Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Кожевникова, Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 6, 93–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/im716>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:52:13

УДК 517.956.223

Л. М. Кожевникова

Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений

Выделен класс единственности решений квазиэллиптического уравнения с условием Дирихле на границе неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Показано, что для областей с нерегулярным поведением границы этот класс может быть шире, чем класс, установленный для эллиптического уравнения второго порядка в работе [10]. Для уравнения Лапласа построен пример неединственности решения задачи Дирихле, показывающий, что найденный класс единственности нельзя существенно расширить.

Библиография: 18 наименований.

Введение

Пусть $\bar{\mathbf{y}} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ – произвольная точка пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Отмечая особую роль координаты y_0 , обозначим ее через $x = y_0$. Положим также $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{y}} = (x, \mathbf{y})$. В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, не лежащей в полупространстве вида $\{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x < r\}$, рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &\equiv \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S, |\bar{\alpha}|=|\bar{\beta}|} (-1)^{|\bar{\alpha}|} D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} (a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u) \\ &= \Phi(\bar{\mathbf{y}}) + \sum_{\bar{\alpha} \in S} (-1)^{|\bar{\alpha}|} D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} \Phi_{\bar{\alpha}}(\bar{\mathbf{y}}), \quad \bar{\mathbf{y}} \in \Omega. \end{aligned} \quad (0.1)$$

Множество мультииндексов S определяется параметрами $q, k, l, m \in \mathbb{N}$, $q \leq k, l \leq m$:

$$S = \left\{ \bar{\alpha} = (i, \alpha) \mid 0 < \max \left(\chi_i \frac{q}{k}, \chi_{|\alpha|} \frac{l}{m} \right) \leq \frac{i}{k} + \frac{|\alpha|}{m} \leq 1 \right\}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$; $\chi_0 = 0$, $\chi_i = 1$ при $i \neq 0$.

Для уравнения (0.1) ставится первая краевая задача

$$D_x^i u|_{\partial\Omega} = D_x^i \Psi|_{\partial\Omega}, \quad i < k, \quad D_{\mathbf{y}}^{\alpha} u|_{\partial\Omega} = D_{\mathbf{y}}^{\alpha} \Psi|_{\partial\Omega}, \quad |\alpha| < m. \quad (0.2)$$

Оператор $\mathcal{L}$ в случае постоянных коэффициентов является гипоеллиптическим. Уравнение (0.1) и более общие уравнения рассматривались в работах [1], [2],

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-97912-р_агидель_а).

посвященных доказательству фредгольмовости задачи Дирихле для этих уравнений. Легко видеть, что при $q = k = l = m = 1$ задача (0.1), (0.2) принимает вид

$$\mathcal{L}u = - \sum_{\alpha, \beta=0}^n (a_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{y}})u_{y_\alpha})_{y_\beta} = \Phi(\bar{\mathbf{y}}) - \sum_{\alpha=0}^n D_{y_\alpha} \Phi_\alpha(\bar{\mathbf{y}}), \quad (0.1')$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Psi|_{\partial\Omega}. \quad (0.2')$$

Функции $a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}})$ измеримы в Ω , продолжены нулем вне Ω , симметричны по мультииндексам $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ и для п. в. $\bar{\mathbf{y}} \in \Omega$ ограничены:

$$|a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}})| \leq \bar{a}. \quad (0.3)$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g) &= \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S, |\bar{\alpha}|=|\bar{\beta}|} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} g D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} g, \\ \mathcal{D}(g) &= \sum_{s=1}^n (|D_{y_s}^l g|^2 + |D_{y_s}^m g|^2) + |D_x^k g|^2 + |D_x^q g|^2. \end{aligned}$$

Считаем, что существует положительное число $\hat{a}$ такое, что для п. в. $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(g(x, \mathbf{y})) d\mathbf{y} \geq \hat{a} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}(g(x, \mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}). \quad (0.4)$$

Для выполнения (0.4) достаточно, например, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S, |\bar{\alpha}|=|\bar{\beta}|} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) z_{\bar{\alpha}} z_{\bar{\beta}} \geq \hat{a} \left(z_{k, \mathbf{0}}^2 + z_{q, \mathbf{0}}^2 + \sum_{s=1}^n (z_{0, m_s}^2 + z_{0, l_s}^2) \right)$$

для п. в. $\bar{\mathbf{y}} \in \Omega$ и любого набора чисел $z_{\bar{\alpha}}$; здесь через $m_s = (0, \dots, 0, m, 0, \dots, 0)$, $l_s = (0, \dots, 0, l, 0, \dots, 0)$ обозначены мультииндексы с ненулевыми элементами в позиции s .

Нетрудно привести менее жесткие условия, достаточные для (0.4). В частности, ввиду справедливости равенств

$$\Delta^2 u = \sum_{i, j=1}^n (u_{y_i y_i})_{y_j y_j} = \sum_{i, j=1}^n (u_{y_i y_j})_{y_i y_j}$$

неравенство (0.4) выполнено для бигармонического уравнения.

В работе исследуются классы единственности решений задачи (0.1), (0.2) с локально суммируемыми данными $\Phi(\bar{\mathbf{y}})$, $\Phi_{\bar{\alpha}}(\bar{\mathbf{y}})$, $\Psi(\bar{\mathbf{y}})$.

Существует много работ, посвященных доказательствам теорем типа Фрагмена–Линделёфа, принципа Сен-Венана или выделению классов единственности решений для эллиптических уравнений. Перечисленные утверждения несмотря на внешние различия характеризуют близкие качественные свойства решений эллиптических уравнений.

Первоначально теорема Фрагмена–Линделёфа [3] возникла как обобщение принципа максимума модуля для аналитических функций. А именно, если

регулярная в области D аналитическая функция $f(z)$ в каждой точке $\xi \in \partial D$ границы удовлетворяет условию $\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{D \cap B(r, \xi)} |f(z)| \leq M$, то $|f(z)| \leq M$ всюду в области D . Здесь и далее $B(r, \xi)$ – шар радиуса r с центром в точке ξ .

В последующем теоремами Фрагмена–Линделёфа для эллиптических уравнений стали называть утверждения следующего вида. Пусть, например, Ω – угол раствора φ на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{\bar{y} = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ и M – произвольное неотрицательное число. Если гармоническая в Ω функция на границе не превосходит M , то она либо и в Ω не превосходит M , либо растет не медленнее, чем $\varepsilon |\bar{y}|^{\pi/\varphi}$, где $\varepsilon > 0$. Отсюда сразу следует, что множество функций, удовлетворяющих условию $\lim_{|\bar{y}| \rightarrow \infty} |\bar{y}|^{-\pi/\varphi} u(\bar{y}) = 0$, является классом единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в угле Ω .

Интересный вариант теоремы Фрагмена–Линделёфа доказан в работе [4]: решение эллиптического уравнения второго порядка в бесконечном полуцилиндре либо экспоненциально выходит на константу, либо растет линейным образом, либо растет экспоненциально при $x \rightarrow \infty$.

Принцип Сен-Венана был впервые обоснован в работе [5] (см. также [6]) в следующей форме. Если деформировать один торец упругого цилиндрического стержня, то величина деформаций будет экспоненциально убывать при удалении от торца. После работ [5], [6] появилось много результатов, в которых принцип Сен-Венана распространялся на уравнения эллиптического и параболического типов. В частности, в работе [7] доказан точный принцип Сен-Венана для решений бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = \Phi + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \quad (0.5)$$

в области Ω на плоскости $\mathbb{R}^2$ с граничными условиями

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (0.6)$$

где ν – направление внешней нормали к $\partial\Omega$. Сформулируем его.

Пусть $\delta(\omega)$, $\pi < \omega \leq 2\pi$, – единственное решение уравнения $\sin^2(\omega\delta) = \delta^2 \sin^2 \omega$, удовлетворяющее условию $0 < \omega\delta(\omega) \leq \pi$. Пусть $\gamma(\rho) = \{\bar{y} = (x, y) \in \Omega \mid |\bar{y}| = \rho\}$ не является целой окружностью ни при каком $\rho > 0$ и $l(\rho)$ – длина наибольшей из дуг, составляющих $\gamma(\rho)$. Пусть $l(\rho) \leq \rho\omega$, где $\omega \in [1.24\pi, 2\pi]$ и $\Phi(\bar{y}) = \Phi_1(\bar{y}) = \Phi_2(\bar{y}) = 0$ в $\Omega(R) = \{\bar{y} = (x, y) \in \Omega \mid |\bar{y}| < R\}$. Тогда решение задачи (0.5), (0.6) при $\rho < R/2$ удовлетворяет оценке

$$\int_{\Omega(\rho)} \mathcal{E}(u) d\bar{y} \leq C \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2\delta(\omega)} \int_{\Omega(R)} \mathcal{E}(u) d\bar{y} \quad (0.7)$$

с постоянной C , зависящей только от ω . Здесь $\mathcal{E}(u) = u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2$. Утверждается, что оценка (0.7) неулучшаема в том смысле, что показатель степени $2\delta(\omega)$ не может быть увеличен, например, для областей типа угла. Очевидно, что оценка (0.7) позволяет выделить следующий класс единственности решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в неограниченной области. Если $u(\bar{y})$ – решение задачи (0.5), (0.6) при $\Phi(\bar{y}) = \Phi_1(\bar{y}) = \Phi_2(\bar{y}) = 0$ в Ω и существует последовательность $R_N \rightarrow \infty$ такая, что

$$\int_{\Omega(R_N)} \mathcal{E}(u) d\bar{y} \leq \varepsilon(R_N) R_N^{2\delta(\omega)},$$

где $\varepsilon(R_N) \rightarrow 0$ при $R_N \rightarrow \infty$, то $u \equiv 0$ в области Ω .

В работах [8], [9] доказана следующая теорема Фрагмена–Линделёфа для решения $u(x, y)$ бигармонического уравнения (0.5) с краевыми условиями (0.6) на границе области Ω , лежащей в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{\bar{y} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Пусть $\mu(r)$ – непрерывная функция такая, что

$$0 < \mu(r) \leq \mu'(r) = \inf \left\{ \int_{\gamma_r} \mathcal{E}(g) dy \mid g(x, y) \in C_0^\infty(\Omega), \right. \\ \left. \int_{\gamma_r} [g_x^2 - gg_{xx} + g_y^2] dy = 1 \right\}, \quad r > 0,$$

где $\gamma_r = \{\bar{y} = (x, y) \in \Omega \mid x = r\}$ – конечное число ограниченных непересекающихся интервалов. Функция $\Phi(r, s)$ удовлетворяет при $t \leq r \leq s$ уравнению $\Phi_{rr} - \mu(r)\Phi = 0$ с начальными условиями $\Phi(s, s) = 1$, $\Phi_r(s, s) = 0$. Тогда если для некоторой последовательности $t_N \rightarrow \infty$ и некоторого числа $d > 0$ выполнены неравенства

$$\int_{\Omega^{t_N}} \mathcal{E}(u) d\bar{y} \leq \varepsilon(t_N)\Phi(d, t_N), \quad \Omega^{t_N} = \{\bar{y} = (x, y) \in \Omega \mid x < t_N\},$$

где $\varepsilon(t_N) \rightarrow 0$ при $t_N \rightarrow \infty$, то $u \equiv 0$ в области Ω . Рассмотрены также области, имеющие несколько ветвей, уходящих в бесконечность по различным направлениям.

Отметим, что с нашей точки зрения характеристика $\mu(r)$ неограниченной области Ω недостаточно эффективна для областей с нерегулярным поведением границы. Пусть, например,

$$Q_a = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x > 0, |\mathbf{y}| < \max(1, x^a)\}, \\ Q_b = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x > 0, |\mathbf{y}| < \max(1, x^b)\}, \\ \tilde{Q}_a = Q_a \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \ell_i, \quad \ell_i = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x = i, i^b \leq |\mathbf{y}|\}, \quad 0 < b < a < \frac{q}{l}.$$

Поскольку $\tilde{Q}_a \subset Q_a$, то $\mu'(r, Q_a) \leq \mu'(r, \tilde{Q}_a)$ для $n = 1$, причем функции будут отличаться лишь в натуральных точках, поэтому $\mu(r)$ можно взять одинаковой для областей Q_a и $\tilde{Q}_a$. Тем не менее, ниже мы установим для области $\tilde{Q}_a$ существенно более широкий класс единственности, такой же, как и для области Q_b .

В работах [10], [11] получена априорная оценка обобщенного решения смешанной задачи для эллиптического уравнения второго порядка:

$$\sum_{\alpha, \beta=0}^n (a_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{y}})u_{y_\alpha})_{y_\beta} + \sum_{\alpha=0}^n b_\alpha(\bar{\mathbf{y}})u_{y_\alpha} + c(\bar{\mathbf{y}})u = \Phi(\bar{\mathbf{y}}), \quad (0.8)$$

аналогичная оценкам, выражающим принцип Сен-Венана в теории упругости. При этом рассматриваются области с конечным числом ветвей, достаточно произвольным образом уходящих в бесконечность. Граница области поделена на три части, на которых ставятся краевые условия первого, второго и третьего типов соответственно. Приведем характерное следствие из теорем 1, 2 работы [10] для самосопряженного уравнения (0.1') с нулевой правой частью ($b_\alpha(\bar{\mathbf{y}}) = c(\bar{\mathbf{y}}) = \Phi(\bar{\mathbf{y}}) = 0$) в форме, позволяющей сравнивать его с некоторыми результатами настоящей работы.

Для области Ω , лежащей в полупространстве $\{\bar{\mathbf{y}} = (x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x > 0\}$ положим

$$\gamma_r = \{(x, \mathbf{y}) \in \Omega \mid x = r\}, \quad \mathcal{F}(u) = \sum_{\alpha, \beta=0}^n a_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{y}}) u_{y_\alpha} u_{y_\beta},$$

$$0 < \nu(r) = \inf \left\{ \int_{\gamma_r} \mathcal{F}(g) d\mathbf{y} \mid g(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega), \int_{\gamma_r} g^2 d\mathbf{y} = 1 \right\}, \quad r > 0. \quad (0.9)$$

Доказано, что обобщенное решение задачи (0.1'), (0.2') в области Ω с нулевой правой частью подчиняется оценке

$$\int_{\Omega^r} \mathcal{F}(u) d\bar{\mathbf{y}} \leq C \exp \left\{ - \int_r^R \sqrt{\nu(s)} ds \right\} \int_{\Omega^R} \mathcal{F}(u) d\bar{\mathbf{y}}, \quad r < R,$$

где $\Omega^r = \{(x, \mathbf{y}) \in \Omega \mid x < r\}$. Отсюда вытекает следующая теорема единственности. Пусть $u(\bar{\mathbf{y}})$ – решение задачи (0.1'), (0.2') с нулевой правой частью. Если для некоторой последовательности $R_N \rightarrow \infty$

$$\int_{\Omega^{R_N}} \mathcal{F}(u) d\bar{\mathbf{y}} \leq \varepsilon(R_N) \exp \left\{ \int_1^{R_N} \sqrt{\nu(s)} ds \right\}, \quad (0.10)$$

где $\varepsilon(R_N) \rightarrow 0$ при $R_N \rightarrow \infty$, то $u \equiv 0$ в области Ω .

Отметим, что никаких подтверждений точности полученных оценок авторы работ [10], [11] не приводят. Очевидно, что $\nu(r, Q_a) = \nu(r, \tilde{Q}_a)$ при всех $r > 0$, за исключением натуральных точек, поэтому классы единственности (0.10) для областей Q_a и $\tilde{Q}_a$ совпадают. Ниже мы устанавливаем для области $\tilde{Q}_a$ существенно более широкий класс единственности, такой же, как и для области Q_b .

В. А. Кондратьев и О. А. Олейник в работе [12] доказали следующий принцип Сен-Венана для решений внешних краевых задач. Пусть $\hat{G}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}_x^n$, $n \geq 2$, $\hat{G} \subset \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| < \rho_0\}$, и $G = \hat{G} \times \mathbb{R}_y^k$, $k \geq 0$. В области $Q = \mathbb{R}_z^{n+k} \setminus G$, $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Q$, рассматривается решение уравнения

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n+k} (a_{\alpha\beta}(\mathbf{z}) u_{z_\alpha})_{z_\beta} = 0$$

с постоянными эллиптичностью δ_1 , δ_2 и краевыми условиями первого или второго типа на ∂Q . В случае первого краевого условия предполагается, что для функции $u(\mathbf{z})$ найдется $\rho^* > \rho_0$ такое, что при любом достаточно малом ε

$$I(u, |\mathbf{x}|, \rho^* + \varepsilon) = I(u, |\mathbf{x}|, \rho^*),$$

где

$$I(u, v, \rho) = \int_{Q(\rho)} \mathcal{F}(u, v) d\mathbf{z}, \quad \mathcal{F}(u, v) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n+k} a_{\alpha\beta} u_{z_\alpha} u_{z_\beta},$$

$$Q(\rho) = \{\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Q \mid |\mathbf{x}| < \rho\}.$$

Тогда для решения справедлив принцип Сен-Венана: при любых ρ_1, ρ_2 таких, что $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho$, выполняется неравенство

$$I(u, u, \rho_1) \leq \rho_1^\kappa \rho_2^{-\kappa} I(u, u, \rho_2), \quad \kappa = \delta_1^{1/2} \delta_2^{-1/2} (n-1)^{1/2}.$$

Из него выводится соответствующая теорема о единственности решений.

В работе [13] доказано, в частности, что неравенство $|u(\bar{y})| \leq C |\ln |\bar{y}||^{1-\varepsilon}$, $|\bar{y}| > C$, выделяет класс единственности решений эллиптического уравнения (0.1'), пригодный для любой неограниченной области на плоскости и краевых условий первого, второго и третьего типов.

Чтобы сформулировать наши результаты, введем обозначение:

$$\lambda(r_1, r_2) = \inf \left\{ \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} \mathcal{D}(g) d\bar{y} \mid g(\bar{y}) \in C_0^\infty(\Omega), \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} g^2 d\bar{y} = 1 \right\}, \quad r_1 < r_2, \quad (0.11)$$

где $\Omega_{r_1}^{r_2} = \{(x, y) \in \Omega \mid r_1 < x < r_2\}$, значения параметров $r_1 = -\infty$ или $r_2 = \infty$ могут не указываться.

Для неотрицательных ρ положим

$$\rho^{[a,b]} = \begin{cases} \rho^a, & \text{если } \rho < 1, \\ \rho^b, & \text{если } \rho \geq 1, \end{cases} \quad a, b > 0.$$

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ назовем λ -последовательностью области Ω с параметрами (k, q, m, l) (в дальнейшем просто λ -последовательность), если существует число $\theta > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$1 \leq \theta \lambda_j^{j+1} \Delta_j^{2[k,q]}, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad (0.12)$$

где $\lambda_j^{j+1} = \lambda(x_j, x_{j+1})$, $\Delta_j = x_{j+1} - x_j$.

Приведем необходимое и достаточное условие существования λ -последовательности:

(*) *при любом $r_1 > 0$ найдется $r_2 > r_1$ такое, что $\lambda(r_1, r_2) > 0$ (см. [14, § 3, следствие 1]).*

При этом λ -последовательность можно построить начиная с любого $x_0 > 0$.

Ниже, в § 3, для областей специального вида будет предложен простой способ построения λ -последовательности.

Ради некоторого упрощения формулировок результатов потребуем существования такого числа x_* , что $\lambda(-\infty, x_*) > 0$. Нетрудно доказать, что это условие будет выполнено и при любом $x > x_*$ (см. [14, § 3, замечание]). Не ограничивая общность, в дальнейшем будем считать, что $x_* = x_0$ и

$$\lambda^0 = \lambda(-\infty, x_0) > 0. \quad (0.13)$$

Через $\Xi = \{k, q, l, m, \theta, \hat{a}, \bar{a}\}$ обозначим набор постоянных. Зависимость других постоянных от этого набора будем указывать в круглых скобках. Обозначим

$$J_a^b(u, \Omega) = \int_{\Omega_a^b} \mathcal{D}(u, \Omega) d\bar{y}, \quad J'_a{}^b(u, \Omega) = \int_{\Omega_a^b} u^2 d\bar{y},$$

причем значение параметра $a = -\infty$ может не указываться. В следующих утверждениях рассматривается обобщенное решение задачи (0.1), (0.2), определенное в § 1.

ТЕОРЕМА 0.1. *Пусть область Ω удовлетворяет условиям (*), (0.13) и $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ – λ -последовательность области Ω . Существует положительная постоянная $\kappa(\Xi)$ такая, что если для решения $u(\bar{y})$ задачи (0.1), (0.2) при $\Phi(\bar{y}) = \Psi(\bar{y}) = \Phi_{\bar{\alpha}}(\bar{y}) = 0$, $\bar{\alpha} \in S$, выполнено условие*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp\{-\kappa N\} J_{x_N}^{x_{N+1}}(u, \Omega) = 0, \quad (0.14)$$

то $u = 0$ в области Ω .

Для уравнения второго порядка (0.1') класс единственности решения задачи Дирихле будет определяться равенством

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp\{-\kappa N\} \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} |\nabla u|^2 d\bar{\mathbf{y}} = 0.$$

Следующий класс единственности формулируется через ограничение на саму функцию u .

ТЕОРЕМА 0.1'. Пусть область Ω удовлетворяет условиям (*), (0.13), $\{x_N\}_{N=0}^{\infty} - \lambda$ -последовательность области Ω и $\{\varepsilon_N\}_{N=0}^{\infty} -$ произвольная последовательность положительных чисел. Существует положительная постоянная $\kappa'(\Xi)$ такая, что если для решения $u(\bar{\mathbf{y}})$ задачи (0.1'), (0.2') при $\Phi(\bar{\mathbf{y}}) = \Psi(\bar{\mathbf{y}}) = \Phi_{\alpha}(\bar{\mathbf{y}}) = 0$, $\alpha = 0, n$, выполнено условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp\{-\kappa' N\} \varepsilon_N^{-2} J'_{x_N}^{x_N + \varepsilon_N}(u, \Omega) = 0, \quad (0.14')$$

то $u = 0$ в области Ω .

При $\kappa' \geq \kappa$ и $\varepsilon_N = x_{N+1} - x_N$ для достаточно больших N , очевидно, ограничение (0.14') слабее, чем предыдущее. Конечно, класс единственности (0.14) зависит от выбора λ -последовательности. Назовем $\bar{\lambda}$ -последовательность оптимальной, если существует постоянная $E(\Xi)$ такая, что для любой другой λ -последовательности справедлива импликация $(x_L \leq \bar{x}_N) \Rightarrow (L \leq EN)$. Поскольку мы не следим за точным значением κ в (0.14), можно считать, что оптимальная $\bar{\lambda}$ -последовательность обеспечивает "наиболее быстро убывающую" с ростом $x = \bar{x}_N$ экспоненту в (0.14). Установлено, что оптимальной является, например, λ -последовательность с минимально возможными интервалами (x_j, x_{j+1}) (см. [14, § 3, утверждение 3]).

Рассмотрим трубчатую область

$$\Omega(f) = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x > d, |\mathbf{y}| < f(x)\} \quad (0.15)$$

с положительной функцией $f(x)$, $d \in (-\infty, 0]$. От функции f будем требовать только того, чтобы множество $\Omega(f)$ было областью. В частности, это влечет ее измеримость. Рассмотренные выше области $\tilde{Q}_a, Q_b$, очевидно, являются трубчатыми. Определяющие их функции обозначим через $\tilde{f}_a, f_b$ соответственно.

Для трубчатых областей вида (0.15), не содержащих полупространство, естественно выразить условия (0.14), (0.14') в терминах функции $f(x)$. С этой целью определим понятие П-последовательности.

Пусть $\mathcal{P}(\rho, z) = \{(x, y_1) \in \mathbb{R}^2 \mid z \leq x < z + \rho, 0 < y_1 < \rho[\frac{k}{m}, \frac{q}{l}]\}$ – прямоугольник ширины ρ с левой нижней вершиной в точке z на оси абсцисс. Для положительной функции $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, через $\Gamma_a^b(f)$ будем обозначать криволинейную трапецию

$$\Gamma_a^b(f) = \{(x, y_1) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, 0 < y_1 < f(x)\}, \quad a \geq d,$$

причем параметр $b = \infty$ может не указываться.

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ назовем $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательностью функции f , если справедливы равенства

$$x_{j+1} = \sup\{r \mid \inf_{[x_j, r]} f^{[m, l]}(x) \geq (r - x_j)^{[k, q]}\}, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (0.16)$$

При этом обозначение $\Pi(m, m, m, m)$ будем сокращать до Π .

Покажем, что $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательность можно построить всегда, начиная с произвольной точки $x_0 > 0$. Выберем число ρ максимально возможным такое, что прямоугольник $\mathcal{P}(\rho, x_0)$ лежит в $\Gamma_{x_0}(f)$. Положим $x_1 = x_0 + \rho$. Таким же образом можно построить и остальные элементы $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательности.

Установлено, что $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательность является λ -последовательностью для области $\Omega(f)$ (см. следствие 3.1). Если существует постоянная $\omega \geq 1$ такая, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [x - f^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(x), x + f^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(x)]\} \leq \omega f(x), \quad x > 0, \quad (0.17)$$

то $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательность $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ является оптимальной $\bar{\lambda}$ -последовательностью для $\Omega(f)$ (см. следствие 3.3). При этом если $x_0 \geq 1$, то существует положительная постоянная c такая, что справедливы оценки

$$c^{-1} \int_1^{x_N} \frac{dx}{f^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(x)} \leq N \leq c \int_1^{x_N} \frac{dx}{f^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(x)}, \quad N \geq 1 \quad (0.18)$$

(см. следствие 3.4).

Доказано, что $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательность функции $f_b(x) = \max(1, x^b)$, $x > 0$, при $x_0 = 1$ является λ -последовательностью как для области Q_b , так и для области $\tilde{Q}_a$ (см. следствие 3.2). Поэтому, взяв ее в качестве λ -последовательности, по теоремам 0.1, 0.1' получим классы единственности (0.14), (0.14'), пригодные как для области Q_b , так и для области $\tilde{Q}_a$.

Соотношение (0.18) при $k = l = q = m = 1$ для Π -последовательности функции $f_b(x)$ принимает вид

$$c^{-1} x_N^{1-b} \leq N \leq c x_N^{1-b}, \quad N \geq 1. \quad (0.18')$$

Взяв $\varepsilon_N = 1$, $N = \overline{0, \infty}$, можно переписать класс единственности (0.14') в виде

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp\{-\kappa_b r^{1-b}\} J_r^{r+1}(u, \tilde{Q}_a) = 0, \quad 0 < b < 1. \quad (0.19)$$

Последний класс единственности не может быть существенно расширен ввиду следующей ниже теоремы 0.3.

Несложным следствием теоремы 0.1 в случае трубчатой области является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 0.2. *Существует положительная постоянная $\kappa(\Xi)$ такая, что если для решения $u(\bar{y})$ задачи (0.1), (0.2) в области $\Omega(f)$ при $\Phi(\bar{y}) = \Psi(\bar{y}) = \Phi_{\bar{\alpha}}(\bar{y}) = 0$, $\bar{\alpha} \in S$, выполнено условие*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp\left\{-\kappa \int_1^r \frac{dx}{f^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(x)}\right\} J^r(u, \Omega(f)) = 0, \quad (0.20)$$

то $u = 0$ в области $\Omega(f)$.

Поскольку параболоид, конус, цилиндр являются трубчатыми областями с функцией $f(x)$, $x > 0$, равной $x^{1/2}$, x , 1 соответственно, то классы единственности из теоремы 0.2 для бигармонического уравнения (задача (0.5), (0.6) определяются соотношениями вида

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \exp\{-\kappa_1 r^{1/2}\} J^r(u, \Omega(f)) &= 0, & \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-k_2} J^r(u, \Omega(f)) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \exp\{-\kappa_3 r\} J^r(u, \Omega(f)) &= 0, & J^r(u) &= \int_{\Omega^r(f)} \sum_{s=0}^n (u_{y_s y_s})^2 d\bar{y}. \end{aligned}$$

Для области Q_b класс единственности (0.20) решения задачи (0.1), (0.2) приводится к виду

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp\{-\kappa_b r^{1-bl/q}\} J^r(u, Q_b) = 0, \quad 0 < b < \frac{q}{l}.$$

Отсюда видно, что для таких областей класс единственности расширяется с уменьшением l и сужается с уменьшением q . Таким образом, для расширяющихся областей младшие члены уравнения (0.1), а для сужающихся областей старшие играют определяющую роль в формировании предлагаемого здесь класса единственности.

При $n = 1$ для уравнений $u_{xxxx} = u_{yy}$ и $u_{xx} = u_{yyyy}$ в области Q_b класс единственности (0.20) принимает вид соответственно

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp\{-\kappa_b r^{1-b/2}\} J^r(u, Q_b) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \exp\{-\kappa_b r^{1-2b}\} J^r(u, Q_b) = 0.$$

Таким образом, классы единственности зависят от направления, в котором расположена область, т. е. они для одного и того же уравнения анизотропны.

Следующее утверждение является следствием теоремы 0.1' для трубчатой области.

ТЕОРЕМА 0.2'. *Существует положительная постоянная $\kappa'(\Xi)$ такая, что если для решения $u(\bar{y})$ задачи (0.1'), (0.2') в области $\Omega(f)$ при $\Phi(\bar{y}) = \Psi(\bar{y}) = \Phi_\alpha(\bar{y}) = 0$, $\alpha = 0, n$, выполнено условие*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \exp\left\{-\kappa' \int_1^r \frac{dx}{f(x)}\right\} J_r^{r+1}(u, \Omega(f)) = 0, \quad (0.20')$$

то $u = 0$ в области $\Omega(f)$.

В § 4 в трубчатой области $\Omega(f)$ для задачи Дирихле в случае уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad \bar{y} \in \Omega(f), \quad (0.21)$$

$$u|_{\partial\Omega(f)} = 0, \quad (0.22)$$

построен следующий пример неединственности решения.

ТЕОРЕМА 0.3. *Пусть функции $\bar{f}(x)$, $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, таковы, что выполнено вложение трубчатых областей $\Omega(\bar{f}) \subset \Omega(f)$ и Π -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ функции $\bar{f}(x)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{\bar{\omega}} \leq \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{x_{N+1} - x_N} \leq \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} \geq 1, \quad N = \overline{0, \infty}. \quad (0.23)$$

Тогда в трубчатой области $\Omega(f)$ существует неотрицательное ненулевое решение задачи (0.21), (0.22), подчиняющееся оценке

$$u(\bar{y}) \leq \exp\{\kappa_* N\}, \quad \bar{y} \in \Omega^{x_N}(f), \quad N \geq 1, \quad (0.24)$$

с положительной постоянной κ_* , зависящей только от n .

Отметим, что условие (0.17) при $m = k = q = l = 1$ является достаточным для того, чтобы Π -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ функции $\bar{f}(x)$ удовлетворяла условию (0.23) (см. далее следствие 3.3). В частности, для Π -последовательности $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ функции $f_b(x)$ будет выполняться условие (0.23). По

теореме 0.3 получаем существование ненулевого решения задачи (0.21), (0.22) в $\Omega(\tilde{f}_a) = \tilde{Q}_a$, подчиняющегося оценке (0.24) в $\Omega^{x_N}(\tilde{f}_a)$, $N \geq 1$. При $r \geq 1$, выбирая номер N таким, что $r+1 \in (x_{N-1}, x_N]$, добиваемся выполнения включения $\Omega_r^{r+1}(\tilde{f}_a) \subset \Omega^{x_N}(\tilde{f}_a)$. Далее, при помощи оценки (0.18'), пользуясь (0.24), нетрудно установить, что

$$J_r^{r+1}(u, \tilde{Q}_a) \leq M_a \exp\{K_b r^{1-b}\}, \quad r \geq 1.$$

Это доказывает точность класса единственности (0.19) для области $\tilde{Q}_a$.

Для трубчатых областей $\Omega(f)$ с функцией $f(x)$ и ее П-последовательности $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ при условии, что выполнено соотношение (0.23), в § 4 установлено следствие оценки (0.24):

$$J_{x_N}^{x_{N+1}}(u, \Omega(f)) \leq M_* \exp\{\kappa_* N\} \Delta_N^2, \quad N \geq 1. \quad (0.25)$$

Чтобы доказать точность класса единственности (0.14') для области $\Omega(f)$, применим теорему 0.3 в ситуации, когда $f = \bar{f}$. Поскольку П-последовательность является λ -последовательностью для области $\Omega(f)$, то, сравнивая (0.14') при $\varepsilon_N = \Delta_N$, $N = \overline{0, \infty}$, и (0.25), приходим к выводу, что в случае уравнения Лапласа постоянная κ' в классе единственности (0.14') для области $\Omega(f)$ не может быть заменена на неограниченно возрастающую последовательность $\{\kappa_N\}_{N=0}^\infty$. В этом смысле построенный пример показывает, что найденный класс единственности для области $\Omega(f)$ нельзя существенно расширить.

Приведем еще один пример трубчатой области $\Omega(f)$, $f(x) = x^{\sin x}$, при $x \geq 1$, $f(x) = 1$ при $0 < x < 1$, с нерегулярным поведением границы, для которой наши теоремы позволяют установить точный класс единственности для уравнения Лапласа. Рассмотрим еще функцию $\bar{f}(x)$, график которой получается следующим образом. Пусть $a_k = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k = \overline{1, \infty}$, — точки минимума функции $\sin x$. Функции f , $\bar{f}$ совпадают на интервалах $(a_k - \pi/4, a_k + \pi/4)$. На оставшихся интервалах функция $\bar{f}$ определяется однозначно линейным и непрерывным образом. Функция $\bar{f}$ удовлетворяет соотношению (0.17) при $m = l = k = q = 1$. Это легко установить при помощи теоремы Лагранжа, используя тот факт, что ее производная при $x \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Пусть $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ — П-последовательность функции $\bar{f}$. Покажем, что класс единственности вида (0.20') для области $\Omega(f)$ является точным. Для этого установим оценки интеграла

$$I(r, f) = \int_1^r \frac{dx}{f(x)}, \quad r > 1.$$

Легко вычислить (см., например, [15, гл. 2, § 1]), что интеграл Лапласа

$$I_k = \int_{a_k - \pi/4}^{a_k + \pi/4} x^{-\sin x} dx$$

имеет асимптотику $I_k \approx a_k \sqrt{\frac{2\pi}{\ln a_k}}$. Теперь нетрудно установить оценки

$$\frac{C^{-1}r^2}{\sqrt{\ln r}} \leq I(r, f) \leq I(r, \bar{f}) \leq \frac{Cr^2}{\sqrt{\ln r}}, \quad r > 1.$$

Из оценки (0.18) следуют также неравенства

$$\frac{c^{-1}x_N^2}{\sqrt{\ln x_N}} \leq N \leq \frac{cx_N^2}{\sqrt{\ln x_N}}, \quad N \geq 1.$$

По теореме 0.3 существует нетривиальное решение уравнения Лапласа в $\Omega(f)$, подчиняющееся оценке (0.24), из которой несложно получить неравенство

$$J_r^{r+1}(u, \Omega(f)) \leq M_* \exp \left\{ K_* \frac{cr^2}{\sqrt{\ln r}} \right\}, \quad r > 1.$$

Отсюда следует, что класс единственности (0.20') не может быть существенно расширен.

В § 5 доказана теорема существования решения задачи (0.1), (0.2) с экспоненциально растущими функциями $\Phi(\bar{\mathbf{y}})$, $\Psi(\bar{\mathbf{y}})$, $\Phi_{\bar{\alpha}}(\bar{\mathbf{y}})$, $\bar{\alpha} \in S$, принадлежащего классу единственности, определяемому условием (0.14).

§ 1. Вспомогательные утверждения

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(v, w) &= \sum_{s=1}^n (D_{y_s}^l v D_{y_s}^l w + D_{y_s}^m v D_{y_s}^m w) + D_x^k v D_x^k w + D_x^q v D_x^q w, \\ \mathcal{F}(v, w) &= \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S, |\bar{\alpha}|=|\bar{\beta}|} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) \mathcal{D}_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} v \mathcal{D}_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} w, \\ (v, w)_Q &= \int_Q v w d\bar{\mathbf{y}}, \quad (v, w)_{\mathcal{D}, Q} = \int_Q \mathcal{D}(v, w) d\bar{\mathbf{y}}, \\ (v, w)_{\mathcal{F}, Q} &= \int_Q \mathcal{F}(v, w) d\bar{\mathbf{y}}, \quad v, w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}). \end{aligned}$$

Будем обозначать через $\|\cdot\|_Q$ норму в $L_2(Q)$, а через $\|v\|_{\mathcal{D}, Q}$, $\|v\|_{\mathcal{F}, Q}$ полунормы, порождаемые соответствующими билинейными формами. Гильбертовы пространства $W_{\mathcal{F}}(Q)$, $\mathring{W}_{\mathcal{F}}(Q)$ определим как пополнения пространств $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $C_0^\infty(Q)$ по нормам $(\|v\|_{\mathcal{F}, Q}^2 + \|v\|_Q^2)^{1/2}$, $\|v\|_{\mathcal{F}, Q}$ соответственно. Пространства $H(Q)$, $\mathring{H}(Q)$ определим как пополнения пространств $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $C_0^\infty(Q)$ по нормам $(\|\nabla v\|_Q^2 + \|v\|_Q^2)^{1/2}$, $\|\nabla v\|_Q$ соответственно. В случае, когда $Q = \Omega$, индекс Q не используем.

Определим невозрастающую функцию дискретного аргумента

$$\lambda(N) = \min(\lambda^0, \lambda_0^1, \dots, \lambda_{N-1}^N), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Если выполнено условие (0.13), то $\lambda(N) > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$\lambda(N) \int_{\Omega^{x_N}} g^2 d\bar{\mathbf{y}} \leq \int_{\Omega^{x_N}} \mathcal{D}(g) d\bar{\mathbf{y}}, \quad g(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega), \quad N \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Отметим, что если выполнено условие (0.13), то для функций $v \in \mathring{W}_{\mathcal{F}}(\Omega)$ ввиду (1.1) и (0.4) справедливы неравенства

$$\|v\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_N}}^2 + \|v\|_{\Omega^{x_N}}^2 \leq \|v\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_N}}^2 + \lambda^{-1}(N) \|v\|_{\mathcal{D}, \Omega^{x_N}}^2 \leq (1 + (\lambda(N)\hat{a})^{-1}) \|v\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_N}}^2.$$

Аналогичные неравенства справедливы для функций $v \in \mathring{H}(\Omega)$:

$$\|\nabla v\|_{\Omega^{x_N}}^2 + \|v\|_{\Omega^{x_N}}^2 \leq \|\nabla v\|_{\Omega^{x_N}}^2 + \lambda^{-1}(N) \|\nabla v\|_{\Omega^{x_N}}^2 = (1 + \lambda^{-1}(N)) \|\nabla v\|_{\Omega^{x_N}}^2.$$

Пространства $L_{2,\text{lc}}(\Omega)$, $W_{\mathcal{F},\text{lc}}(\Omega)$, $\mathring{W}_{\mathcal{F},\text{lc}}(\Omega)$, $H_{\text{lc}}(\Omega)$, $\mathring{H}_{\text{lc}}(\Omega)$ составим из функций $u(\bar{\mathbf{y}})$, определенных в Ω , для которых при любом $r > 0$ найдется функция из пространства $L_2(\Omega)$, $W_{\mathcal{F}}(\Omega)$, $\mathring{W}_{\mathcal{F}}(\Omega)$, $H(\Omega)$, $\mathring{H}(\Omega)$ соответственно, совпадающая с функцией $u(\bar{\mathbf{y}})$ в Ω^r . Поскольку локальность мы понимаем здесь в необычном смысле, то индекс loc заменен на lc . Считаем, что $\Psi(\bar{\mathbf{y}}) \in W_{\mathcal{F},\text{lc}}(\Omega)$, $\Phi(\bar{\mathbf{y}})$, $\Phi_{\bar{\alpha}}(\bar{\mathbf{y}}) \in L_{2,\text{lc}}(\Omega)$, $\bar{\alpha} \in S$.

Обобщенным решением задачи (0.1), (0.2) назовем функцию $u(\bar{\mathbf{y}}) \in W_{\mathcal{F},\text{lc}}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(u, v)_{\mathcal{F}} = (\Phi, v) + \sum_{\bar{\alpha} \in S} (\Phi_{\bar{\alpha}}, D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} v) \quad (1.2)$$

для любой функции $v(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega)$ и условию

$$u(\bar{\mathbf{y}}) - \Psi(\bar{\mathbf{y}}) \in \mathring{W}_{\mathcal{F},\text{lc}}(\Omega).$$

Если ввести обозначение $w(\bar{\mathbf{y}}) = u(\bar{\mathbf{y}}) - \Psi(\bar{\mathbf{y}}) \in \mathring{W}_{\mathcal{F},\text{lc}}(\Omega)$, то (1.2) перепишется в эквивалентном виде:

$$(w, v)_{\mathcal{F}} = (\Phi, v) + \sum_{\bar{\alpha} \in S} (\Phi_{\bar{\alpha}}, D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} v) - (\Psi, v)_{\mathcal{F}} \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.3)$$

Обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) в ограниченной области Ω существует и единственно (доказательство можно провести обычными методами; см. [16]).

Обобщенным решением задачи (0.1'), (0.2') назовем функцию $u(\bar{\mathbf{y}}) \in H_{\text{lc}}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(u, v)_{\mathcal{F}} = \sum_{\alpha, \beta=0}^n (a_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{y}}) u_{y_\alpha}, v_{y_\beta}) = (\Phi, v) + \sum_{\alpha=0}^n (\Phi_\alpha, v_{y_\alpha}) \quad (1.4)$$

для любой функции $v(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega)$ и условию

$$u(\bar{\mathbf{y}}) - \Psi(\bar{\mathbf{y}}) \in \mathring{H}_{\text{lc}}(\Omega).$$

ЛЕММА 1.1. Для любой функции $g(x) \in C^\infty[a, b]$ и любого $\varepsilon \leq (b-a)^2$ справедливо неравенство

$$\int_a^b g_p^2 dx \leq \varepsilon^{-p} \int_a^b [\varepsilon^i g_i^2 + G_i g^2] dx, \quad p = \overline{0, i}, \quad (1.5)$$

где $g_p(x) = D_x^p g(x)$, $G_i \geq 1$ – постоянная, зависящая только от i , причем $G_{i+1} \geq G_i$. Здесь i – произвольное натуральное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [14].

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $\Delta = b - a$, $\Pi = (a, b) \times \mathbb{R}^n$. Тогда существует положительная постоянная $\tilde{C}(k, q)$ такая, что для любой функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ справедливы неравенства

$$\frac{\|D_x^p g\|_\Pi^2}{\Delta^{2i-2p}} \leq \tilde{C}(\|D^k g\|_\Pi^2 + \|D^q g\|_\Pi^2) + \tilde{C} \frac{\|g\|_\Pi^2}{\Delta^{2[k, q]}}, \quad p = \overline{0, i}, \quad i = \overline{q, k}. \quad (1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись неравенством (1.5) при $\varepsilon = \Delta^2$, можем записать соотношения

$$\Delta^{2p-2k} \int_a^b g_p^2 dx \leq \int_a^b g_k^2 dx + \frac{G_k}{\Delta^{2k}} \int_a^b g^2 dx, \quad p = \overline{1, i}. \quad (1.7)$$

Интегрируя их по $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, устанавливаем (1.6) для случая $\Delta \leq 1$.

Пусть теперь $\Delta > 1$. Применяя неравенство (1.5) при $\varepsilon = 1$ для g_q , выводим

$$\int_a^b g_i^2 dx \leq \int_a^b (g_k^2 + G_{k-q} g_q^2) dx. \quad (1.8)$$

Выпишем неравенство леммы 1.1 при $\varepsilon = \Delta^2$:

$$\Delta^{2p-2i} \int_a^b g_p^2 dx \leq \int_a^b g_i^2 dx + \frac{G_i}{\Delta^{2i}} \int_a^b g^2 dx, \quad p = \overline{1, i}. \quad (1.9)$$

Объединив неравенства (1.9) и (1.8) и проинтегрировав полученное неравенство по $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, при $\Delta > 1$ получим (1.6).

ЛЕММА 1.2. Пусть $\Delta = b - a$, $\Pi = (a, b) \times \mathbb{R}^n$. Тогда существует положительная постоянная $\tilde{C}(k, q, m, l)$ такая, что для любой функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ справедливы неравенства

$$\frac{\|D_x^p D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_\Pi^2}{\Delta^{2i-2p}} \leq \tilde{C} \|g\|_{\mathcal{D}, \Pi}^2 + \tilde{C} \frac{\|g\|_\Pi^2}{\Delta^{2[k, q]}}, \quad p = \overline{0, i}, \quad (i, \alpha) \in S, \quad |\alpha| \neq 0. \quad (1.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала для $\hat{\Pi} = (0, 1) \times \mathbb{R}^n$ установим неравенства

$$\frac{\|D_x^p D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_{\hat{\Pi}}^2}{\Delta^{2i}} \leq \tilde{C} \sum_{s=1}^n (\|D_{y_s}^l g\|_{\hat{\Pi}}^2 + \|D_{y_s}^m g\|_{\hat{\Pi}}^2) + \tilde{C} \left(\frac{\|D_x^k g\|_{\hat{\Pi}}^2}{\Delta^{2k}} + \frac{\|D_x^q g\|_{\hat{\Pi}}^2}{\Delta^{2q}} \right) + \tilde{C} \frac{\|g\|_{\hat{\Pi}}^2}{\Delta^{2[k, q]}}, \quad (1.11)$$

$$p = \overline{0, i}, \quad (i, \alpha) \in S, \quad |\alpha| \neq 0.$$

Далее, чтобы получить (1.10), достаточно сделать замену переменной $z = a + x\Delta$ в (1.11).

На первом шаге будем рассматривать функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\hat{\Pi})$, для которых справедливо разложение в ряд Фурье:

$$g(x, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\mathbf{y}) \sin(j\pi x), \quad a_j(\mathbf{y}) = 2 \int_0^1 g(x, \mathbf{y}) \sin(j\pi x) dx,$$

и равенства Парсеваля

$$\int_0^1 (D_x^p D_{\mathbf{y}}^\alpha g)^2 dx = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} (D_{\mathbf{y}}^\alpha a_j(\mathbf{y}))^2, \quad p = \overline{0, i}.$$

Интегрируя их по $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, получаем

$$\|D_x^p D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_\Pi^2 = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} \int_{\mathbb{R}^n} (D_{\mathbf{y}}^\alpha a_j(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.12)$$

К функциям $a_j(\mathbf{y})$ применим преобразование Фурье: $\tilde{a}_j(\mathbf{z}) = F[a_j(\mathbf{y})]$. Пользуясь равенством Планшереля, перепишем (1.12) в виде

$$\|D_x^p D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_{\Pi}^2 = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} \int_{\mathbb{R}^n} |F[D_{\mathbf{y}}^\alpha a_j(\mathbf{y})]|^2 d\mathbf{z}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.13)$$

Поскольку $|F[D_x^\alpha a_j(\mathbf{y})]| = |\mathbf{z}^\alpha F[a_j(\mathbf{y})]| = |\mathbf{z}^\alpha \tilde{a}_j(\mathbf{z})|$, то (1.13) принимает вид

$$\|D_x^p D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_{\Pi}^2 = E_p \sum_{j=1}^{\infty} j^{2p} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{z}^{2\alpha} |\tilde{a}_j(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z}, \quad p = \overline{0, i}. \quad (1.14)$$

Положив $\nu = \frac{i}{k} + \frac{|\alpha|}{m} \leq 1$ и используя многомерное неравенство Юнга, сначала при $i = p = 0$, затем при $i > 0$ выводим неравенства

$$\frac{j^{2p} z_1^{2\alpha_1} \dots z_n^{2\alpha_n}}{\Delta^{2i}} \leq \frac{j^{2i} z_1^{2\alpha_1} \dots z_n^{2\alpha_n}}{\Delta^{2i}} \leq \sum_{s=1}^n z_s^{2m\nu} + \chi_i \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2k\nu}. \quad (1.15)$$

Очевидно, справедливы неравенства

$$\chi_i \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2k\nu} \leq \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2k} + \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2q}, \quad z_s^{2m\nu} \leq z_s^{2m} + z_s^{2l},$$

поскольку $k\nu \geq q$ и $m\nu \geq l$. Тогда из (1.15) имеем соотношения

$$\frac{j^{2p} \mathbf{z}^{2\alpha}}{\Delta^{2i}} \leq \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2k} + \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2q} + \sum_{s=1}^n (z_s^{2m} + z_s^{2l}). \quad (1.16)$$

Подставляя (1.16) в (1.14), получим

$$\frac{\|D_x^p D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_{\Pi}^2}{\Delta^{2i}} \leq E_p \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2k} + \left(\frac{j}{\Delta} \right)^{2q} + \sum_{s=1}^n (z_s^{2m} + z_s^{2l}) \right\} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{a}_j(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z}.$$

Пользуясь (1.14), последнее неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\|D_x^p D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_{\Pi}^2}{\Delta^{2i}} \leq \left(\frac{\|D_x^k g\|_{\Pi}^2}{\Delta^{2k}} + \frac{\|D_x^q g\|_{\Pi}^2}{\Delta^{2q}} \right) + \sum_{s=1}^n (\|D_{y_s}^l g\|_{\Pi}^2 + \|D_{y_s}^m g\|_{\Pi}^2). \quad (1.17)$$

Отсюда следует неравенство (1.11) для функций $g \in C_0^\infty(\widehat{\Pi})$.

Докажем теперь неравенство (1.11) для функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Для этого построим продолжение $\bar{g}(x, \mathbf{y})$ на $\bar{\Pi} = (-1, 2) \times \mathbb{R}^n$ такое, что $\bar{g}|_{\Pi} = g$ и справедливы неравенства

$$\|D_x^i D_{\mathbf{y}}^\alpha \bar{g}\|_{\Pi}^2 \leq C_{i,\alpha} \|D_x^i D_{\mathbf{y}}^\alpha g\|_{\Pi}^2, \quad i = \overline{0, k}, \quad 0 \leq |\alpha| \leq m. \quad (1.18)$$

Построение такого продолжения описано, например, в [17, гл. III, § 4, п. 2].

Пусть $\eta(x) \in C_0^\infty(-1, 2)$ – срезающая функция, не превосходящая единицы и равная единице на отрезке $[0, 1]$. Тогда для функции $v = \bar{g}\eta$, принадлежащей $C_0^\infty(\bar{\Pi})$, при помощи (1.17) можно установить, что

$$\frac{\|D_x^p D_{\mathbf{y}}^\alpha v\|_{\Pi}^2}{\Delta^{2i}} \leq 3^{2k} \left(\frac{\|D_x^k v\|_{\Pi}^2}{\Delta^{2k}} + \frac{\|D_x^q v\|_{\Pi}^2}{\Delta^{2q}} \right) + \sum_{s=1}^n (\|D_{y_s}^l v\|_{\Pi}^2 + \|D_{y_s}^m v\|_{\Pi}^2). \quad (1.19)$$

Поскольку срезающая функция $\eta(x)$ зависит только от x , то ввиду (1.18) справедливы неравенства

$$\|D_{\mathbf{y}}^{\alpha} v\|_{\Pi}^2 \leq C_{0,\alpha} \|D_{\mathbf{y}}^{\alpha} g\|_{\Pi}^2, \quad 0 \leq |\alpha| \leq m. \quad (1.20)$$

Кроме того, пользуясь (1.18), выводим соотношения

$$\begin{aligned} \|D_x^i v\|_{\Pi}^2 &\leq \left(\sum_{s=0}^i C_i^s \|D_x^{i-s} \eta D_x^s \bar{g}\|_{\Pi} \right)^2 \\ &\leq E_1(i) \sum_{s=0}^i \|D_x^s \bar{g}\|_{\Pi}^2 \leq E_1(i) \sum_{s=0}^i C_{s,0} \|D_x^s g\|_{\Pi}^2, \quad 0 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Далее, используя неравенство (1.5) при $\varepsilon = 1$:

$$\|D_x^s g\|_{\Pi}^2 \leq \|D_x^i g\|_{\Pi}^2 + G_i \|g\|_{\Pi}^2, \quad s = \overline{0, i},$$

получаем

$$\|D_x^i v\|_{\Pi}^2 \leq E_2(i) (\|D_x^i g\|_{\Pi}^2 + \|g\|_{\Pi}^2), \quad 0 \leq i \leq k. \quad (1.21)$$

Подставляя (1.20), (1.21) в (1.19), выводим неравенство (1.11).

Итак, неравенство (1.11) доказано в общей ситуации.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Отметим, что, вообще говоря, различные постоянные $\tilde{C}$ в неравенствах (1.6), (1.10) далее считаем одинаковыми, выбирая наибольшую из них. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tilde{C} \geq 1$.

§ 2. Теоремы единственности

Установим сначала оценку типа Сен-Венана для эллиптического уравнения второго порядка.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть область Ω удовлетворяет условию (*), и пусть $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ — λ -последовательность, $\{\varepsilon_N\}_{N=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность положительных чисел. Тогда найдутся положительные постоянные $\kappa'(\Xi)$ и $M'(\Xi)$ такие, что если $\Phi(\bar{\mathbf{y}}) = \Phi_{\alpha}(\bar{\mathbf{y}}) = \Psi(\bar{\mathbf{y}}) = 0$, $\alpha = \overline{0, n}$, в $\Omega^{x_N + \varepsilon_N}$ при некотором натуральном $N \geq 2$, то решение $u(\bar{\mathbf{y}})$ задачи (0.1'), (0.2') при всех $\nu = \overline{1, N-1}$ удовлетворяет оценкам

$$\|u\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_{\nu}}}^2 \leq \frac{M'}{\varepsilon_N^2} \exp\{-\kappa'(N - \nu)\} \|u\|_{\Omega^{x_N + \varepsilon_N}}^2. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем число $e'_* > 1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\bar{a}}{\hat{a}} \exp\left\{\frac{2}{e'_*}\right\} \frac{1 + (n+1)\theta}{e'_*} \leq 1. \quad (2.2)$$

Зафиксируем натуральное число $\nu \geq 1$. Рассмотрим кусочно постоянной функцию $\beta(x)$ на промежутке $[x_{\nu}, x_N]$ такую, что $\beta(x) = \delta_j$, $x \in [x_j, x_{j+1})$, $\delta_j^{-1} = e'_* \Delta_j$, $j = \overline{\nu, N-1}$. Очевидно, справедливы следующие равенства:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \beta(t) dt = \delta_j \Delta_j = \frac{1}{e'_*}, \quad j = \overline{\nu, N-1}. \quad (2.3)$$

Определим невозрастающую непрерывную функцию $\xi(x)$ на $\mathbb{R}$ условиями

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_\nu, \\ \exp\left\{-\int_{x_\nu}^x \beta(t) dt\right\}, & x_\nu \leq x \leq x_N, \\ \xi(x_N) \left(\frac{x_N + \varepsilon_N - x}{\varepsilon_N}\right), & x_N \leq x \leq x_N + \varepsilon_N, \\ 0, & x \geq x_N + \varepsilon_N. \end{cases}$$

Почти всюду на промежутке $[x_\nu, x_N]$ выполнено соотношение

$$\xi' = -\beta\xi, \quad (2.4)$$

и ввиду (2.3) справедливы равенства

$$\frac{\xi(x_j)}{\xi(x_{j+1})} = \exp\left\{\frac{1}{e'_*}\right\}, \quad j = \overline{\nu, N-1}. \quad (2.5)$$

Перемножая эти равенства, находим, что

$$\xi(x_N) = \exp\left\{-\frac{N-\nu}{e'_*}\right\}. \quad (2.6)$$

Производная функции ξ на интервале $(x_N, x_N + \varepsilon_N)$ подчиняется равенству

$$|\xi'(x)| = \frac{\xi(x_N)}{\varepsilon_N}. \quad (2.7)$$

Положим в (1.4) $v = u\xi^2(x) \in \dot{H}(\Omega)$, тогда $\text{supp } v \subset \Omega^{x_N + \varepsilon_N}$. Ввиду того, что $\Phi\xi^2 \equiv \Phi_\alpha\xi^2 \equiv 0$, $\alpha = \overline{0, n}$, получим равенство

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}(u)\xi^2 d\bar{y} = \int_{\Omega} \sum_{\alpha, \beta=0}^n a_{\alpha\beta}(\bar{y}) u_{y_\alpha} u_{y_\beta} \xi^2 d\bar{y} = -2 \sum_{\alpha=0}^n \int_{\Omega} a_{\alpha 0}(\bar{y}) u_{y_\alpha} \xi u \xi' d\bar{y}. \quad (2.8)$$

Оценим интеграл в правой (2.8) части с учетом того, что $\xi' = 0$ вне промежутка $[x_\nu, x_N + \varepsilon_N]$. На промежутках $[x_j, x_{j+1}]$, $j = \overline{\nu, N-1}$, используя (0.3), (2.4), выводим

$$\begin{aligned} I_j &\equiv 2\bar{a} \sum_{\alpha=0}^n \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 |u_{y_\alpha}| |u| \beta d\bar{y} = 2\bar{a} \sum_{\alpha=0}^n \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} |u_{y_\alpha}| |u| \frac{\xi^2}{e'_* \Delta_j} d\bar{y} \\ &\leq \frac{\bar{a}}{e'_*} \xi^2(x_j) \sum_{\alpha=0}^n \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \left(u_{y_\alpha}^2 + \frac{u^2}{\Delta_j^2}\right) d\bar{y}. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь определением λ -последовательности (0.12), (0.11) и соотношениями (2.5), устанавливаем неравенства

$$\begin{aligned} I_j &\leq \frac{\bar{a}}{e'_*} \exp\left\{\frac{2}{e'_*}\right\} \xi^2(x_{j+1}) \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \left(|\nabla u|^2 + (n+1) \frac{|\nabla u|^2}{\Delta_j^2 \lambda_j^{j+1}}\right) d\bar{y} \\ &\leq \frac{\bar{a}}{e'_*} \exp\left\{\frac{2}{e'_*}\right\} (1 + (n+1)\theta) \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 |\nabla u|^2 d\bar{y}. \end{aligned}$$

Ввиду (0.4), (2.2) имеем

$$I_j \leq \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \mathcal{F}(u) \xi^2 d\bar{y}, \quad j = \overline{\nu, N-1}. \quad (2.9)$$

Оценим интеграл, стоящий в правой части (2.8), по промежутку $[x_N, x_N + \varepsilon_N]$. Применяя (0.3), (2.7), (0.4), выводим соотношения

$$\begin{aligned} I_N &\equiv 2\bar{a} \sum_{\alpha=0}^n \int_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}} \xi |u_{y_\alpha}| |u| \frac{\xi(x_N)}{\varepsilon_N} d\bar{y} \\ &\leq \hat{a} \sum_{\alpha=0}^n \int_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}} \xi^2 u_{y_\alpha}^2 d\bar{y} + \frac{\bar{a}^2}{\hat{a}} (n+1) \frac{\xi^2(x_N)}{\varepsilon_N^2} \int_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}} u^2 d\bar{y} \\ &\leq \int_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}} \mathcal{F}(u) \xi^2 d\bar{y} + M' \frac{\xi^2(x_N)}{\varepsilon_N^2} \int_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}} u^2 d\bar{y} \end{aligned}$$

с постоянной $M' = \frac{\bar{a}^2}{\hat{a}} (n+1)$. Соединяя последнюю оценку с (2.8), (2.9), заключаем, что

$$\int_{\Omega_{x_\nu}} \mathcal{F}(u) d\bar{y} \leq M' \frac{\xi^2(x_N)}{\varepsilon_N^2} \int_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}} u^2 d\bar{y}. \quad (2.10)$$

Таким образом, согласно (2.6) установлено неравенство (2.1) с $\kappa' = 2/e'_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1'. При $\nu = \overline{1, N-1}$, $N \geq 2$, из утверждения 2.1 вытекает справедливость неравенств

$$\hat{a} \|u\|_{\mathcal{D}, \Omega_{x_\nu}}^2 \leq \|u\|_{\mathcal{F}, \Omega_{x_\nu}}^2 \leq \frac{M'}{\varepsilon_N^2} \exp \{-\kappa'(N-\nu)\} \|u\|_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}}^2,$$

из которых согласно (1.1) заключаем:

$$\hat{a} \lambda(\nu) \|u\|_{\Omega_{x_\nu}}^2 \leq \frac{M'}{\varepsilon_N^2} \exp \{-\kappa'(N-\nu)\} \|u\|_{\Omega_{x_N}^{x_N+\varepsilon_N}}^2.$$

Переходя в последних неравенствах к пределу при $N \rightarrow \infty$ и применяя (0.14'), выводим равенства

$$\lambda(\nu) \|u\|_{\Omega_{x_\nu}}^2 = 0, \quad \nu = \overline{1, \infty},$$

из которых следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Сформулированное в теореме 0.1' утверждение нетрудно распространить на области, имеющие конечное число ветвей, уходящих в бесконечность по различным направлениям. При этом область Ω представляется как объединение $\bigcup_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ вложенных ограниченных подобластей $\Omega^{(N)} \subset \Omega^{(N+1)}$ таких, что пересечение $(\partial\Omega^{(N)}) \cap \Omega$ распадается на конечное число гиперповерхностей $S_i^{(N)}$, $i = \overline{1, p}$, и $\Omega^{(N+1)} \setminus \overline{\Omega^{(N)}} = \bigcup_{i=1}^p \omega_i^{(N)}$. Определим векторы $t^{(N)} = (t_1^{(N)}, \dots, t_p^{(N)})$ и $\lambda^{(N)} = (\lambda_1^{(N)}, \dots, \lambda_p^{(N)})$ формулами

$$\begin{aligned} t_i^{(N)} &= \text{dist}(S_i^{(N)}, S_i^{(N+1)}), \\ \lambda_i^{(N)} &= \inf \left\{ \int_{\omega_i^{(N)}} |\nabla g|^2 dy \mid g(y) \in C_0^\infty(\Omega), \int_{\omega_i^{(N)}} g^2 dy = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Условие (0.11), налагаемое на λ -последовательность, заменяется следующим: существует число $\theta > 0$ такое, что при всех $N \geq 0$ выполняются неравенства $1 \leq \theta \lambda_i^{(N)} (t_i^{(N)})^2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть область Ω удовлетворяет условию (*), и пусть $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ – λ -последовательность. Тогда найдутся положительные постоянные $\kappa(\Xi)$ и $M(\Xi)$ такие, что если $\Phi(\bar{\mathbf{y}}) = \Phi_{\bar{\alpha}}(\bar{\mathbf{y}}) = \Psi(\bar{\mathbf{y}}) = 0$, $\bar{\alpha} \in S$, в $\Omega^{x_{N+1}}$ при некотором $N \geq 2$, то решение $u(\bar{\mathbf{y}})$ задачи (0.1), (0.2) при всех $\nu = \overline{1, N-1}$ удовлетворяет оценкам

$$\|u\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_\nu}}^2 \leq M \exp\{-\kappa(N - \nu)\} \|u\|_{\mathcal{D}, \Omega^{x_{N+1}}}^2. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим срезающую функцию $\xi(x)$. Пусть $h(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – неубывающая функция, равная нулю при $t \leq 0$ и равная единице при $t \geq 1$. Пусть

$$\hat{a}_i = \max_{t \in [0, 1]} |D^i h(t)|, \quad a_i = \hat{a}_i 3^i, \quad i = \overline{0, \infty}. \quad (2.12)$$

Из теоремы Лагранжа следует, что $\hat{a}_{i+1} \geq \hat{a}_i$ и, тем более, $a_{i+1} \geq a_i$.

Определим дифференциальные полиномы P_p от гладкой функции $\alpha(x)$ условиями $P_0 = 1$, $P_p = (D - 2\alpha)P_{p-1}$. Тогда для $p = \overline{1, \infty}$ имеем

$$\begin{aligned} P_p &= (D - 2\alpha)^{p-1}(-2\alpha) \\ &= \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} (-1)^{p_1 + p_2 + \dots + p_s} \alpha^{p_1} (D\alpha)^{p_2} \dots (D^{s-1}\alpha)^{p_s}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s}$ – целые неотрицательные числа.

Положим

$$b_p = \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} a_0^{p_1} a_1^{p_2} \dots a_{s-1}^{p_s}. \quad (2.14)$$

Очевидно, что $b_{p+1} \geq b_p$, $p = \overline{0, \infty}$.

Выберем число $e_* > 1$ такое, чтобы выполнялось неравенство

$$\exp\left\{\frac{2}{e_*}\right\} \frac{\tilde{b}}{e_*} \Sigma^2 \tilde{C}(1 + \theta) \leq 1, \quad (2.15)$$

где $\tilde{b} = \frac{\bar{a}}{a} 2^k b_k$, $\tilde{C}$ – постоянная из неравенств (1.6), (1.10), $\Sigma = \sum_{\bar{\alpha} \in S} 1$.

Зафиксируем натуральное число $\nu \geq 1$. Рассмотрим кусочно постоянную функцию $\beta(x)$ на промежутке $[x_{\nu-1}, x_{N+1}]$ такую, что $\beta(x) = \delta_j$, $x \in [x_j, x_{j+1})$, $j = \overline{\nu-1, N}$, причем $\delta_{\nu-1} = \delta_N = 0$ и $\delta_j^{-1} = e_* \Delta_j$, $j = \overline{\nu, N-1}$.

Построим функцию $\alpha(x) \leq \beta(x)$, сглаживая функцию $\beta(x)$ по следующему правилу. Если $\delta_{j-1} < \delta_j$, то на отрезке $[x_j, x_j + \Delta_j/3]$ функция $\alpha(x)$ определяется следующим образом:

$$\alpha(x) = \delta_{j-1} + (\delta_j - \delta_{j-1}) h\left(\frac{3(x - x_j)}{\Delta_j}\right).$$

Если $\delta_j > \delta_{j+1}$, то на отрезке $[x_{j+1} - \Delta_j/3, x_{j+1}]$ полагаем

$$\alpha(x) = \delta_j - (\delta_j - \delta_{j+1})h\left(1 + \frac{3(x - x_{j+1})}{\Delta_j}\right).$$

В оставшихся точках считаем, что $\alpha(x) = \beta(x)$.

Очевидно, что во всех случаях производные функции $\alpha(x)$ подчиняются оценкам

$$|D^i \alpha(x)| \leq \left(\frac{3}{\Delta_j}\right)^i \delta_j \max_{t \in [0,1]} |D^i h(t)| \leq \frac{a_i \delta_j}{\Delta_j^i} = \frac{a_i}{e_* \Delta_j^{i+1}} \quad (2.16)$$

при $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $j = \overline{\nu, N-1}$, $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, полиномы P_p удовлетворяют неравенствам

$$|P_p| \leq \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} \left(\frac{a_0}{e_* \Delta_j}\right)^{p_1} \dots \left(\frac{a_{s-1}}{e_* \Delta_j^s}\right)^{p_s} \leq \frac{b_p}{e_* \Delta_j^p}, \quad (2.17)$$

$$x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = \overline{\nu, N-1}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Установим оценки интеграла $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \alpha(t) dt$, $j = \overline{\nu, N-1}$:

$$\frac{1}{3e_*} = \frac{\delta_j \Delta_j}{3} = \int_{x_j + \frac{\Delta_j}{3}}^{x_j + \frac{2\Delta_j}{3}} \delta_j dt \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \alpha(t) dt \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \delta_j dt = \delta_j \Delta_j = \frac{1}{e_*}. \quad (2.18)$$

Введем функцию $\eta(x) = 1 - h\left(\frac{x - x_N}{\Delta_N}\right)$, $x \in [x_N, x_{N+1}]$. Определим невозрастающую гладкую функцию $\xi(x)$ на $\mathbb{R}$ условиями

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_\nu, \\ \exp\left\{-\int_{x_\nu}^x \alpha(t) dt\right\}, & x_\nu \leq x \leq x_N, \\ \xi(x_N)\eta(x), & x_N \leq x \leq x_{N+1}, \\ 0, & x \geq x_{N+1}. \end{cases}$$

На промежутке $[x_\nu, x_N]$ справедливо уравнение $\xi' = -\alpha\xi$, и ввиду (2.18) справедливы неравенства

$$\exp\left\{\frac{1}{3e_*}\right\} \leq \frac{\xi(x_j)}{\xi(x_{j+1})} \leq \exp\left\{\frac{1}{e_*}\right\}, \quad j = \overline{\nu, N-1}. \quad (2.19)$$

Перемножая эти неравенства, находим, что $\exp\left\{\frac{N-\nu}{3e_*}\right\} \leq \frac{\xi(x_\nu)}{\xi(x_N)}$ и

$$\xi(x_N) \leq \exp\left\{-\frac{N-\nu}{3e_*}\right\}. \quad (2.20)$$

Нетрудно доказать, что на промежутке $[x_\nu, x_N]$ справедливо соотношение

$$D^p \xi^2 = \xi^2 P_p, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

Оценим производные $D^p \xi^2$, $p = \overline{1, k}$, на отрезке $[x_N, x_{N+1}]$. Очевидно, что на промежутке $[x_N, x_{N+1}]$ справедливы неравенства

$$|D^p \eta| \leq \frac{\hat{a}_p}{\Delta_N^p}, \quad p = \overline{0, \infty},$$

из которых следует, что

$$|D^p \xi^2| \leq \xi^2(x_N) \frac{\hat{a}_p^2 2^p}{\Delta_N^p}, \quad x \in [x_N, x_{N+1}], \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

Положим в (1.2) $v = u\xi^2(x) \in \mathring{W}_{\mathcal{F}}(\Omega)$. Тогда $\text{supp } v \subset \Omega^{x_{N+1}}$. Ввиду того, что $\Phi \xi^2 \equiv \Phi_{\bar{\alpha}} \xi^2 \equiv 0$, $\bar{\alpha} \in S$, получим равенство

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}(u) \xi^2 d\bar{\mathbf{y}} = - \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S, |\bar{\alpha}|=|\bar{\beta}|} \int_{\Omega} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\mathbf{y}}) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u \left(\sum_{p=0}^{i-1} C_i^p D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} u D_x^{i-p} \xi^2 \right) d\bar{\mathbf{y}}. \quad (2.23)$$

Оценим интеграл в правой части (2.23) с учетом того, что $D^p(\xi^2) \equiv 0$, $p \in \mathbb{N}$, вне промежутка $[x_{\nu}, x_{N+1}]$. На промежутках $[x_j, x_{j+1}]$, $j = \overline{\nu, N-1}$, используя (0.3), (2.21), (2.17), выводим:

$$\begin{aligned} I_j &\equiv \bar{a} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S, |\bar{\alpha}|=|\bar{\beta}|} \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u| \sum_{p=0}^{i-1} C_i^p |P_{i-p}| |D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} u| dx d\mathbf{y} \\ &\leq \bar{a} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S, |\bar{\alpha}|=|\bar{\beta}|} \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u| \sum_{p=0}^{i-1} \frac{C_i^p b_{i-p}}{e_* \Delta_j^{i-p}} |D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} u| dx d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Далее установим неравенство

$$J_j = \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u| \frac{|D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} u|}{\Delta_j^{i-p}} dx d\mathbf{y} \leq \tilde{C}(1 + \theta) \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}}, \quad j = \overline{\nu, N}. \quad (2.25)$$

Пользуясь неравенствами (1.6), (1.10) с $\Delta = \Delta_j$, находим, что

$$\begin{aligned} J_j &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \left(|D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u|^2 + \frac{|D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} u|^2}{\Delta_j^{2i-2p}} \right) dx d\mathbf{y} \\ &\leq \tilde{C} \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \left(\mathcal{D}(u) + \frac{u^2}{\Delta_j^{2[k, q]}} \right) dx d\mathbf{y}, \quad j = \overline{\nu, N}. \end{aligned}$$

Применив определение λ -последовательности (0.12), (0.11), получим требуемое.

Ввиду (2.19), из (2.25) сразу следует, что

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u| \frac{|D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} u|}{\Delta_j^{i-p}} dx d\mathbf{y} \\ &\leq \tilde{C}(1 + \theta) \exp\left\{ \frac{2}{e_*} \right\} \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}}, \quad j = \overline{\nu, N-1}. \end{aligned}$$

Теперь интеграл I_j оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} I_j &\leq \bar{a} \tilde{C}(1 + \theta) \exp\left\{ \frac{2}{e_*} \right\} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{C_k^p b_{k-p}}{e_*} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S, |\bar{\alpha}|=|\bar{\beta}|} \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}} \\ &\leq \bar{a} \tilde{C}(1 + \theta) \exp\left\{ \frac{2}{e_*} \right\} \frac{\Sigma^2 2^k b_k}{e_*} \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}}, \quad j = \overline{\nu, N-1}. \end{aligned}$$

Согласно (0.4), (2.15) имеем неравенства

$$I_j \leq \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \mathcal{F}(u) \xi^2 d\bar{\mathbf{y}}, \quad j = \overline{\nu, N-1}. \quad (2.26)$$

Оценим интеграл I_N , стоящий в правой части (2.23), на промежутке $[x_N, x_{N+1}]$. Применяя (0.3), (2.22), выводим соотношение

$$I_N \leq \xi^2(x_N) \bar{a} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S, |\bar{\alpha}|=|\bar{\beta}|} \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} |D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}} u| \sum_{p=0}^{i-1} \frac{C_i^p \hat{a}_{i-p}^2 2^{i-p}}{\Delta_N^{i-p}} |D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} u| dx d\bar{\mathbf{y}}.$$

Далее интеграл I_N оценивается с помощью (2.25) при $j = N$ аналогично I_j :

$$I_N \leq \xi^2(x_N) \bar{a} (1 + \theta) \tilde{C} \tilde{a} \Sigma^2 \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}},$$

где $\tilde{a} = \hat{a}_k^2 2^{2k}$. Отсюда следует неравенство

$$I_N \leq \xi^2(x_N) M \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}}$$

с постоянной $M = \bar{a} (1 + \theta) \tilde{C} \tilde{a} \Sigma^2$. Соединяя последнюю оценку с (2.23), (2.26), заключаем, что

$$\int_{\Omega_{x_\nu}^{x_{N+1}}} \mathcal{F}(u) d\bar{\mathbf{y}} \leq M \xi^2(x_N) \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} \mathcal{D}(u) d\bar{\mathbf{y}}. \quad (2.27)$$

Таким образом, согласно (2.20) установлено неравенство (2.11) с $\kappa = 2/(3e_*) < 2/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1 основано на утверждении 2.2 и проводится аналогично доказательству теоремы 0.1'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. В условии (0.20) положим $r = x_{N+1}$, где $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ — $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательность функции $f(x)$. Получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left\{ -\kappa \int_1^{x_{N+1}} \frac{dx}{f^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(x)} \right\} J^{x_{N+1}}(u, \Omega(f)) = 0. \quad (2.28)$$

Для $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательности, очевидно, справедливы неравенства

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{f^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(x)} \leq \frac{\Delta_j}{\inf_{[x_j, x_{j+1}]} f^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(x)} \leq 1, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad (2.29)$$

суммируя которые, выводим:

$$\int_{x_0}^{x_{N+1}} \frac{dx}{f^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(x)} \leq N + 1. \quad (2.30)$$

Объединяя (2.28) и (2.30), несложно установить соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp \{ -\kappa N \} J^{x_{N+1}}(u, \Omega(f)) = 0,$$

из которого следует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp\{-\kappa N\} J_{x_N}^{x_N+1}(u, \Omega(f)) = 0.$$

Поскольку $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ является λ -последовательностью области $\Omega(f)$, то согласно теореме 0.1 имеем $u(\bar{\mathbf{y}}) = 0$ для п. в. $\bar{\mathbf{y}} \in \Omega(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2'. В условии (0.20') положим $r = x_N$, где $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ – Π -последовательность функции $f(x)$. Получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left\{-\kappa' \int_1^{x_N} \frac{dx}{f(x)}\right\} J_{x_N}^{x_N+1}(u, \Omega(f)) = 0. \quad (2.31)$$

Для Π -последовательности, очевидно, справедливы неравенства

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{\Delta_j}{\inf_{[x_j, x_{j+1})} f(x)} \leq 1, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad (2.32)$$

суммируя которые, выводим:

$$\int_{x_0}^{x_N} \frac{dx}{f(x)} \leq N. \quad (2.33)$$

Объединяя (2.31) и (2.33), получаем соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \exp\{-\kappa' N\} J_{x_N}^{x_N+1}(u, \Omega(f)) = 0.$$

Поскольку Π -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ является λ -последовательностью области $\Omega(f)$, то согласно теореме 0.1' при $\varepsilon_N = 1$, $N = \overline{0, \infty}$, получаем $u(\bar{\mathbf{y}}) = 0$ для п. в. $\bar{\mathbf{y}} \in \Omega(f)$.

§ 3. λ -последовательности для трубчатых областей

Для каждого $s = \overline{1, n}$ рассмотрим область типа слоя

$$\Omega[f, s] = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x > d, |y_s| < f(x)\} \quad (3.1)$$

с положительной функцией $f(x)$, $d \in (-\infty, 0]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть положительная функция $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, и возрастающая последовательность положительных чисел $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяют условию

$$\inf_{[x_j, x_{j+1})} f(x) \leq \omega_1 \Delta_j^{\left[\frac{k}{m}, \frac{q}{l}\right]}, \quad \omega_1 \geq 1, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (3.2)$$

Тогда $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ является λ -последовательностью для любой области $\Omega \subset \Omega[f, s]$, $s = \overline{1, n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО выведем из следующего утверждения.

ЛЕММА 3.1. Рассмотрим область $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < r, y > 0\}$ и функцию $g(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, равную нулю в окрестности луча $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y > h\}$. Справедливо обобщенное неравенство Фридрихса–Стеклова

$$\int_Q g^2(x, y) dx dy \leq E_p \left\{ r^{2i} \int_Q (D_x^i g)^2 dx dy + h^{2p} \int_Q (D_y^p g)^2 dx dy \right\}, \quad p, i \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

E_p – положительная постоянная, зависящая от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [14].

Функцию $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Omega[f, s])$ продолжим на все $\mathbb{R}^{n+1}$ нулем за пределы $\Omega[f, s]$. Обозначим через $\hat{x}_j$ любую точку отрезка $[x_j, x_{j+1}]$ такую, что $2 \inf_{[x_j, x_{j+1}]} f(x) > f(\hat{x}_j)$. Тогда согласно условию (3.2) имеем

$$f^m(\hat{x}_j) \leq (2\omega_1)^m \Delta_j^k, \quad \Delta_j \leq 1; \quad f^l(\hat{x}_j) \leq (2\omega_1)^l \Delta_j^q, \quad \Delta_j > 1. \quad (3.4)$$

Рассмотрим область $Q = \{(x, y_s) \in \mathbb{R}^2 \mid x_j < x < x_{j+1}, |y_s| < f(x)\}$. Положим

$$Q_1^\pm = \{(x, y_s) \in \mathbb{R}^2 \mid x_j < x < \hat{x}_j, \pm y_s > 0\}, \\ Q_2^\pm = \{(x, y_s) \in \mathbb{R}^2 \mid \hat{x}_j < x < x_{j+1}, \pm y_s > 0\}.$$

Предположим сначала, что $\Delta_j \leq 1$. Воспользовавшись неравенством (3.3) для полуполосы Q_1^+ , получим

$$\int_{Q_1^+} g^2(x, \mathbf{y}) dx dy_s \leq E_m \left\{ \Delta_j^{2k} \int_{Q_1^+} (D_x^k g)^2 dx dy_s + f^{2m}(\hat{x}_j) \int_{Q_1^+} (D_{y_s}^m g)^2 dx dy_s \right\}.$$

Аналогичные неравенства установим для Q_1^-, Q_2^+, Q_2^- . Сложив четыре неравенства и воспользовавшись (3.4), будем иметь

$$\int_Q g^2(x, \mathbf{y}) dx dy_s \leq (2\omega_1)^{2m} E_m \Delta_j^{2k} \int_Q \{(D_x^k g)^2 + (D_{y_s}^m g)^2\} dx dy_s.$$

Проинтегрируем последнее по $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{s-1}, y_{s+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}[f, s]} g^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \leq E'_m \Delta_j^{2k} \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}[f, s]} \{(D_x^k g)^2 + (D_{y_s}^m g)^2\} dx d\mathbf{y}.$$

В итоге получим неравенство

$$1 \leq E'_m \Delta_j^{2k} \lambda(x_j, x_{j+1}; \Omega[f, s]). \quad (3.5)$$

Аналогично, при $\Delta_j > 1$ установим неравенство

$$1 \leq E'_l \Delta_j^{2q} \lambda(x_j, x_{j+1}; \Omega[f, s]). \quad (3.6)$$

Таким образом, имеем оценку $1 \leq \max(E'_m, E'_l) \Delta_j^{2[k, q]} \lambda(x_j, x_{j+1}; \Omega[f, s])$. Заметим теперь, что если $Q \subset \Omega$, то $\lambda(a, b; \Omega) \leq \lambda(a, b; Q)$. Это следует из того, что для Q сужается множество, по которому берется инфимум в (0.11). Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Очевидно, $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательность удовлетворяет условию (3.2) с $\omega_1 = 1$. Ввиду вложения $\Omega(f) \subset \Omega[f, s]$, согласно утверждению 3.1, $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательность функции $f(x)$ является λ -последовательностью трубчатой области $\Omega(f)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательности области Q_b , определенной во введении, из (0.16) при $f_b(x) = \max(1, x^b)$, $b \in (0, q/l)$, получаем равенство $(x_{j+1} - x_j)^q = \min_{[x_j, x_{j+1}]} f_b^l(x) = x_j^{bl}$, $j = \overline{0, \infty}$. Поэтому если рассматривать область $\tilde{Q}_a$ как трубчатую с некоторой функцией $\tilde{f}_a(x)$, то

$$\inf_{[x_j, x_{j+1}]} \tilde{f}_a^l(x) \leq x_{j+1}^{bl} = \left(\frac{x_{j+1}}{x_j} \right)^{bl} x_j^{bl} \leq 2^{bl} (x_{j+1} - x_j)^q.$$

Следовательно, $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательность области Q_b удовлетворяет условию (3.2) и согласно утверждению 3.1 является λ -последовательностью для областей $\tilde{Q}_a, Q_b$.

Для функции $\rho^{[a,b]}$ приведем некоторые неравенства, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\text{если } \rho \leq \varrho, \text{ то } \rho^{[a,b]} \leq \varrho^{[a,b]}, \quad (3.7)$$

$$\text{если } c \geq 1, \text{ то } (c\rho)^{[a,b]} \leq \rho^{[a,b]} c^{\max(a,b)}. \quad (3.8)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть положительная функция $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, и возрастающая последовательность положительных чисел $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ удовлетворяют условиям (0.17) и

$$\bar{\Delta}_\nu^{[\frac{k}{m}, \frac{q}{l}]} \leq \inf_{[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]} f(x) \leq \omega_1 \bar{\Delta}_\nu^{[\frac{k}{m}, \frac{q}{l}]}, \quad \omega_1 \geq 1, \quad \nu = \overline{0, \infty}. \quad (3.9)$$

Тогда $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ является оптимальной $\bar{\lambda}$ -последовательностью для $\Omega(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\hat{x}_\nu$ любую точку полуинтервала $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$ такую, что $2 \inf_{[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]} f(x) > f(\hat{x}_\nu)$. Из условия (3.9) следуют неравенства

$$\frac{f(\hat{x}_\nu)}{2\omega_1} \leq \bar{\Delta}_\nu^{[\frac{k}{m}, \frac{q}{l}]} \leq f(\hat{x}_\nu), \quad \nu = \overline{0, \infty}.$$

Используя (3.7), из последних неравенств легко выводим

$$\left(\frac{f}{2\omega_1} \right)^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(\hat{x}_\nu) \leq \bar{\Delta}_\nu \leq f^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(\hat{x}_\nu). \quad (3.10)$$

Пользуясь (3.10), из неравенства (0.17) при $x = \hat{x}_\nu$ находим, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [\hat{x}_\nu - \bar{\Delta}_\nu, \hat{x}_\nu + \bar{\Delta}_\nu]\} \leq \omega f(\hat{x}_\nu).$$

Поскольку справедливы включения $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}] \subset [\hat{x}_\nu - \bar{\Delta}_\nu, \hat{x}_\nu + \bar{\Delta}_\nu]$, то выполнено

$$\frac{f(\hat{x}_\nu)}{2} \leq f(x) \leq \omega f(\hat{x}_\nu), \quad x \in [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}). \quad (3.11)$$

Для любого отрезка $[a, b] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$ докажем следующие неравенства:

$$\frac{\delta_1}{f^{2[m,l]}(\hat{x}_\nu)} \leq \lambda(a, b; \Omega(f)) \leq \frac{\delta_2}{f^{2[m,l]}(\hat{x}_\nu)}. \quad (3.12)$$

Для доказательства левого неравенства возьмем $h = \omega f(\hat{x}_\nu)$. Из (3.11) следуют неравенства $\lambda(a, b; \Omega(f)) \geq \lambda(a, b; \Omega[f, s]) \geq \lambda(a, b; \Omega[h, s])$. Совершая замену переменных $\mathbf{y} = h\mathbf{z}$ и применяя (3.8), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \lambda(a, b; \Omega[h, s]) &= \inf_{g(x, \mathbf{z}) \in C_0^\infty(\Omega[1, s])} \frac{\int_{\Omega_a^b[1, s]} \{h^{-2m}(D_{z_s}^m g)^2 + h^{-2l}(D_{z_s}^l g)^2\} dx dz}{\int_{\Omega_a^b[1, s]} g^2 dx dz} \\ &\geq \frac{\delta_3}{h^{2[m, l]}} \geq \frac{\delta_1}{f^{2[m, l]}(\hat{x}_\nu)}. \end{aligned}$$

Чтобы доказать правое неравенство, положим $h = f(\hat{x}_\nu)/2$. Тогда ввиду (3.1) справедливы неравенства

$$\lambda(a, b; \Omega(f)) \leq \lambda(a, b; \Omega(h)).$$

Совершая замену переменных $\mathbf{y} = h\mathbf{z}$ и применяя (3.8), нетрудно показать, что $\lambda(a, b; \Omega(h)) =$

$$\begin{aligned} &= \inf_{g(x, \mathbf{z}) \in C_0^\infty(\Omega(1))} \frac{\int_{\Omega_a^b(1)} \{ \sum_{s=1}^n h^{-2m}(D_{z_s}^m g)^2 + \sum_{s=1}^n h^{-2l}(D_{z_s}^l g)^2 \} dx dz}{\int_{\Omega_a^b(1)} g^2 dx dz} \\ &\leq \frac{\delta_4}{h^{2[m, l]}} \leq \frac{\delta_2}{f^{2[m, l]}(\hat{x}_\nu)}. \end{aligned}$$

Тем самым (3.12) установлено.

Пусть $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ – произвольная λ -последовательность. Для вложенных промежутков $[x_j, x_{j+1}] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$ из определения λ -последовательности (0.12) и неравенств (3.12), (3.10) вытекают неравенства

$$\Delta_j^{2[k, q]} \geq \frac{1}{\theta \lambda(x_j, x_{j+1})} \geq \frac{f^{2[m, l]}(\hat{x}_\nu)}{\theta \delta_2} \geq \frac{\bar{\Delta}_\nu^{2[k, q]}}{\theta \delta_2},$$

из которых следуют неравенства $\bar{\Delta}_\nu \leq D \Delta_j$. Тогда на промежутке $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$ расположится не более $D - 1$ целых отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ и, возможно, два нецелых отрезка на концах. Всего отрезок $[\bar{x}_0, \bar{x}_N]$ будет содержать не более DN отрезков $[x_j, x_{j+1}]$, поэтому из $x_L \leq \bar{x}_N$ следует $L \leq DN$. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Если для положительной функции $f(x), x \in (d, \infty)$, выполнено условие (0.17), то ее $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательность $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ является оптимальной $\bar{\lambda}$ -последовательностью для области $\Omega(f)$ и справедливы неравенства (0.23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательности функции f справедливы неравенства (3.9). Левые неравенства следуют из определения $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательности, докажем правые. Обозначим через $\tilde{x}_\nu$ любую точку отрезка $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ такую, что $2 \inf_{[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]} f(x) > f(\tilde{x}_\nu)$. Из определения $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательности функции f следует неравенство

$$\left(\frac{f}{2}\right)^{[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}]}(\tilde{x}_\nu) \leq \bar{\Delta}_\nu. \quad (3.13)$$

Пользуясь (0.17), находим вблизи $\tilde{x}_\nu$ точку $\bar{x}_\nu^* \in [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$ такую, что

$$f(\bar{x}_\nu^*) \leq \omega f(\tilde{x}_\nu). \quad (3.14)$$

Используя (3.14), (3.13), выводим неравенства

$$\inf_{[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})} f(x) \leq f(\bar{x}_\nu^*) \leq 2\omega \bar{\Delta}_\nu^{\left[\frac{k}{m}, \frac{q}{l}\right]}.$$

Покажем, что (0.23) следует из (0.17). Очевидно, что

$$\bar{\Delta}_\nu \leq f^{\left[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}\right]}(\bar{x}_\nu^*). \quad (3.15)$$

Используя неравенства (3.15), (3.14), а также (3.7), (3.8), получим

$$\bar{\Delta}_\nu \leq \omega^{\max(\frac{m}{k}, \frac{l}{q})} f^{\left[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}\right]}(\tilde{x}_\nu). \quad (3.16)$$

Из неравенства (0.17) находим, что ввиду (3.15)

$$\sup\{f(z) \mid z \in [\bar{x}_\nu^* - \bar{\Delta}_\nu, \bar{x}_\nu^* + \bar{\Delta}_\nu]\} \leq \omega f(\bar{x}_\nu^*).$$

Поскольку справедливы включения $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}] \subset [\bar{x}_\nu^* - \bar{\Delta}_\nu, \bar{x}_\nu^* + \bar{\Delta}_\nu]$, то согласно (3.14) имеем

$$\frac{f(\tilde{x}_\nu)}{2} \leq f(x) \leq \omega f(\bar{x}_\nu^*) \leq \omega^2 f(\tilde{x}_\nu), \quad x \in [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]. \quad (3.17)$$

Очевидно, справедливы неравенства $f(\tilde{x}_{\nu+1}) \leq 2f(\bar{x}_{\nu+1})$, поэтому из (3.17) имеем $f(\tilde{x}_{\nu+1}) \leq 2\omega^2 f(\tilde{x}_\nu)$, $\nu = \overline{0, \infty}$. Легко видеть, что верны и симметричные неравенства $f(\tilde{x}_\nu) \leq 2\omega^2 f(\tilde{x}_{\nu+1})$, $\nu = \overline{0, \infty}$. Используя неравенства (3.13), (3.16), (3.7), (3.8), оцениваем отношения

$$\bar{\omega}^{-1} = (4\omega^3)^{-\max(\frac{m}{k}, \frac{l}{q})} \leq \frac{\bar{\Delta}_{\nu+1}}{\bar{\Delta}_\nu} \leq (4\omega^3)^{\max(\frac{m}{k}, \frac{l}{q})} = \bar{\omega}, \quad \nu = \overline{0, \infty}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Если для положительной функции $f(x)$, $x \in (d, \infty)$, выполнено условие (0.17), то для ее $\Pi(m, l, k, q)$ -последовательности $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ справедливы соотношения (0.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая часть неравенства (0.18) является следствием оценки (2.30). Докажем правую часть неравенства (0.18). Применяя (3.17), (3.13), выводим следующую цепочку неравенств:

$$\int_{\bar{x}_\nu}^{\bar{x}_{\nu+1}} \frac{dx}{f^{\left[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}\right]}(x)} \geq \frac{\bar{\Delta}_\nu}{\omega^{2\max(\frac{m}{k}, \frac{l}{q})} f^{\left[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}\right]}(\tilde{x}_\nu)} \geq \frac{1}{(2\omega^2)^{\max(\frac{m}{k}, \frac{l}{q})}}, \quad \nu = \overline{0, \infty}.$$

Просуммировав последние неравенства, устанавливаем соотношение

$$\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_N} \frac{dx}{f^{\left[\frac{m}{k}, \frac{l}{q}\right]}(x)} \geq \frac{N}{(2\omega^2)^{\max(\frac{m}{k}, \frac{l}{q})}}.$$

Правая часть неравенства (0.18) является следствием последней оценки при $x_0 \geq 1$.

§ 4. Доказательство теоремы 0.3

Доказательство теоремы 0.3 основано на неравенстве Гарнака (см., например, [18]). Сформулируем неравенство Гарнака в удобном для нас частном виде: для неотрицательной в шаре $B(2\rho, \bar{\mathbf{w}})$, $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{n+1}$, гармонической функции $u(\bar{\mathbf{y}})$ справедливо неравенство

$$\max_{B(\rho, \bar{\mathbf{w}})} u(\bar{\mathbf{y}}) \leq \bar{H} \min_{B(\rho, \bar{\mathbf{w}})} u(\bar{\mathbf{y}}), \quad (4.1)$$

в котором постоянная $\bar{H} \geq 1$ зависит лишь от n .

ЛЕММА 4.1. Пусть

$$Q = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 < x < 1, |\mathbf{y}| < 1\},$$

$$\hat{Q} = Q \cup B(2\rho, (0, \mathbf{0})) \cup B(2\rho, (1, \mathbf{0})), \quad \rho = \frac{1}{2\omega}.$$

Тогда существует $\hat{H} \geq 1$ такое, что неотрицательная в $\hat{Q}$ гармоническая функция $u(x, \mathbf{y})$ удовлетворяет неравенству

$$u(1, \mathbf{0}) \leq \hat{H} u(0, \mathbf{0}). \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\bar{\mathbf{w}}_0 = \bar{\mathbf{v}}_0 = (0, \mathbf{0})$, $\bar{\mathbf{v}}_1 = (\rho, \mathbf{0})$. Поскольку шар $B(2\rho, \bar{\mathbf{v}}_0) \subset \hat{Q}$, то согласно неравенству (4.1) имеем

$$u(\bar{\mathbf{v}}_1) \leq \max_{B(\rho, \bar{\mathbf{w}}_0)} u(\bar{\mathbf{y}}) \leq \bar{H} \min_{B(\rho, \bar{\mathbf{w}}_0)} u(\bar{\mathbf{y}}) \leq \bar{H} u(\bar{\mathbf{v}}_0). \quad (4.3)$$

Далее построим последовательность касающихся шаров $B(\rho, \bar{\mathbf{w}}_i)$, первым и последним из которых являются соответственно шары $B(\rho, (0, \mathbf{0}))$ и $B(\rho, (1, \mathbf{0}))$. Затем запишем неравенства, аналогичные (4.3), взяв в качестве $\bar{\mathbf{v}}_i$ точки касания шаров. В случае, когда $\frac{1-2\rho}{2\rho}$ не является целым числом, одна пара шаров будет пересекаться и в качестве точки $\bar{\mathbf{v}}_i$ возьмем их общую точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3. Обобщенным решением задачи (0.21), (0.22) назовем функцию $u(\bar{\mathbf{y}}) \in \mathring{H}_{1c}(\Omega(f))$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega(f)} \nabla u \nabla v \, d\bar{\mathbf{y}} = 0 \quad (4.4)$$

для любой функции $v(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^\infty(\Omega(f))$.

При каждом натуральном K в области $\Omega^{x_K}(f)$ рассмотрим задачу (0.21), (0.22) с граничным условием

$$u|_{x=x_K} = A_K \zeta(|\mathbf{y}|). \quad (4.5)$$

Здесь $\zeta(t) \in C_0^\infty(-f(x_K), f(x_K))$ – четная неотрицательная функция типа шапочки. Постоянная A_K подбирается так, чтобы

$$u(x_0, \mathbf{0}) = 1. \quad (4.6)$$

Обобщенным решением задачи (0.21), (0.22), (4.5) в $\Omega^{x_K}(f)$ назовем функцию $u_K(\bar{\mathbf{y}}) \in H(\Omega^{x_K}(f))$, совпадающую в $\Omega^{x_K}(f)$ с некоторой функцией из

пространства $\mathring{H}(\Omega(f))$, удовлетворяющую интегральному тождеству (4.4) для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega^{x_K}(f))$ и граничному условию (4.5). Для любого натурального $K \geq 1$ обобщенное решение задачи (0.21), (0.22), (4.5) существует и единственно. Доказательство проводится обычными методами (см., например, [17]).

Далее покажем, что существует функция $u \in \mathring{H}_{lc}(\Omega(f))$ такая, что $u_K \rightharpoonup u$ в $H(\Omega^{x_N}(f))$ при $K \rightarrow \infty$ и любом фиксированном N , $N \geq 1$. Для каждого $K \geq 1$ найдем числа μ_K^1 такие, что

$$\|\mu_K^1 u_K\|_{H(\Omega^{x_1}(f))} = 1.$$

Ввиду этого равенства существует подпоследовательность u_{K_i} такая, что $\mu_{K_i}^1 u_{K_i} \rightharpoonup v^1$ в $H(\Omega^{x_1}(f))$. Тогда $\mu_{K_i}^1 u_{K_i} \rightharpoonup v^1$ в $L_2(\Omega^{x_1}(f))$ и согласно теореме о среднем устанавливаем поточечную сходимость этой последовательности, в частности, в точке $(x_0, \mathbf{0})$: $\mu_{K_i}^1 u_{K_i}(x_0, \mathbf{0}) \rightarrow v^1(x_0, \mathbf{0}) = \mu^1$. Ввиду (4.6) имеем $\mu_{K_i}^1 \rightarrow \mu^1$ при $i \rightarrow \infty$, следовательно, $u_{K_i} \rightharpoonup v^1/\mu^1$ в $H(\Omega^{x_1}(f))$. При этом предельная функция v^1 совпадает в $\Omega^{x_1}(f)$ с некоторой функцией из пространства $\mathring{H}(\Omega(f))$. Подпоследовательность u_{K_i} переобозначим через u_K^1 .

Затем числа μ_K^2 выберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\|\mu_K^2 u_K^1\|_{H(\Omega^{x_2}(f))} = 1.$$

Из последовательности u_K^1 выберем подпоследовательность $u_{K_i}^1$ (переобозначим ее через u_K^2) такую, что $\mu_K^2 u_K^2 \rightharpoonup v^2$ в $H(\Omega^{x_2}(f))$. Повторяя предыдущие рассуждения, установим, что $u_K^2 \rightharpoonup v^2/\mu^2$ в $H(\Omega^{x_2}(f))$. Функция v^2 совпадает в $\Omega^{x_2}(f)$ с некоторой функцией из пространства $\mathring{H}(\Omega(f))$. Ввиду единственности предела имеем равенство $v^1/\mu^1 = v^2/\mu^2$ в $\Omega^{x_1}(f)$. Продолжая это построение, выберем диагональную подпоследовательность u_K^K такую, что $u_K^K \rightharpoonup u$ при $K \rightarrow \infty$ в $H(\Omega^{x_N}(f))$ при каждом фиксированном $N \geq 1$. Из слабой сходимости $u_K^K \rightharpoonup u$ при $K \rightarrow \infty$ в $L_2(\Omega^{x_N}(f))$, при каждом фиксированном $N \geq 1$ следует поточечная сходимость $u_K^K(\bar{\mathbf{y}}) \rightarrow u(\bar{\mathbf{y}})$ при $K \rightarrow \infty$ для $\bar{\mathbf{y}} \in \Omega(f)$. Предельная функция $u(\bar{\mathbf{y}})$ принадлежит $\mathring{H}_{lc}(\Omega(f))$.

Покажем, что $u(\bar{\mathbf{y}})$ является обобщенным решением задачи (0.21), (0.22). По определению обобщенного решения задачи (0.21), (0.22), (4.5) при каждом $N \geq 1$ для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega^{x_N}(f))$ справедливо интегральное тождество (4.4):

$$\int_{\Omega(f)} \nabla u_K^K \nabla v d\bar{\mathbf{y}} = 0, \quad K \geq N.$$

Перейдя в нем к пределу при $K \rightarrow \infty$, получим (4.4) для предельной функции $u(\bar{\mathbf{y}}) \in \mathring{H}_{lc}(\Omega(f))$.

Из строгого принципа максимума следует, что $u_K^K(\bar{\mathbf{y}}) > 0$ в $\Omega^{x_K}(f)$, поэтому $u(\bar{\mathbf{y}}) \geq 0$ в $\Omega(f)$. Для трубчатых областей $\Omega(f)$ вида (0.15) докажем, что функция $u_K^K(\bar{\mathbf{y}})$ в каждом сечении $\gamma_r(f) = \{(x, \mathbf{y}) \in \Omega(f), x = r\}$ достигает своего максимума в центре сечения:

$$\max_{\mathbf{y} \in \gamma_x(f)} u_K^K(x, \mathbf{y}) = u_K^K(x, \mathbf{0}), \quad d < x < x_K. \quad (4.7)$$

Отметим, что из единственности решения задачи Дирихле следует осесимметричность функции $u_K(x, \mathbf{y})$. Действительно, в противном случае, повернув график функции u_K на ненулевой угол вокруг оси x , мы получили бы новое решение задачи (0.21), (0.22), (4.5). Таким образом, в цилиндрических координатах функция $u_K(x, r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u_{Kxx} + u_{Krr} + \frac{n-1}{r} u_{Kr} = 0$$

в точках криволинейной трапеции $\Gamma_d^{x_K}(f)$. Продифференцировав уравнение по r , получаем

$$u_{Krxx} + u_{Krrr} + \frac{n-1}{r} u_{Krr} = \frac{n-1}{r^2} u_{Kr}. \quad (4.8)$$

Ввиду четности по аргументу r выполнено однородное условие на оси симметрии: $u_{Kr}(x, r)|_{r=0} = 0$. Ввиду (0.22) и по выбору функции $\zeta(t)$ имеем неравенство $u_{Kr}(x_K, r) \leq 0$, $u_{Kr}(d, r) = 0$. Предположим сначала, что $f(x) \in C^2(d, \infty)$, тогда на $\partial\Omega(f)$ определены значения производной u_{Kr} . Поскольку функция u_K положительна внутри области, то $u_{Kr}(x, r)|_{r=f(x)} \leq 0$. Если u_{Kr} достигает максимума внутри $\Gamma_d^{x_K}(f)$, то этот максимум положителен и из уравнения (4.8) в точке максимума получаем $u_{Krxx} + u_{Krrr} > 0$, что невозможно. Следовательно, функция u_{Kr} неположительна всюду в $\Gamma_d^{x_K}(f)$. Тогда функция u_K в каждом сечении $\gamma_x(f)$, $d < x < x_K$, достигает своего максимума в центре сечения. В случае области $\Omega^{x_K}(f)$ с негладкой функцией $f(x)$ следует приблизить ее изнутри последовательностью гладких областей, сходящейся к $\Omega^{x_K}(f)$, и перейти к поточечному пределу решений в этих областях, сохраняющему монотонность по r предельной функции.

Докажем неравенство (0.24). Согласно определению П-последовательности функции $\bar{f}$ имеем неравенства

$$x_{j+1} - x_j \leq \inf_{[x_j, x_{j+1})} \bar{f}(x), \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (4.9)$$

Ввиду неравенств (0.23), (4.9) имеем включения

$$(x_j, \mathbf{0}) + (x_{j+1} - x_j)\hat{Q} \subset \Omega(\bar{f}), \quad j = \overline{0, \infty}, \quad (4.10)$$

где левую часть следует понимать как гомотетию и параллельный перенос, примененные к $\hat{Q}$. По лемме 4.1 для пар $(x_j, \mathbf{0})$, $(x_{j+1}, \mathbf{0})$, $j = \overline{0, \infty}$, справедливы неравенства

$$u_K(x_{j+1}, \mathbf{0}) \leq \hat{H} u_K(x_j, \mathbf{0}). \quad (4.11)$$

При $j = 0$ включение (4.10) может не выполняться, но, тем не менее, точка $(x_0, \mathbf{0})$ является внутренней для области $\Omega(\bar{f})$, поэтому неравенство (4.11) будет также справедливым и при $j = 0$, возможно, с другой постоянной $\hat{H}$. Применяя неравенство (4.11) N раз, выводим соотношения

$$u_K(x_N, \mathbf{0}) \leq \hat{H}^N u_K(x_0, \mathbf{0}), \quad N \geq 1. \quad (4.12)$$

Согласно строгому принципу максимума и условиям (0.22), (4.5) и (4.7) при любом $N \geq 1$ для любой точки $\bar{\mathbf{y}} \in \Omega^{x_N}(f)$, при всех $K \geq N$ выводим неравенства

$$u_K(\bar{\mathbf{y}}) \leq \max_{\partial\Omega^{x_N}(f)} u_K(\bar{\mathbf{y}}) = \max_{\gamma_{x_N}(f)} u_K(x, \mathbf{y}) = u_K(x_N, \mathbf{0}).$$

Далее, применяя (4.12), (4.6), выводим неравенства

$$u_K(\bar{\mathbf{y}}) \leq \hat{H}^N, \quad \bar{\mathbf{y}} \in \Omega^{x_N}(f), \quad K \geq N,$$

из которых предельным переходом при $K \rightarrow \infty$ для фиксированного N получаем (0.24). Теорема 0.3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть трубчатая область $\Omega(f)$ и Π -последовательность $\{x_N\}_{N=0}^\infty$ функции $f(x)$ удовлетворяют условию (0.23). Тогда для решения $u(x, \mathbf{y})$ задачи (0.21), (0.22) в $\Omega(f)$, построенного в теореме 0.3 ($f = \bar{f}$), справедлива оценка (0.25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $V_{h,R} = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 < x < h, |\mathbf{y}| > R\}$, $n \geq 2$, слой с отверстием. Случай $n = 1$ рассматривается аналогично. В области $V_{h,R}$ рассмотрим гармоническую функцию $v_{h,R}(x, \mathbf{y})$, удовлетворяющую граничным условиям $v|_{0 < x < h, |\mathbf{y}|=R} = 1$, $v|_{x=0, h, |\mathbf{y}| > R} = 0$. Согласно принципу максимума при $R \geq h$ для $(x, \mathbf{y}) \in V_{h,R}$ справедливо неравенство $v_{h,R}(x, \mathbf{y}) \leq v_{R,R}(x, \mathbf{y})$, поэтому имеет место оценка

$$\int_{V_{h,R}} v_{h,R}^2 dx d\mathbf{y} \leq \int_{V_{R,R}} v_{R,R}^2 dx d\mathbf{y} = R^{n+1} \int_{V_{1,1}} v_{1,1}^2 dx d\mathbf{y} = C_1 R^{n+1}. \quad (4.13)$$

Обозначим через $\hat{x}_j$ точку отрезка $[x_j, x_{j+1}]$ такую, что $2 \inf_{[x_j, x_{j+1}]} f(x) > f(\hat{x}_j)$. Считая $u(x, \mathbf{y})$ продолженной нулем за пределы $\Omega(f)$, оценим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}(f)} u^2 dx d\mathbf{y} &\leq \int_{x_N}^{x_{N+1}} \int_{|\mathbf{y}| \leq R} u^2 dx d\mathbf{y} + \int_{\hat{x}_{N-1}}^{\hat{x}_N} \int_{|\mathbf{y}| > R} u^2 dx d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\hat{x}_N}^{\hat{x}_{N+1}} \int_{|\mathbf{y}| > R} u^2 dx d\mathbf{y} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Положим $R = (1 + \bar{\omega}) \max\{f(\hat{x}_{N-1}), f(\hat{x}_N), f(\hat{x}_{N+1})\}$ и оценим каждый из интегралов I_1, I_2, I_3 правой части последнего неравенства. Для первого интеграла получим

$$I_1 = \int_{x_N}^{x_{N+1}} \int_{|\mathbf{y}| \leq R} u^2 dx d\mathbf{y} \leq \max_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}(f)} u^2 C_2 R^n \Delta_N. \quad (4.15)$$

Ввиду (0.23), выбора R и равенств (0.16) при $m = k = l = q = 1$ справедливы неравенства

$$h = \hat{x}_N - \hat{x}_{N-1} \leq \Delta_{N-1} + \Delta_N \leq (1 + \bar{\omega}) \min(\Delta_{N-1}, \Delta_N) \leq (1 + \bar{\omega}) f(\hat{x}_{N-1}) \leq R.$$

Применяя принцип максимума в области интегрирования I_2 , для гармонической функции $v_{h,R}(x - \hat{x}_{N-1}, \mathbf{y})$, $h = \hat{x}_N - \hat{x}_{N-1}$, установим неравенство

$$u^2(x, \mathbf{y}) \leq v_{h,R}^2(x - \hat{x}_{N-1}, \mathbf{y}) \max_{\Omega_{\hat{x}_{N-1}}^{\hat{x}_N}(f)} u^2(x, \mathbf{y}).$$

Следовательно, согласно (4.13) справедливо неравенство

$$I_2 = \int_{\hat{x}_{N-1}}^{\hat{x}_N} \int_{|\mathbf{y}| > R} u^2 dx d\mathbf{y} \leq \max_{\Omega_{\hat{x}_{N-1}}^{\hat{x}_N}(f)} u^2(x, \mathbf{y}) C_1 R^{n+1}. \quad (4.16)$$

Аналогично оценивается интеграл

$$I_3 = \int_{\hat{x}_N}^{\hat{x}_{N+1}} \int_{|\mathbf{y}| > R} u^2 dx d\mathbf{y} \leq \max_{\Omega_{\hat{x}_{N+1}}^{x_{N+1}}(f)} u^2(x, \mathbf{y}) C_1 R^{n+1}. \quad (4.17)$$

Из оценки (4.14), применяя неравенства (4.15)–(4.17), ввиду (0.24) выводим

$$\int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}(f)} u^2 dx d\mathbf{y} \leq C_3 \exp\{2\kappa_* N\} (\Delta_N + R) R^n.$$

Используя неравенство (3.13) для $m = l = k = q = 1$ и условие (0.23), устанавливаем для $N \geq 1$ неравенства $R \leq C_4 \Delta_N$, $\Delta_N \leq \Delta_0 \bar{\omega}^N$. Тогда имеем оценки

$$\int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}(f)} u^2 dx d\mathbf{y} \leq C_5 \exp\{[2\kappa_* + (n-1) \ln \bar{\omega}] N\} \Delta_N^2, \quad N \geq 1,$$

из которых следует неравенство (0.25).

§ 5. Теорема существования

Пусть $\{x_j\}_{j=0}^\infty - \lambda$ -последовательность и $\chi_\Psi^N(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $N \geq 1$, – гладкие функции с носителем на отрезке $[x_{N-1}, x_{N+1}]$. Пусть $\eta_N(x) = 1 - h\left(\frac{x - x_N}{\Delta_N}\right)$, где $h(x)$ – функция из § 2. Положим $\chi_\Psi^N(x) = \eta_N(x) - \eta_{N-1}(x)$, $\chi_\Psi^0(x) = \eta_0(x)$. Очевидно, справедливы равенства

$$\chi_\Psi^N(x) + \chi_\Psi^{N+1}(x) = 1, \quad x \in [x_N, x_{N+1}], \quad N \geq 0.$$

Рассмотрим кусочно постоянные на $\mathbb{R}$ функции $\chi_\Phi^N(x)$, $N \geq 1$, равные единице при $x \in [x_{N-1}, x_N]$ и нулю при $x \notin [x_{N-1}, x_N]$. Положим $\chi_\Phi^0(x) = 1$ при $x \leq x_0$ и $\chi_\Phi^0(x) = 0$ при $x \geq x_0$.

Докажем существование решения задачи (0.1), (0.2) с функциями $\Phi^N(\bar{\mathbf{y}}) = \Phi(\bar{\mathbf{y}}) \chi_\Phi^N(x)$, $\Psi^N(\bar{\mathbf{y}}) = \Psi(\bar{\mathbf{y}}) \chi_\Psi^N(x)$, $\Phi_{\bar{\alpha}}^N(\bar{\mathbf{y}}) = \Phi_{\bar{\alpha}}(\bar{\mathbf{y}}) \chi_\Phi^N(x)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть область Ω подчиняется требованиям (*), (0.13) и $\{x_j\}_{j=0}^\infty - \lambda$ -последовательность. При каждом целом $N \geq 0$ существует единственное обобщенное решение $u(\bar{\mathbf{y}})$ задачи (0.1), (0.2) с функциями $\Phi = \Phi^N$, $\Phi_{\bar{\alpha}} = \Phi_{\bar{\alpha}}^N$, $\bar{\alpha} \in S$, $\Psi = \Psi^N$, имеющее вид $u(\bar{\mathbf{y}}) = w(\bar{\mathbf{y}}) + \Psi^N(\bar{\mathbf{y}})$, $w(\bar{\mathbf{y}}) \in \overset{\circ}{W}_{\mathcal{F}}(\Omega)$. Оно подчиняется оценке

$$\|u\|_{\mathcal{F}} \leq \bar{C} \left(\|\Psi^N\|_{\mathcal{F}} + (\lambda_{N-1}^N)^{-1/2} \|\Phi^N\| + \sum_{\bar{\alpha} \in S} \|\Phi_{\bar{\alpha}}^N\| \right). \quad (5.1)$$

При $N = 0$ полагаем $\Delta_{-1} = 1$, $\lambda_{-1}^0 = \lambda^0$, $\Omega_{x_{-1}}^{x_0} = \Omega^{x_0}$. Здесь $\{x_j\}_{j=0}^\infty - \lambda$ -последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем тождество (1.3)

$$(w, v)_{\mathcal{F}} = (\Phi^N, v) + \sum_{\bar{\alpha} \in S} (\Phi_{\bar{\alpha}}^N, D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} v) - (\Psi^N, v)_{\mathcal{F}}, \quad (5.2)$$

справедливое для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}_{\mathcal{F}}(\Omega)$. Рассмотрим линейный функционал, стоящий в правой части равенства (5.2):

$$l(v) = (\Phi^N, v) + \sum_{\bar{\alpha} \in S} (\Phi_{\bar{\alpha}}^N, D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} v) - (\Psi^N, v)_{\mathcal{F}}, \quad v \in \overset{\circ}{W}_{\mathcal{F}}(\Omega).$$

Докажем его ограниченность. Сначала для $N \geq 1$, пользуясь неравенствами (1.6), (1.10) при $i = p$, $\Delta = \Delta_{N-1}$ и определением λ -последовательности (0.12), (0.11), затем для $N = 0$, пользуясь неравенствами (1.6), (1.10) при $i = p$, $\Delta = 1$ и условием (0.13), устанавливаем соотношение

$$\|D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} v\|_{\Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}^2 \leq \tilde{C} \left(\|v\|_{\mathcal{D}, \Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}^2 + \frac{\|v\|_{\Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}^2}{\Delta_{N-1}^{2[k, q]}} \right) \leq \tilde{C} (1 + \max(\theta, \lambda_0^{-1})) \|v\|_{\mathcal{D}, \Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}^2. \quad (5.3)$$

Далее, применяя (0.11), (5.3), (0.4), выводим соотношение

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \|\Phi^N\| \|v\|_{\Omega_{x_{N-1}}^{x_N}} + \|\Psi^N\|_{\mathcal{F}} \|v\|_{\mathcal{F}, \Omega_{x_{N-1}}^{x_N+1}} + \sum_{\bar{\alpha} \in S} \|\Phi_{\bar{\alpha}}^N\| \|D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} v\|_{\Omega_{x_{N-1}}^{x_N}} \\ &\leq (\lambda_{N-1}^N \hat{a})^{-1/2} \|\Phi^N\| \|v\|_{\mathcal{F}, \Omega_{x_{N-1}}^{x_N}} + \|\Psi^N\|_{\mathcal{F}} \|v\|_{\mathcal{F}, \Omega_{x_{N-1}}^{x_N+1}} \\ &\quad + C_1 \sum_{\bar{\alpha} \in S} \|\Phi_{\bar{\alpha}}^N\| \|v\|_{\mathcal{F}, \Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}, \end{aligned}$$

доказывающее ограниченность $l(v)$. Согласно теореме Рисса существует функция $w(\bar{\mathbf{y}}) \in \overset{\circ}{W}_{\mathcal{F}}(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству (5.2) и неравенству

$$\|w\|_{\mathcal{F}} \leq (\hat{a} \lambda_{N-1}^N)^{-1/2} \|\Phi^N\| + \|\Psi^N\|_{\mathcal{F}} + C_1 \sum_{\bar{\alpha} \in S} \|\Phi_{\bar{\alpha}}^N\|.$$

Следовательно, решение $u = w + \Psi^N$ задачи (0.1), (0.2) подчиняется неравенству (5.1).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть область Ω подчиняется требованиям (*), (0.13) и $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ – λ -последовательность. Пусть существуют $\hat{\kappa} \in (0, \kappa)$ и положительная постоянная $\hat{C}$ такие, что при каждом целом $N \geq 0$ функции $\Psi(\bar{\mathbf{y}}) \in W_{\mathcal{F}, \text{lc}}(\Omega)$, $\Phi(\bar{\mathbf{y}}), \Phi_{\bar{\alpha}}(\bar{\mathbf{y}}) \in L_{2, \text{lc}}(\Omega)$, $\bar{\alpha} \in S$, удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{\Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}^2 &\leq \hat{C} \lambda_{N-1}^N \exp\{\hat{\kappa} N\}, \quad \|\Phi_{\bar{\alpha}}\|_{\Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}^2 \leq \hat{C} \exp\{\hat{\kappa} N\}, \quad \bar{\alpha} \in S, \\ \|\Psi\|_{\mathcal{F}, \Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}^2 + \lambda_{N-1}^N \|\Psi\|_{\Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}^2 &\leq \hat{C} \exp\{\hat{\kappa} N\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Тогда существует решение задачи (0.1), (0.2), подчиняющееся требованию (0.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u^N(\bar{\mathbf{y}})$ – решения задачи (0.1), (0.2) с функциями $\Phi = \Phi^N$, $\Phi_{\bar{\alpha}} = \Phi_{\bar{\alpha}}^N$, $\bar{\alpha} \in S$, $\Psi = \Psi^N$, $N = \overline{0, \infty}$. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{N=0}^{\infty} u^N(\bar{\mathbf{y}}). \quad (5.5)$$

Покажем, что он сходится в пространстве $W_{\mathcal{F}}(\Omega^r)$ для любого $r > 0$. Согласно (2.11) для $\nu = \overline{0, N-4}$, $N \geq 4$, имеем неравенства

$$\|u^N\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_{\nu+1}}}^2 \leq M \exp\{-\kappa(N - \nu - 3)\} \|u^N\|_{\mathcal{D}, \Omega^{x_{N-2}}}^2,$$

из которых, применяя (0.4), (5.1), получим

$$\begin{aligned} \|u^N\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_{\nu+1}}} &\leq \sqrt{\frac{M}{\hat{a}}} \exp\left\{\frac{3\kappa}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{\kappa}{2}(N - \nu)\right\} \\ &\times \bar{C} \left(\|\Psi^N\|_{\mathcal{F}} + \sum_{\bar{\alpha} \in S} \|\Phi_{\bar{\alpha}}^N\| + (\lambda_{N-1}^N)^{-1/2} \|\Phi^N\| \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Далее оценим полунормы $\|\Psi^N\|_{\mathcal{F}}$, $N = \overline{0, \infty}$. Для $N \geq 1$ имеем

$$\|\Psi^N\|_{\mathcal{F}}^2 = \|\Psi \chi_{\Psi}^N\|_{\mathcal{F}}^2 = \|\Psi \chi_{\Psi}^N\|_{\mathcal{F}, \Omega_{x_{N-1}}^{x_N}}^2 + \|\Psi \chi_{\Psi}^N\|_{\mathcal{F}, \Omega_{x_N}^{x_{N+1}}}^2 = I_{N-1} + I_N.$$

Оценим интеграл I_N , интеграл I_{N-1} оценивается аналогично. Применяя (0.3), (2.12), выводим неравенства

$$\begin{aligned} I_N &= \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S, |\bar{\alpha}|=|\bar{\beta}|} \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\beta}}(\chi_{\Psi}^N \Psi) D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}}(\chi_{\Psi}^N \Psi) d\bar{\mathbf{y}} \\ &\leq \bar{a} \Sigma \sum_{\bar{\alpha} \in S} \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} (D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}}(\chi_{\Psi}^N \Psi))^2 d\bar{\mathbf{y}} \\ &\leq 2\bar{a} \Sigma \sum_{\bar{\alpha} \in S} \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} \left(|D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} \Psi|^2 + \left(\sum_{p=0}^{i-1} \frac{C_i^p \hat{a}_{i-p}}{\Delta_N^{i-p}} |D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} \Psi| \right)^2 \right) d\bar{\mathbf{y}} \\ &\leq 2\bar{a} \Sigma \sum_{\bar{\alpha} \in S} \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} \left(|D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} \Psi|^2 + 2^{2k} \hat{a}_k^2 k \sum_{p=0}^{i-1} \frac{|D_x^p D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\alpha} \Psi|^2}{\Delta_N^{2i-2p}} \right) d\bar{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Пользуясь неравенствами (1.6), (1.10) с $\Delta = \Delta_N$, определением λ -последовательности (0.12) и условием (0.4), устанавливаем соотношения

$$\begin{aligned} I_N &\leq 2\bar{a} \Sigma^2 \tilde{C} (1 + 2^{2k} \hat{a}_k^2 k^2) \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} \left(\mathcal{D}(\Psi) + \frac{\Psi^2}{\Delta_N^{2[k, q]}} \right) d\bar{\mathbf{y}} \\ &\leq 2\frac{\bar{a}}{\hat{a}} \Sigma^2 \tilde{C} (1 + 2^{2k} \hat{a}_k^2 k^2) \int_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} (\mathcal{F}(\Psi) + \hat{\theta} \lambda_N^{N+1} \Psi^2) d\bar{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

В результате при всех $N \geq 1$ получим оценку

$$\begin{aligned} \|\Psi^N\|_{\mathcal{F}}^2 &\leq C_1 \sum_{i=N-1}^N \int_{\Omega_{x_i}^{x_{i+1}}} (\mathcal{F}(\Psi) + \hat{\theta} \lambda_i^{i+1} \Psi^2) d\bar{\mathbf{y}} \\ &\leq C_2 \sum_{i=N-1}^N (\|\Psi\|_{\mathcal{F}, \Omega_{x_i}^{x_{i+1}}}^2 + \lambda_i^{i+1} \|\Psi\|_{\Omega_{x_i}^{x_{i+1}}}^2). \end{aligned}$$

Отметим, что для $N = 0$ последние неравенства также остаются верными.

При помощи (5.4) заключаем справедливость оценки

$$\begin{aligned} & \|\Psi^N\|_{\mathcal{F}} + \sum_{\bar{\alpha} \in S} \|\Phi_{\bar{\alpha}}^N\| + (\lambda_{N-1}^N)^{-1/2} \|\Phi^N\| \\ & \leq \widehat{C}^{1/2} (C_2^{1/2} (1 + e^{\widehat{\kappa}})^{1/2} + 1 + \Sigma) \exp\left\{\frac{\widehat{\kappa}}{2} N\right\} \\ & = C_3 \exp\left\{\frac{\widehat{\kappa}}{2} N\right\}, \quad N = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Далее, воспользовавшись (5.7), из (5.6) выводим

$$\|u^N\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_{\nu+1}}} \leq C_4 \exp\left\{-\frac{\kappa}{2} (N - \nu)\right\} \exp\left\{\frac{\widehat{\kappa}}{2} N\right\}$$

для $\nu = \overline{0, N-4}$, $N \geq 4$. Таким образом, ряд (5.5) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{N=\nu+4}^{\infty} \|u^N\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_{\nu+1}}} \leq C_4 \exp\left\{\frac{\widehat{\kappa}}{2} \nu\right\} \sum_{N=\nu+4}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\kappa - \widehat{\kappa}}{2} (N - \nu)\right\} \leq C_5 \exp\left\{\frac{\widehat{\kappa}}{2} \nu\right\}. \quad (5.8)$$

Следовательно, при любом целом $\nu \geq 0$ ряд (5.5) сходится в пространстве $W_{\mathcal{F}}(\Omega^{x_{\nu+1}})$ к функции $u \in W_{\mathcal{F}, \text{lc}}(\Omega)$.

Покажем, что $u(\bar{\mathbf{y}})$ является обобщенным решением задачи (0.1), (0.2). Для этого запишем интегральные тождества (5.2) для функций $w^N = u^N - \Psi^N$, $N = \overline{0, L}$, и сложим их; тогда для любого целого $L \geq 0$ получим равенство

$$\sum_{N=0}^L (w^N, v)_{\mathcal{F}} = \sum_{N=0}^L (\Phi^N, v) + \sum_{N=0}^L \sum_{\bar{\alpha} \in S} (\Phi_{\bar{\alpha}}^N, D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} v) - \sum_{N=0}^L (\Psi^N, v)_{\mathcal{F}},$$

справедливое для любой функции $v(\bar{\mathbf{y}}) \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Для достаточно большого L такого, что $\text{supp } v \subset \Omega^{x_L}$, его можно переписать в виде

$$\sum_{N=0}^L (w^N, v)_{\mathcal{F}} = (\Phi, v) + \sum_{\bar{\alpha} \in S} (\Phi_{\bar{\alpha}}, D_{\bar{\mathbf{y}}}^{\bar{\alpha}} v) - (\Psi, v)_{\mathcal{F}}.$$

Выполнив в последнем тождестве предельный переход при $L \rightarrow \infty$, установим тождество (1.3) для суммы ряда $\sum_{N=0}^{\infty} \omega^N$. Значит, $u = w + \Psi$ является обобщенным решением задачи (0.1), (0.2).

Для построенного решения $u(\bar{\mathbf{y}})$ установим соотношение (0.14). Применяя (5.1), (5.7), выводим неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\nu+3} \|u^N\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_{\nu+1}}} & \leq \overline{C} \sum_{N=0}^{\nu+3} \left(\|\Psi^N\|_{\mathcal{F}} + (\lambda_{N-1}^N)^{-1/2} \|\Phi^N\| + \sum_{\bar{\alpha} \in S} \|\Phi_{\bar{\alpha}}^N\| \right) \\ & \leq C_6 \sum_{N=0}^{\nu+3} \exp\left\{\frac{\widehat{\kappa}}{2} N\right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Объединяя (5.8), (5.9), получим

$$\begin{aligned}
 \hat{a}^{1/2} \|u\|_{\mathcal{D}, \Omega^{x_{\nu+1}}} \exp\left\{-\frac{\kappa}{2} \nu\right\} &\leq \|u\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_{\nu+1}}} \exp\left\{-\frac{\kappa}{2} \nu\right\} \\
 &\leq \exp\left\{-\frac{\kappa}{2} \nu\right\} \left(\sum_{N=0}^{\nu+3} \|u^N\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_{\nu+1}}} + \sum_{N=\nu+4}^{\infty} \|u^N\|_{\mathcal{F}, \Omega^{x_{\nu+1}}} \right) \\
 &\leq \exp\left\{-\frac{\kappa}{2} \nu\right\} \left(C_6 \sum_{N=0}^{\nu+3} \exp\left\{\frac{\hat{\kappa}}{2} N\right\} + C_5 \exp\left\{\frac{\hat{\kappa}}{2} \nu\right\} \right) \\
 &\leq \exp\left\{-\frac{\kappa - \hat{\kappa}}{2} \nu\right\} \left(C_7 \sum_{i=0}^{\nu+3} \exp\left\{-\frac{\hat{\kappa}}{2} i\right\} + C_5 \right) \leq C_8 \exp\left\{-\frac{\kappa - \hat{\kappa}}{2} \nu\right\}.
 \end{aligned}$$

Ввиду того, что правая часть последнего неравенства при $\nu \rightarrow \infty$ стремится к нулю, равенство (0.14) доказано. Теорема 5.1 доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Х. Мукминову и А. К. Гущину за стимулирующие обсуждения и полезные замечания.

Список литературы

1. Михайлов В. П., “О первой краевой задаче для одного класса гипоеллиптических уравнений”, *Матем. сб.*, **63**:2 (1964), 238–264.
2. Михайлов В. П., “Первая краевая задача для некоторых полуограниченных гипоеллиптических уравнений”, *Матем. сб.*, **64**:1 (1964), 10–51.
3. Phragmén E., Lindelöf E., “Sur une extension d’un principe classique de l’analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d’un point singulier”, *Acta Math.*, **31**:1 (1908), 381–406.
4. Ландис Е. М., Панасенко Г. П., “Об одном варианте теоремы Фрагмена–Линделёфа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной”, *Тр. семинара им. И. Г. Петровского*, 1979, № 5, 105–136.
5. Toupin R. A., “Saint-Venant’s principle”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **18**:2 (1965), 83–96.
6. Knowles J. K., “On Saint-Venant’s principle in the two-dimensional linear theory of elasticity”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **21**:1 (1966), 1–22.
7. Кондратьев В. А., Копачек И., Ленвеншвим Д. М., Олейник О. А., “Неулучшаемые оценки в пространствах Гёльдера и точный принцип Сен-Венана для решения бигармонического уравнения”, *Тр. МИАН СССР*, **166**, Наука, М., 1984, 91–106.
8. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., “О принципе Сен-Венана в плоской теории упругости”, *ДАН СССР*, **239**:3 (1978), 530–533.
9. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., “Принцип Сен-Венана в плоской теории упругости и краевые задачи для бигармонического уравнения в неограниченной области”, *Сиб. матем. журн.*, **19**:5 (1978), 1154–1165.
10. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., “Энергетические оценки обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка и их приложения”, *ДАН СССР*, **232**:6 (1977), 1257–1260.
11. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., “Об устранимых особенностях на границе и единственности решений краевых задач для эллиптических и параболических уравнений второго порядка”, *Функцион. анализ и его прилож.*, 1977, № 3, 54–67.

12. Кондратьев В. А., Олейник О. А., “Теоремы единственности решений внешних краевых задач и аналог принципа Сен-Венана”, *УМН*, **39**:4 (1984), 165–166.
13. Кондратьев В. А., Олейник О. А., “О единственности решений краевых задач в неограниченных областях и об изолированных особых точках решений системы теории упругости и эллиптических уравнений второго порядка”, *УМН*, **42**:4 (1987), 189–190.
14. Кожевникова Л. М., “Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения”, *Матем. сб.*, **196**:7 (2005), 67–100.
15. Федорюк М. В., *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
16. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазILINEЙНЫЕ уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.
17. Михайлов В. П., *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1983.
18. Владимиров В. С., *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1971.

Л. М. КОЖЕВНИКОВА (L. M. KOZHEVNIKOVA)
Стерлитамакская государственная педагогическая
академия
E-mail: kosul@mail.ru

Поступило в редакцию
23.05.2005