d\mu_{xa}} \right) d\mu_{xa}.$$

Используем далее следующие обозначения. Если μ – мера на σ -алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из X и $A \in \mathcal{A}$, положим

$$(\mu|_A)(B) := \mu(A \cap B), \quad B \in \mathcal{A},$$

и для функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$N(f) := \{x \in X: f(x) = 0\}.$$

ЛЕММА 10. Пусть x, y – неотрицательные, суммируемые, измеримые по Борелю функции на $[a, b]$, и пусть μ_x, μ_y – меры Бореля, определенные соотношениями

$$\mu_x(A) = \int_A x(t) dm_1(t), \quad \mu_y(A) = \int_A y(t) dm_1(t)$$

для борелевских $A \subseteq [a, b]$. Если

$$\mu_x = \mu_{xa} + \mu_{xs}, \quad \mu_y = \mu_{ya} + \mu_{ys} \quad (65)$$

есть декомпозиция Лебега меры μ_x относительно меры μ_y и, соответственно, меры μ_y относительно меры μ_x ,

$$\mu_{xs} \perp \mu_y, \quad \mu_{ys} \perp \mu_x, \quad \mu_{xa} \ll \mu_y, \quad \mu_{ya} \ll \mu_x, \quad (66)$$

то выполняются следующие соотношения:

$$\mu_{xs} = \mu_x \lfloor N(y), \quad \mu_{ys} = \mu_y \lfloor N(x), \quad (67)$$

$$\mu_{xa} = \mu_x \lfloor ([a, b] \setminus (N(y) \cup N(x))), \quad \mu_{ya} = \mu_y \lfloor ([a, b] \setminus (N(y) \cup N(x))), \quad (68)$$

$$\mu_{ya} \ll \mu_{xa} \ll \mu_{ya}. \quad (69)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$P := [a, b] \setminus (N(y) \cup N(x)),$$

$$\tilde{\mu}_{xs} := \mu_x \lfloor N(y), \quad \tilde{\mu}_{xa} := \mu_x \lfloor P, \quad \tilde{\mu}_{ys} := \mu_y \lfloor N(x), \quad \tilde{\mu}_{ya} := \mu_y \lfloor P.$$

Ясно, что $\mu_y = \tilde{\mu}_{ya} + \tilde{\mu}_{ys}$ и $\mu_x = \tilde{\mu}_{xa} + \tilde{\mu}_{xs}$. Далее, так как

$$\tilde{\mu}_{xs}([a, b] \setminus N(y)) = 0 = \mu_y(N(y)),$$

то $\tilde{\mu}_{xs} \perp \mu_y$. Аналогично получим $\tilde{\mu}_{ys} \perp \mu_x$.

Докажем, что

$$m_1 \lfloor P \ll \tilde{\mu}_{xa}. \quad (70)$$

Действительно, пусть $\psi: P \rightarrow (0, \infty)$ – борелевская функция, для которой

$$\psi(t)x(t) = 1 \quad (71)$$

при $t \in P$. Поскольку

$$\int_P \psi(t)x(t) dm_1(t) = \int_P \psi(t) d\tilde{\mu}_{xa}(t) = m_1(P) < \infty,$$

то функция ψ является $\tilde{\mu}_{xa}$ -суммируемой. Формула (71) влечет также равенство

$$(m_1 \lfloor P)(A) = \int_A \psi d\tilde{\mu}_{xa}$$

для борелевских $A \subseteq [a, b]$, и, таким образом, (70) следует из абсолютной непрерывности неопределенных интегралов от суммируемых функций.

Из определения мер $\tilde{\mu}_{ya}$ и μ_a следует $\tilde{\mu}_{ya} \ll m_1 \lfloor P$. Отсюда в силу неравенства (70) имеем соотношение $\tilde{\mu}_{ya} \ll \tilde{\mu}_{xa}$. Рассуждая аналогично, получим $\tilde{\mu}_{xa} \ll \tilde{\mu}_{ya}$. Поскольку $\tilde{\mu}_{xa} \ll \mu_x$ и $\tilde{\mu}_{ya} \ll \mu_y$, то по транзитивности отношения $\ll$ находим $\tilde{\mu}_{ya} \ll \mu_x$ и $\tilde{\mu}_{xa} \ll \mu_y$. Хорошо известно, что декомпозиция (65) со свойствами (66) единственна, что доказывает (67) и (68). Соотношения (69) следуют, таким образом, из аналогичных соотношений для $\tilde{\mu}_{xa}$ и $\tilde{\mu}_{ya}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Соотношения (69) выполняются и в общем случае, когда μ_x, μ_y – произвольные неотрицательные σ -конечные меры, определенные на некоторой σ -алгебре $\mathcal{A}$ (см. [20]).

ЛЕММА 11. Пусть μ – неотрицательная мера, определенная на σ -алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества X . Тогда для любых A и B из $\mathcal{A}$

$$(\mu \lfloor A) \wedge (\mu \lfloor B) = \mu \lfloor (A \cap B),$$

где $(\mu \lfloor A) \wedge (\mu \lfloor B)$ – наибольшая миноранта мер $\mu \lfloor A$ и $\mu \lfloor B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что ν – мера на $\mathcal{A}$, для которой неравенство

$$\min\{(\mu \lfloor A)(C), (\mu \lfloor B)(C)\} \geq \nu(C) \quad (72)$$

выполнено при любом $C \in \mathcal{A}$. Подставляя в это неравенство значения $C = X \setminus B$ и $C = X \setminus A$, находим, что

$$\nu(X \setminus (A \cap B)) = 0.$$

Следовательно, $(\mu \lfloor (A \cap B))(C) \geq \nu(C)$ при $C \subseteq X \setminus (A \cap B)$. В соответствии с (72) последнее неравенство выполнено и для $C \subseteq A \cap B$. Кроме того, ясно, что (72) выполняется при $\nu = \mu \lfloor (A \cap B)$. Таким образом, $\mu \lfloor (A \cap B)$ – наибольшая миноранта мер $\mu \lfloor A$ и $\mu \lfloor B$.

ЛЕММА 12. Пусть $f: [a, b] \rightarrow (V^n, \|\cdot\|)$ – простая спрямляемая кривая. Если f – липшицева функция, то для любого борелевского $A \subseteq [a, b]$

$$\mathcal{H}^1(f(A)) = \int_A \|f'(t)\| dt. \quad (73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A – интервал из отрезка $[a, b]$, то равенство (73) следует из леммы 1 и общей формы теоремы Банаха об индикатрисе, справедливой для кривых в метрических пространствах (см., например, [7, 2.10.13]). Используя единственность продолжения меры с булевой полуалгебры интервалов из $[a, b]$ на наименьшую σ -алгебру, порожденную этими интервалами, получим (73) при произвольном борелевском $A \subseteq [a, b]$. Лемма доказана.

Перед тем как приступить к доказательству предложений 1 и 2, напомним, что в этих предложениях f предполагается простой кривой. Следовательно, $[a, b] \ni x \rightarrow L_a^x(f) \in [0, L(f)]$ – гомеоморфизм. Лебегова декомпозиция и наибольшие миноранты мер инвариантны при этом гомеоморфизме, значит, достаточно рассматривать только натуральную параметризацию $f = \psi$.

Доказательство предложения 1 подобно доказательствам теорем 1 и 2, поэтому ограничимся тем, что отметим его основные шаги.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Как и в теореме 1, рассматриваем случай натуральной параметризации

$$[0, L(f)] \ni s \xrightarrow{\psi} \sum_{i=1}^n x_i(s) e_i.$$

Из леммы 4 и леммы 12 следует, что для любого борелевского множества $A \subseteq [0, L(f)]$ имеем

$$(\psi(A) \subseteq \gamma_{rv}) \implies \left(\mathcal{H}^1(\psi(A)) = \sum_{i=1}^n \int |x'_i(s)| ds \right).$$

Отсюда при $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, где множества A_i , $1 \leq i \leq n$, определены правилом (d), получаем

$$\mathcal{H}^1(\gamma_{rs}) = \sum_{i=1}^n m_1(A_i) \int_{A_i} |x'_i(s)| ds. \quad (74)$$

Следовательно, для доказательства равенства (61) достаточно проверить, что

$$\int_{A_i} |x'_i(s)| ds = \int d\nu_i$$

при $1 \leq i \leq n$. Последнее следует из соотношения (67) и леммы 11, так как п. в. на A_i выполнено

$$1 - |x'_i(s)| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |x'_j(s)| = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Считаем, что f параметризована длиной дуги $[0, L(f)] \ni s \rightarrow x(s)e_1 + y(s)e_2$. Поскольку равенство (62) является частным случаем (61), то остается доказать равенство (64) при условии (63). Используя утверждение (ii) леммы 2, лемму 12 и формулу (74), находим

$$\mathcal{H}^1(\gamma_{is}) = \int_{[0, L(f)] \setminus (A_1 \cup A_2)} \|x'(s)e_1 + y'(s)e_2\| dm_1(s), \quad (75)$$

где A_1, A_2 – борелевские множества, для которых с точностью до множеств меры нуль

$$A_1 = N(x'(s)), \quad A_2 = N(y'(s)). \quad (76)$$

В силу соотношения (63) можно переписать (75) в виде

$$\mathcal{H}^1(\gamma_{is}) = \int_{[0, L(f)] \setminus (A_1 \cup A_2)} \| |x'(s)|e_1 + |y'(s)|e_2 \| dm_1(s). \quad (77)$$

Используя формулы (68), теорему Радона–Никодима и дифференцирование радоновых мер, видим, что

$$\frac{d\mu_{ya}}{dm_1} = |y'(s)|, \quad \frac{d\mu_{xa}}{dm_1} = |x'(s)| \quad \text{п. в. на} \quad [0, L(f)] \setminus (A_1 \cup A_2), \quad (78)$$

где μ_{ya} и μ_{xa} – абсолютно непрерывные части мер μ_x и μ_y из декомпозиции (65). Подставив (78) в равенство (77) и учитывая (76), (68), получим

$$\mathcal{H}^1(\gamma_{is}) = \int_{[0, L(f)] \setminus (N(x') \cup N(y'))} \left\| \frac{d\mu_{xa}}{dm_1} e_1 + \frac{d\mu_{ya}}{dm_1} e_2 \right\| dm_1. \quad (79)$$

Поскольку $\| |x'(s)|e_1 + |y'(s)|e_2 \| = 1$ п. в., то в силу (69) выполнено соотношение

$$m_1 \llcorner ([0, L(f)] \setminus (N(x') \cup N(y'))) \ll \mu_{xa},$$

следовательно,

$$dm_1 = \frac{dm_1}{d\mu_{xa}} d\mu_{xa} \quad \text{на} \quad [0, L(f)] \setminus (N(x') \cup N(y')).$$

Из последней формулы и равенства (79) следует (64).

Авторы благодарят профессора Дж. Дистеля, любезно сообщившего о работах К. Каратеодори [17], [18].

Список литературы

1. Pelling M. J., "Formulae for the arc-length of a curve in $\mathbb{R}^N$ ", *Amer. Math. Monthly*, **84**:6 (1977), 465–467.
2. Thomson B. S., *Real functions*, Lecture Notes in Math., **1170**, Springer-Verlag, Berlin etc., 1985.
3. Thomson B. S., "Singular functions", *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **30**:9 (1985), 793–800.
4. Garg K. M., "Derivatives of variation functions and of mutually singular and relatively absolutely continuous functions", *Real Anal. Exchange*, **10** (1984–1985), 54–57.
5. Garg K. M., "Characterizations of absolutely continuous and singular functions", *Proc. of the Conference on the Constructive Theory of Functions (Approximation Theory) (Budapest, 1969)*, Akademiai Kiado, Budapest, 1972, 183–188.
6. Garg K. M., "On singular functions", *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **14**:10 (1969), 1441–1452.
7. Федерер Г., *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.
8. Mattila P., *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **44**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
9. Ambrosio L., Tilli P., *Topics on analysis in metric spaces*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **25**, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
10. Rado T., Reichelderfer P. V., *Continuous transformation in analysis with an introduction to algebraic topology*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **LXXV**, Springer-Verlag, Berlin etc., 1955.
11. Evans L. C., Gariepy R. F., *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton–London, 1992.
12. Bruckner A. M., *Differentiation of real functions*, Lecture Notes in Math., **659**, Springer-Verlag, Berlin etc., 1978.
13. Dovgoshey O., Martio O., "Singular functions and arc length", *Reports in Math.*, **394**, University of Helsinki, 2004, 15.
14. Федорчук В. В., Филиппов В. В., *Общая топология. Основные конструкции*, Изд-во МГУ, М., 1988.
15. Бузедан Г., *Выпуклые поверхности*, Наука, М., 1964.
16. Грюнбаум Б., "Проблема Борсука и родственные ей вопросы", *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел*, Наука, М., 1971.
17. Caratheodory C., "Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen", *Math. Ann.*, **64**:1 (1907), 95–115.
18. Caratheodory C., "Über den Variabilitätsbereich der Fourierscher Konstanten für positiven harmonischen Funktionen", *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **32** (1911), 193–217.
19. Doob J. L., *Measure theory*, Graduate Texts in Mathematics, **143**, Springer-Verlag, New York, 1994.
20. Dovgoshey O., Martio O., "The arc length evaluations and Lebesgue decomposition", *Reports of the Dep. of Math.*, **379**, University of Helsinki, 2004, 11.

А. А. ДОВГОШЕЙ (А. А. DOVGOSHEY)

Институт прикладной математики и механики НАН
Украины

E-mail: dovgoshey@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило в редакцию

11.05.2005

О. МАРТИО (O. MARTIO)

Университет Хельсинки (Финляндия)

E-mail: martio@ce.helsinki.fi