Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Платонов, Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 5, 149–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/im720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:50:57

УДК 517.518

С. С. Платонов

Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой

С помощью обобщенных сдвигов Бесселя изучаются задачи теории приближения функций на полупрямой $[0, +\infty)$ в метрике L_p со степенным весом. Для модуля гладкости произвольного порядка, построенного по обобщенным сдвигам Бесселя, доказаны аналоги прямых теорем Джексона. Установлена эквивалентность модуля гладкости и K -функционала. Определены функциональные пространства типа Никольского–Бесова и получено их описание в терминах наилучших приближений. В качестве средства приближения используется некоторый класс целых функций экспоненциального типа. В этом классе доказаны аналоги неравенства Бернштейна для дифференциального оператора Бесселя и для его дробных степеней, а также некоторые другие неравенства. Основным средством для решения таких задач является гармонический анализ Бесселя.

Библиография: 38 наименований.

§ 1. Введение. Формулировка основных результатов

В классической теории приближения функций на прямой $\mathbb{R}$ (и на евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) центральную роль играют операторы сдвига $f(x) \mapsto f(x + y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Так, инфинитезимальным оператором сдвига является оператор дифференцирования, преобразование Фурье представляет собой разложение по собственным функциям оператора сдвига, оператор сдвига используется для построения модулей непрерывности и гладкости, которые являются основными элементами прямых и обратных теорем теории приближения. Различные обобщения операторов сдвига позволяют формулировать естественные аналоги задач теории приближения. Одним из обобщений операторов сдвига является группа или полугруппа операторов в банаховом пространстве. Многие задачи теории приближения такого вида рассмотрены в работах [1]–[4].

Другим обобщением операторов сдвига являются так называемые “операторы обобщенного сдвига” (см., например, [5], [6]). Эти операторы не обязательно образуют группу или полугруппу, но построенные по ним обобщенные модули гладкости могут быть лучше приспособлены для изучения связей между гладкостными свойствами функции и наилучшими приближениями этой функции в весовых функциональных пространствах, чем обычные модули гладкости. Некоторые результаты о приближении функций с использованием операторов обобщенного сдвига можно найти в [6]–[8] и в цитируемой в этих работах литературе. Отметим, что в большинстве работ этого направления рассматривается приближение функций многочленами на конечном отрезке.

На полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ одним из важнейших операторов обобщенного сдвига является оператор обобщенного сдвига Бесселя [9]–[11], который используется при изучении различных задач, связанных с дифференциальными операторами Бесселя (см. статью [12], книгу [10] и цитируемую в них литературу). С обобщенным сдвигом Бесселя тесно связан гармонический анализ Бесселя, т. е. раздел гармонического анализа, в котором изучаются интегральные преобразования Бесселя (Ганкеля) и их приложения.

В настоящей статье с помощью обобщенных сдвигов Бесселя изучаются задачи теории приближения функций на полупрямой $[0, +\infty)$ в метрике L_p с некоторым весом. В частности, для модуля гладкости произвольного порядка, построенного по обобщенным сдвигам Бесселя, доказаны аналоги прямых теорем Джексона. Установлена эквивалентность модуля гладкости и K -функционала, построенного по пространству соболевского типа, соответствующего дифференциальному оператору Бесселя. Определены функциональные пространства типа Никольского–Бесова и получено их описание в терминах наилучших приближений. В качестве средства приближения используется некоторый класс целых функций экспоненциального типа. Для этих целых функций доказаны аналоги неравенства Бернштейна для дифференциального оператора Бесселя и для его дробных степеней, а также некоторые другие неравенства.

Перейдем к более подробному изложению результатов. Всюду далее α – действительное число, удовлетворяющее условию $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Пусть

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_t := \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\alpha + 1}{t} \frac{d}{dt} \quad (1.1)$$

– дифференциальный оператор Бесселя. Обозначим через $j_\alpha(t)$ нормированную функцию Бесселя первого рода:

$$j_\alpha(t) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) J_\alpha(t)}{t^\alpha},$$

где $J_\alpha(x)$ – функция Бесселя первого рода, $\Gamma(x)$ – гамма-функция (см. [9]). Функция $y = j_\alpha(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathcal{B}y + y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$. Функция $j_\alpha(t)$ четная и бесконечно дифференцируемая (и даже целая аналитическая), и $|j_\alpha(t)| < 1$ для всех $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Отметим также, что функция $j_\alpha(t)$ и все ее производные $j_\alpha^{(k)}(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Это следует, например, из интегрального представления функции $j_\alpha(t)$ (см., например, [13, формула 8.411(8)]):

$$j_\alpha(t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1/2)} \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{\alpha-1/2} \cos(tu) du$$

и из теоремы Римана–Лебега.

Мы будем рассматривать функции на промежутке $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ (все функции предполагаются комплекснозначными), но при этом удобно считать, что функции по четности продолжены на всю прямую $\mathbb{R}$. Пусть $C(\mathbb{R}_+)$ – множество четных непрерывных функций на $\mathbb{R}$, $C^{(k)}(\mathbb{R}_+)$ – множество четных k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ (в частности, $C^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ – множество бесконечно дифференцируемых четных функций), $\mathcal{D}_+$ – множество четных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Множества $C(\mathbb{R}_+)$, $C^{(k)}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{D}_+$ являются топологическими векторными пространствами с обычными топологиями. Через $\mathcal{D}'_+$ обозначим множество

всех четных обобщенных функций, т. е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}_+$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'_+$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}_+$ будем обозначать $\langle f, \varphi \rangle$.

Для любого $1 \leq p < \infty$ через $L_{p,\alpha}$ обозначим банахово пространство, состоящее из измеримых функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль), для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int |f(t)|^p t^{2\alpha+1} dt \right)^{1/p}.$$

Здесь и в дальнейших формулах интегралы берутся по промежутку $[0, +\infty)$, если отсутствуют пределы интегрирования.

При $p = \infty$ обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(t)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}_+$. Норма в пространстве $L_{\infty,\alpha}$ определяется по формуле

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \|f\|_{\infty} := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t)|.$$

Пространство $L_{p,\alpha}$ вкладывается в $\mathcal{D}'_+$, если для $f \in L_{p,\alpha}$ и $\varphi \in \mathcal{D}_+$ положить

$$\langle f, \varphi \rangle := \int f(t) \varphi(t) t^{2\alpha+1} dt.$$

Следуя работе [9], для любой функции $f(t) \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$ оператор обобщенного сдвига Бесселя $T^s f(t) = u(t, s)$, $t, s \in \mathbb{R}_+$, определим как решение следующей задачи Коши:

$$\mathcal{B}_t u(t, s) = \mathcal{B}_s u(t, s), \quad (1.2)$$

$$u(t, 0) = f(t), \quad \frac{\partial u}{\partial s}(t, 0) = 0, \quad (1.3)$$

где $\mathcal{B}_t$ и $\mathcal{B}_s$ – дифференциальные операторы Бесселя, примененные по переменным t и s соответственно. Решение задачи Коши (1.2), (1.3) может быть выписано и в явном виде:

$$T^s f(t) = u(t, s) = c_{\alpha} \int_0^{\pi} f(\sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos \varphi}) (\sin \varphi)^{2\alpha} d\varphi, \quad (1.4)$$

где

$$c_{\alpha} = \left(\int_0^{\pi} (\sin \varphi)^{2\alpha} d\varphi \right)^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1/2)}. \quad (1.5)$$

По формуле (1.4) оператор T^s продолжается до непрерывного оператора в пространстве $L_{p,\alpha}$.

Для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$ разности $\Delta_h^k f(t)$ порядка k ($k = 1, 2, 3, \dots$) с шагом $h > 0$ и модуль гладкости $\omega_k(f, \delta)_{p,\alpha}$ порядка k определяются соответственно формулами

$$\Delta_h^1 f(t) = \Delta_h f(t) := f(t) - T^h f(t), \quad \Delta_h^k f(t) := \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(t)), \quad k > 1, \quad (1.6)$$

$$\omega_k(f, \delta)_{p,\alpha} := \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k f\|_{p,\alpha}, \quad \delta > 0. \quad (1.7)$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, $\nu > 0$, множество всех функций $\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\Phi(t)$ – четная целая функция экспоненциального типа ν ;
- 2) $\Phi(t)$ принадлежит классу $L_{p,\alpha}$.

Функции из класса $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ будут использоваться в качестве средства приближения. Наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha}$ функциями из $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ определяется следующим образом:

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} := \inf\{\|f - \Phi\|_{p,\alpha} : \Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)\}. \quad (1.8)$$

Действие дифференциального оператора $\mathcal{B}$ естественным образом распространяется на пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'_+$, если положить

$$\langle \mathcal{B}f, \varphi \rangle := \langle f, \mathcal{B}\varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{D}'_+, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Следующая теорема является аналогом прямой теоремы Джексона в классической теории приближения функций (см. [14, гл. 5]).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть функции $f, \mathcal{B}f, \dots, \mathcal{B}^m f$, $m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, принадлежат пространству $L_{p,\alpha}$, где $\mathcal{B}$ – оператор Бесселя. Тогда для любого $\nu > 0$ справедливо неравенство

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \leq \frac{c}{\nu^{2m}} \omega_k\left(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{\nu}\right)_{p,\alpha},$$

где $c = c(k, m, \alpha) > 0$ – некоторая постоянная.

Пусть $W_{p,\alpha}^m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, – пространство Соболева, построенное по дифференциальному оператору $\mathcal{B}$, т. е.

$$W_{p,\alpha}^m := \{f \in L_{p,\alpha} : \mathcal{B}^j f \in L_{p,\alpha}, j = 1, \dots, m\}. \quad (1.9)$$

Определим K -функционал, построенный по пространствам $L_{p,\alpha}$ и $W_{p,\alpha}^m$:

$$K(f, t; L_{p,\alpha}; W_{p,\alpha}^m) := \inf\{\|f - g\|_{p,\alpha} + t\|\mathcal{B}^m g\|_{p,\alpha} : g \in W_{p,\alpha}^m\}, \quad (1.10)$$

где $f \in L_{p,\alpha}$, $t > 0$.

В следующей теореме устанавливается эквивалентность модуля гладкости и K -функционала.

ТЕОРЕМА 1.2. Существует постоянная $c = c(m, \alpha) > 0$ такая, что

$$\frac{1}{c} \omega_m(f, \delta)_{p,\alpha} \leq K(f, \delta^{2m}; L_{p,\alpha}; W_{p,\alpha}^m) \leq c \omega_m(f, \delta)_{p,\alpha},$$

где $f \in L_{p,\alpha}$, $\delta > 0$.

Для доказательства обратных теорем теории приближения используются различные аналоги неравенства Бернштейна. В настоящей работе такие аналоги получены для дифференциального оператора Бесселя и для дробной степени оператора Бесселя. В частности, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.3. Для любой функции $f(t) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}f\|_{p,\alpha} \leq (2\alpha + 2) \nu^2 \|f\|_{p,\alpha}. \quad (1.11)$$

Постоянная $2\alpha + 2$ в неравенстве (1.11) точная, если рассматривать все $p \in [1, +\infty]$.

Неравенство (1.11) является аналогом классического неравенства Бернштейна для целых функций экспоненциального типа (см. [14]).

Пусть $r > 0$ – действительное число, k и m – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $2k > r - 2m > 0$. Через $H_{p,\alpha}^r$ обозначим множество всех функций $f \in L_{p,\alpha}$ таких, что $\mathcal{B}f, \mathcal{B}^2f, \dots, \mathcal{B}^mf \in L_{p,\alpha}$ и для некоторого числа $A_f > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_k(\mathcal{B}^mf, \delta)_{p,\alpha} \leq A_f \delta^{r-2m}, \quad \delta > 0. \quad (1.12)$$

Для $f \in H_{p,\alpha}^r$ определим полунорму

$$h_{p,\alpha}^r(f) := \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_k(\mathcal{B}^mf, \delta)_{p,\alpha}}{\delta^{r-2m}}. \quad (1.13)$$

Множество $H_{p,\alpha}^r$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{H_{p,\alpha}^r} := \|f\|_{p,\alpha} + h_{p,\alpha}^r(f). \quad (1.14)$$

В следующей теореме дается описание пространства $H_{p,\alpha}^r$ через наилучшие приближения функциями из $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, в частности, из нее следует, что пространства $H_{p,\alpha}^r$ не зависят от чисел k и m . Через $c_1, c_2, \dots$ будем обозначать не зависящие от f положительные постоянные, которые могут зависеть от параметров k, r, m, α, p .

ТЕОРЕМА 1.4. *Если $f \in H_{p,\alpha}^r$, то при $\nu \geq 1$ справедливо неравенство*

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \leq c_1 \frac{h_{p,\alpha}^r(f)}{\nu^r}. \quad (1.15)$$

Обратно, если $f \in L_{p,\alpha}$ и при $\nu \geq 1$

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \leq \frac{A}{\nu^r}, \quad (1.16)$$

где A – не зависящая от ν (но зависящая от f) постоянная, то $f \in H_{p,\alpha}^r$ и выполнено неравенство

$$\|f\|_{H_{p,\alpha}^r} \leq c_2 (\|f\|_{p,\alpha} + A). \quad (1.17)$$

Пусть $1 \leq q \leq \infty$, $r > 0$, k и m – неотрицательные целые числа такие, что $2k > r - 2m > 0$. Аналогично [14] будем говорить, что функция f принадлежит классу Никольского–Бесова $B_{p,q,\alpha}^r$, если $f, \mathcal{B}f, \mathcal{B}^2f, \dots, \mathcal{B}^mf \in L_{p,\alpha}$ и конечна полунорма

$$b_{p,q,\alpha}^r(f) := \begin{cases} \left(\int_0^\infty \frac{(\omega_k(\mathcal{B}^mf, \delta)_{p,\alpha})^q}{\delta^{(r-2m)q}} \frac{d\delta}{\delta} \right)^{1/q} & \text{при } q < \infty, \\ \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_k(\mathcal{B}^mf, \delta)_{p,\alpha}}{\delta^{r-2m}} & \text{при } q = \infty. \end{cases}$$

Класс $B_{p,q,\alpha}^r$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{B_{p,q,\alpha}^r} := \|f\|_{p,\alpha} + b_{p,q,\alpha}^r(f). \quad (1.18)$$

Отметим, что $B_{p,\infty,\alpha}^r = H_{p,\alpha}^r$.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $a > 1$ – произвольное число (можно, например, взять $a = 2$). Для того чтобы функция $f \in L_{p,\alpha}$ принадлежала классу $B_{p,q,\alpha}^r$, необходимо и достаточно, чтобы была конечна полунорма

$$\tilde{b}_{p,q,\alpha}^r(f) := \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{nrq} (E_{a^n}(f)_{p,\alpha})^q \right)^{1/q} & \text{при } q < \infty, \\ \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} a^{nr} E_{a^n}(f)_{p,\alpha} & \text{при } q = \infty, \end{cases}$$

где $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. При этом норма (1.18) в $B_{p,q,\alpha}^r$ эквивалентна норме

$$\|f\|_{p,\alpha} + \tilde{b}_{p,q,\alpha}^r(f). \quad (1.19)$$

Доказательство теорем 1.1–1.5 является главной целью настоящей работы. В § 2 собраны необходимые для дальнейшего сведения о преобразованиях Бесселя и обобщенных сдвигах Бесселя. В § 3 изучаются различные свойства целых функций из класса $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$. Для них получены интерполяционные теоремы, неравенства типа Бернштейна (в том числе теорема 1.3), а также аналог неравенства разных метрик С. М. Никольского. В § 4 доказываются теоремы 1.1 и 1.2. В § 5 доказываются теоремы 1.4 и 1.5, а также получены различные нормировки пространств $B_{p,q,\alpha}^r$.

Обобщенные сдвиги Бесселя и пространства $L_{p,\alpha}$ имеют простой геометрический смысл, если число α целое или полуцелое. Если $\alpha = \frac{n}{2} - 1$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $n \geq 2$, то пространство $L_{p,\alpha}$ изоморфно подпространству радиальных функций в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ (напомним, что функция $F(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ называется *радиальной*, если $F(gx) = F(x)$ для всех ортогональных преобразований $g \in O(n, \mathbb{R})$). Изоморфизм задается отображением $P: f(t) \mapsto F(x) = f(|x|)$, где $f(t) \in L_{p, \frac{n}{2}-1}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. При этом изоморфизме обобщенный сдвиг Бесселя соответствует оператору усреднения по сферам, т. е. если $P(f(t)) = F(x)$, то

$$P(T^s f(t)) = \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} F(x + sw) dw,$$

где σ – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $w \in \sigma$, dw – элемент площади сферы, $|\sigma|$ – полная площадь всей сферы.

Модули гладкости, построенные на основе оператора усреднения по сферам (и более общие модули гладкости с интегральным усреднением разностей [15]) используются в теории приближения функций (см., например, [16], [17]). Отметим также, что оператор усреднения по сферам широко используется в качестве аналога оператора сдвига на различных римановых многообразиях (например, на сфере и на пространстве Лобачевского), где также можно изучать различные задачи теории приближения функций (см. [18]–[23] и цитируемую в этих работах литературу).

Результаты § 3 настоящей работы анонсированы в заметке [24].

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания и за совет получить аналог неравенства Боаса (см. предложение 4.4 и следствие 4.3).

§ 2. Преобразование Бесселя и обобщенные сдвиги Бесселя

Приведем необходимые для дальнейшего сведения о преобразованиях Бесселя и обобщенных сдвигах Бесселя (см. [9], [10], [25]).

Преобразованием Бесселя называется следующее интегральное преобразование:

$$\mathcal{F}: f(t) \mapsto \hat{f}(\lambda) = \int f(t) j_\alpha(\lambda t) t^{2\alpha+1} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (2.1)$$

Обратное преобразование Бесселя задается формулой

$$\mathcal{F}^{-1}: g(\lambda) \mapsto \tilde{g}(t) = (2^\alpha \Gamma(\alpha + 1))^{-2} \int g(\lambda) j_\alpha(\lambda t) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda, \quad (2.2)$$

т. е. $\mathcal{F}^{-1} = (2^\alpha \Gamma(\alpha + 1))^{-2} \mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{S}$ – пространство основных функций на $\mathbb{R}$, т. е. множество всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, убывающих при $|t| \rightarrow \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|t|^{-1}$. Обычным образом пространство $\mathcal{S}$ снабжается топологией и становится локально выпуклым пространством (см. [26] или [14]). Пусть $\mathcal{S}'$ – множество линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{S}$, т. е. пространство обобщенных функций медленного роста. Обычным образом $\mathcal{S}'$ снабжается структурой топологического векторного пространства. Через $\mathcal{S}_+$ обозначим подпространство в $\mathcal{S}$, состоящее из четных функций. Пространство $\mathcal{S}_+$ снабжается индуцированной из пространства $\mathcal{S}$ топологией. Пусть $\mathcal{S}'_+$ – пространство четных обобщенных функций медленного роста, т. е. множество линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{S}_+$. Для $f \in \mathcal{S}'_+$ и $\varphi \in \mathcal{S}_+$ через $\langle f, \varphi \rangle$ будем обозначать значение функционала f на функции φ . Пространства $L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, вкладываются в пространство $\mathcal{S}'_+$, если для $f(t) \in L_{p,\alpha}$ и $\varphi(t) \in \mathcal{S}_+$ положить

$$\langle f, \varphi \rangle := \int f(t) \varphi(t) t^{2\alpha+1} dt. \quad (2.3)$$

Поскольку дифференциальный оператор Бесселя удовлетворяет условию

$$\langle \mathcal{B}\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \mathcal{B}\varphi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}_+,$$

то действие оператора $\mathcal{B}$ естественным образом продолжается на обобщенные функции по формуле

$$\langle \mathcal{B}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{B}\varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{S}'_+, \quad \varphi \in \mathcal{S}_+. \quad (2.4)$$

Если $h(t)$ – любая четная бесконечно дифференцируемая функция, любая производная которой растет при $t \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени t (будем называть такие функции *бесконечно дифференцируемыми функциями полиномиального роста*), то определено произведение функции $h(t)$ на обобщенную функцию $f \in \mathcal{S}'_+$. По определению

$$\langle hf, \varphi \rangle := \langle f, h\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}_+.$$

Будем также называть такие функции $h(t)$ *мультипликаторами* на пространстве $\mathcal{S}'_+$.

Пусть a – произвольное положительное число. Оператор растяжения Γ^a : $\varphi(t) \mapsto \varphi(at)$ является автоморфизмом пространства $\mathcal{S}_+$. Этот оператор можно распространить и на обобщенные функции. Если $f \in \mathcal{S}'_+$, то по определению

$$\langle \Gamma^a f, \varphi \rangle := a^{-2\alpha-2} \langle f, \Gamma^{\frac{1}{a}} \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}'_+. \quad (2.5)$$

Для краткости будем использовать запись $f(at)$ вместо $\Gamma^a f$ и для случая, когда f – обобщенная функция.

Известно (см. [12]), что прямое и обратное преобразования Бесселя являются взаимно обратными автоморфизмами пространства $\mathcal{S}_+$. Для преобразования Бесселя справедливо равенство Парсеваля

$$\int \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda = A \int f(t) g(t) t^{2\alpha+1} dt, \quad (2.6)$$

где $f(t), g(t) \in \mathcal{S}_+$,

$$A = (2^\alpha \Gamma(\alpha + 1))^2. \quad (2.7)$$

Равенство (2.6) можно также записать в виде

$$\langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle = A \langle f, g \rangle \quad (2.8)$$

или

$$\langle \mathcal{F}(f), g \rangle = A \langle f, \mathcal{F}^{-1}(g) \rangle, \quad (2.9)$$

а так как $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{A} \mathcal{F}$, то из (2.9) следует, что

$$\langle \mathcal{F}(f), g \rangle = \langle f, \mathcal{F}(g) \rangle. \quad (2.10)$$

Преобразование Бесселя распространяется и на более широкий, чем $\mathcal{S}_+$, класс функций. С учетом равенства (2.10) преобразование Бесселя $\mathcal{F}(f)$ для $f \in \mathcal{S}'_+$ определяется формулой

$$\langle \mathcal{F}(f), \varphi \rangle := \langle f, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}_+. \quad (2.11)$$

Тогда $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}'_+$ и $\mathcal{F}$ является автоморфизмом пространства $\mathcal{S}'_+$. Как и в случае пространства $\mathcal{S}_+$, здесь обратное преобразование Бесселя отличается от прямого преобразования Бесселя только числовым множителем: $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{A} \mathcal{F}$.

Отметим важное свойство преобразования Бесселя: если $f \in \mathcal{S}'_+$, то

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}f) = -\lambda^2 \mathcal{F}(f). \quad (2.12)$$

Для функций из класса $L_{1,\alpha}$ преобразование Бесселя можно определить непосредственно по формуле (2.1). При этом если $f(t) \in L_{1,\alpha}$, то функция $\hat{f}(\lambda)$ непрерывная, ограниченная ($\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{1,\alpha}$) и $\hat{f}(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Если дополнительно выполняется условие $\mathcal{B}^n f \in L_{1,\alpha}$, то для функции $\hat{f}(\lambda)$ справедлива оценка

$$|\hat{f}(\lambda)| \leq \frac{c(n)}{\lambda^{2n}}, \quad \lambda > 0, \quad (2.13)$$

где $c(n)$ – некоторая положительная постоянная. Действительно, из (2.12) вытекает, что

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}^n f)(\lambda) = (-1)^n \lambda^{2n} \hat{f}(\lambda),$$

а так как $\mathcal{F}(\mathcal{B}^n f)$ – непрерывная и ограниченная функция, то неравенство (2.13) справедливо при $c(n) = \|\mathcal{F}(\mathcal{B}^n f)\|_\infty$.

Пусть Γ^a – оператор растяжения (см. (2.5)), $a > 0$. Легко видеть, что

$$\mathcal{F}(\Gamma^a f) = a^{-2\alpha-2} \Gamma^{1/a}(\mathcal{F}(f)), \quad f \in \mathcal{S}'_+,$$

т. е. если $\mathcal{F}(f(t)) = \hat{f}(\lambda)$, то

$$\mathcal{F}(f(at)) = a^{-2\alpha-2} \hat{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right). \quad (2.14)$$

Определение обобщенного сдвига Бесселя $T^s f(t)$ и его явный вид приведены в § 1. По формуле (1.4) оператор T^s распространяется на все четные непрерывные функции, в частности на функции из $\mathcal{S}_+$. Легко видеть, что T^s является непрерывным оператором в $\mathcal{S}_+$.

Приведем некоторые свойства обобщенного сдвига Бесселя (см. [9], [10]), при этом всюду $t, s, \lambda \in \mathbb{R}_+$.

1) Для любых $t, s, \lambda \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$T^s j_\alpha(\lambda t) = j_\alpha(\lambda s) j_\alpha(\lambda t). \quad (2.15)$$

2) Самосопряженность оператора: если $f(t)$ – непрерывная функция из класса $L_{1,\alpha}$ и $g(t)$ – непрерывная, четная и ограниченная функция на $\mathbb{R}$, то

$$\int T^s f(t) g(t) t^{2\alpha+1} dt = \int f(t) T^s g(t) t^{2\alpha+1} dt. \quad (2.16)$$

3) Для любых $s, t \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$T^s f(t) = T^t f(s). \quad (2.17)$$

С учетом (2.16) мы можем распространить действие обобщенного сдвига Бесселя на пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'_+$. По определению

$$\langle T^s f, \varphi \rangle := \langle f, T^s \varphi \rangle \quad (2.18)$$

для $f \in \mathcal{S}'_+$, $\varphi \in \mathcal{S}_+$. Тогда T^s будет линейным непрерывным оператором в пространстве $\mathcal{S}'_+$.

Следующие соотношения связывают обобщенные сдвиги Бесселя и преобразование Бесселя:

$$\mathcal{F}(T^s f) = j_\alpha(s\lambda) \mathcal{F}(f), \quad T^s(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(j_\alpha(st) f(t)), \quad f \in \mathcal{S}'_+. \quad (2.19)$$

Проверим, что операторы T^s и $\mathcal{B}$ перестановочны, т. е.

$$\mathcal{B}(T^s f) = T^s(\mathcal{B}f), \quad f \in \mathcal{S}'_+. \quad (2.20)$$

Свойство (2.20) можно доказать, применив к обеим частям этой формулы преобразование Бесселя. Из свойств (2.12) и (2.19) следует, что

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}(T^s f)) = -\lambda^2 j_\alpha(s\lambda) \hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}(T^s(\mathcal{B}f)).$$

Проверим, что *обобщенный сдвиг Бесселя* T^s является непрерывным оператором в банаховом пространстве $L_{p,\alpha}$ при $1 \leq p \leq \infty$. Из формулы (1.4) для оператора T^s следует, что

$$\|T^s f\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad (2.21)$$

поэтому T^s является непрерывным оператором в $L_{\infty,\alpha}$. Поскольку

$$|t - s| \leq \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos \varphi} \leq t + s,$$

то можно написать и более сильное, чем (2.21), неравенство:

$$|T^s f(t)| \leq \sup_{0 \leq u \leq t+s} |f(u)|. \quad (2.22)$$

Далее пусть $1 \leq p < \infty$. Проверим, что

$$|T^s f(t)|^p \leq T^s(|f(t)|^p) \quad (2.23)$$

для любой непрерывной функции $f(t)$. Для этого на отрезке $[0, \pi]$ введем меру $dm(\varphi) = c_\alpha (\sin \varphi)^{2\alpha} d\varphi$, где c_α — коэффициент из формулы (1.4). Далее, используя формулу (1.4) и неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} |T^s f(t)| &= \left| \int_0^\pi f(\sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos \varphi}) \cdot 1 dm(\varphi) \right| \\ &\leq \left(\int_0^\pi |f(\sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos \varphi})|^p dm(\varphi) \right)^{1/p} \left(\int_0^\pi dm(\varphi) \right)^{1/q} = (T^s(|f(t)|^p))^{1/p}, \end{aligned}$$

где $1/p + 1/q = 1$. Из последнего неравенства вытекает неравенство (2.23).

Проверим, что

$$\|T^s f\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha} \quad (2.24)$$

при $f \in \mathcal{S}_+$. Действительно, используя (2.23) и самосопряженность оператора T^s , получим

$$\begin{aligned} \|T^s f\|_{p,\alpha}^p &= \int |T^s f(t)|^p t^{2\alpha+1} dt \leq \int T^s(|f(t)|^p) \cdot 1 t^{2\alpha+1} dt \\ &= \int |f(t)|^p (T^s 1) t^{2\alpha+1} dt = \int |f(t)|^p t^{2\alpha+1} dt = \|f\|_{p,\alpha}^p, \end{aligned}$$

откуда вытекает (2.24). При этом было использовано очевидное равенство $T^s 1 = 1$.

Поскольку $\mathcal{S}_+$ является плотным линейным подмножеством в банаховом пространстве $L_{p,\alpha}$ при $p < \infty$, то из неравенства (2.24) следует, что оператор T^s на $\mathcal{S}_+$ продолжается по непрерывности до ограниченного оператора T^s в $L_{p,\alpha}$, и неравенство (2.24) остается справедливым и для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$.

Проверим, что для любой функции $f(t) \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, отображение $s \mapsto T^s f$ из $\mathbb{R}_+$ в $L_{p,\alpha}$ непрерывно, т. е.

$$\|T^{s+\delta} f - T^s f\|_{p,\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.25)$$

Пусть $p = \infty$, тогда функция $f(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим функцию

$$r(s, t, \varphi) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos \varphi}, \quad t > 0.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{s - t \cos \varphi}{\sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos \varphi}} = \frac{s - t \cos \varphi}{\sqrt{(s - t \cos \varphi)^2 + t^2 \sin^2 \varphi}},$$

поэтому

$$\left| \frac{\partial r}{\partial s}(s, t, \varphi) \right| \leq 1. \quad (2.26)$$

Из неравенства (2.26) вытекает, что

$$|r(s + \delta, t, \varphi) - r(s, t, \varphi)| \leq |\delta|. \quad (2.27)$$

Поскольку формулу (1.4) для обобщенного сдвига T^s можно записать в виде

$$T^s f(t) = \int_0^\pi f(r(s, t, \varphi)) dm(\varphi),$$

то, пользуясь (2.27) и равномерной непрерывностью функции $f(t)$, легко получить, что

$$\|T^{s+\delta} f - T^s f\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

Пусть $1 \leq p < \infty$; тогда в $L_{p,\alpha}$ всюду плотное множество образуют непрерывные функции с компактными носителями. Если $f(t)$ – непрерывная функция с компактным носителем, то она равномерно непрерывна и соотношение (2.25) следует из (2.28). В общем случае соотношение (2.25) легко получить, приближая f (по норме $\|\cdot\|_{p,\alpha}$) такими функциями.

Свертка функций $f(t)$ и $g(t)$ на $\mathbb{R}_+$ определяется соотношением

$$(f * g)(s) := \int (T^s f)(t) g(t) t^{2\alpha+1} dt. \quad (2.29)$$

Свертка имеет смысл, когда определен интеграл в правой части (2.29), в частности когда $f, g \in \mathcal{S}_+$, причем тогда и свертка $f * g$ принадлежит $\mathcal{S}_+$.

Приведем некоторые свойства свертки.

1) Свертка ассоциативна, т. е.

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

2) Свертка коммутативна, т. е.

$$f * g = g * f. \quad (2.30)$$

3) При преобразовании Бесселя свертка функций переходит в произведение их преобразований Бесселя, т. е.

$$(\widehat{f * g})(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda). \quad (2.31)$$

4) Оператор Бесселя действует на свертку следующим образом:

$$\mathcal{B}(f * g) = (\mathcal{B}f) * g = f * (\mathcal{B}g). \quad (2.32)$$

Эти свойства справедливы при $f, g, h \in \mathcal{S}_+$ и остаются справедливыми и при значительно более слабых условиях на функции f, g и h (см. [10]).

5) Если $f \in L_{1,\alpha}$, $g \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, то свертки $f * g$ и $g * f$ определены и принадлежат $L_{p,\alpha}$. При этом выполнено равенство (2.30), а также неравенство

$$\|f * g\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{1,\alpha} \|g\|_{p,\alpha}. \quad (2.33)$$

Далее нам понадобится еще свертка функций для случая, когда f – обобщенная функция из класса $\mathcal{S}'_+$, а g – функция из класса $\mathcal{S}_+$. В этом случае свертка $f * g$ определяется формулой

$$(f * g)(s) := \langle f, T^s g \rangle, \quad s \in \mathbb{R}_+. \quad (2.34)$$

Тогда $(f * g)(s)$ является четной бесконечно дифференцируемой функцией полиномиального роста. Отметим также, что в этом случае остаются справедливыми свойства (2.31) и (2.32).

Через $\text{supp } f$ будем обозначать носитель функции f . Если f – обычная или обобщенная функция на $\mathbb{R}_+$, то $\text{supp } f$ – замкнутое подмножество в $\mathbb{R}_+$. Если $f \in \mathcal{S}'_+$ и $\text{supp } f$ – компактное подмножество, то преобразование Бесселя $\hat{f}(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение на комплексные значения λ и продолженная функция $\hat{f}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, является целой четной функцией. Следующие теоремы (см., например, [10] или [25]) являются аналогами теоремы Пэли–Винера.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\varphi(t)$ – функция из класса $\mathcal{S}_+$ и $\hat{\varphi}(\lambda)$ – ее преобразование Бесселя. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\text{supp } \varphi \subseteq [0, \nu]$;
- 2) $\hat{\varphi}(\lambda)$ – целая четная функция и для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ найдется постоянная c_m такая, что

$$|\hat{\varphi}(\lambda)| \leq c_m (1 + |\lambda|)^{-m} e^{\nu |\text{Im } \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $f(t)$ – обобщенная функция из класса $\mathcal{S}'_+$ и $\hat{f}(\lambda)$ – ее преобразование Бесселя. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\text{supp } f \subseteq [0, \nu]$;
- 2) $\hat{f}(\lambda)$ – целая четная функция и для некоторых постоянных $C, N > 0$

$$|\hat{f}(\lambda)| \leq C (1 + |\lambda|)^N e^{\nu |\text{Im } \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Из теоремы 2.2, в частности, вытекает, что если $f \in \mathcal{S}'_+$ и $\text{supp } f \subseteq [0, \nu]$, то $\hat{f}(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа ν .

§ 3. Свойства целых функций из класса $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$

Напомним, что через $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ обозначается множество всех функций $\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\Phi(t)$ – четная целая функция экспоненциального типа ν ;
- 2) $\Phi(t)$ принадлежит классу $L_{p,\alpha}$.

Поскольку $\Phi(t)$ – целая функция, то она допускает аналитическое продолжение на комплексные значения t и, если необходимо, будем считать, что $t \in \mathbb{C}$.

В этом параграфе мы рассматриваем некоторые свойства функций из класса $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, для них, в частности, получены интерполяционные теоремы и аналогии неравенств Бернштейна и Никольского.

Отметим, что в частном случае, когда α – целое или полуцелое число (т. е. $\alpha = \frac{n}{2} - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), пространство $\mathfrak{M}(\nu, p, \frac{n}{2} - 1)$ изоморфно подпространству радиальных функций в пространстве $\mathcal{SM}(p, \nu)$ целых функций экспоненциального сферического типа ν на $\mathbb{R}^n$, принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R}^n)$ (см. [14]). Изоморфизм задается отображением $P: f(t) \mapsto F(x) = f(|x|)$, где $f(t) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \frac{n}{2} - 1)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Поэтому в этом случае некоторые свойства функций из класса $\mathfrak{M}(\nu, p, \frac{n}{2} - 1)$ можно получить из соответствующих свойств функций из класса $\mathcal{SM}(p, \nu)$.

Будем обозначать через $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ прямое преобразование Бесселя, а через $\mathcal{F}^{-1}: g \mapsto \tilde{g}$ обратное преобразование Бесселя (см. § 2). Все функции определены на $\mathbb{R}_+$ и, если необходимо, по четности продолжены на $\mathbb{R}$. Переменные в функциях будем обозначать, как правило, буквами x, t, λ . Функции f и g могут быть как обычными, так и обобщенными функциями из класса $\mathcal{S}'_+$. В частности, можно взять $f, g \in L_{p, \alpha} \subset \mathcal{S}'_+$, тогда их образы $\hat{f}$ и $\tilde{g}$ будут, в общем случае, обобщенными функциями из $\mathcal{S}'_+$. Поскольку прямое и обратное преобразования Бесселя отличаются только числовым множителем, то из каждого свойства преобразования Бесселя можно получить соответствующее свойство обратного преобразования Бесселя, причем часто эти свойства совпадают.

ЛЕММА 3.1. *Если $\Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то $\tilde{\Phi}$ – обобщенная функция с компактным носителем и $\text{supp } \tilde{\Phi} \subseteq [0, \nu]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Phi(x) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то она принадлежит и обычному классу $L_p(\mathbb{R})$ (без веса). По известным свойствам целых функций (см. [14, гл. 3]) если $\Phi(x)$ – целая функция экспоненциального типа ν и $\Phi(x) \in L_p(\mathbb{R})$, то она ограничена на $\mathbb{R}$ и для некоторой постоянной $A > 0$ справедливо неравенство

$$|\Phi(z)| \leq A e^{\nu |\text{Im } z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Из неравенства (3.1) следует, что для функции $\Phi(z)$ выполняется условие 2) теоремы 2.2. Поэтому из теоремы 2.2 вытекает, что $\text{supp } \tilde{\Phi} \subseteq [0, \nu]$.

В гармоническом анализе Бесселя одну из центральных ролей играет интегральный оператор Пуассона. Приведем необходимые сведения об этом операторе (см. [9]).

Пусть $\alpha > -1/2$, $f(t) \in C(\mathbb{R}_+)$. Оператором Пуассона будем называть интегральный оператор

$$P^{(\alpha)}: f(t) \mapsto g(x), \quad (3.2)$$

где

$$g(x) = d_\alpha x^{-2\alpha} \int_0^x f(t) (x^2 - t^2)^{\alpha-1/2} dt, \quad (3.3)$$

$$d_\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)}. \quad (3.4)$$

Если сделать замену $t = x \sin \theta$, то $g(x)$ можно также представить в виде

$$g(x) = d_\alpha \int_0^{\pi/2} f(x \sin \theta) (\cos \theta)^{2\alpha} d\theta. \quad (3.5)$$

Отметим следующие свойства оператора Пуассона:

- 1) $P^{(\alpha)}(1) = 1$;
- 2) оператор $P^{(\alpha)}$ переводит пространство $C(\mathbb{R}_+)$ в себя, и если $g = P^{(\alpha)}(f)$, то $g(0) = f(0)$ и выполнено неравенство

$$|g(x)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t)|;$$

- 3) справедливо равенство

$$P^{(\alpha)}(\cos(\lambda t)) = j_\alpha(\lambda x); \quad (3.6)$$

- 4) оператор $P^{(\alpha)}$ является автоморфизмом пространства $C^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$.

Заметим, что свойство 4) не сформулировано в явном виде в работе [9], но из формулы (3.5) следует, что оператор $P^{(\alpha)}$ переводит бесконечно дифференцируемые функции в бесконечно дифференцируемые, а для обратного оператора $(P^{(\alpha)})^{-1}$ на пространстве $C^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ в работе [9] приводится явный вид $((P^{(\alpha)})^{-1})$ выражается через интегральный оператор Сонина и операторы дифференцирования). Мы не будем здесь приводить формулы для обратного оператора, так как они не потребуются для дальнейшего.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\Omega(x) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$. Для любого $\nu > 0$ на отрезке $[0, \nu]$ функцию $\Omega(x)$ можно разложить в ряд:

$$\Omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\nu j_\alpha\left(\frac{\pi}{\nu} kx\right), \quad x \in [0, \nu], \quad (3.7)$$

где $c_k^\nu \in \mathbb{C}$. При этом коэффициенты c_k^ν удовлетворяют следующим условиям:

- 1) непрерывно зависят от ν ;
- 2) для любого $\nu_0 > 0$ существуют $c_k = c_k(\nu_0)$ такие, что $|c_k^\nu| \leq c_k$ при $0 < \nu \leq \nu_0$ и $\sum_k c_k < \infty$.

В частности, ряд (3.7) абсолютно сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку оператор Пуассона $P^{(\alpha)}$ является автоморфизмом пространства $C^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$, то функцию $\Omega(x)$ можно представить в виде

$$\Omega(x) = d_\alpha x^{-2\alpha} \int_0^x g(t) (x^2 - t^2)^{\alpha-1/2} dt,$$

где $g(t) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$. Функцию $g(t)$ разложим в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0, \nu]$:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\nu \cos\left(\frac{\pi}{\nu} kt\right), \quad (3.8)$$

где

$$c_k^\nu = \frac{2}{\nu} \int_0^\nu g(t) \cos\left(\frac{\pi}{\nu} kt\right) dt. \quad (3.9)$$

Для того, чтобы получить оценки для коэффициентов c_k^ν , проинтегрируем равенство (3.9) по частям два раза:

$$c_k^\nu = \frac{2\nu}{\pi^2 k^2} \left(g'(\nu) \cos(\pi k) - \int_0^\nu g''(t) \cos\left(\frac{\pi}{\nu} kt\right) dt \right).$$

Можно написать оценку

$$\begin{aligned} |c_k^\nu| &\leq \frac{1}{k^2} \left(\frac{2\nu|g'(\nu)|}{\pi^2} + \int_0^\nu |g''(t)| dt \right) \\ &\leq \frac{1}{k^2} \left(\frac{2}{\pi^2} \max_{0 \leq \nu \leq \nu_0} \nu |g'(\nu)| + \int_0^{\nu_0} |g''(t)| dt \right) =: c_k. \end{aligned}$$

Очевидно, что при этом выполняются условия 1) и 2).

Применим к обеим частям равенства (3.8) оператор Пуассона $P^{(\alpha)}$. В силу свойств оператора $P^{(\alpha)}$ получим равенство (3.7).

ЛЕММА 3.3. Пусть $f(x) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$. Определим функцию

$$f_\delta(x) := f(x) \left(\frac{\sin(\delta x)}{\delta x} \right)^k,$$

где k – натуральное число, $\delta > 0$. Тогда:

- 1) $f_\delta(x)$ – целая функция экспоненциального типа $\nu + k\delta$;
- 2) $f_\delta(x) \in L_{p,\alpha}$ и $\|f_\delta\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}$;
- 3) $f_\delta(x) \in \mathfrak{M}(\nu + k\delta, 1, \alpha)$ при $k \geq 2[\alpha] + 4$ ($[\alpha]$ – целая часть α);
- 4) $f_\delta(x) \rightarrow f(x)$ при $\delta \rightarrow 0$ в пространстве $\mathcal{S}'_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) вытекает из того, что $\frac{\sin(\delta x)}{\delta x}$ – целая четная функция экспоненциального типа δ .

Утверждение 2) следует из того, что $\left| \frac{\sin(\delta x)}{\delta x} \right| \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}$.

Чтобы доказать утверждение 3), докажем, что $f_\delta \in L_{1,\alpha}$. Для этого достаточно показать, что

$$\int_1^\infty |f_\delta(x)| x^{2\alpha+1} dx < \infty. \quad (3.10)$$

Поскольку $f \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то она ограничена на $\mathbb{R}$; тогда

$$\int_1^\infty |f_\delta(x)| x^{2\alpha+1} dx \leq \|f\|_\infty \delta^{-k} \int_1^\infty x^{-k} x^{2\alpha+1} dx < \infty$$

при $2\alpha - k + 1 < -1$. В частности, (3.10) справедливо при $k \geq 2[\alpha] + 4$.

Чтобы доказать утверждение 4), достаточно показать, что $\langle f_\delta, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ при $\delta \rightarrow 0$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}_+$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Выберем число $N > 0$ настолько большим, чтобы

$$\int_N^{+\infty} |\varphi(x)| x^{2\alpha+1} dx < \varepsilon.$$

Пусть при $0 < \delta < \delta_0$ выполняется неравенство $|1 - (\frac{\sin(\delta x)}{\delta x})^k| < \varepsilon$ для любого $x \in [0, N]$. Тогда

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle - \langle f_\delta, \varphi \rangle| &= |\langle f - f_\delta, \varphi \rangle| \\ &\leq \int_0^\infty |f(x)| \left| 1 - \left(\frac{\sin(\delta x)}{\delta x} \right)^k \right| |\varphi(x)| x^{2\alpha+1} dx \\ &= \int_0^N |f(x)| \left| 1 - \left(\frac{\sin(\delta x)}{\delta x} \right)^k \right| |\varphi(x)| x^{2\alpha+1} dx \\ &\quad + \int_N^\infty |f(x)| \left| 1 - \left(\frac{\sin(\delta x)}{\delta x} \right)^k \right| |\varphi(x)| x^{2\alpha+1} dx \\ &\leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_{1,\alpha} \varepsilon + 2\|f\|_\infty \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что $\langle f_\delta, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ при $\delta \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\Omega(x)$ – бесконечно дифференцируемая четная функция на $\mathbb{R}$ полиномиального роста. Пусть $\nu > 0$ и

$$\Omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\nu j_\alpha \left(\frac{\pi}{\nu} kx \right), \quad x \in [0, \nu],$$

– разложение, удовлетворяющее условиям 1) и 2) леммы 3.2. Тогда для любой функции $f(x) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ имеет место равенство

$$\widehat{\Omega(t) \tilde{f}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\nu (T^{\frac{\pi k}{\nu}} f)(x), \quad (3.11)$$

где ряд сходится в пространстве $L_{p,\alpha}$ и равномерно на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) Пусть функция $f(x)$ и ее обратное преобразование Бесселя $\tilde{f}(t)$ принадлежат пространству $L_{1,\alpha}$. Поскольку преобразования Бесселя переводят функции из класса $L_{1,\alpha}$ в непрерывные и ограниченные функции, то функции $f(x) = \mathcal{F}(\tilde{f})$ и $\tilde{f}(t) = \mathcal{F}^{-1}(f)$ непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$. Из леммы 3.1 следует, что функция $\tilde{f}(t)$ равна нулю при $|t| > \nu$. Определим функцию

$$\omega_\nu(t) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\nu j_\alpha \left(\frac{\pi}{\nu} kx \right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Так как $\sum_k |c_k^\nu| < \infty$, то ряд (3.12) равномерно сходится и функция $\omega_\nu(t)$ является непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$.

Функция $\omega_\nu(t)$ совпадает с $\Omega(t)$ при $|t| \leq \nu$, поэтому

$$\omega_\nu(t) \tilde{f}(t) = \Omega(t) \tilde{f}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для доказательства равенства (3.11) достаточно показать, что

$$\widehat{\omega_\nu(t) \tilde{f}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\nu (T^{\frac{\pi k}{\nu}} f)(x). \quad (3.13)$$

Поскольку $\|T^s f\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}$ (см. (2.24)) для любого $1 \leq p \leq \infty$, то ряд в правой части (3.13) сходится в метрике $L_{p,\alpha}$ и равномерно на $\mathbb{R}$.

Пусть

$$S_N(t) := \sum_{k=0}^N c_k^\nu j_\alpha \left(\frac{\pi}{\nu} kx \right) \quad (3.14)$$

– частичная сумма ряда (3.12). Последовательность $S_N(t)$ равномерно сходится к $\omega_\nu(t)$ при $n \rightarrow \infty$. Учитывая, что $\tilde{f} \in L_{1,\alpha}$, получим

$$\begin{aligned} |\widehat{\omega_\nu \tilde{f}}(x) - \widehat{S_N \tilde{f}}(x)| &= |\mathcal{F}((\omega_\nu - S_N)\tilde{f})(x)| \\ &\leq \int_0^\infty \|\omega_\nu - S_N\|_\infty |\tilde{f}(t)| t^{2\alpha+1} dt = \|\omega_\nu - S_N\|_\infty \|\tilde{f}\|_{1,\alpha}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|\widehat{\omega_\nu \tilde{f}} - \widehat{S_N \tilde{f}}\|_\infty \rightarrow 0 \quad (3.15)$$

при $N \rightarrow \infty$. Используя свойство (2.19) обобщенного сдвига Бесселя, имеем

$$\widehat{S_N \tilde{f}} = \sum_{k=0}^N c_k^\nu \mathcal{F} \left(j_\alpha \left(\frac{\pi}{\nu} kt \right) \tilde{f}(t) \right) = \sum_{k=0}^N c_k^\nu (T_{\frac{\pi}{\nu} k} f)(x). \quad (3.16)$$

Поэтому из (3.15) и (3.16) вытекает равенство (3.13).

Б) Пусть $f(x) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$, и

$$f_\delta(x) = f(x) \left(\frac{\sin(\delta x)}{\delta x} \right)^r,$$

где $r = 2[\alpha] + 4$. Тогда по лемме 3.3 имеем $f_\delta \in \mathfrak{M}(\nu + r\delta, 1, \alpha) \cap L_{p,\alpha}$. Следовательно, $\widehat{f_\delta}(t)$ – непрерывная функция с носителем на отрезке $[0, \nu + r\delta]$, в частности $\widehat{f_\delta} \in L_{1,\alpha}$. Из п. А) следует, что справедливо равенство

$$\widehat{\Omega(t) \widehat{f_\delta}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\nu+r\delta} (T_{\frac{\pi k}{\nu+r\delta}} f_\delta)(x). \quad (3.17)$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Предел берется в слабом смысле, т. е. в пространстве $\mathcal{S}'_+$.

Поскольку $f_\delta \rightarrow f$ в $\mathcal{S}'_+$ (лемма 3.3), а преобразование Бесселя и умножение на $\Omega(t)$ являются непрерывными операторами в $\mathcal{S}'_+$, то

$$\widehat{\Omega(t) \widehat{f_\delta}(t)} \rightarrow \widehat{\Omega(t) \widehat{f}(t)} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (3.18)$$

Пусть

$$\Lambda_\delta(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\nu+r\delta} (T_{\frac{\pi k}{\nu+r\delta}} f_\delta)(x), \quad \Lambda(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\nu (T_{\frac{\pi k}{\nu}} f)(x).$$

Далее будет показано, что

$$\Lambda_\delta(x) \rightarrow \Lambda(x) \quad (3.19)$$

при $\delta \rightarrow 0$ в пространстве $\mathcal{S}'_+$. В дальнейших вычислениях мы будем использовать следующее легко проверяемое неравенство:

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_{1,\alpha}, \quad f \in L_{\infty,\alpha}, \quad \varphi \in \mathcal{S}_+. \quad (3.20)$$

В) Докажем, что для любого k

$$c_k^{\nu+r\delta} T^{\frac{\pi k}{\nu+r\delta}} f_\delta \rightarrow c_k^\nu T^{\frac{\pi k}{\nu}} f \quad (3.21)$$

в пространстве $\mathcal{S}'_+$ при $\delta \rightarrow 0$. Поскольку коэффициент $c_k^{\nu+r\delta}$ непрерывно зависит от δ , то достаточно показать, что

$$\langle T^{\frac{\pi k}{\nu+r\delta}} f_\delta, \varphi \rangle \rightarrow \langle T^{\frac{\pi k}{\nu}} f, \varphi \rangle \quad (3.22)$$

при $\delta \rightarrow 0$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}_+$. Пусть

$$\begin{aligned} I(\delta) &:= \langle T^{\frac{\pi k}{\nu+r\delta}} f_\delta, \varphi \rangle - \langle T^{\frac{\pi k}{\nu}} f, \varphi \rangle \\ &= \langle (T^{\frac{\pi k}{\nu+r\delta}} - T^{\frac{\pi k}{\nu}}) f_\delta, \varphi \rangle + \langle T^{\frac{\pi k}{\nu}} (f_\delta - f), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Используя неравенства $\|T^s f\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}$ и $\|f_\delta\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}$, а также неравенство (3.20) и самосопряженность оператора T^s , получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} |I(\delta)| &\leq |\langle f_\delta, (T^{\frac{\pi k}{\nu+r\delta}} - T^{\frac{\pi k}{\nu}}) \varphi \rangle| + |\langle f_\delta - f, T^{\frac{\pi k}{\nu}} \varphi \rangle| \\ &\leq \|f\|_\infty \|(T^{\frac{\pi k}{\nu+r\delta}} - T^{\frac{\pi k}{\nu}}) \varphi\|_{1,\alpha} + |\langle f_\delta - f, T^{\frac{\pi k}{\nu}} \varphi \rangle|. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В правой части (3.23) первое слагаемое стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$, так как $T^s \varphi$ непрерывно зависит от s в пространстве $L_{1,\alpha}$ (см. (2.25)). Второе слагаемое стремится к нулю, так как $f_\delta \rightarrow f$ в $\mathcal{S}'_+$ (см. лемму 3.3).

Г) Из условий теоремы вытекает, что существует последовательность $c_k = c_k(\delta_0)$ такая, что $c_k > 0$, $\sum_k c_k < \infty$ и $|c_k^{\nu+\delta}| \leq c_k$ при $0 \leq \delta \leq \delta_0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем число N настолько большим, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k < \varepsilon.$$

Для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}_+$ оценим разность $|\langle \Lambda_\delta, \varphi \rangle - \langle \Lambda, \varphi \rangle|$:

$$|\langle \Lambda_\delta - \Lambda, \varphi \rangle| \leq \sum_{k=0}^N |\langle (c_k^{\nu+r\delta} T^{\frac{\pi k}{\nu+r\delta}} f_\delta - c_k^\nu T^{\frac{\pi k}{\nu}} f), \varphi \rangle| + 2\|f\|_\infty \|\varphi\|_{1,\alpha} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k. \quad (3.24)$$

Из (3.21) следует, что первое слагаемое в правой части (3.24) стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$, поэтому

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} |\langle \Lambda_\delta - \Lambda, \varphi \rangle| \leq 2\|f\|_\infty \|\varphi\|_{1,\alpha} \varepsilon,$$

а так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \langle \Lambda_\delta - \Lambda, \varphi \rangle = 0,$$

что доказывает (3.19).

Окончательно, переходя к пределу в (3.17) и используя (3.18) и (3.19), получим равенство (3.11). Теорема доказана.

Теорема 3.1 представляет собой аналог интерполяционной формулы П. Сайвина (см. [27]) для преобразований Бесселя. Приведенное доказательство во многом следует схеме доказательства интерполяционной формулы П. Сайвина, приведенного в [14]. Отметим также, что теорема, аналогичная теореме 3.1, сформулирована в [28].

Как частный случай формулы (3.11) получим интерполяционную формулу для действия дифференциального оператора Бесселя. Пусть $f(x) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ и $\mathcal{B}$ – дифференциальный оператор Бесселя; тогда $\mathcal{B}f$ можно представить в виде (см. (2.12))

$$\mathcal{B}f = \widehat{(-t^2)f}(t).$$

Далее мы воспользуемся теоремой 3.1 для случая $\Omega(t) = -t^2$. Найдем разложение (3.7) для этой функции. Воспользуемся оператором Пуассона $P^{(\alpha)}$ (см. (3.2)–(3.5)). Этот оператор имеет вид

$$P^{(\alpha)}: h(u) \mapsto H(t) = d_\alpha \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2\alpha} h(t \sin \theta) d\theta.$$

Легко проверить, что

$$P^{(\alpha)}(u^2) = \frac{1}{2\alpha + 2} t^2,$$

откуда получаем

$$P^{(\alpha)}((2\alpha + 2)u^2) = t^2. \quad (3.25)$$

Отметим также (см. (3.6)), что

$$P^{(\alpha)}(\cos \lambda u) = j_\alpha(\lambda t). \quad (3.26)$$

Разложим функцию $-u^2$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0, \nu]$:

$$-u^2 = -\frac{\nu^2}{3} + \frac{4\nu^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos\left(\frac{\pi}{\nu} k u\right), \quad u \in [0, \nu]. \quad (3.27)$$

Умножим формулу (3.27) на $2\alpha + 2$ и применим к обеим частям равенства оператор $P^{(\alpha)}$. С учетом формул (3.25) и (3.26) получим

$$-t^2 = -\frac{\nu^2(2\alpha + 2)}{3} + \frac{4\nu^2(2\alpha + 2)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} j_\alpha\left(\frac{\pi}{\nu} k t\right), \quad (3.28)$$

причем ряд (3.28) равномерно сходится на отрезке $[0, \nu]$. Применяя теорему 3.1 для $\Omega(t) = -t^2$, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.2. *Для любой функции $f(x) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$, справедливая следующая интерполяционная формула:*

$$(\mathcal{B}f)(x) = -\frac{\nu^2(2\alpha + 2)}{3} f(x) + \frac{4\nu^2(2\alpha + 2)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} (T^{\frac{\pi k}{\nu}} f)(x), \quad (3.29)$$

причем ряд абсолютно сходится по норме пространства $L_{p,\alpha}$ и равномерно на $\mathbb{R}_+$.

Выведем из формулы (3.29) неравенство Бернштейна для оператора $\mathcal{B}$ – тем самым мы докажем теорему 1.3. Действительно, из (3.29), используя свойство (2.24) и известное равенство $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, получим, что

$$\|\mathcal{B}f\|_{p,\alpha} \leq \frac{\nu^2(2\alpha+2)}{3} \|f\|_{p,\alpha} + \frac{4\nu^2(2\alpha+2)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \|f\|_{p,\alpha} = (2\alpha+2) \nu^2 \|f\|_{p,\alpha}.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{B}f\|_{p,\alpha} \leq (2\alpha+2) \nu^2 \|f\|_{p,\alpha}. \quad (3.30)$$

Постоянная $2\alpha+2$ в неравенстве (3.30) точная при $p = \infty$. Чтобы доказать это, рассмотрим функцию $\cos(\nu x) \in \mathfrak{M}(\nu, \infty, \alpha)$. Тогда $\|\cos(\nu x)\|_{\infty,\alpha} = 1$ и $\|\mathcal{B}(\cos(\nu x))\|_{\infty,\alpha} = (2\alpha+2) \nu^2$.

Отметим, что при $\alpha = n/2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, интерполяционную формулу (3.29) и неравенство Бернштейна (3.30) можно получить из соответствующих формул для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, полученных в работе [29].

Далее для любого $r > 0$ ($r \in \mathbb{R}$) будет определен оператор $(-\mathcal{B})^r$, который естественно считать дробной степенью оператора $-\mathcal{B}$. Оператор $(-\mathcal{B})^r$ переводит пространство $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ в себя, и для него будет доказано неравенство типа Бернштейна. Естественно, с учетом (2.12), хотелось бы определить действие $(-\mathcal{B})^r$ на функцию f формулой $(-\mathcal{B})^r f = \widehat{t^{2r} \tilde{f}(t)}$, но это определение не законно, так как функция t^{2r} не является бесконечно дифференцируемой и не определено ее произведение на обобщенную функцию $\tilde{f}(t)$. Поэтому требуется дать другое определение оператора $(-\mathcal{B})^r$.

ЛЕММА 3.4. На отрезке $[0, \nu]$ функцию x^{2r} можно разложить в ряд:

$$x^{2r} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\nu} j_{\alpha} \left(\frac{\pi}{\nu} kx \right), \quad x \in [0, \nu], \quad (3.31)$$

где коэффициенты c_k^{ν} имеют вид

$$c_k^{\nu} = c_k \nu^{2r}, \quad (3.32)$$

числа c_k не зависят от ν и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty. \quad (3.33)$$

В частности, из (3.33) следует, что ряд (3.31) равномерно сходится на отрезке $[0, \nu]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся оператором Пуассона $P^{(\alpha)}$ (см. (3.2)–(3.5)). Заметим, что

$$P^{(\alpha)}(t^{2r}) = x^{2r} d_{\alpha} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2r} (\sin \theta)^{2r} d\theta = M x^{2r}, \quad (3.34)$$

где

$$M = \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(r+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(r+\alpha+1)}.$$

Разложим функцию t^{2r} на отрезке $[0, \nu]$ в ряд Фурье по косинусам:

$$t^{2r} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi}{\nu} kt\right), \quad t \in [0, \nu], \quad (3.35)$$

где

$$a_k = \frac{2}{\nu} \int_0^{\nu} t^{2r} \cos\left(\frac{\pi}{\nu} kt\right) dt. \quad (3.36)$$

Сделаем замену $\frac{\pi}{\nu}t = u$, $u \in [0, \pi]$; тогда

$$a_k = \frac{2\nu^{2r}}{\pi^{2r+1}} \int_0^{\pi} u^{2r} \cos(ku) du.$$

Временно введем следующее обозначение:

$$I(k) := \int_0^{\pi} u^{2r} \cos(ku) du. \quad (3.37)$$

Оценим сверху последовательность $|I(k)|$ при $k \rightarrow \infty$. Пусть $0 < 2r < 1$. Интегрируя в (3.37) по частям, получим

$$I(k) = -\frac{2r}{k} \int_0^{\pi} u^{2r-1} \sin(ku) du.$$

Сделаем замену $ku = s$; тогда

$$|I(k)| = \frac{2r}{k^{2r+1}} \left| \int_0^{\pi k} s^{2r-1} \sin s ds \right|.$$

Из сходимости несобственного интеграла $\int_0^{\infty} s^{2r-1} \sin s ds$ следует, что

$$|I(k)| = O\left(\frac{1}{k^{2r+1}}\right).$$

При $2r = 1$ интеграл $I(k)$ легко вычислить и убедиться в том, что $|I(k)| = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Пусть $2r > 1$. Дважды интегрируя в (3.37) по частям, получим

$$I(k) = \frac{2r}{k^2} \cos(\pi k) - \frac{2r(2r-1)}{k^2} \int_0^{\pi} u^{2r-2} \cos(ku) du.$$

Поскольку $\int_0^{\pi} u^{2r-2} \cos(ku) du \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ (по теореме Римана–Лебега), то $|I(k)| = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Окончательно имеем

$$|I(k)| = \begin{cases} O(k^{-2r-1}) & \text{при } 0 < 2r < 1, \\ O(k^{-2}) & \text{при } 2r \geq 1. \end{cases}$$

Из этих оценок вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |I(k)|. \quad (3.38)$$

Применяя к равенству (3.35) оператор $P^{(\alpha)}$, получим

$$Mx^{2r} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k j_{\alpha} \left(\frac{\pi}{\nu} kx \right),$$

следовательно,

$$x^{2r} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\nu} j_{\alpha} \left(\frac{\pi}{\nu} kx \right),$$

где

$$c_k^{\nu} = \frac{a_k}{M} = c_k \nu^{2r}, \quad c_k = \frac{2}{M\pi^{2r+1}} I(k).$$

Свойство (3.33) выполняется в силу сходимости ряда (3.38). Лемма доказана.

Поскольку ряд в правой части (3.31) равномерно сходится на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, то можно определить функцию

$$\varphi_{\nu}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\nu} j_{\alpha} \left(\frac{\pi}{\nu} kx \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.39)$$

которая является непрерывной, четной, ограниченной на $\mathbb{R}$ и совпадает с функцией x^{2r} при $|x| \leq \nu$.

Для любой функции $f(x) \in \mathcal{S}_+$ положим

$$\mathcal{D}_{\nu}^r f := \widehat{\varphi_{\nu}(t) \tilde{f}(t)}. \quad (3.40)$$

Так как $\tilde{f}(t) \in \mathcal{S}_+$, а $\varphi_{\nu}(t) \in \mathcal{S}'_+$, то $\varphi_{\nu}(t) \tilde{f}(t) \in \mathcal{S}'_+$ и, следовательно, $\mathcal{D}_{\nu}^r f \in \mathcal{S}'_+$.

ТЕОРЕМА 3.3. Если $f \in \mathcal{S}_+$, то функция $\mathcal{D}_{\nu}^r f$ принадлежит пространству $L_{p,\alpha}$ для любого $1 \leq p \leq \infty$ и справедлива оценка

$$\|\mathcal{D}_{\nu}^r f\|_{p,\alpha} \leq c \nu^{2r} \|f\|_{p,\alpha}, \quad (3.41)$$

где $c = c(\alpha, r) > 0$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ряд (3.39) равномерно сходится на $\mathbb{R}$, то

$$\varphi_{\nu}(t) \tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\nu} j_{\alpha} \left(\frac{\pi}{\nu} kt \right) \tilde{f}(t), \quad (3.42)$$

ряд в правой части равномерно сходится и, тем более, сходится в $\mathcal{S}'_+$. Применим к (3.42) преобразование Бесселя, в результате получим

$$\mathcal{D}_{\nu}^r f := \widehat{\varphi_{\nu}(t) \tilde{f}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\nu} (T^{\frac{\pi}{\nu} k} f)(x). \quad (3.43)$$

Так как $\|c_k^{\nu} T^{\frac{\pi}{\nu} k} f\|_{p,\alpha} \leq |c_k^{\nu}| \|f\|_{p,\alpha}$, то ряд в правой части (3.43) сходится в пространстве $L_{p,\alpha}$, следовательно, $\mathcal{D}_{\nu}^r f \in L_{p,\alpha}$ и справедлива оценка

$$\|\mathcal{D}_{\nu}^r f\|_{p,\alpha} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k^{\nu}| \right) \|f\|_{p,\alpha} = c \nu^{2r} \|f\|_{p,\alpha},$$

что доказывает (3.41), причем

$$c = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|. \quad (3.44)$$

Теорема доказана.

По формуле

$$\mathcal{D}_{\nu}^r f := \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\nu} (T_{\frac{\pi}{\nu}}^k f)(x) \quad (3.45)$$

продолжим оператор $\mathcal{D}_{\nu}^r$ с пространства $\mathcal{S}_+$ на пространство $L_{p,\alpha}$. Полученный оператор будет непрерывным в $L_{p,\alpha}$, и для него справедливо неравенство (3.41) с любой функцией $f \in L_{p,\alpha}$. Отметим, что при $1 \leq p < \infty$ оператор $\mathcal{D}_{\nu}^r$ можно также получить продолжением по непрерывности с плотного подпространства $\mathcal{S}_+$. При $p = \infty$ подмножество $\mathcal{S}_+$ не будет плотным в $L_{\infty,\alpha}$, но формула (3.45) определяет продолжение оператора $\mathcal{D}_{\nu}^r$ на пространство $L_{\infty,\alpha}$.

Заметим, что если $f \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то каждое слагаемое в сумме (3.45) принадлежит $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, а так как подпространство $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ замкнуто в $L_{p,\alpha}$ (см. далее теорему 3.6), то и $\mathcal{D}_{\nu}^r f \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$.

Теперь определим дробную степень $(-\mathcal{B})^r$, $r > 0$, оператора $-\mathcal{B}$. Пусть $f \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ и ν_1 – произвольное действительное число, большее ν (т.е. $\nu_1 > \nu$). Полагаем по определению

$$(-\mathcal{B})^r f := \mathcal{D}_{\nu_1}^r f. \quad (3.46)$$

Оператор $(-\mathcal{B})^r$ переводит пространство $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ в себя. В следующей лемме доказываем корректность определения оператора $(-\mathcal{B})^r$.

ЛЕММА 3.5. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если $f \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, $\nu_1 > \nu$ и $\nu_2 > \nu$, то

$$\mathcal{D}_{\nu_1}^r f = \mathcal{D}_{\nu_2}^r f; \quad (3.47)$$

2) если r – натуральное число, то определение (3.46) оператора $(-\mathcal{B})^r$ совпадает с обычным определением степени дифференциального оператора $-\mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu_0 = \min\{\nu_1, \nu_2\}$; тогда $\nu < \nu_0$.

(а) Пусть $g(x) \in L_{1,\alpha}$. Проверим, что действие оператора $\mathcal{D}_{\nu}^r$ на $g(x)$ можно представить в виде

$$\mathcal{D}_{\nu}^r g = \widehat{\varphi_{\nu}(t) \tilde{g}(t)}. \quad (3.48)$$

Поскольку $\tilde{g}(t)$ – непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}_+$ функция, то произведение $\varphi_{\nu}(t) \tilde{g}(t)$ имеет смысл и также является непрерывной и ограниченной функцией.

По определению (см. (3.45)) имеем

$$\mathcal{D}_{\nu}^r g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{\nu} (T_{\frac{\pi}{\nu}}^k g)(x). \quad (3.49)$$

Ряд в правой части абсолютно сходится в пространстве $L_{1,\alpha}$, а значит, и в пространстве $\mathcal{S}_+^1$. Применим к обеим частям равенства (3.49) обратное преобразование Бесселя:

$$(\widetilde{\mathcal{D}_{\nu}^r g})(t) = \sum_{k=0}^{\nu} j_{\alpha} \left(\frac{\pi}{\nu} kt \right) \tilde{g}(t) = \varphi_{\nu}(t) \tilde{g}(t),$$

откуда вытекает (3.48).

(б) Пусть $f(x) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$. Определим функцию

$$f_\delta(x) := f(x) \left(\frac{\sin(\delta x)}{\delta x} \right)^l, \quad \delta > 0, \quad l = 2[\alpha] + 4. \quad (3.50)$$

Тогда по лемме 3.3 имеем $f_\delta \in \mathfrak{M}(\nu + l\delta, 1, \alpha) \subset L_{1,\alpha}$. Будем считать число δ настолько малым, что $\nu + l\delta < \nu_0$. В силу (3.48) получаем

$$\mathcal{D}_{\nu_1}^r f_\delta = \widehat{\varphi_{\nu_1}(t) \widetilde{f}_\delta(t)}, \quad \mathcal{D}_{\nu_2}^r f_\delta = \widehat{\varphi_{\nu_2}(t) \widetilde{f}_\delta(t)}.$$

Здесь $\widetilde{f}_\delta(t)$ – непрерывная функция с носителем на отрезке $[0, \nu + l\delta]$. Поскольку функции $\varphi_{\nu_1}(t)$ и $\varphi_{\nu_2}(t)$ совпадают на этом отрезке, то $\varphi_{\nu_1}(t) \widetilde{f}_\delta(t) = \varphi_{\nu_2}(t) \widetilde{f}_\delta(t)$, откуда следует, что

$$\mathcal{D}_{\nu_1}^r f_\delta = \mathcal{D}_{\nu_2}^r f_\delta. \quad (3.51)$$

(в) Пусть $g(x)$ – произвольная непрерывная и ограниченная функция на $\mathbb{R}_+$ и

$$g_\delta(x) := g(x) \left(\frac{\sin(\delta x)}{\delta x} \right)^l.$$

Проверим, что

$$\mathcal{D}_\nu^r g_\delta(x) \rightarrow \mathcal{D}_\nu^r g(x) \quad (3.52)$$

при $\delta \rightarrow 0$ равномерно на любом отрезке $[0, A]$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем натуральное число N таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k^{\nu_0}| < \varepsilon.$$

Поскольку $g_\delta(x) \rightarrow g(x)$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно на любом отрезке, в частности, на отрезке $[0, A + \pi N/\nu]$, то выберем число δ_0 таким, чтобы

$$\max_{x \in [0, A + \pi N/\nu]} |g_\delta(x) - g(x)| < \varepsilon$$

при $\delta \in [0, \delta_0]$. Тогда по свойству (2.22) имеем

$$\max_{x \in [0, A]} |T_{\nu}^{\frac{\pi}{\nu} k} (g_\delta(x) - g(x))| < \varepsilon, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Пусть

$$M := \sum_{k=0}^N |c_k^{\nu_0}|.$$

Теперь можно оценить разность $|\mathcal{D}_\nu^r g_\delta(x) - \mathcal{D}_\nu^r g(x)|$:

$$\begin{aligned} & \max_{x \in [0, A]} |\mathcal{D}_\nu^r g_\delta(x) - \mathcal{D}_\nu^r g(x)| \\ & \leq \sum_{k=0}^N |c_k^\nu| |T_{\nu}^{\frac{\pi}{\nu} k} (g_\delta(x) - g(x))| + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2|c_k^\nu| \|g\|_\infty \\ & \leq M\varepsilon + 2\|g\|_\infty \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\max_{x \in [0, A]} |D_{\nu}^r g_{\delta}(x) - D_{\nu}^r g(x)| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

(г) Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в равенстве (3.51) и используя (3.52), получим

$$D_{\nu_1}^r f = D_{\nu_2}^r f,$$

что доказывает утверждение 1) леммы.

(д) Пусть r – натуральное число. Тогда определена обычная степень $(-\mathcal{B})^r$ дифференциального оператора $-\mathcal{B}$. Пусть $f \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, f_{δ} определено в соотношении (3.50), $\nu + l\delta < \nu_1$. По свойству (2.12) преобразования Бесселя имеем

$$(-\mathcal{B})^r f_{\delta} = t^{2r} \widetilde{f}_{\delta}(t),$$

а по (3.48) получаем

$$\widetilde{\mathcal{D}_{\nu_1}^r f_{\delta}} = \varphi_{\nu_1}(t) \widetilde{f}_{\delta}(t).$$

Здесь $\widetilde{f}_{\delta}(t)$ – непрерывная функция с носителем на отрезке $[0, \nu + l\delta] \subset [0, \nu_1]$. Поскольку $\varphi_{\nu_1}(t) = t^{2r}$ на отрезке $[0, \nu_1]$, то

$$t^{2r} \widetilde{f}_{\delta}(t) = \varphi_{\nu_1}(t) \widetilde{f}_{\delta}(t),$$

откуда следует равенство

$$(-\mathcal{B})^r f_{\delta} = D_{\nu_1}^r f_{\delta}. \quad (3.53)$$

Если $\delta \rightarrow 0$, то $f_{\delta} \rightarrow f$ в пространстве $\mathcal{S}'_+$ (см. лемму 3.3), откуда в силу непрерывности оператора $\mathcal{B}$ в $\mathcal{S}'_+$ следует, что $(-\mathcal{B})^r f_{\delta} \rightarrow (-\mathcal{B})^r f$ в $\mathcal{S}'_+$ и, тем более, в $\mathcal{D}'_+$ (напомним, что $\mathcal{D}'_+$ – пространство четных обобщенных функций; см. § 1). В силу (3.52) выполнено $D_{\nu_1}^r f_{\delta} \rightarrow D_{\nu_1}^r f$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно на любом отрезке и, тем более, в пространстве $\mathcal{D}'_+$. Из единственности предела и из (3.53) вытекает равенство

$$(-\mathcal{B})^r f = D_{\nu_1}^r f,$$

которое и доказывает утверждение 2) леммы.

ТЕОРЕМА 3.4 (неравенство Бернштейна для дробной степени оператора Бесселя). *Для любой функции $f \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ и любого $r > 0$ справедливо неравенство*

$$\|(-\mathcal{B})^r f\|_{p, \alpha} \leq c \nu^{2r} \|f\|_{p, \alpha}, \quad (3.54)$$

где $c = c(\alpha, r) > 0$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $(-\mathcal{B})^r f = D_{\nu_1}^r f$ для любого $\nu_1 > \nu$. Из неравенства (3.41) следует, что

$$\|(-\mathcal{B})^r f\|_{p, \alpha} = \|D_{\nu_1}^r f\|_{p, \alpha} \leq c \nu_1^{2r} \|f\|_{p, \alpha}.$$

Переходя к пределу при $\nu_1 \rightarrow \nu$, получим неравенство (3.54). Теорема доказана.

Отметим, что хотя неравенство Бернштейна для оператора $\mathcal{B}$ (см. (1.11)) является частным случаем неравенства (3.54), но в (3.54) не известно точное значение постоянной c .

В следующей теореме доказывается аналог неравенства разных метрик С. М. Никольского для целых функций экспоненциального типа (см. [14]).

ТЕОРЕМА 3.5. Если $1 \leq p < p' \leq \infty$, то для любой функции $f(x)$ из класса $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{p', \alpha} \leq c \nu^{(2\alpha+2)(1/p-1/p')} \|f\|_{p, \alpha}, \quad (3.55)$$

где $c = c(\alpha, p, p') > 0$ – некоторая постоянная.

Неравенство (3.55) является точным по показателю степени ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f(x) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$; тогда ее обратное преобразование Бесселя $\tilde{f}(t)$ является обобщенной функцией из $\mathcal{S}'_+$ и $\text{supp } \tilde{f} \subseteq [0, \nu]$. Возьмем произвольную функцию $\varphi(x) \in \mathcal{S}_+$ такую, что ее обратное преобразование Бесселя $\tilde{\varphi}(t)$ тождественно равно 1 на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим функцию $\psi(x) := \nu^{2\alpha+2} \varphi(\nu x)$. Ее обратное преобразование Бесселя имеет вид $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\varphi}(t/\nu)$, поэтому $\tilde{\psi} \equiv 1$ на отрезке $[0, \nu]$. Поскольку $\text{supp } \tilde{f} \subseteq [0, \nu]$, то

$$\tilde{f}(t) = \tilde{\psi}(t) \tilde{f}(t).$$

Применяя прямое преобразование Бесселя, получим, что (см. (2.29))

$$f(x) = (f * \psi)(x) = \int (T^x \psi)(s) f(s) s^{2\alpha+1} ds. \quad (3.56)$$

2) Рассмотрим случай $p = 1$, $p' = \infty$. Из (3.56) следует, что

$$|f(x)| \leq \left(\sup_s |T^x \psi(s)| \right) \int |f(s)| s^{2\alpha+1} ds. \quad (3.57)$$

Заметим, что

$$\sup_s |T^x \psi(s)| \leq \|\psi\|_\infty = \nu^{2\alpha+2} \|\varphi\|_\infty,$$

поэтому из (3.57) следует, что

$$\|f\|_\infty \leq c_1 \nu^{2\alpha+2} \|f\|_{1, \alpha}, \quad c_1 = \|\varphi\|_\infty. \quad (3.58)$$

3) Рассмотрим случай $p > 1$, $p' = \infty$. Из (3.56), используя неравенство Гёльдера, получим

$$|f(x)| \leq \|f\|_{p, \alpha} \|T^x \psi\|_{q, \alpha}, \quad 1/p + 1/q = 1.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|T^x \psi\|_{q, \alpha} &\leq \|\psi\|_{q, \alpha} = \nu^{2\alpha+2} \left(\int |\varphi(\nu s)|^q s^{2\alpha+1} ds \right)^{1/q} \\ &= \nu^{2\alpha+2} \nu^{-(2\alpha+2)/q} \left(\int |\varphi(s)|^q s^{2\alpha+1} ds \right)^{1/q} = \nu^{(2\alpha+2)/p} \|\varphi\|_{q, \alpha}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|f\|_\infty \leq c_2 \nu^{(2\alpha+2)/p} \|f\|_{p, \alpha}, \quad c_2 = \|\varphi\|_{q, \alpha}. \quad (3.59)$$

4) Пусть $p < p' < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{p',\alpha} &= \left(\int |f(x)|^{p'} x^{2\alpha+1} dx \right)^{1/p'} = \left(\int |f(x)|^p |f(x)|^{p'-p} x^{2\alpha+1} dx \right)^{1/p'} \\ &\leq \|f\|_{\infty}^{(p'-p)/p'} \left(\int |f(x)|^p x^{2\alpha+1} dx \right)^{1/p'} = \|f\|_{\infty}^{(p'-p)/p'} \|f\|_{p,\alpha}^{p/p'}. \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством (3.59), получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{p',\alpha} &\leq c_3 (\nu^{(2\alpha+2)/p})^{(p'-p)/p'} \|f\|_{p,\alpha}^{(p'-p)/p'} \|f\|_{p,\alpha}^{p/p'} \\ &= c_3 \nu^{(2\alpha+2)(1/p-1/p')} \|f\|_{p,\alpha}, \quad c_3 = \|\varphi\|_{q,\alpha}^{(p-p')/p}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

В совокупности неравенства (3.58)–(3.60) дают неравенство (3.55).

5) Для доказательства точности показателя степени в неравенстве (3.55) рассмотрим функцию

$$f_{\nu}(x) = \left(\frac{1}{x} \sin \left(\frac{\nu x}{r} \right) \right)^r,$$

где r – произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию $r > 2\alpha + 2$. Легко видеть, что функция $f_{\nu}(x)$ содержится в пространстве $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ при любом $p \in [1, \infty]$. Ее норма имеет вид

$$\|f_{\nu}\|_{p,\alpha} = c_p \nu^{r-(2\alpha+2)/p},$$

где $c_p > 0$ – константа, не зависящая от ν . Следовательно,

$$\|f_{\nu}\|_{p',\alpha} = \frac{c_{p'}}{c_p} \nu^{(2\alpha+2)(1/p-1/p')} \|f_{\nu}\|_{p,\alpha},$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 3.6. Множество $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ является замкнутым линейным подмножеством банахова пространства $L_{p,\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ является линейным подмножеством в $L_{p,\alpha}$. Остается доказать его замкнутость.

Если функция $f(x)$ принадлежит $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то из теоремы 3.5 следует, что она ограничена на $\mathbb{R}$. Воспользуемся известным свойством (см., например, [14, гл. 3]): если $f(z)$ – целая функция экспоненциального типа ν , ограниченная на вещественной прямой $\mathbb{R}$, то для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|f(x + iy)| \leq \|f\|_{\infty} e^{\nu|y|}, \quad (3.61)$$

где $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Если $f(x) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то, используя (3.61) и теорему 3.5, получим

$$|f(x + iy)| \leq c_1 \|f\|_{p,\alpha} e^{\nu|y|}, \quad (3.62)$$

где $c_1 = c_1(\nu, p, \alpha) > 0$ – некоторая постоянная.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $g(x)$ в пространстве $L_{p,\alpha}$, и пусть $f_n(x) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, $g(x) \in L_{p,\alpha}$. Тогда $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность в $L_{p,\alpha}$, т. е. $\|f_n - f_m\|_{p,\alpha} \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$. Из неравенства (3.62) вытекает, что

$$|f_n(x + iy) - f_m(x + iy)| \leq c_1 \|f_n - f_m\|_{p,\alpha} e^{\nu|y|} \rightarrow 0$$

при $m, n \rightarrow \infty$. Это показывает, что последовательность функций $f_n(z)$ стремится к некоторой функции $h(z)$ равномерно на любом компактном подмножестве в $\mathbb{C}$. Предельная функция $h(z)$ будет целой аналитической функцией. Так как, в частности, $f_n(x) \rightarrow h(x)$ поточечно на $\mathbb{R}$, то $h(x) = g(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$.

Поскольку $\{f_n(x)\}$ – сходящаяся последовательность, то она является ограниченной. Пусть $\|f_n\|_{p,\alpha} \leq A$ при всех n . Используя (3.62), имеем

$$|f_n(x + iy)| \leq c_1 \|f_n\|_{p,\alpha} e^{\nu|y|} \leq c_1 A e^{\nu|y|}. \quad (3.63)$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$|h(x + iy)| \leq c_1 A e^{\nu|y|}, \quad (3.64)$$

откуда следует, что $h(x)$ – целая функция экспоненциального типа ν . Следовательно, $h(x) = g(x) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, что доказывает замкнутость подмножества $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$.

§ 4. Доказательства теорем 1.1 и 1.2

Для доказательства теорем 1.1 и 1.2 потребуются некоторые вспомогательные (но представляющие и самостоятельный интерес) результаты. Мы будем использовать основные обозначения, введенные в предыдущих параграфах. В частности, через

$$\mathcal{F}: f(t) \mapsto \hat{f}(\lambda), \quad \mathcal{F}^{-1}: g(\lambda) \mapsto \tilde{g}(t)$$

обозначаются соответственно прямое и обратное преобразования Бесселя, $T^h f(t)$ – обобщенный сдвиг Бесселя, $c, c_1, c_2, \dots$ – положительные постоянные, которые могут зависеть от несущественных параметров (обычно эти параметры указываются), вообще говоря, различные в разных местах.

Конечные разности на основе обобщенных сдвигов Бесселя можно определять разными способами. Определение разности ${}^*\Delta_h^k f(t)$ приведено в § 1 (см. (1.6)). Определим другую конечную разность

$${}^*\Delta_h^k f(t) := \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} T^{lh} f(t), \quad (4.1)$$

где $\binom{k}{l}$ – биномиальные коэффициенты, $h > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Поскольку обобщенные сдвиги T^h не образуют полугруппу, то разности ${}^*\Delta_h^k$ и Δ_h^k различные. Отметим, что разности ${}^*\Delta_h^k$ были введены и использовались Л. Н. Ляховым в работе [30].

Из (2.19) следует, что образ ${}^*\Delta_h^k f(t)$ при преобразовании Бесселя имеет вид

$$\widehat{{}^*\Delta_h^k f}(\lambda) = \left(\sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} j_\alpha(lh\lambda) \right) \hat{f}(\lambda). \quad (4.2)$$

Введем обозначение

$$j_{\alpha,k}(\lambda) := \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} j_\alpha(l\lambda); \quad (4.3)$$

тогда

$$*\widehat{\Delta_h^k} f(\lambda) = j_{\alpha,k}(h\lambda) \hat{f}(\lambda). \quad (4.4)$$

Функция $j_{\alpha,k}(\lambda)$ является бесконечно дифференцируемой и при $\lambda = 0$ имеет нуль кратности не меньше k , а при нечетном k и нуль кратности не меньше $k + 1$ (так как функция $j_{\alpha,k}(\lambda)$ четная и кратность также четная). В частности, $\lambda^{-k} j_{\alpha,k}(\lambda) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ при четном k и $\lambda^{-k-1} j_{\alpha,k}(\lambda) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ при нечетном k . Из того, что функция $j_{\alpha}(\lambda)$ и все ее производные стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$, следует, что функция $j_{\alpha,k}(\lambda)$ стремится к единице, а все ее производные $j_{\alpha,k}^{(n)}(\lambda)$ стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$.

При $k \geq 2r - 1$, $k, r \in \mathbb{N}$, рассмотрим функцию

$$g_{k,r}(t) := \mathcal{F}^{-1}(\lambda^{-2r} j_{\alpha,k}(\lambda)). \quad (4.5)$$

Обратное преобразование Бесселя определено, так как функция $\lambda^{-2r} j_{\alpha,k}(\lambda)$ является бесконечно дифференцируемой и стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$, но, вообще говоря, пока можно сказать только, что $g_{k,r}$ – обобщенная функция из $\mathcal{S}'_+$.

ЛЕММА 4.1. *При $k \geq 2r - 1$ функция $g_{k,r}(x)$ принадлежит классу $L_{1,\alpha}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку прямое и обратное преобразования Бесселя отличаются только числовым множителем, то будем доказывать, что

$$\mathcal{F}(\lambda^{-2r} j_{\alpha,k}(\lambda)) \in L_{1,\alpha}.$$

1) Докажем, что при любом $d > 0$ ($d \in \mathbb{R}$) функция $K_d(t) := \mathcal{F}((1 + \lambda^2)^{-d})$ принадлежит классу $L_{1,\alpha}$. Доказательство можно провести аналогично [31, гл. V, § 3], где доказывается, что преобразование Фурье от функции $(1 + \lambda^2)^{-d}$ (ядра бесселева потенциала) принадлежит классу $L_1(\mathbb{R})$. Отметим только основные элементы доказательства.

Воспользуемся тождеством

$$(1 + \lambda^2)^{-d} = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^\infty e^{-\delta \lambda^2} e^{-\delta} \delta^d \frac{d\delta}{\delta}. \quad (4.6)$$

Известно, что преобразование Бесселя от функции $e^{-\delta \lambda^2}$, $\delta > 0$, имеет следующий вид (см. [32, гл. 8, п. 8.6, формула (10)]):

$$\mathcal{F}(e^{-\delta \lambda^2}) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\delta^{\alpha+1}} e^{-\frac{t^2}{4\delta}}. \quad (4.7)$$

Из равенств (4.6) и (4.7) легко получить, что

$$\mathcal{F}((1 + \lambda^2)^{-d}) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(d)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4\delta}} e^{-\delta} \delta^{d-\alpha-1} \frac{d\delta}{\delta}. \quad (4.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}((1 + \lambda^2)^{-d})\|_{1,\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(d)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4\delta}} t^{2\alpha+1} dt \right) e^{-\delta} \delta^{d-\alpha-1} \frac{d\delta}{\delta} \\ &= \frac{(\Gamma(\alpha + 1))^2 \cdot 2^{2\alpha+1}}{\Gamma(d)} \int_0^\infty e^{-\delta} \delta^d \frac{d\delta}{\delta} = 2^{2\alpha+1} (\Gamma(\alpha + 1))^2 < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{F}((1 + \lambda^2)^{-d}) \in L_{1,\alpha}$.

2) Поскольку (см. (2.19)) выполнено равенство

$$\mathcal{F}(j_{\alpha,k}(\lambda)(1+\lambda^2)^{-d}) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} (T^l K_d)(t),$$

а оператор T^h переводит пространство $L_{1,\alpha}$ в себя, то

$$\mathcal{F}(j_{\alpha,k}(\lambda)(1+\lambda^2)^{-d}) \in L_{1,\alpha}. \quad (4.9)$$

3) Функцию λ^{-2r} можно представить в виде $\lambda^{-2r} = s^r(1-s)^{-r}$, где $s = (1+\lambda^2)^{-1}$. При $|s| < 1$ функцию $s^r(1-s)^{-r}$ можно разложить в ряд:

$$s^r(1-s)^{-r} = \sum_{m=r}^{\infty} c_m s^m$$

с некоторыми коэффициентами c_m . Пусть $P_N(s) = \sum_{m=r}^N c_m s^m$ – частичная сумма этого ряда.

Пусть $R(x)$ – произвольная рациональная функция и для некоторого натурального d выполняется равенство $R(x) = o(x^{-d})$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда очевидно, что для всех производных $R^{(n)}(x)$ будет справедливо равенство $R^{(n)}(x) = o(x^{-d-n})$, в частности $R^{(n)}(x) = o(x^{-d})$.

Рассмотрим функцию

$$\Psi_N(\lambda) := j_{\alpha,k}(\lambda) R_N(\lambda),$$

где $R_N(\lambda) := \lambda^{-2r} - P_N((1+\lambda^2)^{-1})$. Заметим, что $R_N(\lambda) = o(\lambda^{-2N})$ при $\lambda \rightarrow \infty$, а так как $R_N(\lambda)$ – рациональная функция, то, с учетом написанного выше, для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$R_N^{(n)}(\lambda) = o(\lambda^{-2N}). \quad (4.10)$$

Поскольку функция $j_{\alpha,k}(\lambda)$ и все ее производные ограничены на $\mathbb{R}_+$, то из равенства (4.10) вытекает, что

$$\Psi_N^{(n)}(\lambda) = o(\lambda^{-2N}), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

Пусть $\mathcal{B}$ – дифференциальный оператор Бесселя. Из равенства (4.11) следует, что при любом $n = 0, 1, 2, \dots$ справедлива оценка

$$(\mathcal{B}^n \Psi_N)(\lambda) = o(\lambda^{-2N}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

Для достаточно больших N (например, $N = [\alpha] + 2$) из (4.12) следует, что $(\mathcal{B}^n \Psi_N)(\lambda) \in L_{1,\alpha}$ при любом $n \in \mathbb{Z}_+$; поэтому (см. свойство (2.13)) выполнено неравенство

$$|\widehat{\Psi_N}(t)| \leq \frac{c(n)}{t^{2n}} \quad (4.13)$$

для некоторой постоянной $c(n) > 0$. Из оценки (4.13) получаем, что

$$\widehat{\Psi_N}(t) \in L_{1,\alpha}. \quad (4.14)$$

4) Для завершения доказательства леммы представим функцию $\lambda^{-2r} j_{\alpha,k}(\lambda)$ в виде

$$\lambda^{-2r} j_{\alpha,k}(\lambda) = \Psi_N(\lambda) + j_{\alpha,k}(\lambda) P_N((1 + \lambda^2)^{-1}).$$

Поскольку $\mathcal{F}(\Psi_N) \in L_{1,\alpha}$ (см. (4.14)) и $\mathcal{F}(j_{\alpha,k}(\lambda) P_N((1 + \lambda^2)^{-1})) \in L_{1,\alpha}$ (это следует из (4.9)), то и $\mathcal{F}(\lambda^{-2r} j_{\alpha,k}(\lambda)) \in L_{1,\alpha}$. Лемма доказана.

Аналогично функции $g_{k,r}(t)$ (см. (4.5)) определим функцию

$$g_{k,r}^h(t) := \mathcal{F}^{-1}(\lambda^{-2r} j_{\alpha,k}(h\lambda)), \quad (4.15)$$

где $k, r \in \mathbb{N}$, $k \geq 2r - 1$, $h > 0$. В частности, $g_{k,r}^1(t) = g_{k,r}(t)$.

ЛЕММА 4.2. *Имеет место равенство*

$$\|g_{k,r}^h\|_{1,\alpha} = h^{2r} \|g_{k,r}\|_{1,\alpha}. \quad (4.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{F}^{-1}(f(\lambda)) = \tilde{f}(t)$ и $h > 0$ – произвольное число, то легко видеть, что

$$\mathcal{F}^{-1}(f(h\lambda)) = h^{-(2\alpha+2)} \tilde{f}(t/h). \quad (4.17)$$

Поэтому

$$g_{k,r}^h(t) = h^{2r} \mathcal{F}^{-1}((h\lambda)^{-2r} j_{\alpha,k}(h\lambda)) = h^{2r} g_{k,r}(t/h) h^{-(2\alpha+2)},$$

откуда вытекает (4.16). Лемма доказана.

Пусть функция $f(t)$ принадлежит пространству Соболева $W_{p,\alpha}^r$, т. е. $f, \mathcal{B}f, \dots, \mathcal{B}^r f \in L_{p,\alpha}$.

ЛЕММА 4.3. *Если $f \in W_{p,\alpha}^r$ и $k \geq 2r - 1$, то функцию ${}^*\Delta_h^k f$ можно представить в виде свертки:*

$${}^*\Delta_h^k f = (-1)^r g_{k,r}^h * (\mathcal{B}^r f). \quad (4.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(t) = \mathcal{B}^r f$; тогда $\widehat{\varphi}(\lambda) = (-1)^r \lambda^{2r} \hat{f}(\lambda)$. Для доказательства равенства (4.18) применим преобразование Бесселя к левой и правой частям в формуле (4.18). Тогда (см. (4.4))

$$\widehat{{}^*\Delta_h^k f}(\lambda) = j_{\alpha,k}(h\lambda) \hat{f}(\lambda).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g_{k,r}^h * \varphi) &= \mathcal{F}(g_{k,r}^h) \widehat{\varphi}(\lambda) \\ &= \lambda^{-2r} j_{\alpha,k}(h\lambda) (-1)^r \lambda^{2r} \hat{f}(\lambda) = (-1)^r j_{\alpha,k}(h\lambda) \hat{f}(\lambda), \end{aligned}$$

откуда следует (4.18). Лемма доказана.

ЛЕММА 4.4. *Для любой функции $f \in W_{p,\alpha}^r$, $1 \leq p \leq \infty$, и $k \geq 2r - 1$ справедливо неравенство*

$$\|{}^*\Delta_h^k f\|_{p,\alpha} \leq c h^{2r} \|\mathcal{B}^r f\|_{p,\alpha}, \quad (4.19)$$

где $c = c(k, r, \alpha)$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(t) = \mathcal{B}^r f$. Из лемм 4.2, 4.3 и свойства (2.33) свертки вытекает, что

$$\|\Delta_h^k f\|_{p,\alpha} \leq \|g_{k,r}^h\|_{1,\alpha} \|\varphi\|_{p,\alpha} \leq c h^{2r} \|\varphi\|_{p,\alpha},$$

где $c = \|g_{k,r}\|_{1,\alpha}$. Лемма доказана.

Для любой обычной или обобщенной функции $h(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, через $\text{supp } h$ мы обозначаем носитель функции h . Если $h \in \mathcal{S}'_+$, то условие $\text{supp } h \subseteq [0, \nu]$ эквивалентно тому, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}_+$ из того, что $\text{supp } \varphi \subset (\nu, +\infty)$, следует равенство $\langle h, \varphi \rangle = 0$.

ЛЕММА 4.5. Пусть $f(x) \in L_{1,\alpha}$ и $g(x) \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$. Если $\text{supp } \hat{f} \subseteq [0, \nu]$, то свертка $f * g$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что $f \in L_{1,\alpha}$, $g \in L_{p,\alpha}$, вытекает, что $f * g \in L_{p,\alpha}$ (см. (2.33)) и, следовательно, $f * g \in \mathcal{S}'_+$. Проверим, что $\text{supp } \widehat{f * g} \subseteq [0, \nu]$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}_+$ и $\text{supp } \varphi \subset (\nu, +\infty)$. Используя свойства обобщенного сдвига Бесселя (см. (2.17)–(2.19)) и изменяя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f * g}, \varphi \rangle &= \langle f * g, \hat{\varphi} \rangle \\ &= \int \left(\int (T^\lambda f(s)) g(s) s^{2\alpha+1} ds \right) \hat{\varphi}(\lambda) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda \\ &= \int \left(\int (T^s f(\lambda)) \hat{\varphi}(\lambda) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda \right) g(s) s^{2\alpha+1} ds \\ &= \int \left(\int f(\lambda) (T^s \hat{\varphi}(\lambda)) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda \right) g(s) s^{2\alpha+1} ds. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Снова используя (2.19), получаем, что $T^s \hat{\varphi} = T^s \mathcal{F}(\varphi(t)) = \mathcal{F}(j_\alpha(st) \varphi(t))$.

Функция $\psi(t) = j_\alpha(st) \varphi(t)$ содержится в классе $\mathcal{D}_+$, и $\text{supp } \psi \subset (\nu, +\infty)$, а так как $\text{supp } \hat{f} \subseteq [0, \nu]$, то

$$\int f(\lambda) (T^s \hat{\varphi}(\lambda)) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda = \int \hat{f}(t) j_\alpha(st) \varphi(t) t^{2\alpha+1} dt = \langle \hat{f}, \psi \rangle = 0. \quad (4.21)$$

Из (4.20) и (4.21) следует, что $\langle \widehat{f * g}, \varphi \rangle = 0$, поэтому $\text{supp } \widehat{f * g} \subseteq [0, \nu]$.

Из теоремы 2.2 вытекает, что $f * g = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f * g})$ является целой функцией экспоненциального типа ν , а так как $f * g \in L_{p,\alpha}$, то $f * g \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, что завершает доказательство леммы.

Пусть $E_\nu(f)_{p,\alpha}$ – наилучшее приближение функции f функциями из класса $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ (см. (1.8)).

ТЕОРЕМА 4.1. Для $f \in W_{p,\alpha}^r$, $1 \leq p \leq \infty$, справедливо неравенство

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \leq \frac{c}{\nu^{2r}} \|\mathcal{B}^r f\|_{p,\alpha}, \quad (4.22)$$

где $c = c(\alpha, r)$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем схему классического метода приближения функции целыми функциями экспоненциального типа на пространстве $\mathbb{R}^n$, восходящую к С. Н. Бернштейну и С. М. Никольскому (см. [14, гл. 5]).

Пусть $g(t)$ – неотрицательная четная функция на $\mathbb{R}$ экспоненциального типа 1, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty g(t) t^{2\alpha+1} dt = 1, \quad (4.23)$$

т. е. $g(t) \in \mathfrak{M}(1, 1, \alpha)$.

Для любой функции $\varphi(t)$ на $\mathbb{R}_+$ и чисел $h > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$(-1) * \Delta_h^k \varphi(t) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \binom{k}{j} T^{jh} \varphi(t) - \varphi(t) = \sum_{j=1}^k d_j T^{jh} \varphi(t) - \varphi(t),$$

где $\sum_{j=1}^k d_j = 1$. Пусть $f(t) \in L_{p,\alpha}$. Определим функцию

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(x) &:= \int g(t) ((-1) * \Delta_{t/\nu}^k f(x) + f(x)) t^{2\alpha+1} dt \\ &= \int g(t) \left(\sum_{j=1}^k d_j T^{jt/\nu} f(x) \right) t^{2\alpha+1} dt = \sum_{j=1}^k d_j \int g(t) (T^x f) \left(\frac{jt}{\nu} \right) t^{2\alpha+1} dt \end{aligned} \quad (4.24)$$

(последнее равенство выполнено в силу соотношения (2.17)).

Используя самосопряженность оператора T^x , преобразуем слагаемые в правой части формулы (4.24):

$$\begin{aligned} \int g(t) (T^x f) \left(\frac{jt}{\nu} \right) t^{2\alpha+1} dt &= \int g \left(\frac{\nu t}{j} \right) (T^x f)(t) \left(\frac{\nu}{j} \right)^{2\alpha+2} t^{2\alpha+1} dt \\ &= \left(\frac{\nu}{j} \right)^{2\alpha+2} \int g \left(\frac{\nu t}{j} \right) (T^x f)(t) t^{2\alpha+1} dt = \left(\frac{\nu}{j} \right)^{2\alpha+2} \int (T^x g) \left(\frac{\nu t}{j} \right) f(t) t^{2\alpha+1} dt. \end{aligned}$$

Тогда из (4.24) вытекает, что

$$\Phi_\nu(x) = K_\nu * f(x) = \int (T^x K_\nu)(t) f(t) t^{2\alpha+1} dt, \quad (4.25)$$

где

$$K_\nu(t) = \sum_{j=1}^k d_j \left(\frac{\nu}{j} \right)^{2\alpha+2} g \left(\frac{\nu}{j} t \right). \quad (4.26)$$

Поскольку $g(t)$ – целая функция экспоненциального типа 1, то $K_\nu(t)$ – целая функция экспоненциального типа ν и $K_\nu(t) \in L_{1,\alpha}$. Из леммы 4.5 следует, что $\Phi_\nu \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$.

Пусть $f(x) \in W_{p,\alpha}^r$, и пусть $k = 2r$. Используя лемму 4.4, получим

$$\begin{aligned} \|f(x) - \Phi_\nu(x)\|_{p,\alpha} &= \left\| \int g(t) * \Delta_{t/\nu}^k f(x) t^{2\alpha+1} dt \right\|_{p,\alpha} \\ &\leq \int g(t) \| * \Delta_{t/\nu}^k f(x) \|_{p,\alpha} t^{2\alpha+1} dt \leq \frac{c}{\nu^{2r}} \|B^r f\|_{p,\alpha} \int g(t) t^{2r} t^{2\alpha+1} dt, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $c = c(r, \alpha)$ – постоянная.

Если для функции $g(t)$ конечен интеграл $\int g(t) t^{2r+2\alpha+1} dt$, то из (4.27) следует, что

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \leq \frac{c_1}{\nu^{2r}} \|\mathcal{B}^r f\|_{p,\alpha}, \quad (4.28)$$

где $c_1 = c \int g(t) t^{2r+2\alpha+1} dt$. В качестве функции $g(t)$ можно взять функцию

$$g(t) = \mu \left(\frac{1}{t} \sin \frac{t}{2N} \right)^{2N},$$

где N – любое натуральное число, удовлетворяющее условию $2N \geq 2r + 2\alpha + 3$, а μ – такая постоянная, что выполняется условие (4.23). Теорема доказана.

Пусть $K(f, t; L_{p,\alpha}; W_{p,\alpha}^m)$ – K -функционал, построенный по пространствам $L_{p,\alpha}$ и $W_{p,\alpha}^m$ (см. (1.10)), $f \in L_{p,\alpha}$, $t > 0$. Для краткости введем обозначение

$$K_m(f; t)_{p,\alpha} := K(f, t^{2m}; L_{p,\alpha}; W_{p,\alpha}^m). \quad (4.29)$$

Модуль гладкости k -го порядка $\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$ определен в § 1 (см. (1.6), (1.7)). Его можно также записать в виде

$$\omega_k(f, t)_{p,\alpha} = \sup_{0 \leq h \leq t} \|\Delta_h^k f\|_{p,\alpha} = \sup_{0 \leq h \leq t} \|(I - T^h)^k f\|_{p,\alpha},$$

где I – единичный оператор. Основные свойства $\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$ представлены в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Модуль гладкости $\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, имеет следующие свойства:*

- 1) по переменной $t \in \mathbb{R}_+$ функция $\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$ не убывает;
- 2) функция $\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$ непрерывна по t и $\omega_k(f, t)_{p,\alpha} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$;
- 3) $\omega_k(f + g, t)_{p,\alpha} \leq \omega_k(f, t)_{p,\alpha} + \omega_k(g, t)_{p,\alpha}$;
- 4) $\omega_k(f, t)_{p,\alpha} \leq 2^k \|f\|_{p,\alpha}$;
- 5) если $l \leq k$, то $\omega_k(f, t)_{p,\alpha} \leq 2^{k-l} \omega_l(f, t)_{p,\alpha}$;
- 6) если $f \in W_{p,\alpha}^m$, то для любого $k > m$ выполнено

$$\omega_k(f, t)_{p,\alpha} \leq c t^{2m} \omega_{k-m}(\mathcal{B}^m f, t)_{p,\alpha},$$

где $c = c(\alpha, m)$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1) и 3) сразу следуют из определения модуля гладкости $\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$. Свойство 2) следует из того, что $T^h f$ непрерывно зависит от h в пространстве $L_{p,\alpha}$ (см. (2.25)). Свойства 4) и 5) вытекают из того, что $\|T^h f\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}$ для $f \in L_{p,\alpha}$ (см. (2.21) и (2.24)).

Из леммы 4.4 (при $k = 1$ и $r = 1$) следует, что

$$\|\Delta_h f\|_{p,\alpha} \leq c h^2 \|\mathcal{B} f\|_{p,\alpha} \quad (4.30)$$

для $f \in W_{p,\alpha}^1$, где $\Delta_h f = {}^* \Delta_h^1 f = (I - T^h) f$. Поскольку оператор $\mathcal{B}$ перестановочен с оператором T^h (см. (2.20)), то из (4.30) вытекает свойство 6). Предложение доказано.

При доказательстве теорем 1.1 и 1.2 мы будем частично следовать схеме доказательств аналогичных теорем для приближения функций на сфере из работ [23] и [33].

Пусть $\eta(\lambda) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}_+)$ – произвольная функция, удовлетворяющая следующим условиям: $\eta(\lambda) \geq 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\eta(\lambda) = 1$ при $0 \leq \lambda \leq \frac{3}{2}$ и $\eta(\lambda) = 0$ при $\lambda \geq 2$. В дальнейшем будем считать, что функция $\eta(\lambda)$ фиксирована, и не будем уточнять, что постоянные в оценках зависят от η .

Определим семейство операторов P_ν для $\nu > 0$ по формуле

$$P_\nu(f) = \mathcal{F}^{-1} \left(\eta \left(\frac{\lambda}{\nu} \right) \hat{f}(\lambda) \right). \quad (4.31)$$

Оператор P_ν можно также записать в виде свертки:

$$P_\nu(f) = \rho_\nu * f, \quad (4.32)$$

где

$$\rho_\nu = \mathcal{F}^{-1} \left(\eta \left(\frac{\lambda}{\nu} \right) \right). \quad (4.33)$$

Функция $\eta(\lambda/\nu)$ принадлежит классу $\mathcal{D}_+$ и, тем более, классу $\mathcal{S}_+$, поэтому $\rho_\nu(t) \in \mathcal{S}_+ \subset L_{1,\alpha}$. Из формулы (4.32) следует, что оператор P_ν переводит пространство $L_{p,\alpha}$ в себя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\nu > 0$. Тогда:

- 1) $P_\nu(f) \in \mathfrak{M}(2\nu, p, \alpha)$ и $P_\nu(\Phi) = \Phi$ для любой функции $\Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$,
- 2) $\|P_\nu(f)\|_{p,\alpha} \leq c_1 \|f\|_{p,\alpha}$,
- 3) $\|f - P_\nu(f)\|_{p,\alpha} \leq c_2 E_\nu(f)_{p,\alpha}$,

где $c_1 = c_1(\alpha)$ и $c_2 = c_2(\alpha)$ – некоторые постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку $\text{supp } \widehat{\rho_\nu} \subseteq [0, 2\nu]$, то $P_\nu(f) = \rho_\nu * f \in \mathfrak{M}(2\nu, p, \alpha)$ по лемме 4.5. Если $\Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то $\widehat{\Phi}(\lambda)$ – обобщенная функция с носителем на $[0, \nu]$, а так как $\eta(\lambda/\nu) = 1$ на $[0, 3\nu/2]$, то $\widehat{\Phi}(\lambda) = \eta(\lambda/\nu) \widehat{\Phi}(\lambda)$ и, следовательно, $P_\nu(\Phi) = \Phi$.

2) Из (4.32) следует, что

$$\|P_\nu(f)\|_{p,\alpha} \leq \|\rho_\nu\|_{1,\alpha} \|f\|_{p,\alpha}. \quad (4.34)$$

Если

$$\rho(t) := \mathcal{F}^{-1}(\eta(\lambda)), \quad (4.35)$$

то $\rho_\nu(t) = \nu^{2\alpha+2} \rho(\nu t)$ (см. формулу (4.17)), поэтому

$$\|\rho_\nu\|_{1,\alpha} = \int \nu^{2\alpha+2} |\rho(\nu t)| t^{2\alpha+1} dt = \|\rho\|_{1,\alpha}. \quad (4.36)$$

Таким образом, $\|P_\nu(f)\|_{p,\alpha} \leq c_1 \|f\|_{p,\alpha}$, где $c_1 = \|\rho\|_{1,\alpha}$.

3) Возьмем произвольную функцию $\Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, удовлетворяющую неравенству $\|f - \Phi\|_{p,\alpha} \leq 2 E_\nu(f)_{p,\alpha}$. Используя равенство $P_\nu(\Phi) = \Phi$ и свойство 2), получим, что

$$\begin{aligned} \|f - P_\nu(f)\|_{p,\alpha} &= \|f - \Phi + P_\nu(\Phi - f)\|_{p,\alpha} \\ &\leq \|f - \Phi\|_{p,\alpha} + c_1 \|f - \Phi\|_{p,\alpha} \leq 2(1 + c_1) E_\nu(f)_{p,\alpha}, \end{aligned}$$

откуда вытекает неравенство 3), где $c_2 = 2(1 + c_1)$. Предложение доказано.

Напомним, что разность $\Delta_h^m f$, $m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, определяется формулой (см. (1.6))

$$\Delta_h^m f := (I - T^h)^m f.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, и $\nu > 0$. Для любого $h \in (0, \frac{1}{2\nu}]$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \leq c_1 h^{-2m} \|\Delta_h^m f\|_{p,\alpha}, \quad (4.37)$$

а если $f \in W_{p,\alpha}^m$, то также справедливо неравенство

$$\|\Delta_h^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \leq c_2 h^{2m} \|\mathcal{B}^m f\|_{p,\alpha}, \quad (4.38)$$

где $c_1 = c_1(\alpha, m)$ и $c_2 = c_2(\alpha, m)$ – некоторые постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем преобразование Бесселя от функции $\mathcal{B}^m(P_\nu(f))$. Используя свойства преобразования Бесселя (см. (2.12) и (2.19)), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{B}^m(P_\nu(f))) &= (-1)^m \lambda^{2m} \eta\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) \hat{f}(\lambda) \\ &= \frac{(-1)^m \lambda^{2m} \eta(\lambda/\nu)}{(1 - j_\alpha(h\lambda))^m} (1 - j_\alpha(h\lambda))^m \hat{f}(\lambda). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Поскольку функция $\eta(\lambda/\nu)$ может быть отлична от нуля только при $\lambda < 2\nu$, функция $\eta(h\lambda)$ равна 1 при $\lambda < \frac{1}{h}$ и по условию $\frac{1}{h} > 2\nu$, то справедливо равенство

$$\eta\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) = \eta\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) \eta(h\lambda). \quad (4.40)$$

С учетом (4.40) правую часть формулы (4.39) можно переписать в виде

$$h^{-2m} \eta\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) \frac{(-1)^m (h\lambda)^{2m} \eta(h\lambda)}{(1 - j_\alpha(h\lambda))^m} (1 - j_\alpha(h\lambda))^m \hat{f}(\lambda). \quad (4.41)$$

Введем временные обозначения

$$\begin{aligned} \psi(t) &:= \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{(-1)^m \lambda^{2m} \eta(\lambda)}{(1 - j_\alpha(\lambda))^m} \right), \\ \psi_h(t) &:= \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{(-1)^m (h\lambda)^{2m} \eta(h\lambda)}{(1 - j_\alpha(h\lambda))^m} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda^{2m} \eta(\lambda) (1 - j_\alpha(\lambda))^{-m} \in \mathcal{D}_+$, то $\psi(t) \in \mathcal{S}_+$.

Из (2.14) следует, что $\psi_h(t) = h^{-(2\alpha+2)} \psi(t/h)$, откуда вытекает, что

$$\|\psi_h\|_{1,\alpha} = \|\psi\|_{1,\alpha}. \quad (4.42)$$

Применим к равенству (4.41) обратное преобразование Бесселя. С учетом того, что при преобразовании Бесселя произведение функций переходит в свертку, получим

$$\mathcal{B}^m(P_\nu(f)) = h^{-2m} \rho_\nu * \psi_h * \Delta_h^m f, \quad (4.43)$$

где ρ_ν определено в (4.33). Тогда

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \leq h^{-2m} \|\rho_\nu\|_{1,\alpha} \|\psi_h\|_{1,\alpha} \|\Delta_h^m f\|_{p,\alpha}, \quad (4.44)$$

а так как $\|\rho_\nu\|_{1,\alpha} = \|\rho\|_{1,\alpha}$ (см. (4.36)) и $\|\psi_h\|_{1,\alpha} = \|\psi\|_{1,\alpha}$ (см. (4.42)), то

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \leq c_1 h^{-2m} \|\Delta_h^m f\|_{p,\alpha},$$

где $c_1 = \|\rho\|_{1,\alpha} \|\psi\|_{1,\alpha}$, что доказывает неравенство (4.37).

Неравенство (4.38) доказывается аналогичными рассуждениями при использовании соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta_h^m(P_\nu(f))) &= (1 - j_\alpha(h\lambda))^m \eta\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) \hat{f}(\lambda) \\ &= h^{2m} \eta\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) \frac{(1 - j_\alpha(h\lambda))^m \eta(h\lambda)}{(-1)^m (h\lambda)^{2m}} (-1)^m \lambda^{2m} \hat{f}(\lambda). \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\Psi_h(t) := \mathcal{F}\left(\frac{(1 - j_\alpha(h\lambda))^m \eta(h\lambda)}{(-1)^m (h\lambda)^{2m}}\right), \quad \Psi(t) := \mathcal{F}\left(\frac{(1 - j_\alpha(\lambda))^m \eta(\lambda)}{(-1)^m \lambda^{2m}}\right),$$

то $\Delta_h^m(P_\nu(f)) = h^{2m} \rho_\nu * \Psi_h * \mathcal{B}^m f$, откуда вытекает, что

$$\|\Delta_h^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \leq c_2 h^{2m} \|\mathcal{B}^m f\|_{p,\alpha},$$

где $c_2 = \|\rho\|_{1,\alpha} \|\Psi\|_{1,\alpha}$, что доказывает неравенство (4.38). Предложение доказано.

Если $\Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то $P_\nu(\Phi) = \Phi$ и из неравенства (4.37) мы получаем следствие:

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $\Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\nu > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Для любого $h \in (0, \frac{1}{2\nu}]$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}^m(\Phi)\|_{p,\alpha} \leq c h^{-2m} \|\Delta_h^m \Phi\|_{p,\alpha}, \quad (4.45)$$

где $c = c(\alpha, m)$ – некоторая постоянная.

Следующее полезное следствие вытекает из неравенства (4.37) и из определения модуля гладкости.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Для $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\nu > 0$, $m \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \leq c \nu^{2m} \omega_m\left(f, \frac{1}{2\nu}\right)_{p,\alpha}, \quad (4.46)$$

где $c = c(\alpha, m)$ – постоянная.

Неравенство (4.45) является аналогом классического неравенства Никольского–Стечкина (см. [34], [35]). В классической теории приближений неравенство Никольского–Стечкина может быть получено предельным переходом из неравенства Боаса (см. [36] или [37, п. 4.12.18]). Следующие предложение и следствие можно рассматривать как аналоги классического неравенства Боаса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\nu > 0$. Для любых чисел δ и h , удовлетворяющих условию $0 < \delta < h < \frac{1}{2\nu}$, справедливо неравенство

$$\delta^{-2m} \|\Delta_\delta^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \leq c h^{-2m} \|\Delta_h^m f\|_{p,\alpha}, \quad (4.47)$$

где $c = c(\alpha, m)$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем преобразование Бесселя от функции $\Delta_\delta^m(P_\nu(f))$. Используя свойства преобразования Бесселя (см. (2.19)) и равенство (4.40), получим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Delta_\delta^m(P_\nu(f))) &= (1 - j_\alpha(\delta\lambda))^m \eta\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) \hat{f}(\lambda) \\ &= \eta\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) \frac{(1 - j_\alpha(\delta\lambda))^m}{(1 - j_\alpha(h\lambda))^m} \eta(h\lambda) (1 - j_\alpha(h\lambda))^m \hat{f}(\lambda).\end{aligned}\quad (4.48)$$

Пусть

$$\sigma(t) := \frac{1 - j_\alpha(t)}{t^2}.$$

Поскольку функция $1 - j_\alpha(t)$ имеет при $t = 0$ нуль кратности 2, то функция $\sigma(t)$ бесконечно дифференцируема. Кроме того, функция $\sigma(t)$ четная и $\sigma(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Введем временные обозначения

$$\begin{aligned}Q_\theta(\lambda) &:= \theta^{-m} \frac{(1 - j_\alpha(\theta\lambda))^m}{(1 - j_\alpha(\lambda))^m} \eta(\lambda) = \left(\frac{\sigma(\theta\lambda)}{\sigma(\lambda)}\right)^m \eta(\lambda), \\ \zeta_\theta(t) &:= \mathcal{F}^{-1}(Q_\theta(\lambda)), \quad \zeta_{\theta,h}(t) := \mathcal{F}^{-1}(Q_\theta(h\lambda)),\end{aligned}$$

где $\theta \geq 0$, $h > 0$ – произвольные действительные числа. Так как $Q_\theta(\lambda) \in \mathcal{D}_+$, то $\zeta_\theta(t) \in \mathcal{S}_+ \subset L_{1,\alpha}$. Очевидно, что отображение $\theta \mapsto \zeta_\theta(t)$ из $\mathbb{R}$ в $L_{1,\alpha}$ непрерывно.

Из соотношения (2.14) следует, что $\zeta_{\theta,h}(t) = h^{-(2\alpha+2)} \zeta(t/h)$, откуда вытекает, что

$$\|\zeta_{\theta,h}\|_{1,\alpha} = \|\zeta_\theta\|_{1,\alpha}. \quad (4.49)$$

Применим к равенству (4.48) обратное преобразование Бесселя. С учетом того, что при преобразовании Бесселя произведение функций переходит в свертку, получим

$$\Delta_\delta^m(P_\nu(f)) = \theta^{2m} \rho_\nu * \zeta_{\theta,h} * \Delta_h^m f, \quad (4.50)$$

где $\theta = \delta/h$, а функция ρ_ν определена в (4.33). Тогда

$$\|\Delta_\delta^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \leq \theta^{2m} \|\rho_\nu\|_{1,\alpha} \|\zeta_{\theta,h}\|_{1,\alpha} \|\Delta_h^m f\|_{p,\alpha}, \quad (4.51)$$

а так как $\|\rho_\nu\|_{1,\alpha} = \|\rho\|_{1,\alpha}$ (см. (4.36)) и $\|\zeta_{\theta,h}\|_{1,\alpha} = \|\zeta_\theta\|_{1,\alpha}$ (см. (4.49)), то

$$\|\Delta_\delta^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \leq c (\delta/h)^{2m} \|\Delta_h^m f\|_{p,\alpha}, \quad (4.52)$$

где

$$c = \|\rho\|_{1,\alpha} \cdot \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|\zeta_\theta\|_{1,\alpha}.$$

Из (4.52) вытекает неравенство (4.47). Предложение доказано.

Если $\Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то $P_\nu(\Phi) = \Phi$ и из предложения 4.4 мы получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $\Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\nu > 0$. Для любых чисел δ и h , удовлетворяющих условию $0 < \delta < h < \frac{1}{2\nu}$, справедливо неравенство

$$\delta^{-2m} \|\Delta_\delta^m \Phi\|_{p,\alpha} \leq c h^{-2m} \|\Delta_h^m \Phi\|_{p,\alpha}, \quad (4.53)$$

где $c = c(\alpha, m)$ – некоторая постоянная.

ЛЕММА 4.6. Пусть $g \in W_{p,\alpha}^m$, $1 \leq p \leq \infty$, $t > 0$. Справедлива оценка

$$\omega_m(g, t)_{p,\alpha} \leq c t^{2m} \|\mathcal{B}^m g\|_{p,\alpha}, \quad (4.54)$$

где $c = c(\alpha, m)$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in (0, t]$, $\nu = \frac{1}{2t}$. Из равенства $\Delta_h^m g = \Delta_h^m (g - P_\nu(g)) + \Delta_h^m (P_\nu(g))$, используя последовательно предложение 4.2, 3), неравенство (4.38) и теорему 4.1, получим

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^m g\|_{p,\alpha} &\leq 2^m \|g - P_\nu(g)\|_{p,\alpha} + \|\Delta_h^m (P_\nu(g))\|_{p,\alpha} \\ &\leq 2^m c_1 E_\nu(g)_{p,\alpha} + c_2 h^{2m} \|\mathcal{B}^m g\|_{p,\alpha} \\ &\leq 2^m c_1 c_3 \nu^{-2m} \|\mathcal{B}^m g\|_{p,\alpha} + c_2 h^{2m} \|\mathcal{B}^m g\|_{p,\alpha} \leq c t^{2m} \|\mathcal{B}^m g\|_{p,\alpha}, \end{aligned}$$

где $c = 2^{3m} c_1 c_3 + c_2$. Из последнего неравенства вытекает неравенство (4.54). Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, и чисел $m \in \mathbb{N}$, $t > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_m(f, t)_{p,\alpha} \leq c K_m(f, t)_{p,\alpha}, \quad (4.55)$$

где $c = c(\alpha, m)$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in W_{p,\alpha}^m$. Используя свойства модуля гладкости (см. предложение 4.1) и лемму 4.6, получим

$$\begin{aligned} \omega_m(f, t)_{p,\alpha} &\leq \omega_m(f - g, t)_{p,\alpha} + \omega_m(g, t)_{p,\alpha} \\ &\leq 2^m \|f - g\|_{p,\alpha} + c_1 t^{2m} \|\mathcal{B}^m g\|_{p,\alpha} \leq c_2 (\|f - g\|_{p,\alpha} + t^{2m} \|\mathcal{B}^m g\|_{p,\alpha}), \end{aligned}$$

где $c_2 = \max\{2^m, c_1\}$. Взяв нижнюю грань по всем $g \in W_{p,\alpha}^m$, мы получим неравенство (4.55). Предложение доказано.

Теперь мы докажем аналог прямой теоремы Джексона, из которого в качестве следствия получим теорему 1.1.

ТЕОРЕМА 4.2. Для $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ справедливо неравенство

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \leq c \omega_k(f, 1/\nu)_{p,\alpha}, \quad (4.56)$$

где $c = c(k, \alpha)$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \leq \|f - P_{\nu/2}(f)\|_{p,\alpha}, \quad \|\Delta_{1/\nu}^k(f)\|_{p,\alpha} \leq \omega_k\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_{p,\alpha},$$

то для доказательства неравенства (4.56) достаточно доказать неравенство

$$\|f - P_{\nu/2}(f)\|_{p,\alpha} \leq c \|\Delta_{1/\nu}^k(f)\|_{p,\alpha}. \quad (4.57)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f - P_{\nu/2}(f)) &= \left(1 - \eta\left(\frac{2\lambda}{\nu}\right)\right) \hat{f}(\lambda) \\ &= \frac{1 - \eta(2\lambda/\nu)}{(1 - j_\alpha(\lambda/\nu))^k} \left(1 - j_\alpha\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)\right)^k \hat{f}(\lambda). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) := \frac{1 - \eta(2\lambda)}{(1 - j_\alpha(\lambda))^k}. \quad (4.59)$$

Функция $\varphi(\lambda)$ принадлежит классу мультипликаторов на пространстве $\mathcal{S}'_+$ (т. е. $\varphi(\lambda)$ – бесконечно дифференцируемая четная функция, каждая производная которой возрастает при $\lambda \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени λ). Определим семейство операторов σ_ν , $\nu > 0$, на пространстве $\mathcal{S}'_+$ по формуле

$$\sigma_\nu(g) := \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi \left(\frac{\lambda}{\nu} \right) \hat{g}(\lambda) \right), \quad g \in \mathcal{S}'_+. \quad (4.60)$$

Проверим, что оператор σ_ν переводит пространство $L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, в себя и для любой функции $g \in L_{p,\alpha}$ справедливо неравенство

$$\|\sigma_\nu(g)\|_{p,\alpha} \leq c_1 \|g\|_{p,\alpha}, \quad (4.61)$$

где $c_1 = c_1(k, \alpha)$ – постоянная.

Для функции $j_\alpha(x)$ при $x \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула (см., например, [38, гл. 7, п. 7.13.1]):

$$j_\alpha(x) = \frac{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}} x^{-\alpha-1/2} \left(\cos \left(x - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x} \right) \right). \quad (4.62)$$

Из (4.62) вытекает, что

$$j_\alpha(x) = O(x^{-\alpha-1/2}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.63)$$

Из равенства

$$\frac{dj_\alpha}{dx}(x) = \frac{x j_{\alpha+1}(x)}{2\alpha+2} \quad (4.64)$$

и из (4.63) следует также, что для всех производных $j_\alpha^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, справедлива оценка

$$j_\alpha^{(n)}(x) = O(x^{-\alpha-1/2}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.65)$$

При $|s| < 1$ функцию $(1-s)^{-k}$ можно разложить в степенной ряд:

$$(1-s)^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j,$$

где a_j – некоторые коэффициенты. Пусть $Q_N(s) = \sum_{j=0}^N a_j s^j$ – частичная сумма этого ряда. Тогда $(1-s)^{-k} - Q_N(s) = o(s^N)$ при $s \rightarrow 0$. Подставляя $s = j_\alpha(\lambda)$ и используя (4.63), получим

$$(1 - j_\alpha(\lambda))^{-k} - Q_N(j_\alpha(\lambda)) = o(\lambda^{-N(\alpha+1/2)}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.66)$$

Представим функцию $\varphi(\lambda)$ в виде суммы:

$$\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda), \quad (4.67)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_1(\lambda) &= (1 - \eta(2\lambda)) \left((1 - j_\alpha(\lambda))^{-k} - Q_N(j_\alpha(\lambda)) \right), \\ \varphi_2(\lambda) &= (1 - \eta(2\lambda)) Q_N(j_\alpha(\lambda)).\end{aligned}$$

Тогда и оператор σ_ν можно представить в виде суммы операторов:

$$\sigma_\nu(g) = \sigma_\nu^{(1)}(g) + \sigma_\nu^{(2)}(g), \quad (4.68)$$

где

$$\sigma_\nu^{(1)}(g) = \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi_1 \left(\frac{\lambda}{\nu} \right) \hat{g}(\lambda) \right), \quad \sigma_\nu^{(2)}(g) = \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi_2 \left(\frac{\lambda}{\nu} \right) \hat{g}(\lambda) \right).$$

Если взять N достаточно большим (например, $N = \left[\frac{2}{2\alpha+1} \right] + 3$), то из асимптотики (4.66) следует, что $\varphi_1(\lambda) \in L_{1,\alpha}$. Из оценки (4.65) легко также вывести, что и все производные $\varphi_1^{(n)}(\lambda)$ содержатся в классе $L_{1,\alpha}$, а из этого, рассуждая, как в п. 3 доказательства леммы 4.1, получаем, что $\mathcal{F}^{-1}(\varphi_1(\lambda)) \in L_{1,\alpha}$.

Введем временно обозначения

$$G(t) := \mathcal{F}^{-1}(\varphi_1(\lambda)), \quad G_\nu(t) := \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi_1 \left(\frac{\lambda}{\nu} \right) \right), \quad \nu > 0.$$

Оператор $\sigma_\nu^{(1)}$ можно представить в виде свертки:

$$\sigma_\nu^{(1)}(g) = G_\nu * g. \quad (4.69)$$

Поскольку $G_\nu \in L_{1,\alpha}$, то из $g \in L_{p,\alpha}$ следует, что $\sigma_\nu^{(1)}(g) \in L_{p,\alpha}$ и $\|\sigma_\nu^{(1)}(g)\|_{p,\alpha} \leq \|G_\nu\|_{1,\alpha} \|g\|_{p,\alpha}$. А так как $G_\nu(t) = \nu^{2\alpha+2} G(\nu t)$ (см. (2.14)), то $\|G_\nu\|_{1,\alpha} = \|G\|_{1,\alpha}$, поэтому

$$\|\sigma_\nu^{(1)}(g)\|_{p,\alpha} \leq c_2 \|g\|_{p,\alpha}, \quad c_2 = \|G\|_{1,\alpha}. \quad (4.70)$$

Заметим, что для любой функции $g(t) \in L_{p,\alpha}$ и любого $s > 0$ выполнено

$$\mathcal{F}^{-1}(j_\alpha(s\lambda) \hat{g}(\lambda)) = T^s g(t)$$

(см. (2.19)), следовательно,

$$\|\mathcal{F}^{-1}(j_\alpha(s\lambda) \hat{g}(\lambda))\|_{p,\alpha} = \|T^s g\|_{p,\alpha} \leq \|g\|_{p,\alpha}.$$

Функция $\sigma_\nu^{(2)}(g)$ представляет собой линейную комбинацию функций $(T^{1/\nu})^j g$ и $\rho_{\nu/2} * ((T^{1/\nu})^j g)$, $j = 0, 1, \dots, N$, где $\rho_{\nu/2}(t) = \mathcal{F}^{-1}(\eta(2\lambda/\nu))$ (см. (4.33)). Заметим, что

$$\|(T^{1/\nu})^j g\|_{p,\alpha} \leq \|g\|_{p,\alpha}, \quad \|\rho_{\nu/2} * ((T^{1/\nu})^j g)\|_{p,\alpha} \leq \|\rho\|_{1,\alpha} \|g\|_{p,\alpha},$$

где $\rho(t) = \mathcal{F}^{-1}(\eta(\lambda))$, поэтому

$$\|\sigma_\nu^{(2)}(g)\|_{p,\alpha} \leq c_3 \|g\|_{p,\alpha}; \quad (4.71)$$

здесь $c_3 = c_3(k, \alpha)$ – некоторая постоянная.

Из равенства (4.68) и из неравенств (4.70), (4.71) вытекает неравенство (4.61).

Наконец, возьмем в качестве $g(t)$ следующую функцию:

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\left(1 - j_\alpha \left(\frac{\lambda}{\nu} \right) \right)^k \hat{f}(\lambda) \right) = \Delta_{1/\nu}^k f(t).$$

Из (4.58)–(4.61) следует

$$\|f - P_{\nu/2}(f)\|_{p,\alpha} = \|\sigma_\nu(\Delta_{1/\nu}^k f)\|_{p,\alpha} \leq c_1 \|\Delta_{1/\nu}^k f\|_{p,\alpha},$$

что доказывает (4.57) и, тем самым, завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть $f \in W_{p,\alpha}^m$. Взяв в теореме 4.2 вместо k число $k + m$, получим неравенство

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \leq c_1 \omega_{k+m} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_{p,\alpha}, \quad (4.72)$$

где $c_1 = c_1(k, m, \alpha)$. Из свойств модуля гладкости (см. предложение 4.1, свойство б)) следует, что

$$\omega_{k+m} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_{p,\alpha} \leq c_2 \nu^{-2m} \omega_k \left(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{\nu} \right)_{p,\alpha},$$

откуда

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \leq c_3 \nu^{-2m} \omega_k \left(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{\nu} \right)_{p,\alpha},$$

что доказывает теорему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. С учетом обозначения (4.29) нам нужно доказать, что для некоторых постоянных $c_1 = c_1(m, \alpha)$ и $c_2 = c_2(m, \alpha)$ справедливы неравенства

$$c_1 \omega_m(f, t)_{p,\alpha} \leq K_m(f, t)_{p,\alpha} \leq c_2 \omega_m(f, t)_{p,\alpha}. \quad (4.73)$$

Левое неравенство в (4.73) доказано в предложении 4.5.

Если взять $g = P_\nu(f)$, $\nu > 0$, то из определения $K_m(f, t)_{p,\alpha}$ следует, что

$$K_m(f, t)_{p,\alpha} \leq \|f - P_\nu(f)\|_{p,\alpha} + t^{2m} \|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha}. \quad (4.74)$$

По предложению 4.2, 3) справедливо неравенство

$$\|f - P_\nu(f)\|_{p,\alpha} \leq c_3 E_\nu(f)_{p,\alpha}. \quad (4.75)$$

Используя следствие 4.2 и монотонность функции $\omega_m(f, t)_{p,\alpha}$, получим

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \leq c_4 \nu^{2m} \omega_m \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_{p,\alpha}. \quad (4.76)$$

Из неравенств (4.74)–(4.76) и теоремы 4.2 следует, что

$$K_m(f, t)_{p,\alpha} \leq c_5 (1 + (t\nu)^{2m}) \omega_m \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_{p,\alpha}. \quad (4.77)$$

Полагая в (4.77) $\nu = 1/t$, получим

$$K_m(f, t)_{p,\alpha} \leq 2c_5 \omega_m(f, t)_{p,\alpha},$$

что доказывает правое неравенство в (4.73). Теорема доказана.

В качестве следствия теоремы 1.2 получим еще одно важное свойство модуля гладкости $\omega_m(f, t)_{p, \alpha}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Существует постоянная $c = c(\alpha, m)$ такая, что при $f \in L_{p, \alpha}$, $t > 0$, $\delta > 0$ справедливо неравенство*

$$\omega_m(f, \delta t)_{p, \alpha} \leq c \max\{1, \delta^{2m}\} \omega_m(f, t)_{p, \alpha}. \quad (4.78)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения K -функционала легко получить неравенство

$$K_m(f, \delta t)_{p, \alpha} \leq \max\{1, \delta^{2m}\} K_m(f, t)_{p, \alpha},$$

откуда при использовании неравенства (4.73) вытекает (4.78).

§ 5. Пространства Никольского–Бесова и их аппроксимационная характеристика

В этом параграфе рассматриваются пространства типа Никольского–Бесова $H_{p, \alpha}^r$ и $B_{p, q, \alpha}^r$ и дается их описание в терминах наилучших приближений целыми функциями экспоненциального типа, в частности доказываются теоремы 1.4 и 1.5, а также получены различные эквивалентные нормировки этих пространств. Через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначим положительные постоянные (вообще говоря, различные в разных местах), которые могут зависеть от k, m, r, α, p, q , а также от некоторых других несущественных параметров. Как и раньше, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > -1/2$.

Для доказательства обратных теорем теории приближения используются неравенства типа Бернштейна. Кроме неравенства из теоремы 1.3, нам понадобится еще одно неравенство типа Бернштейна.

ЛЕММА 5.1. *При $\Phi(t) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ и $h > 0$ справедливо неравенство*

$$\|\Delta_h^m \Phi\|_{p, \alpha} \leq c(\nu h)^{2m} \|\Phi\|_{p, \alpha}, \quad (5.1)$$

где $c = c(\alpha, m)$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.4 (при $k = 1$ и $r = 1$) и из неравенства Бернштейна (1.11) следует, что

$$\|\Delta_h \Phi\|_{p, \alpha} \leq c_1 h^2 \|\mathcal{B}\Phi\|_{p, \alpha} \leq c_2 (h\nu)^2 \|\Phi\|_{p, \alpha}, \quad (5.2)$$

где $\Delta_h f = {}^*\Delta_h^1 f = (I - T^h)f$. Из неравенства (5.2) вытекает неравенство (5.1). Лемма доказана.

Пространства $H_{p, \alpha}^r$ и $B_{p, q, \alpha}^r$ определены в § 1. Для краткости пусть $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{p, \alpha}$. Всюду далее $k, m \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$, $2k > r - 2m > 0$, $\nu \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Если $f \in H_{p, \alpha}^r$, то

$$\omega_k(\mathcal{B}^m f, \delta)_{p, \alpha} \leq h_{p, \alpha}^r(f) \delta^{r-2m}$$

и из теоремы 1.1 следует, что

$$E_\nu(f)_{p, \alpha} \leq c_1 \frac{\omega_k(\mathcal{B}^m f, 1/\nu)_{p, \alpha}}{\nu^{2m}} \leq c_1 \frac{h_{p, \alpha}^r(f)}{\nu^r}.$$

Для доказательства обратного неравенства используется обычная методика, восходящая к С.Н. Бернштейну (см. [14]). Пусть выполняется неравенство (1.16). Выберем последовательность функций $\psi_n \in \mathfrak{M}(2^n, p, \alpha)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, так, чтобы $\|f - \psi_n\| \leq A 2^{-nr}$.

Пусть $\varphi_0 = \psi_0$ и $\varphi_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ при $n \geq 1$. Тогда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n, \quad (5.3)$$

ряд сходится в $L_{p,\alpha}$ и $\varphi_n \in \mathfrak{M}(2^n, p, \alpha)$. Оценим сверху нормы слагаемых в соотношении (5.3):

$$\|\varphi_0\| = \|\psi_0\| \leq \|\psi_0 - f\| + \|f\| \leq \|f\| + A, \quad (5.4)$$

$$\|\varphi_n\| \leq \|f - \psi_n\| + \|f - \psi_{n-1}\| \leq A(2^{-nr} + 2^{-(n-1)r}) = A(1 + 2^r)2^{-nr}. \quad (5.5)$$

Объединяя неравенства (5.4) и (5.5), можно написать, что

$$\|\varphi_n\| \leq c_3 2^{-nr}(\|f\| + A), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.6)$$

Пусть l — одно из чисел $1, 2, \dots, m$. Из неравенства Бернштейна (1.11) получаем, что

$$\|\mathcal{B}^l \varphi_n\| \leq c_4 (2^n)^{2l} \|\varphi_n\|. \quad (5.7)$$

Из неравенств (5.6), (5.7) и того, что $r - 2l > 0$, следует, что в $L_{p,\alpha}$ сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}^l \varphi_n$, а так как оператор $\mathcal{B}$ непрерывен в $\mathcal{S}'_+$, то в пространстве $\mathcal{S}'_+$ справедливо равенство

$$\mathcal{B}^l f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}^l \varphi_n,$$

следовательно, $\mathcal{B}^l f \in L_{p,\alpha}$. В частности, функция $g = \mathcal{B}^m f$ принадлежит пространству $L_{p,\alpha}$.

Пусть $\Phi_n := \mathcal{B}^m \varphi_n$; тогда

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n, \quad \Phi_n \in \mathfrak{M}(2^n, p, \alpha), \quad \|\Phi_n\| \leq c_5 2^{-n(r-2m)}(\|f\| + A). \quad (5.8)$$

Возьмем произвольное число $h > 0$. Из непрерывности в $L_{p,\alpha}$ разностного оператора Δ_h^m следует, что, в пространстве $L_{p,\alpha}$, выполнено равенство

$$\Delta_h^m g = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_h^m \Phi_n.$$

Подберем целое неотрицательное число N такое, что

$$2^{-N} \leq h < 2^{-(N-1)} \quad (5.9)$$

(если $h \geq 1$, то в (5.9) оставляем только левое неравенство). Тогда

$$\Delta_h^m g = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_h^m \Phi_n + \sum_{n=N}^{\infty} \Delta_h^m \Phi_n \quad (5.10)$$

(при $N = 0$ в (5.10) остается только вторая сумма). Оценим слагаемые в (5.10). При $n \leq N - 1$, используя неравенства (5.2), (5.8) и (5.9), получим

$$\|\Delta_h^m \Phi_n\| \leq (2^n h)^{2m} \|\Phi_n\| \leq c_6 (\|f\| + A) 2^{n(2m+2k-r)} 2^{-2(N-1)k}.$$

Тогда, снова используя (5.9), имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_h^m \Phi_n \right\| &\leq \frac{c_6 (\|f\| + A)}{2^{2k(N-1)}} \sum_{n=0}^{N-1} 2^{(2m+2k-r)n} \\ &= \frac{c_6 (\|f\| + A)}{2^{2k(N-1)}} \frac{2^{(2m+2k-1)N} - 1}{2^{2m+2k-1} - 1} \leq c_7 (\|f\| + A) h^{r-2m}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

При $n \geq N$ воспользуемся очевидным неравенством $\|\Delta_h^k \Phi_n\| \leq 2^k \|\Phi_n\|$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \Delta_h^m \Phi_n \right\| &\leq 2^k c_5 (\|f\| + A) \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-(r-2m)n} \\ &= 2^k c_5 (\|f\| + A) 2^{-N(r-2m)} (1 - 2^{2m-r})^{-1} \leq c_8 (\|f\| + A) h^{r-2m}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Из (5.11) и (5.12) следует, что $\|\Delta_h^m g\| \leq c_9 h^{r-2m} (\|f\| + A)$, откуда получаем

$$\begin{aligned} \omega_k(g, \delta)_{p,\alpha} &\leq c_9 (\|f\| + A) \delta^{r-2m}, \quad \delta > 0, \\ h_{p,\alpha}^r(f) &\leq c_9 (\|f\| + A). \end{aligned}$$

В результате получаем, что $f \in H_{p,\alpha}^r$ и выполняется неравенство (1.17). Теорема доказана.

Пусть

$$\tilde{h}_{p,\alpha}^r(f) := \sup_{\nu \geq 1} \nu^r E_\nu(f)_{p,\alpha}.$$

Из теоремы 1.4 следует, что пространство $H_{p,\alpha}^r$ состоит из тех и только тех функций $f \in L_{p,\alpha}$, для которых $\tilde{h}_{p,\alpha}^r(f) < \infty$. При этом норма в $H_{p,\alpha}^r$ эквивалентна норме

$$\|f\|_{H_{p,\alpha}^r} := \|f\|_{p,\alpha} + \tilde{h}_{p,\alpha}^r(f).$$

В частности, при различных k и m таких, что $2k > r - 2m > 0$, пространства $H_{p,\alpha}^r$ совпадают и их нормы эквивалентны.

В следующей теореме будут получены различные эквивалентные нормировки пространств $B_{p,q,\alpha}^r$, в частности, из нее будет следовать теорема 1.5. Как и в § 1, пусть $r > 0$ и $a > 1$ – действительные числа, k и m – произвольные неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $2k > r - 2m > 0$. Будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит пространству ${}^j B_{p,q,\alpha}^r$, $j = 1, 2, 3, 4$, если $f \in L_{p,\alpha}$ и конечна полунорма ${}^j b_{p,q,\alpha}^r(f)$, где

$${}^1 b_{p,q,\alpha}^r(f) := b_{p,q,\alpha}^r(f)$$

(полунорма $b_{p,q,\alpha}^r(f)$ определена в § 1);

$${}^2 b_{p,q,\alpha}^r(f) := \begin{cases} \int_0^a \frac{(\omega_k(\mathcal{B}^m f, \delta)_{p,\alpha})^q}{\delta^{(r-2m)q}} \frac{d\delta}{\delta} & \text{при } q < \infty, \\ \sup_{0 < \delta \leq a} \delta^{-(r-2m)} \omega_k(\mathcal{B}^m f, \delta)_{p,\alpha} & \text{при } q = \infty; \end{cases}$$

$${}^3 b_{p,q,\alpha}^r(f) := \tilde{b}_{p,q,\alpha}^r(f)$$

(полуорма $\tilde{b}_{p,q,\alpha}^r(f)$ определена в § 1);

$${}^4b_{p,q,\alpha}^r(f) := \begin{cases} \inf \left(\sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq} \|Q_{a^j}\|_{p,\alpha}^q \right)^{1/q} & \text{при } q < \infty, \\ \inf \left(\sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|Q_{a^j}\|_{p,\alpha} \right) & \text{при } q = \infty; \end{cases}$$

нижняя грань берется по всем представлениям f в виде сходящегося в $L_{p,\alpha}$ ряда:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_{a^j}(t), \quad Q_{a^j}(t) \in \mathfrak{M}(a^j, p, \alpha).$$

Пространства ${}^jB_{p,q,\alpha}^r$ являются банаховыми относительно норм

$$\|f\|_{{}^jB_{p,q,\alpha}^r} := \|f\|_{p,\alpha} + {}^j b_{p,q,\alpha}^r(f). \quad (5.13)$$

ТЕОРЕМА 5.1. *Пространства ${}^jB_{p,q,\alpha}^r$, $j = 1, 2, 3, 4$, совпадают, и их нормы (5.13) эквивалентны (т. е. банаховы пространства ${}^jB_{p,q,\alpha}^r$ эквивалентны).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости будем использовать обозначения ${}^jB := {}^jB_{p,q,\alpha}^r$. Выражение $V_1 \hookrightarrow V_2$ будет обозначать, что банахово пространство V_1 вложено в банахово пространство V_2 . Доказательство теоремы сводится к доказательству цепочки вложений

$${}^1B \hookrightarrow {}^2B \hookrightarrow {}^3B \hookrightarrow {}^4B \hookrightarrow {}^1B.$$

Вложение ${}^1B \hookrightarrow {}^2B$ очевидно. Используя теорему 1.1 и неравенства Бернштейна (5.1) и (1.11), доказательства остальных вложений можно провести так же, как доказательства аналогичных вложений в [14] (см. [14, п. 5.6]).

В частности, из эквивалентности банаховых пространств ${}^1B_{p,q,\alpha}^r$ и ${}^3B_{p,q,\alpha}^r$ следует теорема 1.5.

Список литературы

1. P. L. Butzer, H. Behrens, *Semi-groups of operators and approximation*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.
2. А. П. Терехин, “Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение”, *Дифференциальные уравнения и вычислительная математика*, вып. 2, Изд-во Саратовского гос. ун-та, Саратов, 1975, 3–28.
3. С. Г. Крейн, И. З. Песенсон, *Пространства гладких элементов, порожденных представлением группы Ли. Интерполяция и приближения*, Изд-во Воронежского ун-та, Воронеж, 1990.
4. В. М. Тихомиров, “Гармоники и сплайны как оптимальные средства приближения и восстановления”, *УМН*, **50:2** (1995), 125–174; англ. пер.: V. M. Tikhomirov, “Harmonics and splines as optimal tools for approximation and recovery”, *Russian Math. Surveys*, **50:2** (1995), 355–402.
5. Б. М. Левитан, *Теория операторов обобщенного сдвига*, Наука, М., 1973.
6. J. Löfström, J. Peetre, “Approximation theorems connected with generalized translations”, *Math. Ann.*, **181:4** (1969), 255–268.

7. М. К. Потапов, “О применении оператора обобщенного сдвига в теории приближений”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 матем., мех.*, 1998, №3, 38–48; англ. пер.: М. К. Potapov, “On the application of a generalized shift operator in approximation theory”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **53**:3 (1998), 37–47.
8. Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of smoothness*, Springer Ser. Comput. Math., **9**, Springer, New York, 1987.
9. Б. М. Левитан, “Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье”, *УМН*, **6**:2 (1951), 102–143.
10. И. А. Киприянов, *Сингулярные эллиптические краевые задачи*, Наука, М., 1997.
11. K. Trimèche, *Generalized harmonic analysis and wavelet packets*, Gordon and Breach, Amsterdam, 2001.
12. Я. И. Житомирский, “Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя”, *Матем. сб.*, **36**:2 (1955), 299–310.
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1971; англ. пер.: I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series, and products*, Academic Press, San Diego, CA, 2000.
14. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977; англ. пер.: S. M. Nikol’skii, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Grundlehren Math. Wiss., **205**, Springer, New York–Heidelberg, 1975.
15. Р. М. Тригуб, “Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами на торе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:6 (1980), 1378–1409; англ. пер.: R. M. Trigub, “Absolute convergence of Fourier integrals, summability of Fourier series, and polynomial approximation of functions on the torus”, *Math. USSR-Izv.*, **17**:3 (1981), 567–593.
16. С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, “Классы функций, построенных на основе усреднений”, *Сиб. матем. журн.*, **29**:5 (1988), 181–190; англ. пер.: S. M. Nikol’skii, P. I. Lizorkin, “Classes of functions constructed on the basis of averaging”, *Siberian Math. J.*, **29**:5 (1988), 831–840.
17. П. И. Лизоркин, “Классы функций, построенные на основе усреднений по сферам”, *Тр. МИАН*, **192**, 1990, 122–139; англ. пер.: P. I. Lizorkin, “Classes of functions constructed on the basis of averages over spheres”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **192** (1992), 131–149.
18. А. С. Джафаров, “О сферических аналогах классических теорем Дж. Джексона и С. Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **203**:2 (1972), 278–281; англ. пер.: A. S. Dzhaferov, “On spherical analogs of the classical theorems of Jackson and Bernstein”, *Soviet Math. Dokl.*, **13** (1972), 373–377.
19. С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, “Аппроксимация функций на сфере”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:3 (1987), 635–651; англ. пер.: S. M. Nikol’skii, P. I. Lizorkin, “Approximation of functions on the sphere”, *Math. USSR-Izv.*, **30**:3 (1988), 599–614.
20. С. С. Платонов, “Приближения на компактных симметрических пространствах ранга 1”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 113–130; англ. пер.: S. S. Platonov, “Approximations on compact symmetric spaces of rank 1”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 753–769.
21. С. С. Платонов, “Приближение функций в метрике L_2 на некомпактных симметрических пространствах ранга 1”, *Алгебра и анализ*, **11**:1 (1999), 244–270; англ. пер.: S. S. Platonov, “Approximation of functions in the L_2 -metric on noncompact symmetric spaces of rank 1”, *St. Petersburg Math. J.*, **11**:1 (2000), 183–201.
22. Г. А. Калябин, “О модулях гладкости функций, заданных на сфере”, *Докл. АН СССР*, **294**:5 (1987), 1051–1054; англ. пер.: G. A. Kalyabin, “On moduli of smoothness of functions given in the sphere”, *Soviet Math. Dokl.*, **35**:3 (1987), 619–622.

23. Х. П. Рустамов, “О приближении функций на сфере”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:5 (1993), 127–148; англ. пер.: Kh. P. Rustamov, “On approximation of functions on the sphere”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **43**:2 (1994), 311–329.
24. С. С. Платонов, “Аналоги неравенств Бернштейна и Никольского для одного класса целых функций экспоненциального типа”, *Докл. РАН*, **398**:2 (2004), 168–171; англ. пер.: S. S. Platonov, “Analogues of Bernstein and Nikol’skii inequalities for one class of exponential-type entire functions”, *Dokl. Math.*, **70**:2 (2004), 711–713.
25. К. Trimèche, “Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators”, *Math. Rep.*, **4**:1 (1988), 1–282.
26. В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir, Moscow, 1979.
27. P. Civin, “Inequalities for trigonometric integrals”, *Duke Math. J.*, **8**:4 (1941), 656–665.
28. Н. И. Киприянова, “Интерполяционная формула типа формулы П. Сайвина, связанная с обобщенным сдвигом”, *Понtryгинские чтения*, VI, Изд-во Воронежского ун-та, Воронеж, 1994, 42.
29. А. И. Камзолов, “Об интерполяционной формуле Рисса и неравенстве Бернштейна для функций на однородных пространствах”, *Матем. заметки*, **15**:6 (1974), 967–978; англ. пер.: A. I. Kamzolov, “On Riesz’s interpolational formula and Bernshtein’s inequality for functions on homogeneous spaces”, *Math. Notes*, **15**:6 (1974), 576–582.
30. Л. Н. Ляхов, “Пространства B -потенциалов Рисса”, *Докл. РАН*, **334**:3 (1994), 278–280; англ. пер.: L. N. Lyakhov, “Spaces of Riesz B -potentials”, *Dokl. Math.*, **49**:1 (1994), 83–87.
31. И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.
32. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций*, Наука, Физматлит, М., 1970; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Tables of integral transforms*, Vol. II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1954.
33. Yuan Xu, “Weighted approximation of functions on the unit sphere”, *Constr. Approx.*, **21**:1 (2004), 1–28.
34. С. Б. Стечкин, “Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **60**:9 (1948), 1511–1514.
35. С. М. Никольский, “Обобщение одного из неравенств С. Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **60**:9 (1948), 1507–1510.
36. R. P. Boas, “Quelques généralisations d’un théorème de S. Bernstein sur la dérivée d’un polynôme trigonométrique”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **227** (1948), 618–619.
37. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960; англ. пер.: A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, Internat. Ser. Monogr. Pure Appl. Math., **34**, Pergamon, Oxford, 1963.
38. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, Vol. 2, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.

С. С. Платонов (S. S. PLATONOV)
 Петрозаводский государственный университет
 E-mail: platonov@psu.karelia.ru

Поступило в редакцию
 06.12.2005