Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Теоремы единственности для решений
уравнения свертки на симметрических пространствах,
Изв. РАН. Сер. матем., 2006, том 70, выпуск 6, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im719>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 04:54:33

УДК 517.5

В. В. Волчков

Теоремы единственности для решений уравнения свертки на симметрических пространствах

Получены точные теоремы единственности для решений уравнения свертки на римановых симметрических пространствах некомпактного типа ранга 1. Рассмотрено одно из приложений к лакунарным рядам по специальным функциям.

Библиография: 29 наименований.

Введение

Известная теорема единственности Ф. Йона (см. [1], а также [2, гл. 6]) утверждает, что если функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, с нулевыми интегралами по всем сферам фиксированного радиуса r обращается в нуль в некотором шаре радиуса r , то $f = 0$ в $\mathbb{R}^n$. Примеры, построенные Ф. Йоном [1] для $n = 2, 3$, показывают, что для таких n условие бесконечной гладкости f ослабить нельзя.

Существенное уточнение и обобщение этих результатов было получено автором в работах [3]–[8]. При этом был обнаружен новый эффект – зависимость между порядком гладкости функции из различных обобщений теоремы Йона и количеством нулевых коэффициентов Фурье в ее разложении по сферическим гармоникам (см. [3]–[5]).

Кроме того, методы, предложенные в [3]–[5], позволили получить аналогичные результаты для функций f , удовлетворяющих уравнению свертки $f * T = 0$, где T – инвариантное относительно вращений распределение с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$ (см. [9]). Такие результаты имеют самостоятельный интерес и важны в связи с их существенными и эффективными приложениями в экстремальных задачах о множествах Помпейю [7], в теории лакунарных рядов (см. [6], а также [9, гл. 5]), в проблеме носителя [10], в теории гармонических функций [11], а также при изучении различных классов периодических в среднем функций и их обобщений [3]–[5], [8], [9], [12]–[14].

В настоящей работе получены новые теоремы единственности на римановых симметрических пространствах некомпактного типа ранга 1. Отметим, что в соответствии с классификацией таких пространств (см., например, [15, гл. 1, § 4, п. 3]) это в точности вещественное, комплексное, кватернионное гиперболические пространства $H^n(\mathbb{R})$, $H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{H})$, а также гиперболическое пространство Кэли $H^{16}(\mathbb{Ca})$.

В § 1 формулируются основные результаты данной работы. В § 2 приводятся некоторые обозначения и вспомогательные конструкции, связанные с симметрическими пространствами. В § 3–5 развивается аппарат, необходимый для доказательства основных результатов. В частности, в § 3 изучаются решения некоторых интегральных уравнений, в § 4 построены биортогональные системы

специального вида, а в § 5 получены некоторые вспомогательные утверждения, связанные с уравнением свертки. Доказательство основных результатов содержится в § 6.

§ 1. Формулировки и обсуждение основных результатов

Используемые в работе основные понятия и факты из теории симметрических пространств можно найти в работах [15]–[18].

Пусть G – связная некомпактная полупростая группа Ли с конечным центром, $K \subset G$ – максимальная компактная подгруппа и $X = G/K$ – соответствующее симметрическое пространство некомпактного типа. Всюду в дальнейшем предполагается, что ранг X равен единице. Как обычно, $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{p}$ – разложение Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в прямую сумму алгебры Ли $\mathfrak{f}$ группы K и его ортогонального дополнения относительно формы Киллинга на $\mathfrak{g}$. Форма Киллинга определяет норму $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{p}$ и G -инвариантную риманову структуру на X с соответствующей функцией расстояния $d(\cdot, \cdot)$ и римановой мерой dx . Шаром радиуса r с центром $y \in X$ далее называется открытый геодезический шар в X , т.е. множество $\{x \in X: d(x, y) < r\}$. Замкнутым шаром с тем же центром и радиусом называется множество $\{x \in X: d(x, y) \leq r\}$. Следуя работе [6], введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непустое открытое множество $\Omega \subset X$ называется ζ -областью ($\zeta \geq 0$), если выполнены следующие условия:

- 1) каждую точку из Ω можно покрыть замкнутым шаром радиуса ζ , содержащимся в Ω ;
- 2) центры двух любых замкнутых шаров радиуса ζ , содержащихся в Ω , можно соединить непрерывной кривой так, что любой замкнутый шар радиуса ζ с центром на этой кривой содержится в Ω (под непрерывной кривой понимается образ отрезка $[0, 1] \subset \mathbb{R}^1$ при непрерывном отображении $[0, 1] \rightarrow X$).

Обозначим через $\mathcal{D}'(\Omega)$ (соответственно, $\mathcal{E}'(\Omega)$) пространство распределений (соответственно, распределений с компактным носителем) в области $\Omega \subset X$ (см. [15, гл. 2, § 2, п. 2]), $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{E}'(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{E}'_K(X)$ – множество K -инвариантных распределений из $\mathcal{E}'(X)$. Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ – максимальное абелево подпространство (в рассматриваемом случае одномерное), $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ – соответственно множества всех вещественнозначных и комплекснозначных линейных функционалов на $\mathfrak{a}$, γ – единственный положительный неделимый корень алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$. Выберем $H \in \mathfrak{a}$ так, чтобы $\gamma(H) = 1$, и обозначим $\mathfrak{e} = H/\|H\|$. Для $z \in \mathbb{C}$, $x \in X$ положим

$$\Phi_{z,\eta}(x) = \left(\frac{d}{dz} \right)^\eta (\Phi_{z,0}(x)),$$

где $\Phi_{z,0}(x) = \varphi_\lambda(x)$ – элементарная сферическая функция на X , соответствующая элементу $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ такому, что $\lambda(\mathfrak{e}) = z$ (см. [15, гл. 4, § 4, п. 2]). Для ненулевого $T \in \mathcal{E}'_K(X)$ введем следующие обозначения: $\tilde{T}(z) = (T, \Phi_{z,0}(x))$ – сферическое преобразование T ; $r(T)$ – радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего носитель T ; $\mathcal{N}_T$ – множество всех корней $\tilde{T}$ без учета кратности, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ и не принадлежащих отрицательной части мнимой оси; n_z – кратность корня z функции $\tilde{T}$. Далее предполагается, что

точки множества $\mathcal{N}_T$ перенумерованы в порядке возрастания модулей (при равенстве модулей нумерация произвольна). Обозначим через $\mathfrak{N}(X)$ множество распределений $T \in \mathcal{E}'_K(X)$, $T \neq 0$, для которых при всех $z \in \mathcal{N}_T$ выполнены неравенства

$$|\operatorname{Im} z| \leq c_1 \ln(2 + |z|), \quad n_z \leq c_2, \quad |\tilde{T}^{(n_z)}(z)| \geq (2 + |z|)^{-c_3}, \quad (1)$$

где постоянные $c_1, c_2, c_3 > 0$ могут зависеть от T , но не от z . Пусть также $\mathfrak{N}^m(X) = \mathfrak{N}(X) \cap C^m(X)$ и $\mathfrak{M}(X)$ – множество распределений $T \in \mathfrak{N}$, у которых все достаточно большие по модулю корни $\tilde{T}$ являются вещественными. Класс $\mathfrak{N}(X)$ является достаточно широким и содержит, в частности, все $T \in \mathcal{E}'_K(X)$, у которых $\tilde{T}$ является функцией типа синуса (см. [19, с. 163]). Отметим также, что наиболее интересные для приложений распределения (индикатор шара, поверхностная δ -функция, сосредоточенная на сфере, и многие другие) принадлежат $\mathfrak{N}(X)$.

Пусть $T \in \mathcal{E}'_K(X)$, $T \neq 0$ и Ω – область в X , содержащая замкнутый шар радиуса $r(T)$. Обозначим через $\mathcal{D}'_T(\Omega)$ (соответственно, $C^m_T(\Omega)$, $C^\infty_T(\Omega)$) множество распределений f из $\mathcal{D}'(\Omega)$ (соответственно, $C^m(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$), удовлетворяющих уравнению свертки

$$f \times T = 0 \quad (2)$$

(определение и основные свойства свертки на симметрических пространствах см. в [15, гл. 2, § 5, п. 1]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T \in \mathcal{E}'_K(X)$, $r(T) > 0$ и Ω является ζ -областью при некотором $\zeta \geq r(T)$. Тогда выполнены утверждения:

1) если $f \in \mathcal{D}'_T(\Omega)$ и $f = 0$ в некотором шаре радиуса, большего $r(T)$, то $f = 0$ в Ω ;

2) если $f \in C^\infty_T(\Omega)$ и $f = 0$ в некотором шаре радиуса $r(T)$, то $f = 0$ в области Ω ;

3) если $T \in \mathfrak{N}(X)$ и область Ω ограничена, то для любого $m \in \mathbb{N}$ существует ненулевая функция $f \in C^m_T(\Omega)$, которая равна нулю в некотором шаре радиуса $r(T)$; при тех же условиях для любого $\varepsilon \in (0, r(T))$ существует ненулевая функция $f \in C^\infty_T(\Omega)$, равная нулю в некотором шаре радиуса $r(T) - \varepsilon$.

Кроме того, для $T \in \mathfrak{M}(X)$ аналогичные утверждения верны и для $\Omega = X$.

В частности, утверждение 3) имеет место для $\Omega = X$, если T – индикатор шара или поверхностная δ -функция, сосредоточенная на сфере. В этих случаях все корни $\tilde{T}$ вещественные (см., например, [20]) и имеется явное выражение для $\tilde{T}$, содержащее гипергеометрическую функцию (см. [21]), из которого нетрудно получить оценки (1) с помощью известной асимптотики Ватсона (см. [22, гл. 2, п. 2.3.3]).

Для пространств $H^n(\mathbb{R})$, $H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{H})$ утверждения 1), 2) теоремы 1 были получены ранее (см. [8], [13], [23]). Однако их доказательства содержат рассуждения, которые существенно используют модели указанных пространств (см. [23], [24]) и являются неприменимыми в общем случае. В отличие от прежних подходов, метод, предложенный в настоящей работе, позволяет изучать произвольные конечномерные K -инвариантные подпространства решений (2) для любого X и не использует результаты работы [8] для K -инвариантных f , как это делалось ранее в работах [13], [23]. Это позволяет, в частности, доказать

теорему 1 в общем случае сразу для всех X без использования классификации и конкретных моделей этих пространств.

Утверждение 3) теоремы 1 является новым для любого X . Следующий результат показывает, что для распределений $T \in \mathcal{E}'_K(X)$, не принадлежащих $\mathfrak{N}(X)$, утверждение 3), вообще говоря, неверно.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место следующие утверждения:*

1) пусть $T \in \mathcal{E}'_K(X) \cap C^\infty(X)$, $T \neq 0$ и Ω является ζ -областью при некотором $\zeta \geq r(T)$; тогда если $f \in \mathcal{D}'_T(\Omega)$ и $f = 0$ в некотором шаре радиуса $r(T)$, то $f = 0$ в Ω ;

2) для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют ненулевые $T \in \mathcal{E}'_K(X) \cap C^m(X)$ и $f \in C^m_T(X)$ такие, что $f = 0$ в некотором шаре радиуса $r(T)$.

Отметим, что утверждения теоремы 2 ранее не были известны ни для одного из X .

Нетрудно видеть, что утверждения теорем 1, 2, вообще говоря, не имеют места для областей Ω , не являющихся ζ -областью при $\zeta \geq r(T)$. Одним из приложений этих теорем является

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_K(X)$, $T \neq 0$ и Ω является ζ -областью при некотором $\zeta \geq r(T)$. Пусть также последовательность функций*

$$f_m(x) = \sum_{z \in \mathcal{N}_T, |z| \leq m} \sum_{\eta=0}^{n_z-1} c_{z,\eta,m} \Phi_{z,\eta}(x), \quad (3)$$

где $c_{z,\eta,m} \in \mathbb{C}$, $m = 1, 2, \dots$, сходится в $\mathcal{D}'(\Omega)$ к функции f , равной нулю в некотором шаре B радиуса, большего $r(T)$. Тогда $f = 0$ в Ω . Кроме того, если хотя бы одно из распределений f, T является функцией класса C^∞ , аналогичное утверждение верно и в случае, когда радиус шара B равен $r(T) > 0$. Если при этом $T \in \mathfrak{N}(X)$, указанное значение радиуса шара B , вообще говоря, уменьшить нельзя.

Некоторые достаточные условия, при которых заданная последовательность чисел совпадает с $\mathcal{N}_T$ для некоторого $T \in \mathcal{E}'_K(X)$, содержатся в работах [6], [9, гл. 5]. Другие результаты, связанные с уравнением свертки на X , см. в обзоре [25], где приведена обширная библиография.

§ 2. Обозначения и вспомогательные конструкции

Пусть $o = \{K\}$ – образ единичного элемента G при канонической проекции $G \rightarrow X$ и $g \cdot o = gK$ для любого $g \in G$. Из разложения Ивасава $G = NAK$ [17, с. 403] следует, что каждый элемент $x = g \cdot o \in X$ имеет вид

$$x = n(g) \exp A(g) \cdot o,$$

где $n(g) \in N$ и $A(g) \in \mathfrak{a}$ определяются по x однозначно. При этом

$$\|A(g)\| \leq d(o, g \cdot o)$$

и равенство выполнено лишь в случае $g \in AK$ [15, гл. 4, § 10]. В частности, если $a_t = \exp(tH)$, $t \in \mathbb{R}^1$, то

$$d(o, a_t \cdot o) = |t| \|H\|.$$

Отметим также, что любой элемент $x \in X$ имеет вид $x = ka_t \cdot o$ при некоторых $k \in K$, $t \geq 0$ [17, с. 402]. Определим функцию $h: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ следующим образом: если $x = g \cdot o$, то $h(x)\mathfrak{e} = A(g)$. Очевидно, $h(x)$ не зависит от выбора $g \in G$ с условием $x = g \cdot o$, и если $g = nak$ ($n \in N$, $a \in A$, $k \in K$), то

$$h(x) = \|H\| \gamma(\log a).$$

В частности, $h(nx) = h(x)$, $h(ax) = h(x) + h(a \cdot o)$ для любых $x \in X$, $n \in N$, $a \in A$. Кроме того, $|h(x)| \leq d(o, x)$ (см. [15, гл. 4, § 10, оценка (13)]).

Пусть $\widehat{K}$ – множество всех классов эквивалентности неприводимых унитарных конечномерных представлений группы K . Для каждого $\delta \in \widehat{K}$ обозначим через V_δ векторное пространство размерности $d(\delta)$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В этом пространстве действует некоторое представление класса δ (это представление также обозначим δ). Пусть M – центральный идеал A в K и

$$V_\delta^M = \{v \in V_\delta : \delta(m)v = v \text{ для всех } m \in M\};$$

тогда $\dim V_\delta^M = 1$ [18, с. 343]. Обозначим через $v_1, \dots, v_{d(\delta)}$ ортонормированный базис в V_δ такой, что v_1 порождает V_δ^M и

$$\widehat{K}_M = \{\delta \in \widehat{K} : V_\delta^M \neq \{0\}\}.$$

Тогда справедливо ортогональное разложение

$$L^2(K/M) = \bigoplus_{\delta \in \widehat{K}_M} \mathcal{H}_\delta^M,$$

где $\mathcal{H}_\delta^M$ имеет базис

$$Y_j^\delta(\tau M) = \langle \delta(\tau)v_1, v_j \rangle, \quad \tau \in K, \quad 1 \leq j \leq d(\delta)$$

(см. [15, гл. 4, § 1]). Обозначим через $t_{i,j}^\delta(k)$, $1 \leq i, j \leq d(\delta)$, элементы матрицы квазирегулярного представления t^δ группы K в $\mathcal{H}_\delta^M$, т. е.

$$t^\delta(k)Y_j^\delta(\tau M) = Y_j^\delta(k^{-1}\tau M) = \sum_{i=1}^{d(\delta)} t_{i,j}^\delta(k)Y_i^\delta(\tau M), \quad (4)$$

где $k, \tau \in K$. В силу неэквивалентности представлений t^δ для различных $\delta \in \widehat{K}_M$ (см. [15, гл. 4, § 1, теорема 1.6 (ii)]) имеем

$$\int_K t_{i,j}^{\delta_1}(\tau) \overline{t_{\mu,\nu}^{\delta_2}(\tau)} d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } (\delta_1, i, j) \neq (\delta_2, \mu, \nu), \\ \frac{1}{d(\delta)}, & \text{если } \delta_1 = \delta_2 = \delta \text{ и } (i, j) = (\mu, \nu), \end{cases} \quad (5)$$

где $d\tau$ – нормированная мера Хаара на K и черта означает комплексное сопряжение (см. [26, гл. 1, § 4, доказательство теоремы 1]). Пусть $0 < R \leq +\infty$ и $B_R = \{x \in X : d(o, x) < R\}$. Для любой $f \in C(B_R)$ из соотношения (5) следует, что

$$\int_K f(\tau^{-1}x) \overline{t_{i,j}^\delta(\tau)} d\tau = Y_j^\delta(kM) \int_K f(\tau a \cdot o) \overline{Y_j^\delta(\tau M)} d\tau, \quad (6)$$

где $x = ka \cdot o \in B_R$, $k \in K$, $a \in A$ (см. [27, доказательство леммы 1] и [15, гл. 4, § 1, формула (8)]). Для $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ определим распределение $f_{\delta,j} \in \mathcal{D}'(B_R)$, действующее на $\varphi \in \mathcal{D}(B_R)$ по формуле

$$(f_{\delta,j}, \varphi(x)) = \left(f, d(\delta) \int_K \varphi(\tau^{-1}x) t_{j,j}^\delta(\tau) d\tau \right).$$

Тогда имеет место равенство

$$f = \sum_{\delta \in \hat{K}_M} \sum_{j=1}^{d(\delta)} f_{\delta,j}, \quad (7)$$

в котором ряд сходится безусловно в $\mathcal{D}'(B_R)$ (см. [15, гл. 5, § 3, п. 1]). Обозначим через $\mathcal{D}'_{\delta,j}(B_R)$ (соответственно, $\mathcal{E}'_{\delta,j}(B_R)$, $\mathcal{D}_{\delta,j}(B_R)$) множество элементов f из $\mathcal{D}'(B_R)$ (соответственно, $\mathcal{E}'(B_R)$, $\mathcal{D}(B_R)$), для которых $f = f_{\delta,j}$.

Пусть m_γ и $m_{2\gamma}$ – кратности корней γ и 2γ соответственно, $\alpha = \frac{1}{2}(m_\gamma + m_{2\gamma} - 1)$, $\beta = \frac{1}{2}(m_{2\gamma} - 1)$, ρ – полусумма положительных корней с учетом кратностей. Следуя [18, с. 343], для $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, $a \in A$, $\delta \in \hat{K}_M$ положим

$$\varphi_{\lambda,\delta}(a \cdot o) = \int_K e^{(i\lambda+\rho)(A(\tau^{-1}a))} Y_1^\delta(\tau M) d\tau.$$

Тогда (см. [18, с. 344, 371]) существуют и определяются однозначно целые неотрицательные числа $s_1 = s_1(\delta)$, $s_2 = s_2(\delta)$ такие, что при $\alpha_1 = s_1 + \alpha$, $\beta_1 = s_2 + \beta$ и всех $t \in \mathbb{R}^1$

$$\varphi_{\lambda,\delta}(a_t \cdot o) = P_\delta(\lambda(H)) \operatorname{sh}^{s_1} t \operatorname{ch}^{s_2} t \varphi_{\lambda(H)}^{\alpha_1, \beta_1}(t), \quad (8)$$

где

$$P_\delta(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{s_1} \Gamma(\alpha_1+1)} \prod_{p=0}^{\frac{s_1+s_2-2}{2}} (iz + \rho(H) + 2p) \prod_{q=0}^{\frac{s_1-s_2-2}{2}} (iz + \rho(H) - 2\beta + 2q), \quad (9)$$

$$\varphi_z^{\alpha_1, \beta_1}(t) = F\left(\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + 1 + iz), \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + 1 - iz); \alpha_1 + 1; -\operatorname{sh}^2 t\right)$$

(здесь, как обычно, Γ – гамма-функция и F – гипергеометрическая функция).

Кроме того, для любых $a \in A$, $k \in K$, $j = 1, \dots, d(\delta)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda,\delta}(a \cdot o) Y_j^\delta(kM) &= \int_K e^{(i\lambda+\rho)(h(\tau^{-1}ka \cdot o)\epsilon)} Y_j^\delta(\tau M) d\tau \\ &= \int_K e^{(i\lambda+\rho)(h(k^{-1}\tau a \cdot o)\epsilon)} Y_j^\delta(\tau M) d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

первое из которых доказано в [18, с. 343], а второе получается при использовании стандартных рассуждений, леммы Шура [15, гл. 4, § 1, п. 2], соотношений (4), (6) и первого равенства в (10) при $j = 1$.

Обозначим $\mathbf{D}^\delta = P_\delta\left(\frac{d}{dz}\right)$. Для $z \in \mathbb{C}$, $x \in X$ положим

$$\Phi_{z,\eta}^{\delta,j}(x) = \left(\frac{d}{dz}\right)^\eta (\Phi_{z,0}^{\delta,j}(x)),$$

где $\Phi_{z,0}^{\delta,j}(x) = \varphi_{\lambda,\delta}(a \cdot o)Y_j^\delta(kM)$ при $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ таком, что $\lambda(\mathfrak{e}) = z$ и $x = ka \cdot o$. Тогда (см. [18, с. 244])

$$\Delta \Phi_{z,0}^{\delta,j} = -(z^2 + \rho^2(\mathfrak{e}))\Phi_{z,0}^{\delta,j}, \quad (11)$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на X . Преобразование Фурье распределения $f \in \mathcal{E}'(X)$ определяется равенством [18, с. 223, 281]

$$\tilde{f}(z, b) = (f, e^{(-i\lambda + \rho)(A(x,b))}), \quad z \in \mathbb{C}, \quad b \in K/M, \quad (12)$$

где $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ такое, что $\lambda(\mathfrak{e}) = z$ и $A(x, \tau M) = h(\tau^{-1}x)\mathfrak{e}$. Отметим, что для $f \in \mathcal{E}'_K(X)$ функция $\tilde{f}(z, b)$ не зависит от b и совпадает со сферическим преобразованием $\hat{f}(z)$ (см. (12) и [15, гл. 4, § 4, теорема 4.3]). Для $f \in \mathcal{E}'(X) \cap C^m(X)$ при достаточно больших m имеет место формула обращения:

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{a}^*} \int_{K/M} e^{(i\lambda + \rho)(A(x,b))} \tilde{f}(\lambda(\mathfrak{e}), b) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} db d\lambda, \quad (13)$$

где $\mathbf{c}(\lambda)$ – функция Харинш–Чандры (см. [18, с. 225–226], а также [15, гл. 4, § 7, предложение 7.2]). Из равенств (12) и (10) следует, что для $f \in \mathcal{E}'_{\delta,j}(X)$

$$\tilde{f}(z, b) = (f, d(\delta)\varphi_{-\lambda,\delta}(a \cdot o) \overline{Y_j^\delta(kM)}) Y_j^\delta(b), \quad (14)$$

где, как и выше, $\lambda(\mathfrak{e}) = z$.

§ 3. Свойства решений некоторых интегральных уравнений

В настоящем параграфе мы получим некоторые вспомогательные результаты о существовании и единственности решений интегральных уравнений специального вида.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in \mathcal{D}_{\delta,j}(X)$. Тогда существует функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ такая, что для всех $x \in X$

$$\int_K u \left(\frac{h(\tau^{-1}x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(h(\tau^{-1}x)\mathfrak{e})} Y_j^\delta(\tau M) d\tau = f(x) \quad (15)$$

и функция $\mathbf{D}^\delta u$ является четной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (14) и (8) следует, что $\tilde{f}(z, b) = \psi(z)Y_j^\delta(b)$, где функция $\psi(z)P_\delta(z\|H\|)$ четна и $\psi(z) = O(|z|^{-m})$ для любого $m > 0$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \mathbb{R}^1$ (см. [18, с. 270]). Для $t \in \mathbb{R}^1$ положим

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{a}^*} \psi(\lambda(\mathfrak{e})) e^{it\lambda(H)} |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda,$$

тогда $u \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ (см. [15, гл. 4, § 7, предложение 7.2]) и функция $\mathbf{D}^\delta u$ является четной (см. (9) и [15, гл. 4, § 6, п. 2]). Кроме того, из формул (13) и (10) получаем, что u удовлетворяет (15).

ЛЕММА 2. Пусть $\delta \in \widehat{K}_M$, $j \in \{1, \dots, d(\delta)\}$ фиксированы, $s = s_1(\delta)$, $l > 0$ и функция $u \in C^{s+1}[-l, l]$ удовлетворяет (15) при $f = 0$ и всех $x \in B_{l\|H\|}$. Тогда если функция $\mathbf{D}^\delta u$ является четной, то $\mathbf{D}^\delta u = 0$ на $[-l, l]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon \in (0, l)$ и $u_1 \in C^\infty(-l, l)$ – четная функция с носителем на $[-l + \varepsilon, l - \varepsilon]$. Преобразование Фурье

$$\hat{u}_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) e^{-itz} dt$$

является четной целой функцией экспоненциального типа не выше $l - \varepsilon$, и $\hat{u}_1(z) = O(|z|^{-m})$ для любого $m > 0$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \mathbb{R}^1$. Отсюда следует (см. [28, доказательство теоремы 4]), что существует $u_2 \in C[0, l - \varepsilon]$ такая, что

$$\hat{u}_1(z) = \int_0^{l-\varepsilon} u_2(t) \varphi_z^{\alpha_1, \beta_1}(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (16)$$

Пусть $u_3 \in C^{s+1}(\mathbb{R}^1)$ – функция с носителем на $(-l, l)$, совпадающая с u на $[-l + \varepsilon, l - \varepsilon]$. Используя (16), (10) и формулу обращения для преобразования Фурье на $\mathbb{R}^1$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathbf{D}^\delta u_3}(t) \hat{u}_1(t) dt = \int_0^{l-\varepsilon} u_4(t) \int_K u_3 \left(\frac{h(\tau^{-1} a_t \cdot o)}{\|H\|} \right) e^{\rho(h(\tau^{-1} a_t \cdot o)\varepsilon)} Y_j^\delta(\tau M) d\tau dt$$

для некоторой функции $u_4 \in C[0, l - \varepsilon]$. Из условия леммы и свойств h (см. §2) вытекает, что интеграл в правой части последнего равенства равен нулю. Тогда из равенства Парсеваля и четности функций u_1 и $\mathbf{D}^\delta u$ имеем

$$\int_0^l (\mathbf{D}^\delta u)(t) u_1(t) dt = 0.$$

В силу произвольности u_1 отсюда получаем утверждение леммы.

§ 4. Биортогональные системы

Далее через $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ обозначены положительные постоянные, в разных местах, вообще говоря, разные. Пусть $T \in \mathfrak{N}(X)$ и $r(T) > 0$. Тогда $\tilde{T}$ (см. [18, с. 281]) является четной целой функцией экспоненциального типа $r(T)$ и для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|\tilde{T}(z)| \leq \gamma_1(1 + |z|)^{\gamma_2} e^{r(T)|\operatorname{Im} z|}, \quad (17)$$

где γ_1, γ_2 не зависят от z . Из неравенства (17) следует, что $\tilde{T}$ является функцией вполне регулярного роста (см. [29, гл. 5, § 4, теорема 6]) и множество корней $\tilde{T}$ правильно распределено (см. [29, гл. 3, § 3, теорема 4]). Используя (1) и [29, гл. 2, § 3, следствие из теоремы 2], для $\theta \in (0, \pi)$ получаем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \ln |\tilde{T}(re^{i\theta})| = r(T) \sin \theta. \quad (18)$$

Пусть $\mu \in \mathcal{N}_T$, $\mu \neq 0$. Положим

$$\begin{aligned} A_{1, \eta, \mu} &= \frac{n_\mu! \delta_{0, \eta}}{T^{(n_\mu)}(\mu)}, \\ A_{1+m, \eta, \mu} &= \frac{n_\mu!}{T^{(n_\mu)}(\mu)} \left(\frac{\delta_{m, \eta}}{m!} - \sum_{q=1}^m A_{q, \eta, \mu} \frac{T^{(n_\mu+m+1-q)}(\mu)}{(n_\mu + m + 1 - q)!} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\eta, m = 0, \dots, n_\mu - 1$ и $\delta_{m,\eta}$ – символ Кронекера. Используя (19), (17) и формулу Коши для производных $\tilde{T}$, имеем оценку

$$|A_{1+m,\eta,\mu}| \leq (2 + |\mu|)^{\gamma_3}, \quad (20)$$

где γ_3 не зависит от μ, m, η . Рассмотрим целую функцию

$$A_{\mu,\eta}(z) = \tilde{T}(z) \sum_{q=1}^n A_{q,\eta,\mu} ((z - \mu)^{q-1-n_\mu} + (-z - \mu)^{q-1-n_\mu}). \quad (21)$$

Из соотношения (19) при $\nu = 0, \dots, n_\mu - 1$ имеем

$$A_{\mu,\eta}^{(\nu)}(\mu) = \delta_{\nu,\eta}, \quad A_{\mu,\eta}^{(\nu)}(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathcal{N}_T, \quad \xi \neq \mu. \quad (22)$$

Используя принцип максимума модуля и неравенство (17), получим для $A_{\mu,\eta}$ оценку, аналогичную (17). Тогда существует $h_T^{\mu,\eta} \in \mathcal{E}'_K(X)$ такое, что $r(h_T^{\mu,\eta}) = r(T)$ и $\widehat{h_T^{\mu,\eta}} = A_{\mu,\eta}$ (см. [18, с. 281]). Отсюда и из (22) вытекает условие биортогональности

$$(h_T^{\mu,\eta}, \Phi_{\xi,\nu}(x)) = \delta_{\mu,\xi} \delta_{\eta,\nu}, \quad (23)$$

где $\mu, \xi \in \mathcal{N}_T$, $\mu \neq 0$, $\eta = 0, \dots, n_\mu - 1$, $\nu = 0, \dots, n_\xi - 1$. Кроме того, из соотношений (13), (21), (20) следует (см. [15, гл. 2, § 7, предложение 7.2]), что существует натуральное число σ , зависящее только от X , такое, что для всех $T \in \mathfrak{N}^\sigma(X)$ будем иметь $h_T^{\mu,\eta} \in C(X)$ и для любой функции $f \in C(B_{r(T)})$ выполнено неравенство

$$\int_{B_r(T)} h_T^{\mu,\eta}(x) f(x) dx \leq (2 + |\mu|)^{\gamma_4} \sup_{x \in B_{r(T)}} |f(x)| \quad (24)$$

с постоянной γ_4 , не зависящей от μ, η, f .

ЛЕММА 3. Пусть $T \in \mathfrak{N}^\sigma(X)$ и $\tilde{T}(0) \neq 0$. Тогда для любой функции $u \in \mathcal{D}(B_{r(T)}) \cap \mathcal{E}'_K(X)$ имеет место равенство

$$u = \sum_{\mu \in \mathcal{N}_T} \sum_{\eta=0}^{n_\mu-1} b_{\mu,\eta} h_T^{\mu,\eta}, \quad (25)$$

где $b_{\mu,\eta} = \int_{B_{r(T)}} u(x) \Phi_{\mu,\eta}(x) dx$ и ряд (24) сходится равномерно в $B_{r(T)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (1), (10) и формулу Коши для производных функции $\tilde{u}$, получаем $b_{\mu,\eta} = O(|\mu|^{-q})$ при $\mu \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $q > 0$ (см. [15, гл. 4, § 7, п. 2]). Отсюда и из (24) следует равномерная сходимость ряда (25) к некоторой функции $u_1 \in C(X)$, равной нулю вне $B_{r(T)}$. Докажем, что $u_1 = u$. Из определения u_1 и условия (23) находим

$$\int_{B_{r(T)}} (u(x) - u_1(x)) \Phi_{\mu,\eta}(x) dx = 0$$

при всех $\mu \in \mathcal{N}_T$, $\eta = 0, \dots, n_\mu - 1$. Следовательно, функция

$$w = \frac{\tilde{u} - \tilde{u}_1}{\tilde{T}}$$

является четной целой и имеет экспоненциальный тип. Пусть $\theta \in (0, \pi)$. Из определения u_1 и соотношений (21), (20), (1) имеем $\tilde{u}_1(re^{i\theta})/\tilde{T}(re^{i\theta}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$. Кроме того, поскольку $\text{supp } u \subset B_{r(T)}$, из (18) получаем

$$\frac{\tilde{u}(re^{i\theta})}{\tilde{T}(re^{i\theta})} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty$$

(см. [15, гл. 4, § 7, п. 2]). Итак, $w(re^{i\theta}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$, и по принципу Фрагмена–Линделёфа и теореме Лиувилля имеем $w = 0$. Это означает, что $u_1 = u$ и лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $T \in \mathfrak{N}^\sigma(X)$ и $T(0) \neq 0$. Тогда всякая K -инвариантная функция $f \in C(B_{r(T)})$, для которой

$$\int_{B_{r(T)}} f(x) h_T^{\mu, \eta}(x) dx = 0$$

при всех $\mu \in \mathcal{N}_T$, $\eta = 0, \dots, n_\mu - 1$, равна нулю в $B_{r(T)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия и леммы 3 следует, что

$$\int_{B_{r(T)}} f(x) u(x) dx = 0$$

для любой K -инвариантной функции $u \in \mathcal{D}(B_{r(T)})$. В силу произвольности u отсюда имеем $f = 0$.

ЛЕММА 4. Пусть $T \in \mathfrak{N}^\sigma(X)$, $m \geq n_\mu$ при всех $\mu \in \mathcal{N}_T$, $f \in C^{2m}(X)$ и

$$\int_{B_{r(T)}} T(x) (\Delta^q f)(x) dx = 0$$

для любого $q = 0, \dots, m$. Тогда

$$\left| \int_{B_{r(T)}} f(x) h_T^{\mu, \eta}(x) dx \right| \leq \gamma_5 (2 + |\mu|)^{\gamma_6 - 2m}, \quad (26)$$

где γ_5 не зависит от μ, η , а γ_6 не зависит от μ, η, f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $h_T^{\mu, \eta}$ и (21) вытекает, что

$$(\Delta + \mu^2 + \rho^2(\mathfrak{e}))^{n_\mu} h_T^{\mu, \eta} = \sum_{q=0}^{n_\mu-1} c_{q, \mu, \eta} (\Delta + \mu^2 + \rho^2(\mathfrak{e}))^q T,$$

где $c_{q, \mu, \eta} \in \mathbb{C}$. Отсюда и из условия при $\mu^2 + \rho^2(\mathfrak{e}) \neq 0$ и $\nu = 0, \dots, m - n_\mu + 1$ имеем

$$\int_{B_{r(T)}} h_T^{\mu, \eta}(x) (\Delta^\nu f)(x) dx = - \sum_{q=1}^{n_\mu} \binom{n_\mu}{q} (\mu^2 + \rho^2(\mathfrak{e}))^{-q} \int_{B_{r(T)}} h_T^{\mu, \eta}(x) (\Delta^{\nu+q} f)(x) dx,$$

где $\binom{n_\mu}{q}$ – биномиальные коэффициенты. Из этого равенства и соотношений (1), (24) следует (26).

§ 5. Свойства решений уравнения свертки

В этом параграфе мы докажем некоторые вспомогательные утверждения, связанные с уравнением свертки.

ЛЕММА 5. Пусть $T \in \mathcal{E}'_K(X)$. Тогда для любых $\delta \in \widehat{K}_M$, $j = 1, \dots, d(\delta)$, $\mu \in \mathbb{C}$ и $m = 0, 1, \dots$ имеет место равенство

$$\Phi_{\mu, m}^{\delta, j} \times T = \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \widetilde{T}^{(m-p)}(\mu) \Phi_{\mu, p}^{\delta, j}. \quad (27)$$

В частности, $\Phi_{\mu, \eta}^{\delta, j} \in C_T^\infty(X)$ при $\mu \in \mathcal{N}_T$, $\eta = 0, \dots, n_\mu - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 0$ равенство (27) следует из (11) и теоремы о среднем для собственных функций оператора Δ (см. [15, гл. 4, § 2, п. 2]). Общий случай получается отсюда дифференцированием m раз по μ .

ЛЕММА 6. Пусть $T \in \mathfrak{N}(X)$, $R > r(T) > 0$ и числа $b_{\mu, \eta} \in \mathbb{C}$ ($\mu \in \mathcal{N}_T$, $\eta = 0, \dots, n_\mu - 1$) таковы, что $|b_{\mu, \eta}| \leq (2 + |\mu|)^q$ при некотором $q > 0$, не зависящем от μ, η . Пусть также при некоторых $\delta \in \widehat{K}_M$, $j \in \{1, \dots, d(\delta)\}$ ряд

$$\sum_{\mu \in \mathcal{N}_T} \sum_{\eta=0}^{n_\mu-1} b_{\mu, \eta} \Phi_{\mu, \eta}^{\delta, j}(x) \quad (28)$$

сходится к нулю в $\mathcal{D}'(B_R)$. Тогда $b_{\mu, \eta} = 0$ при всех μ, η .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $b_{\mu, \eta} = O((2 + |\mu|)^{-q})$ при любом фиксированном $q > 0$ и постоянной в знаке O , не зависящей от μ, η (общий случай сводится к данному, если рассмотреть свертку ряда (28) с K -инвариантной функцией из $\mathcal{D}(B_\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, R - r(T))$, и использовать (27); см. [15, гл. 4, § 7, п. 2]). При таких $b_{\mu, \eta}$ ряд (28) сходится к нулю уже в $\mathcal{D}(B_R)$ (см. (1), (10) и [29, гл. 1, теорема 6]) и для тривиального δ равенства $b_{\mu, \eta} = 0$ следуют из (23). Случай произвольных $\delta \in \widehat{K}_M$, $j = 1, \dots, d(\delta)$ получается отсюда применением к (28) операторов дифференцирования, понижающих параметры гипергеометрической функции в (8) (см. [22, гл. 2, § 2.8, формулы (22)–(24)]).

ЛЕММА 7. Пусть $T \in \mathcal{E}'_K(X)$, $R > r(T) > 0$, $f \in \mathcal{D}_{\delta, j}(X)$ и сужение f на B_R принадлежит $C_T^\infty(B_R)$. Пусть также $u \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ – решение уравнения (15) и функция $\mathbf{D}^\delta u$ является четной. Тогда функция

$$u_1(x) = (\mathbf{D}^\delta u) \left(\frac{h(x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(\epsilon)h(x)}$$

принадлежит классу $C_T^\infty(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $u_2 = u_1 \times T$; тогда $u_2(nx) = u_2(x)$ при всех $x \in X$, $n \in N$ (см. свойства h в § 2). Это означает, что

$$u_2(x) = u_3 \left(\frac{h(x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(\epsilon)h(x)}$$

для некоторой функции $u_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Для любого $x \in B_{R-r(T)}$ из (15) получаем

$$\int_K u_2(\tau^{-1}x) Y_j^\delta(\tau M) d\tau = (f \times T)(x) = 0. \quad (29)$$

Далее из неравенства (17) и теоремы Пэли–Винера следует, что существует четное распределение $\mathcal{H} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $[-r(T), r(T)]$ такое, что

$$(\mathcal{H}, e^{izt}) = \tilde{T}(z) = (T, e^{(\rho(\epsilon) + zi)h(x)})$$

при всех $z \in \mathbb{C}$ (см. (12) и [15, гл. 4, § 4, теорема 3.4]). В силу произвольности z отсюда имеем равенство

$$(\mathcal{H}, \varphi(t)) = (T, \varphi(h(x))e^{\rho(\epsilon)h(x)}), \quad (30)$$

справедливое для любой функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Положим в (30)

$$\varphi(t) = u\left(\frac{t + h(a \cdot o)}{\|H\|}\right),$$

где $a \in A$. Из определения u_3 и свойств h (см. § 2) получаем

$$u_3\left(\frac{h(a \cdot o)}{\|H\|}\right) = \left(\mathcal{H}, u\left(\frac{t + h(a \cdot o)}{\|H\|}\right)\right),$$

откуда в силу четности $\mathbf{D}^\delta u$ и $\mathcal{H}$ следует четность $\mathbf{D}^\delta u_3$. Тогда из (29) и леммы 2 вытекает, что $\mathbf{D}^\delta u_3 = 0$ на $[-(R-r(T))/\|H\|, (R-r(T))/\|H\|]$. Таким образом, $u_2 = 0$ в $B_{R-r(T)}$ и $u_1 \in C_T^\infty(B_R)$.

ЛЕММА 8. Пусть $T \in \mathcal{E}'_K(X)$, $R > r(T) > 0$ и функция $F \in \mathcal{D}'_{\delta,j}(B_R) \cap C_T^\infty(B_R)$ равна нулю в $B_{r(T)}$. Тогда $F = 0$ в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $T \in \mathcal{E}'_K(X) \cap C^q(X)$, где q достаточно большое. Действительно, общий случай сводится к данному, если вместо $T \in \mathcal{E}'_K(X)$ рассмотреть $T_1 \in \mathcal{E}'_K(X) \cap C^q(X)$, удовлетворяющее уравнению $p(\Delta)T_1 = T$, где p – подходящий многочлен достаточно высокой степени (зависящий от величины γ_2 из (17)). При этом $r(T_1) = r(T)$, $p(\Delta)F \in \mathcal{D}'_{\delta,j}(B_R) \cap C_{T_1}^\infty(B_R)$, и если утверждение леммы справедливо для T_1 , то $p(\Delta)F = 0$. Тогда в силу эллиптичности оператора $p(\Delta)$ и равенства $F = 0$ в $B_{r(T)}$ будем иметь $F = 0$ в B_R . Далее, из доказательства леммы 7 следует, что при достаточно большом q существует ненулевая четная функция $\mathcal{H} \in C(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $[-r(T), r(T)]$, удовлетворяющая (30) для любой функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Пусть $\varepsilon \in (0, R - r(T))$, $f \in \mathcal{D}_{\delta,j}(X)$ и $f = F$ в $B_{r(T)+\varepsilon}$. Положим в (30)

$$\varphi(t) = \mathbf{D}^\delta u\left(\frac{t + h(a \cdot o)}{\|H\|}\right),$$

где u – функция из (15) и $a \in A$. Из (30) и леммы 7 вытекает, что

$$\int_{-r(T)}^{r(T)} \mathcal{H}(t) \varphi(t) dt = 0$$

для любого $a \in A$ такого, что $aB_{r(T)} \subset B_{r(T)+\varepsilon}$ (см. свойства h в §2). Кроме того, $\mathbf{D}^\delta u = 0$ на $[-\frac{r(T)}{\|H\|}, \frac{r(T)}{\|H\|}]$ (см. лемму 2). Отсюда следует (см. [4, доказательство леммы 17]), что $\mathbf{D}^\delta u = 0$ на $[-\frac{r(T)+\varepsilon}{\|H\|}, \frac{r(T)+\varepsilon}{\|H\|}]$. Это означает (см. (8)–(10), (15)), что $F = 0$ в $B_{r(T)+\varepsilon}$, и в силу произвольности $\varepsilon \in (0, R - r(T))$ получаем утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы 8 видно, что ее утверждение справедливо и для функций $F \in \mathcal{D}'_{\delta,j}(B_R) \cap C_T^m(B_R)$ при достаточно большом m , зависящем от T и δ .

§ 6. Доказательства основных результатов

Перейдем к доказательству основных результатов работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Утверждение 1) теоремы 1 легко получается из утверждения 2) стандартным методом сглаживания (см. [18, с. 281, доказательство следствия 5.9]).

Утверждение 2) достаточно доказать для $T \in \mathcal{E}'_K(X) \cap C^q(X)$, где q – достаточно большое (см. доказательство леммы 8). Кроме того, не ограничивая общности, можно считать, что $\Omega = B_R$, $R > r(T)$ и $f = 0$ в $B_{r(T)}$ (см. определение ζ -области в §1). Тогда $f_{\delta,j} = 0$ в $B_{r(T)}$ при всех $\delta \in \hat{K}_M$, $j = 1, \dots, d(\delta)$ и $f_{\delta,j} \in C_T^\infty(B_R)$ (см. (6)). Отсюда и из леммы 8 имеем $f_{\delta,j} = 0$ в B_R и из равенства (7) получаем утверждение 2).

Докажем утверждение 3). Как и выше, не теряя общности, можно считать, что $T \in \mathfrak{N}^q(X)$ при достаточно большом q и что $\tilde{T}$ не имеет корней на мнимой оси. Кроме того, достаточно рассмотреть случай, когда $B_{r(T)} \subset \Omega$ и m – достаточно большое число. Пусть $l = \overline{0, 1}$ и

$$U_l(t) = \sum_{p=1}^{2m+1} c_p(\rho(H) + 2p)^l \cos(it(\rho(H) + 2p)), \quad t \in \left[-\frac{r(T)}{\|H\|}, \frac{r(T)}{\|H\|}\right], \quad (31)$$

где числа $c_p \in \mathbb{C}$ не все равны нулю, и функции

$$F_l(x) = \int_K U_l\left(\frac{h(\tau^{-1}x)}{\|H\|}\right) e^{\rho(\epsilon)h(\tau^{-1}x)} d\tau = \sum_{p=1}^{2m+1} c_p(\rho(H) + 2p)^l \Phi_{i(\rho(H)+2p), 0}(x) \quad (32)$$

(см. [15, гл. 4, §4, теорема 4.3]) удовлетворяют условиям

$$\int_{B_{r(T)}} T(x)(\Delta^\nu F_l)(x) dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, m-1.$$

Пусть $R > 0$ такое, что $\Omega \subset B_R$. Из (1), (10) и леммы 4 получаем (см. также [29, гл. 1, теорема 6]), что при достаточно большом m ряд

$$\sum_{\mu \in \mathcal{N}_T} \sum_{\eta=0}^{n_\mu-1} c_{l,\mu,\eta} \Phi_{\mu,\eta}(x), \quad c_{l,\mu,\eta} = (h_T^{\mu,\eta}, F_l), \quad (33)$$

сходится равномерно в B_R к функции класса $C^m(B_R)$, совпадающей с F_l в $B_{r(T)}$ (см. (23) и следствие к лемме 3). Аналогично, ряд

$$\sum_{\mu \in \mathcal{N}_T} \sum_{\eta=0}^{n_\mu-1} c_{l,\mu,\eta} \left(\frac{d}{d\mu} \right)^\eta (\cos \mu t) \quad (34)$$

сходится равномерно к функции из $C^m[-\frac{R}{\|H\|}, \frac{R}{\|H\|}]$, совпадающей с U_l на $[-\frac{r(T)}{\|H\|}, \frac{r(T)}{\|H\|}]$ (см. (32), лемму 2 и [15, гл. 4, § 4, теорема 4.3]). Для суммы ряда (34) на $[-\frac{R}{\|H\|}, \frac{R}{\|H\|}]$ мы сохраним обозначение U_l и положим

$$U_2(t) = U_0(t) - \int_0^t U_1(\xi) d\xi, \\ f(x) = \int_K U_2 \left(\frac{h(\tau^{-1}x)}{\|H\|} \right) e^{\rho(\epsilon)h(\tau^{-1}x)} Y_j^\delta(\tau M) d\tau, \quad x \in B_R,$$

где $\delta \in \widehat{K}_M$ такое, что $s_1(\delta) + s_2(\delta) \geq 4(m+1)$ и $j \in \{1, \dots, d(\delta)\}$. Тогда $f \in C^m(B_R)$ и из соотношений (31), (8)–(10) следует, что $f = 0$ в $B_{r(T)}$. Равенства (34) и (10) показывают, что f можно разложить в равномерно сходящийся в B_R ряд (28) с коэффициентами $b_{\mu,\eta}$, удовлетворяющими оценке из леммы 6. При этом

$$b_{\mu,n_\mu-1} = \frac{1}{2} \left(c_{1,\mu,\eta} \left(1 + \frac{P_\delta(-i\mu)}{P_\delta(i\mu)} \right) + \frac{1}{\mu} c_{2,\mu,\eta} \left(1 - \frac{P_\delta(-i\mu)}{P_\delta(i\mu)} \right) \right), \quad (35)$$

и по лемме 5 имеем $f \in C_T^m(B_R)$. Сравнивая (34) и (31), получаем, что среди чисел $c_{l,\mu,\eta}$ есть бесконечно много отличных от нуля. Поэтому из (35) и (9) вытекает, что при некотором δ (таком, что $s_1(\delta) + s_2(\delta) \geq 4(m+1)$) и любом $j \in \{1, \dots, d(\delta)\}$ не все числа $b_{\mu,n_\mu-1}$ равны нулю. Это означает (см. лемму 6), что $f \neq 0$ в Ω при таком δ и всех $j = 1, \dots, d(\delta)$. Таким образом, для любого $m \in \mathbb{N}$ существует ненулевая функция $f \in C_T^m(\Omega)$, равная нулю в $B_{r(T)}$. Применяя сглаживание (см. [18, с. 281, доказательство следствия 5.9]), для любого $\varepsilon \in (0, r(T))$ имеем существование ненулевой функции из $C_T^\infty(\Omega)$, равной нулю в $B_{r(T)-\varepsilon}$. Для завершения доказательства утверждения 3) осталось заметить, что в случае $T \in \mathfrak{M}(X)$ приведенные рассуждения сохраняют силу при замене B_R на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Как и выше, утверждение 1) достаточно доказать для случая, когда $\Omega = B_R$, $R > r(T)$ и $f \in \mathcal{D}'_{\delta,j}(B_R)$. Пусть $\varepsilon \in (0, R - r(T))$ и $\omega \in \mathcal{D}(B_R)$ — K -инвариантная функция, равная единице в $B_{r(T)+\varepsilon}$. Тогда $f\omega \in \mathcal{D}'_{\delta,j}(B_R)$ и $f\omega \in \mathcal{D}'_T(B_{r(T)+\varepsilon})$. Кроме того, для любого $q \in \mathbb{N}$ существует многочлен p степени q такой, что $p(\Delta)F_q = f\omega$ для некоторого $F_q \in \mathcal{E}'_{\delta,j}(B_R)$ (см. (14) и [18, с. 281]). При этом $F_q \in \mathcal{D}'_{T_1}(B_{r(T)+\varepsilon})$ и $r(T_1) = r(T)$, где $T_1 = p(\Delta)T$. Используя замечание к лемме 8, при достаточно больших q получим $F_q = 0$ в $B_{r(T)+\varepsilon}$. В силу произвольности $\varepsilon \in (0, R - r(T))$ отсюда имеем $f = 0$ в B_R .

Для доказательства утверждения 2) достаточно рассмотреть $T \in \mathfrak{N}^m(X) \cap \mathfrak{M}(X)$ и применить утверждение 3) теоремы 1. Таким T является, например, свертка достаточно большого числа индикаторов шара (см. § 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из леммы 5 и непрерывности свертки в $\mathcal{D}'$ получаем, что предел f последовательности (3) принадлежит $\mathcal{D}'_T(\Omega)$. Тогда при условиях теоремы из теорем 1, 2 имеем $f = 0$ в Ω . Кроме того, если $T \in \mathfrak{N}(X)$ и $r(T) > 0$, то для любых $\varepsilon \in (0, r(T))$, $R > 0$, $m \in \mathbb{N}$ существует ненулевая K -инвариантная функция $F \in C^\infty(B_{r(T)})$, равная нулю в $B_{r(T)-\varepsilon}$, которую можно продолжить в B_R до функции класса $C^m_T(B_R)$ посредством разложения в ряд вида (33), сходящийся равномерно в B_R (см. доказательство утверждения 3) теоремы 1). Это означает, что указанное в теореме значение радиуса шара B , вообще говоря, уменьшить нельзя.

Исследования, результаты которых описаны в настоящей работе, стали возможными во многом благодаря визиту автора в Бар-Иланский университет (Израиль, 2001) и использованию библиотечных фондов данного университета. Автор благодарит Президента математического общества Израиля профессора Л. Зальцмана за приглашение, теплый прием и превосходные условия для работы.

Список литературы

1. John F., "Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion", *Math. Ann.*, **111**:1 (1935), 541–559.
2. Йон Ф., *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*, ИЛ, М., 1958.
3. Волчков В. В., "Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах", *Матем. сб.*, **186**:6 (1995), 15–34.
4. Волчков В. В., "Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:2 (2001), 3–26.
5. Волчков В. В., "Теоремы о среднем для одного класса полиномов", *Сиб. матем. журн.*, **35**:4 (1994), 737–745.
6. Волчков В. В., "Теоремы единственности для кратных лакунарных тригонометрических рядов", *Матем. заметки*, **51**:6 (1992), 27–31.
7. Волчков В. В., "Экстремальные варианты проблемы Помпейю", *Матем. заметки*, **59**:5 (1996), 671–680.
8. Волчков В. В., "Проблемы типа Помпейю на многообразиях", *Докл. АН Украины*, 1993, № 11, 9–13.
9. Volchkov V. V., *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.
10. Волчков В. В., "Решение проблемы носителя для некоторых классов функций", *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 13–30.
11. Волчков В. В., "Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:1 (1994), 182–194.
12. Волчков В. В., "Теоремы единственности для некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними", *Матем. заметки*, **62**:1 (1997), 59–65.
13. Volchkov Vit. V., "Uniqueness theorems for mean periodic functions on complex hyperbolic spaces", *Anal. Math.*, **28**:1 (2002), 61–76.
14. Smith I. D., "Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ ", *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **72** (1972), 403–416.
15. Хелгасон С., *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987.
16. Хелгасон С., *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964.

17. Helgason S., *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1978.
18. Helgason S., *Geometric analysis on symmetric spaces*, Mathematical Surveys and Monographs, **39**, American Math. Soc., Providence, 1994.
19. Levin B. Y., *Lectures of entire functions*, Translations of Mathematical Monographs, **150**, American Math. Soc., Providence, 1996.
20. Shahshahani M., Sitaram A., “The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric spaces”, *Contemp. Math.*, **63** (1987), 267–277.
21. Berenstein C. A., Zalcman L., “Pompeiu’s problem on symmetric spaces”, *Comment. Math. Helv.*, **55**:4 (1980), 593–621.
22. Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, М., 1973.
23. Волчков Вит. В., “Теоремы единственности для периодических в среднем функций на кватернионном гиперболическом пространстве”, *Матем. заметки*, **74**:1 (2003), 32–40.
24. Harchaoui M., “Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe: cas des deux boules”, *J. Analyse Math.*, **67** (1995), 1–37.
25. Беренштейн К. А., Струппа Д., “Комплексный анализ и уравнения в свертках”, *Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления.*, **54**, ВИНИТИ, М., 1989, 5–111.
26. Виленкин Н. Я., *Специальные функции и теория представлений групп*, 2-е изд., Наука, М., 1991.
27. Волчков В. В., “Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца”, *Матем. сб.*, **184**:7 (1993), 71–78.
28. Flensted-Jensen M., “Paley–Wiener type theorems for a differential operator connected with symmetric spaces”, *Ark. Mat.*, **10**:1 (1972), 143–162.
29. Левин Б. Я., *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.

В. В. Волчков (V. V. Volchkov)
Донецкий национальный университет
E-mail: volchkov@univ.donetsk.ua

Поступило в редакцию
06.12.2005